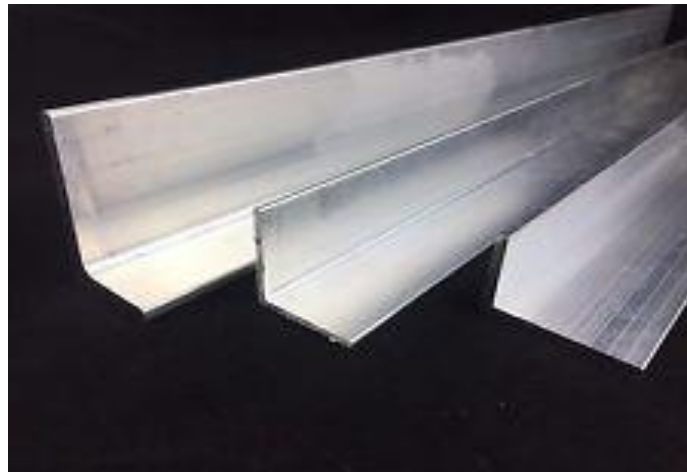


אלגוריתמים להדפסה תלת ממדית – פרוייקט סוף

רקע:

שיטת האלמנטים הסופיים (**FEM- Finite Element Method**), היא שיטה נומרית לקבלת פיתרון מקורב ודיסקרטי למשוואות דיפרנציאליות על תחום עם תנאי שפה, כך שהמערכת שהמתקבלת הינה מוגדרת היטב. לשיטת א"ס שימוש נרחב במתמטיקה ובהנדסה. בעזרתה ניתן לקבל פתרונות לבעיות הנדסיות עבור גאומטריות ותנאי שפה מורכבים. על מנת להפעיל את שיטת א"ס, יש צורך לבצע דיסקרטיזציה של הגאומטריה ל**אלמנטים**. אלמנט מוגדר כפאה (face) קמורה, בעל צורה גאומטרית פשוטה (בדו מימד – לרוב משולש או מרובע, בתלת ממד – לרוב טטרהדר).

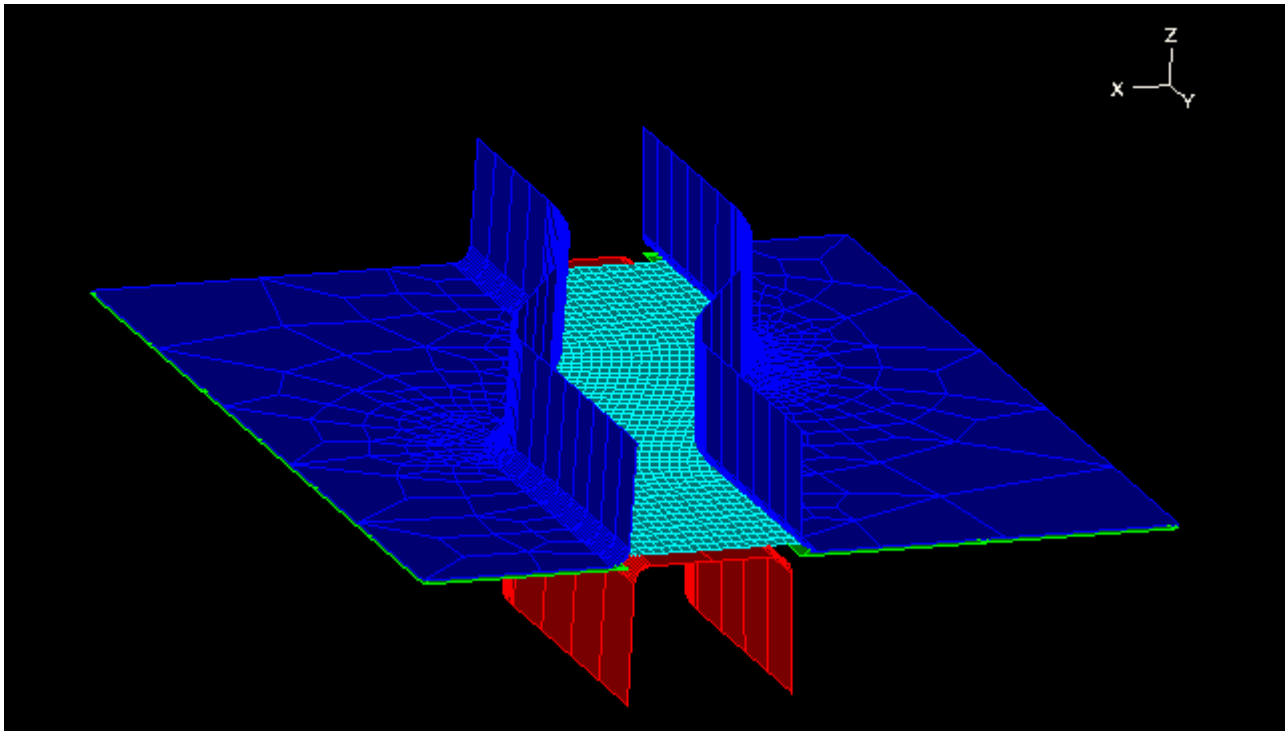
בעבודה זו נתרכז ברישות דו ממדי, שהינו פשוט יותר, אך לא פחות רלוונטי ביישומיו, מרישות תלת ממדי. בפרט, בעולם התכן המכאני, נפוץ העובי של פריט קטן בסדר גודל ממידות האורך והרחוב שלו (ראה איור). לרוב, אנליזת א"ס מבוצעת על מנת לחשב מאמצים/תזוזות שמתקבלות עקב הפעלת עומסים.



