Subject:
Date

اعضای گروه و شماره های دانشجویی:

- زهرا کشاورزی ـ ۹۹۳۲۱۵۸
- پردیس فرهمندصابر ـ ۹۹۳۲۱۵۵
- امیرحسین عزتی ـ ۹۹۳۲۱۵۱

توضیحات مربوط به سؤال ۶ :

★ الگوریتم به کار گرفته برای روش توانی ← یافتن مقدار ویژه با بزرگترین مقدار قدرمطلق

ابتدا یک حدس اولیه می زنیم : $x = x_0$ سپس در n گام، $\vec{x}$ و مقدار ویژه را آپدیت می کنیم
اگر λ_{max} ذاتاً مثبت باشد از max و اگر ذاتاً منفی باشد از min استفاده می کنیم:

ذاتاً مثبت: $x = x_0$ حدس اولیه

$$\vec{x} = A*\vec{x}$$
$$e_1 = \max(\vec{x})$$
$$\vec{x} = \vec{x}/e \quad (e\neq 0)$$

تکرار به اندازه‌ی تعداد گام با for

در آخر: $\lambda_{max} = e_1$ مقدار ویژه
$v_1 = \vec{x}/\|\vec{x}\|$ بردار ویژه

ذاتاً منفی: $x = x_0$ حدس اولیه

$$\vec{x} = A*\vec{x}$$
$$e_1 = \min(\vec{x})$$
$$\vec{x} = \vec{x}/e \quad (e\neq 0)$$

تکرار به اندازه‌ی تعداد گام با for

در آخر: $\lambda_{max} = e_1$
$v_1 = \vec{x}/\|\vec{x}\|$

★ الگوریتم به کار گرفته برای روش توانی معکوس ← یافتن مقدار ویژه با کوچکترین مقدار قدرمطلق

از آنجا که طبق قضیه ریاضیاتی، اگر λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A^{-1} است؛ می‌توانیم از روش توانی برای ماتریس A^{-1} استفاده کنیم تا مقدار ویژه با بزرگترین مقدار قدرمطلق برای A^{-1} به دست آید. اگر این مقدار را معکوس کنیم، کوچکترین مقدار ویژه از نظر اندازه برای ماتریس A به دست می‌آید. همچنین طبق یک قضیه داریم که بردارهای ویژه برای ماتریس A و A^{-1} یکسان خواهند بود.
اگر $\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_{max}(A^{-1}) > 0$ ، از max استفاده می کنیم. در غیر اینصورت از min در الگوریتم استفاده می کنیم صفحه بعد

Subject:
Date

$\frac{1}{e}$ ★★ : e نمی‌تواند صفر باشد. زیرا اگر مقدار ویژه صفر باشد یعنی ماتریس تکین بوده پس ماتریس معکوس نداشته.

if $\lambda_{max}(A^{-1})$ or $\lambda_{min}(A) > 0$:

$\vec{x} = \vec{x}_0$ حدس اولیه

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{l} \vec{x} = A^{-1}\vec{x} \\ e = \max(\vec{x}) \\ \vec{x} = \vec{x}/e \quad (e \neq 0) \end{array}}}_{}$$

n گام
با for

if $\lambda_{max}(A^{-1})$ or $\lambda_{min}(A^{-1}) < 0$:

$\vec{x} = \vec{x}_0$ حدس اولیه

$$\boxed{\begin{array}{l} x = A^{-1}\vec{x} \\ e = \min(\vec{x}) \\ \vec{x} = \vec{x}/e \quad (e \neq 0) \end{array}}$$

n گام
با for

درنهایت : $\lambda_{min} = \underbrace{1/e}_{\text{بالای صفحه ★★}} \quad (e \neq 0)$ & $\vec{v}_{min} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

نکات : در کد به جای $(A^{-1} * x)$ از $(A \backslash x)$ استفاده شده زیرا که دقت بیشتری از محاسبه‌ی A^{-1} دارد (البته سریع‌تر هم هست).

با توجه به اینکه در صورت سؤال گفته نشده که مثبت معین است یا منفی معین، هر چهار حالت را با چهار تابع نوشته شده حساب می‌کنیم. سپس بررسی می‌کنیم که باقی مانده (تفاوت مقدار دقیق اصلی و مقدار محاسبه شده) در کدام حالت به صفر نزدیک‌تر است تا مشخص شود که جواب اصلی کدام می‌باشد که منجر به خطای کمتری شده است.

باقی مانده نیز از روش زیر محاسبه شده:

$$\text{residual} = \|A\underbrace{\vec{v}}_{\text{بردار ویژه}} - \underbrace{\lambda}_{\text{مقدار ویژه}}\vec{v}\| \qquad (\text{طبق تعریف چون } A\vec{v} = \lambda\vec{v})$$

هرچه این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد یعنی خطا کمتر بوده (دقت بالاتر است) درحالت ایده‌آل، residual=0. پس در بین مقدارهای ویژه، هر کدام که خطای کمتری داشته باشد، یعنی جواب دقیق‌تر و صحیح‌تری بوده و همان را انتخاب می‌کنیم.

★ درنهایت ماتریس A را به توابع نوشته شده می‌دهیم و مشاهده می‌کنیم که با مقداری که eig(A) نشان می‌دهد کاملاً منطبق هستند.

مقادیر ویژه حاصل
$$\begin{cases} \lambda_{max} = \text{۱۲} \\ \lambda_{min} = \text{۰/۲۵۵۴} \end{cases}$$