איור 1: זוויתנים משוחלים (extrusions)

במקרים כאלה, ניתן להתעלם ממימד העובי ולרשת את המשטח המרכזי (**midsurface**) באמצעות אלמנטים דו ממדיים.

ישנם שני סוגים של אלמנטים נפוצים ברישות דו ממדי: רישות משולש ורישות מרובע.



איור 2: דוגמא לרישיות מרובע (QUAD) זו ממדי של חלק עשוי מפח מכופף (sheet metal)

מתמטית, רישיות מרובע עדיף על רישיות משולש, עקב היכולת שלו לתפוס באופן מדויק שינויי גרדיאנט לינאריים בערכי שדה המאמצים/תזוזות. אלמנט משולש, לעומת זאת, מסוגל מתמטית לתאר ערך קבוע של מאמץ/תזוזה בכל שטחו. לכן, ניתן לרשת משטח בפחות אלמנטים מרובעים על מנת להשיג אותה רמת דיוק אנליטית שתתקבל עבור רישיות משולש צופף יותר.

בנוסף, במקרים רבים, בהנדסה מכאנית, שדות התזוזות והמאמצים רחוק מנקודות הפעלת הכוח, הם לינאריים (כתוצאה מכפיפה של הפריט, לפי תורת הכפיפה של אוילר-ברנולי).

מטרת הפרוייקט:

מטרת הפרוייקט היא לממש אלגוריתם לרישיות Quad ממאמר עדכני ולחקור את הביצועים שלו, יחסית לפתרונות מסחריים וקוד פתוח.

אלגוריתם הרישיות הוא עפ"י המאמר:

[Jinwoo Choi and Yohngjo Kim , Development of a New Algorithm for Automatic Generation of a Quadrilateral Mesh, International Journal of CAD/CAM Vol. 10, No. 2, pp. 00~00 \(2011\).](#)

תיאור השיטה המוצעת במאמר:

קריטריון קבלה של רישיות QUAD:

רישיות מספק במידה שכל הזוויות הפנימיות של האלמנטים מקיימות:

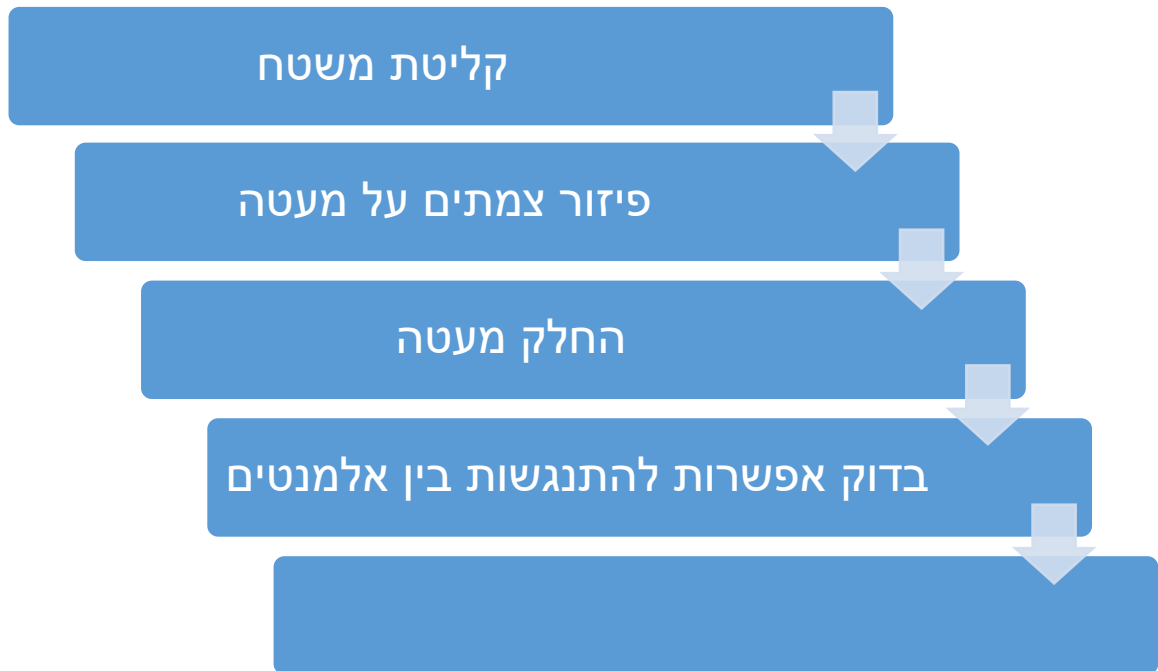
$$45^\circ \leq \theta_{internal} \leq 135^\circ \quad (1)$$

רישיות יקרא סביר במידה וכל הזוויות הפנימיות של האלמנטים מקיימות:

$$35^\circ \leq \theta_{internal} \leq 150^\circ$$

(2)

סכימה של האלגוריתם המוצע במאמר:



קליטת קובץ שמתאר את הגאומטריה:

במקור, המטרה הייתה לקבל קובץ **parasolid**. קובץ זה מתאר את הגאומטריה של הגוף התלת ממדי באמצעות פרמטריזציה של המשטח שמהווה את שטח הפנים שלו. מכיוון שפרויקט זה מתעסק ברישום משטח באלמנטים ריבועיים דו ממדיים, הנחת עבודה היא שקובץ ה-**parasolid** מתאר משטח דו מימדי שנמצא מישור **XY**.

המבנה של קבצי **parasolid** מתוחזק ע"י חברת **siemens** ומופץ במסמך **XT reference**. לצערי הגרסה העדכנית ביותר שנמצאה באינטרנט היא מ-2008 (**parasolid 12**), בעוד כיום קיימת גרסה **30**, ושירותי תיב"ם כמו **onShape** מאפשרים לשמור לכל הפחות בגרסת **parasolid 25**.

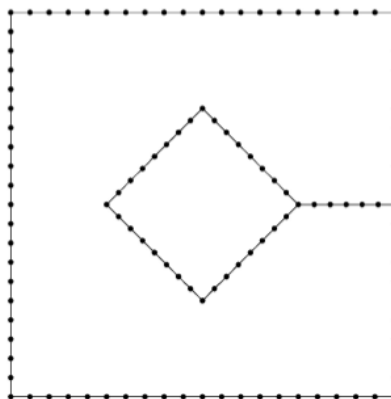
פניות ל-**siemens** דרך הערוצים המקובלים, לצורך קבלת מסמך **reference** עדכני, לא נענו במועד כתיבת מסמך זה. מכיוון שהמטרה העיקרית של פרוייקט זה היא מימוש אלגוריתם לרישום משטחים דו ממדיים, הוחלט לממש מנגנון קלט שיקל קבלת קובץ **Parasolid** בעתיד.

התוכנית מקבלת קובץ שמכיל עקומי **NURBS** (הנחת עבודה: העקומים יוצרים משטח סגור). במידה וקיימים קדחים במשטח, יש לחבר אותם באמצעות קו ישר למשטח (פעולה זו מתבצעת באופן ידני גם במאמר, עפ"י (מאמר של **talbert**) ניתן ומתוכנן להפוך אותה לאוטומטית, כך שהמשטח לא יצטרך להתעסק בכלל עם הגאומטריה).

הגדרת מעטה התחום:

יצירת נקודות **seed** ראשוניות על המעטפת. מתבצע באמצעות תיאור השפה כעקום רציף, כפי שתואר בפסקה הקודמת.

לדוגמא: הגאומטריה הבאה:



תהיה מורכבת מארבעה ישרים על השפה החיצונית:

$[{(-1,-1),(1,-1)},{(1,-1),(1,1)},{(1,1),(-1,1)},{(-1,1),(-1,-1)}]$

וארבעה ישרים על השפה הפנימית:

$[{(0,0.25),(-0.25,0)},{(-0.25,0),(0,0.25)},{(0,0.25),(0.25,0)},{(0.25,0),(-0.25,0)}]$

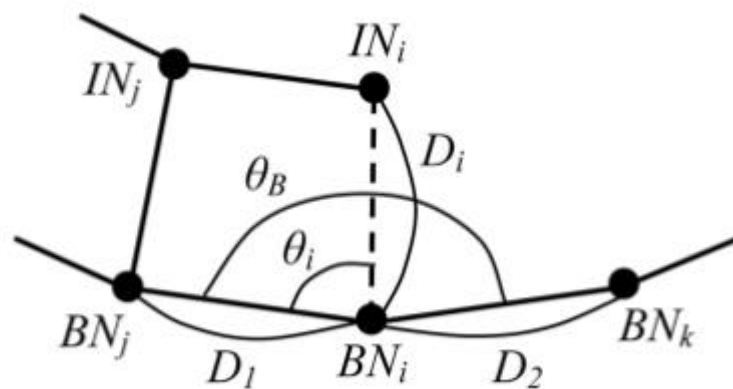
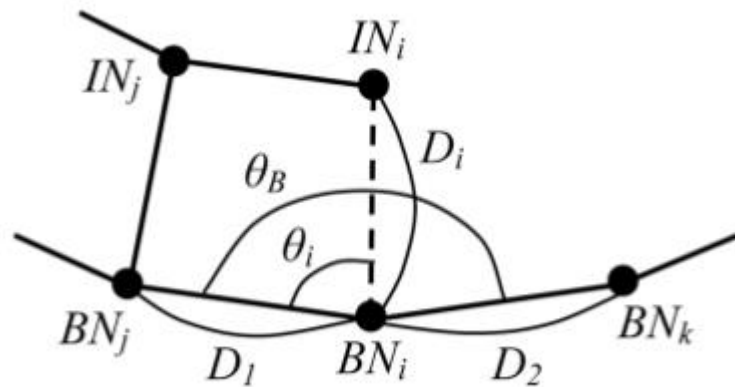
בנוסף, ישנם שני ישרים שמחברים בין שני התחומים:

$[{(0.25,0),(1,0)},{(1,0),(0.25,0)}]$

משטחים מוגדרים כאוסף של עקומי **NURBS**.

הסטת צמתים ליצירת אלמנטים חדשים

הסטת צמתים ליצירת אלמנטים חדשים תתבצע לכיוון שפונה הרחק משפת התחום. כמתואר באיור 3.



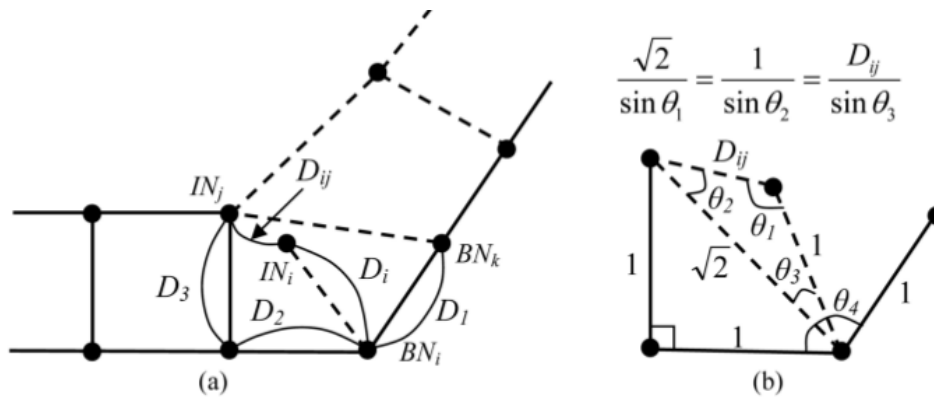
איור 3: הסטת צמתים ליצירת אלמנטים חדשים

כיוון (θ_i) ומרחק (D_i) ההסטה נקבעים ע"י הקשרים הבאים:

$$D_i = (D_1 + D_2)/2 \quad (3)$$

$$\theta_i = \theta_b/2 \quad (4)$$

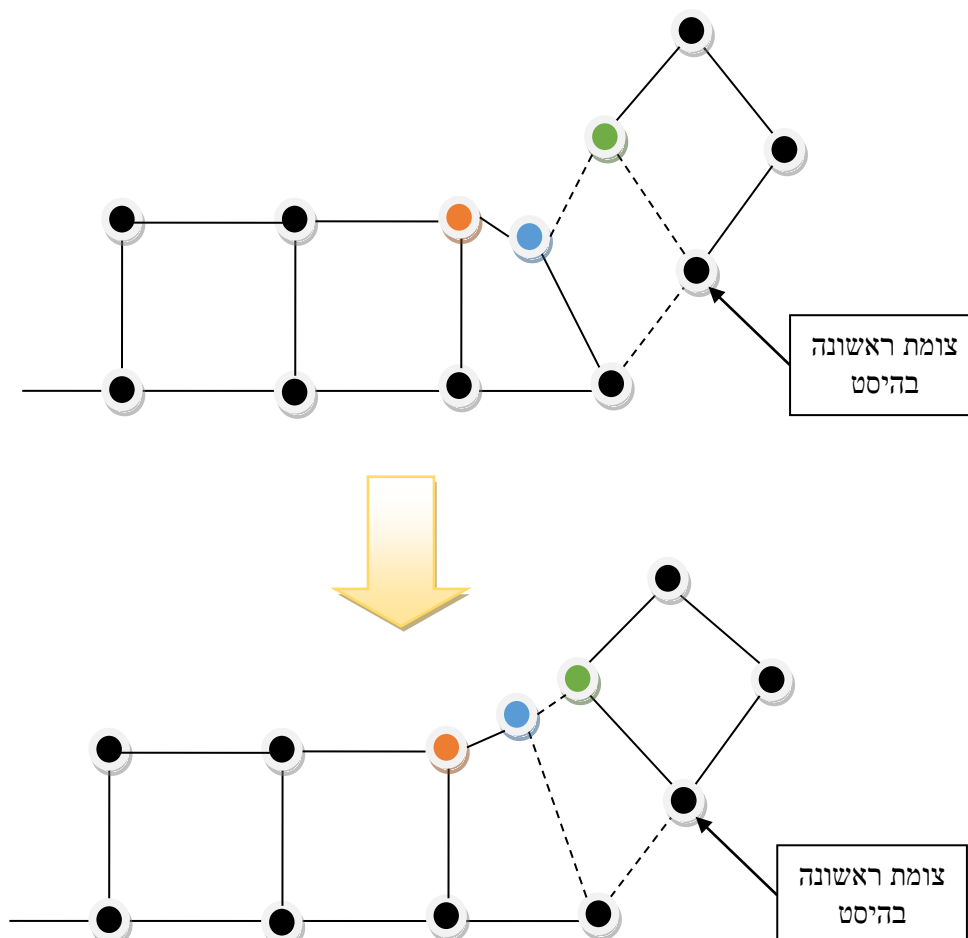
מחיקת צומת שיוצרת אלמנט לא איכותי



איור 4: מחיקת צמתים שיוצרים אלמנטים פגומים

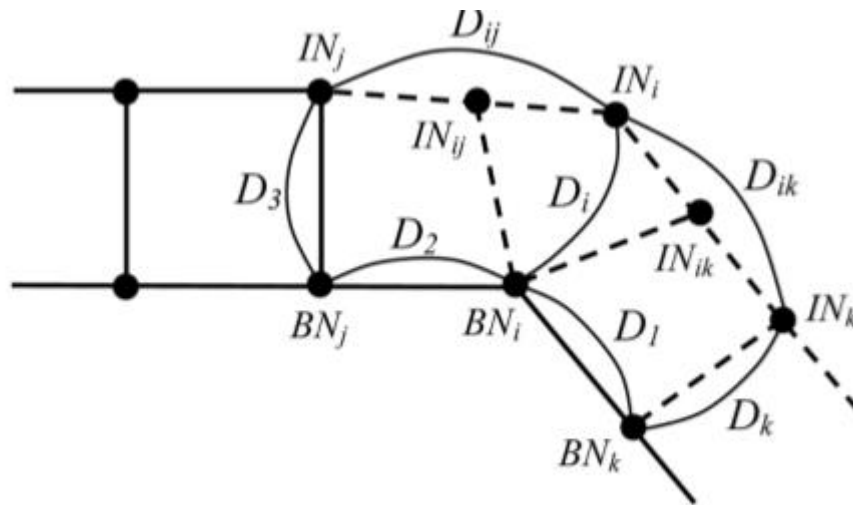
בפרט, משיקולים טריגונומטריים (ראה איור 4), מתקבל שיש למחוק את הצומת אם $D_{ij} < 0.57D_i$, מכיוון שאז תתקבל זווית פנימית גדולה מ- 135° . קיימת חפיפה מסויימת בין מקרה זה ל-**case 1** בהסרת אלמנטים לא איכותיים לאחר רישות והחלקה. במאמר לא נתון היה כיצד להתמודד עם המקרה שבו האלמנט שיש למחוק האחרון לפני סגירת השורה, יש לאחד את שני הצמתים.

הפיתרון שנבחר להתמודדות עם המקרה הנ"ל, הוא העבר הצומת שמוסטת (מסומנת הכחול באיור 5) לנקודת הביניים בין הצומת הקודמת לצומת הראשונה שהוסטה (מסומנות בכתום וירוק, בהתאמה, באיור 5). סה"כ הזוויות הפנימיות שהתקבלו עבור שני האלמנטים שיווצרו עומדים בתנאי האיכות עפ"י ניסיונות ההרצה שבוצעו.



איור 5: טיפול בצומת אחרונה בשורת ההסטה ליצירת אלמנטים איכותיים

הוספת צומת ביניים



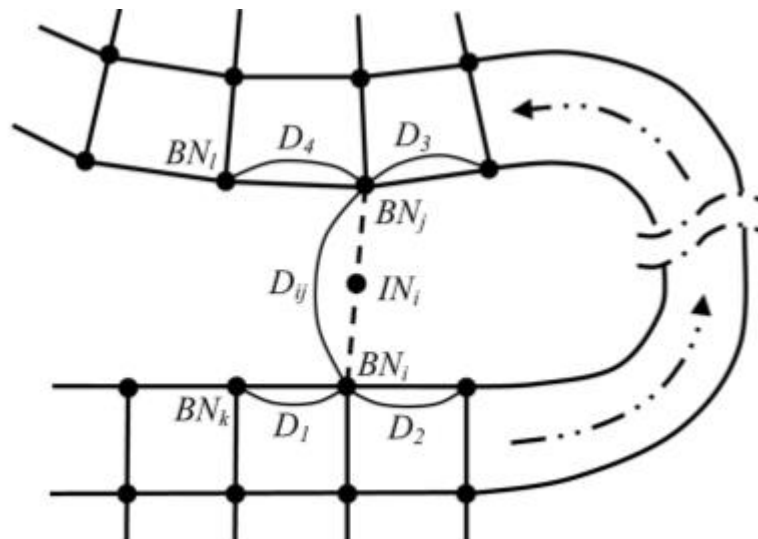
יש להוסיף
צומת ביניים

אם $D_{ij} > 1.453D_i$,
עפ"י הנתון

איור 6: הוספת צומת ביניים - עפ"י המאמר

באיור 6. בהמשך, כאשר בודקים את D_k , נבדוק אם צריך להוסיף צומת ביניים בין IN_i ו- IN_k . אם כן, נוסף את האלמנט $(IN_{ij}, IN_i, IN_{ik}, BN_i)$.

חלוקת השפות למניעת התנגשות בין אלמנטים:



איור 7: חלוקת התחום למניעת התנגשות בין שני אלמנטים

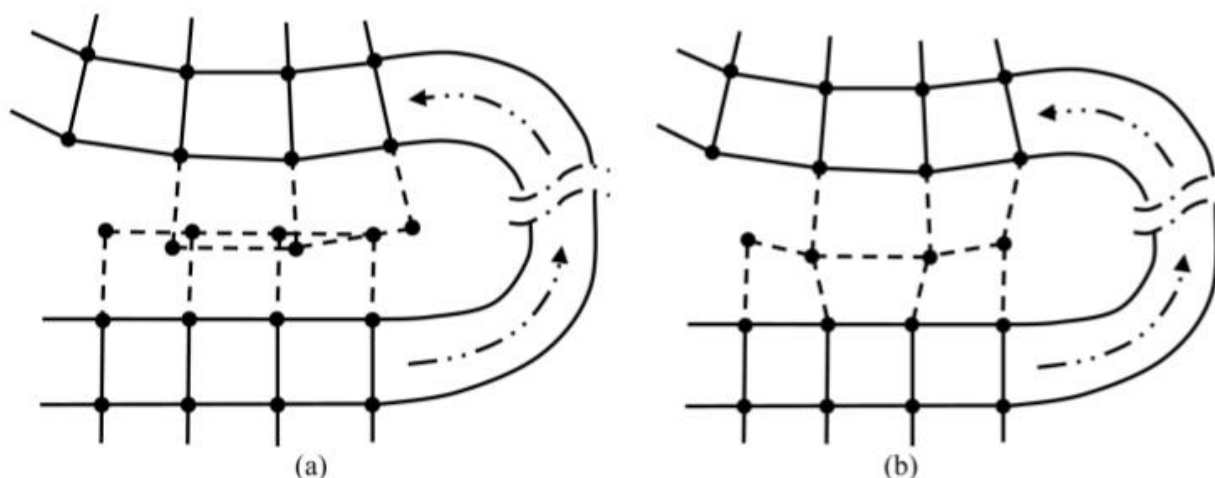
נשים לב שעל מנת שניתן יהיה לרשת עם אלמנטים מרובעים, כל לולאה סגורה צריכה להכיל מספר זוגי של צמתים (להוכיח). לכן, ייתכן שאין צורך להוסיף את הצומת IN_i .

במאמר מצויין שצריך לבצע הפרדה אם יש חשש להתנגשות בין אלמנטים ש"פונים אחד לכיוון השני", אך לא הגדיר את התנאי הזה במפורש!!

כתוצאה מכך, הוגדר שאלמנטים "פונים אחד לכיוון של השני", כאשר הזווית בין הוקטורים הנורמלים שלהם היא $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$

במהלך מימוש האלגוריתם נמצא שלערך α חשיבות קריטית בקבלת רישות איכותי, והוא בייחוד מושפע מגודל האלמנטים האופייני שנבחר. כאשר הגודל האופייני קטן, α צריך להיות קטן יותר, אחרת עלול להיווצר חלוקות רבות של התחום בקצוות וקבלת אלמנטים עדינים מדי. כאשר הגודל האופייני גדול, α צריך להיות גדול יותר, אחרת עלול להיווצר מצב שלא תבוצע חלוקת תחום עבור אלמנטים שהם בסכנת התנגשות, ויווצרו התנגשויות.

שלב החלוקה מתאר את ההבדל העיקרי בין שיטת ה-**looping** לשיטת ה-**paving**. בניגוד לשיטת הריצוף (**paving**), האלגוריתם שמוצע במאמר אינו מרפא אלמנטים שהתנגשו ע"י תפירתם, אלא נמנע מהתנגשויות. האלגוריתם עובר על כל זוג צמתים בתחום, ובודק את המרחק ביניהם (D_{ij}), ראה איור 3. במידה המרחק הנ"ל קטן מהסכום $(D_1 + D_2 + D_3 + D_4)/2$, שהוא בעצם סכום הממוצעים של D_2 -ו- D_1 ושל D_4 -ו- D_3 . דוגמא לאיחוי אלמנטים לאחר התנגשות, בשיטת **paving**, נתונה איור 8.



איור 8: דוגמא לאיחוי אלמנטים בשיטת paving

חלוקת מוגדרת של לאלמנטים עבור מעטפות בעלות שישה צמתים:

On the initial boundary	Triangle	Rectangle	Pentagon	Hexagon
Presence				
Absence				

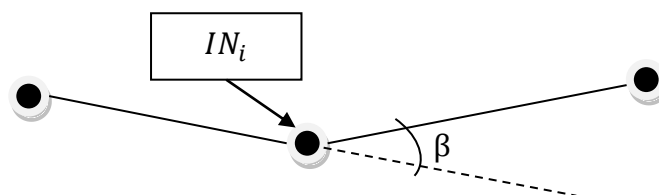
במידה ואין במעטפת אף צומת שהיא על המעטפת ההתחלתית, נחלק את האלמנט שרירותית לשני אלמנטים מרובעים.

במידה וקיימת צומת במעטפת אזי נחלק עפ"י התבניות שנתונה במאמר (**talbert**)

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Six-node loop Configuration				
Concave six-node loops				
Convex six-node loops with NO 180 interior angles				
Convex six-node loops with ONE 180 interior angle				
Convex six-node loops with TWO 180 interior angles				
Convex six-node loops with THREE 180 interior angles				

הפרמטרים שבהם ייעשה שימוש על מנת לבחור את חוצה האלמנטים הוא מספר הצמתים בעלי זווית 180° והמספר המקסימלי של צמתים עוקבות כאלה.

במאמר נתון תצורה אידיאלית של צמתים לתיאור מצב של תחום בעל שישה צמתים. בפועל, התצורות שיתקבלו הן לרוב מקורבות לתצורה האידיאלית, ולכן יש להגדיר משתנה β , כאשר צומת שיוצרת קו ישר מוגדרת ככזו שיוצרת סיבוב של β מעלות או פחות.



החלקה מקומית

לאחר יצירת שורת אלמנטים חדשה, השפה הקדמית החדשה נוטה להיות בעלת מראה מחוספס או "גס" (להראות תמונה), כתוצאה מפעולות כמו מחיקת והוספת צמתים, שתוארו ממקודם. כאשר מבצעים החלקה מקומית, כל צומת מוזז בהתאם לצומת האב שלו, ושכניו בשפה הקדמית, ראה איור 9.

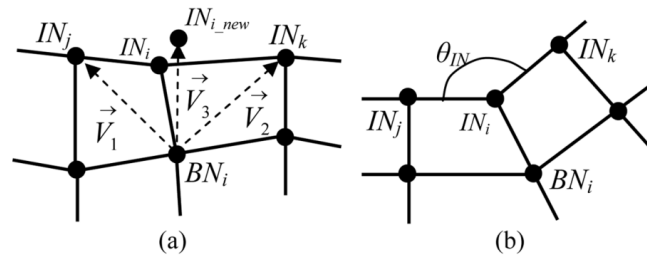


Fig. 8. Smoothing of a new internal boundary (loop), (a) Movement of a node, (b) no movement of a node.

איור 9: ביצוע החלקה מקומית לאחר הסטת השפה הקדמית פנימה

כפי שניתן לראות באיור 9, לאחר ההחלקה, מיקום הצומת המוזז הוא:

$$\vec{V}_3 = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2}$$

במידה והזווית θ_{IN} מקיימת את קריטריון האיכות (1) ($45^\circ \leq \theta_{IN} \leq 135^\circ$), אז לא תבוצע החלקה מקומית עבור אותו צומת, ראה איור 9.

החלקה גלובלית

נעשה באמצעות השיטה הלפלסיאנית. (המאמר לא ציין שיש לבצע כמה מעברים על מנת להגיע להתכנסות!!)

עבור כל צומת שלא על השפה:

$$(X_{node}, Y_{node}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_{Connected}^k, Y_{Connected}^k)$$

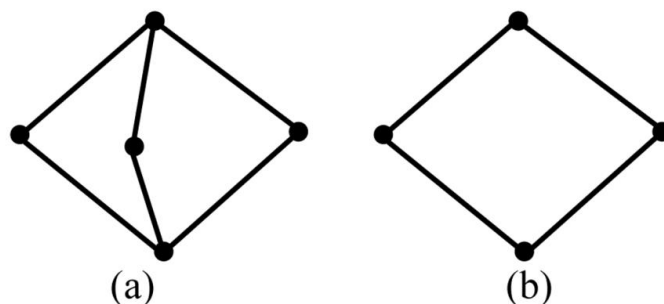
כאשר (X_{node}, Y_{node}) הוא המיקום שיש להזיז אליו את הצומת. N היא כמות הצמתים שמחוברים לצומת (המעלה של הצומת), ו- $(X_{Connected}^k, Y_{Connected}^k)$ היא הקואורדינטה של הצמתים המחוברים.

שיפור אלמנטים באיכות נמוכה

לאחר רישות והחלקה גלובלית, יש לעבור על כל אלמנט ברישות, ואם קיימת בו זווית פנימית גדולה מ- 135° , לבדוק אם ניתן לבצע אחד מארבעת השיפורים הנ"ל:

מקרה 1: שני אלמנטים שחולקים שלושה צמתים

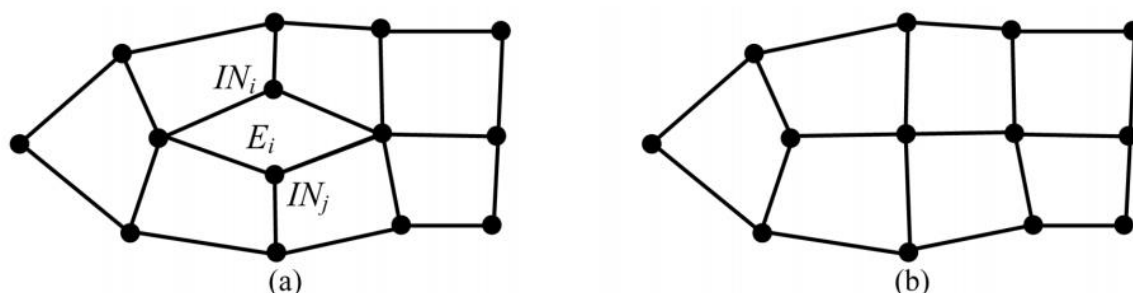
אם שני אלמנטים חולקים שלושה צמתים כפי שנראה באיור 10, בוודאות לאחד מהם זווית גדולה מ- 180° , ולא ניתן לבצע אנליזת FEM. הפיתרון הוא איחד שני האלמנטים.



איור 10: שני אלמנטים שחולקים שלושה צמתים

מקרה 2: אלמנט בעל שני צמתים נגדיות, כאשר כל צומת משותפת לשני אלמנטים.

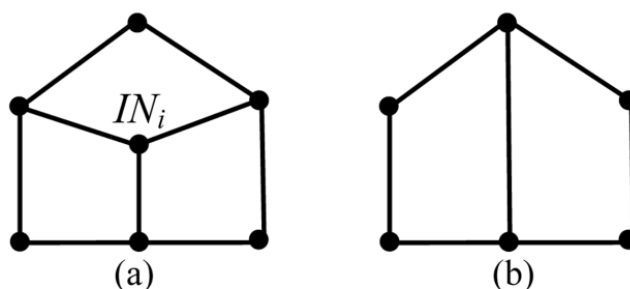
כפי שניתן לראות מאיור 11, לאלמנט E_i בד"כ תהיה זווית פנימית גדולה מ- 135° , בשני הצמתים IN_i ו- IN_j . הפיתרון הוא מחיקת הצומת וריחוד שתי הצמתים.



איור 11: אלמנט בעל שני צמתים נגדיות שמשותפות כל אחת לשני אלמנטים אחרים

מקרה 3: אלמנט בעל זווית גדולה בצומת שמשותפת לשני אלמנטים

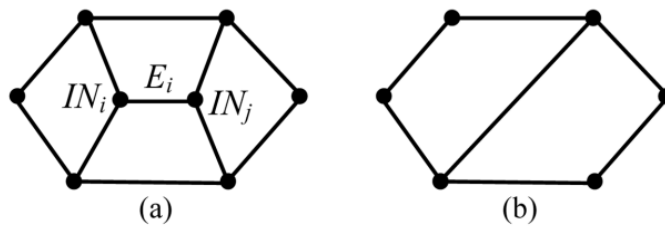
אם לאלמנט יש זווית גדולה מ- 135° בצומת IN_i , שמשותפת לשני אלמנטים נוספים, כפי שנראה באיור 12. הפיתרון הוא מחיקת הצומת, לקבל שפה בעלת שני צמתים, ושימוש בתבניות קבועות לחלוקת תחום בעל שני צמתים.



איור 12: אלמנט בעל זווית גדולה בצומת שמשותפת לשני אלמנטים נוספים

מקרה 4: ארבעה אלמנטים בתחום בעל שני צמתים

אם שני צמתים (IN_i ו- IN_j) של אלמנט E משותפים כל אחד לשני אלמנטים נוספים, אזי יש ארבעה אלמנטים בתחום של שני צמתים בעל שני צמתים. לרוב לצמתים יצרו אלמנט בעל זווית גדולה מ- 135° . הפיתרון הוא מחיקת הצמתים ויצירת תחום בעל שני צמתים. לאחר מכן, יש לחלק את התחום הנ"ל בעזרת בתבניות קבועות לחלוקת תחום בעל שני צמתים.



איור 13: אלמנט בעל שני צמתים צמודים שכל אחד מהם משותף לשני אלמנטים

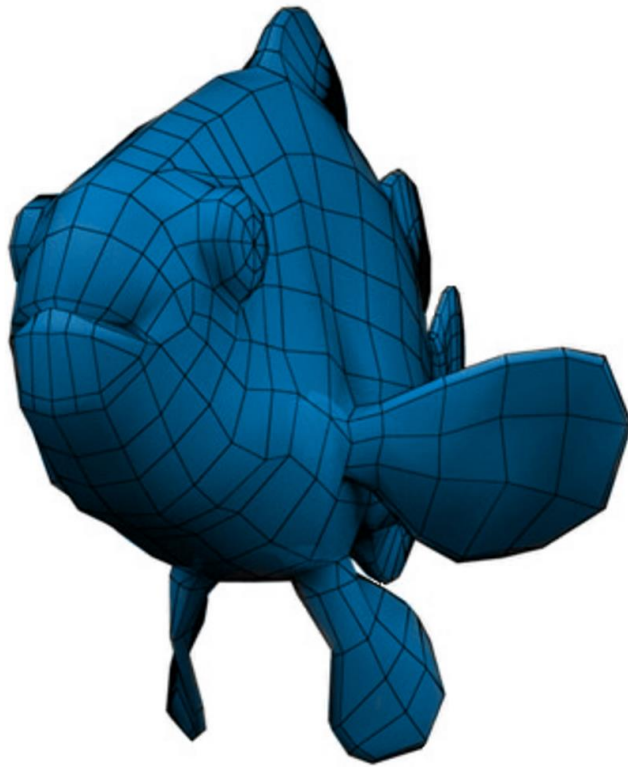
מימוש האלגוריתם:

לצורך מימוש האלגוריתם הוגדר תור Q , שמכיל מעטפות. בכל שלב מוציאים מעטפת מן התור, לצורך עיבוד, ואז מוסיפים מעטפות חדשות לתור.

1. קליטת משטח יחיד (באיזה פורמט? איך מטפלים בקדחים?). וגודל אופייני רצוי עבור אלמנט
2. פיזור צמתים התחלתיים על עקומי **Bezier** שמתארים את מעטפת המשטח. הוסף את הצמתים במעטפת לתור המעטפות.
3. כל עוד תור המעטפות לא ריק:
4. בדוק אם במעטפת הקדמית בתור יש 6 צמתים או פחות. אם כן, השתמש בחלוקה מוגדרת מראש לאלמנטים והסר את המעטפת הקדמית מהתור. חזור משלב 2.
5. השתמש בתנאי (??) על מנת לבדוק אם נדרשת חלוקה של התחום. אם כן, צור צומת אמצעית וחלק את התחום. הוסף את שתי המעטפות החדשות שנוצרו לסוף תור המעטפות, והסר את המעטפת הנוכחית (הקדמית בתור) מהתור. חזור משלב 2.
6. אם לא, הסט את הצמתים במעטפת הקדמית בתור, על מנת ליצור אלמנטים חדשים. השתמש ב(משוואות), לחישוב מיקום הצומת החדשה. הוסף את המעטפת החדשה שנוצרה לתור המעטפות.
7. בצע החלקה מקומית למעטפת החדשה.
8. עבור על כל האלמנטים שלא על הגבול ובצע החלקה גלובלית.
9. עבור על כל האלמנטים ובצע מעבר לתיקון אלמנטים לא איכותיים.
10. בצע החלקה גלובלית שלא על הגבול ובצע החלקה גלובלית.

תוצאות:

האלגוריתם מומש ב-C++, תו שימוש בספריית **surface mesh** של **CGAL** כמבנה נתונים לבניית הרישיות. התוצאה הסופית היא תוכנית שמאפשרת קליטת קובץ **parasolid** שמכיל מידע לגבי משטח, ומרשתת את המשטח.



איור 14: דוגמא לדג שרושת בעזרת *surface mesh* (מתוך האתר של CGAL)

אופטימיזציות אפשריות בקוד:

חישוב אפשרות להתנגשות בין צמתים: עפ"י המאמר של **talbert**.

האלגוריתם נוסה על ארבעת הדגמים הבאים: