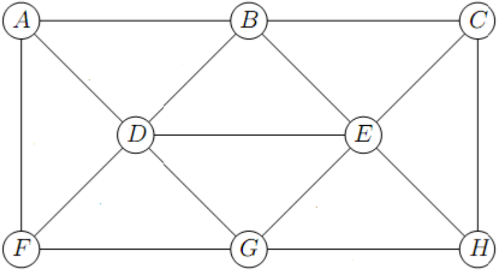
Théorie des graphes

Série 2 (Correction): Problème de plus court chemin

October 20, 2021

Exercice 1.

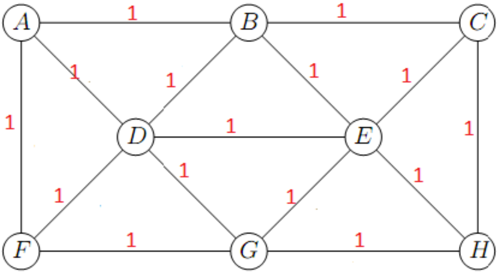
On considère le réseau social décrit ci-dessous:



1. Déterminer le parcours de A vers H composé d'un nombre minimal de liens.
2. Déterminer le parcours de A vers H composé d'un nombre minimal de sommets.

Correction exercice 1.

1. Il s'agit d'un graphe orienté valué dont la valeur de chaque arc est unité.
$\Longrightarrow$ Algorithme de DIJKSTRA pour déterminer le plus court chemin de A à H.



x_j	Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5		Itération 6		Itération 7	
	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,Xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)	d(A,xj)	PCC(A,xj)
B	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	-	-	-	-	-	-	-	-
D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E	∞	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	-	-	-	-	-	-
F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
G	∞	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	-	-	-	-
H	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)	-	-
P		{A}		{A,B}		{A,B,D}		{A,B,D,F}		{A,B,D,F,C}		{A,B,D,F,C,E}		{A,B,D,F,C,E,G}		{A,B,D,F,C,E,G,H}
T		{B,C,D,E,F,G,H}		{C,D,E,F,G,H}		{C,E,F,G,H}		{C,E,G,H}		{E,G,H}		{G,H}		{H}		∅

Le plus court chemin pour aller de *A* vers *H* est composé de 3 arêtes: 4 sommets (pour répondre à la question 2).

Exercice 2.

Une société offshore a besoin d'une voiture pour ses 5 années des activités. Au début de sa première année ($t = 0$), la société achète une voiture neuve et au début de chaque année t, elle a la possibilité soit de la garder durant l'année $[t, t + 1[$ ou de la vendre au prix $v(i)$ où i est l'âge de la voiture au moment de la vente, et acheter une nouvelle au prix $p(t)$. À la fin de sa dernière année des activités, la société revendra sa voiture sans en racheter d'autre. Le coût annuel de maintenance dune voiture dépend de son âge i au début de chaque année t, et il est désigné par $m(i)$. Les valeurs $p(t)$, $v(i)$ et $m(i)$ étant supposées actualisées à la date t, l'objectif est de déterminer une politique qui permet à la société de bénéficier d'une voiture durant les 5 années des activités avec un coût global minimal.

1. Montrer que l'objectif revient à déterminer un plus court chemin entre deux sommets particuliers dans un graphe qu'on précisera.
2. Résoudre ce problème avec les données suivantes.

Age de la voiture (ans) i /Année t	0	1	2	3	4	5
Prix d'achat p(t)	22000	24000	25000	25000	26000	-
Prix de vente : v(i)	-	19000	16000	12000	9000	5000
Coût annuel de maintenance : m(i)	2000	3000	5000	6000	8000	-

Correction exercice 2.

Objectif : Minimiser les charges durant les 5 années d'activités de l'entreprise

Modélisation du problème :

- **Sommets :** les années ($t_0 \to t_5$)
- **Arcs :** les charges : coût de passage d'une année à une autre

Déterminons le coût $\mathcal{C}_{i,j}$ de l'arc (t_i, t_j), $0 \leq t_i, t_j \leq 5$.

$$t_i \xrightarrow{\mathcal{C}_{i,j}} t_j$$

En t_i : achat d'une voiture au prix $p(t_i)$

De t_i à t_j : maintenance de la voiture

$$\sum_{k=0}^{t_j - t_i - 1} m(k)$$

En t_j : vente de la voiture au prix $v(t_j - t_i)$

$$\Longrightarrow \mathcal{C}_{i,j} = p(t_i) + \sum_{k=0}^{t_j - t_i - 1} m(k) - v(t_j - t_i)$$

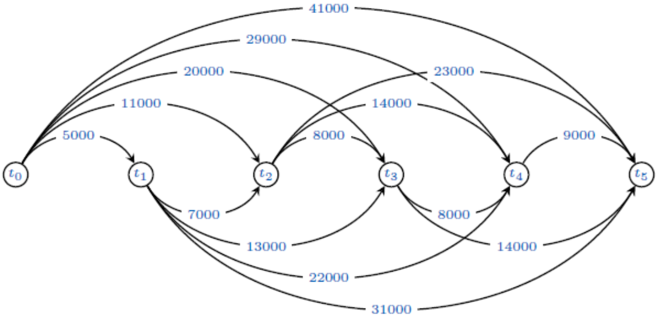
Le problème se ramène à la recherche d'un plus court chemin de $t_0 = 0$ à $t_5 = 5$. Pour ce faire, nous déterminons d'abord les coûts $\mathcal{C}_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 5$.

Les coûts sont donnés ci-dessous :

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_0	–	5000	11000	20000	29000	41000
	t_1	–	7000	13000	22000	31000
		t_2	–	8000	14000	23000
			t_3	–	8000	14000
				t_4	–	9000
					t_5	–

Nous pouvons ainsi donner le graphe décrivant le problème en question.

Représentation graphique du problème:



Nous appliquons l'algorithme de DIJKSTRA sur ce graphe pour déterminer le chemin le plus courts de t_0 à t_5.

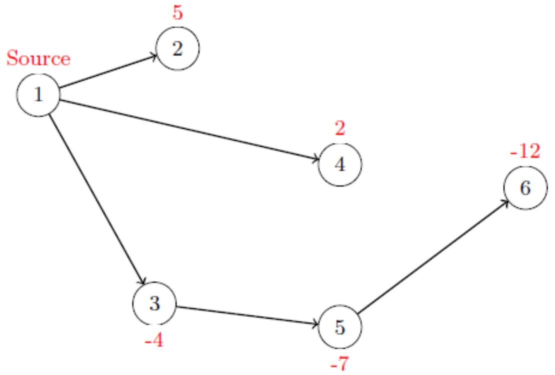
		Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5	
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	-	-	-	-	-	-
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	-	-	-	-
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)	34000	(t_0, t_2, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)	-	-
P		$\{t_0\}$		t_0, t_1		t_0, t_1, t_2		t_0, t_1, t_2, t_3		t_0, t_1, t_2, t_3, t_4		$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$	
T		$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$		t_2, t_3, t_4, t_5		t_3, t_4, t_5		t_4, t_5		t_5		$\emptyset$	

Le plus court chemin de t_0 à t_5 est donné par: t_0, t_1, t_3, t_5. Cela implique que l'entreprise bénéficiera d'une voiture de service pour 5 ans avec un coût global minimal si elle achète 3 voitures en t_0, t_1, et t_3.

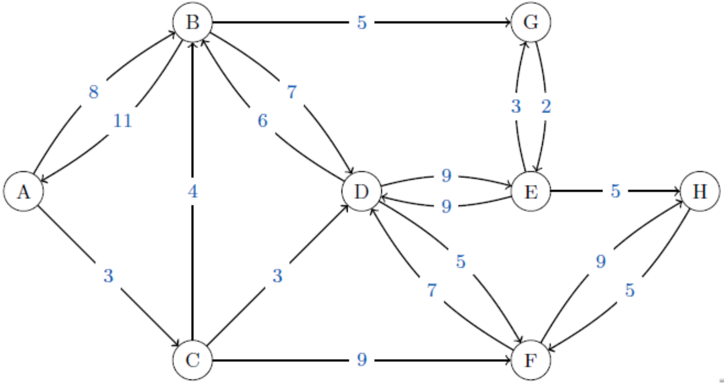
Exercice 3.

Algorithme de FORD-BELLMAN

		$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
j	x_j	$dist^1(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist^2(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist^3(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist^4(x_j)$	$Pcc(x_j)$
1	1	0	$(1,1)$	0	$(1,1)$	0	$(1,1)$	0	$(1,1)$
2	2	5	$(1,2)$	5	$(1,2)$	5	$(1,2)$	5	$(1,2)$
3	3	-4	$(1,3)$	-4	$(1,3)$	-4	$(1,3)$	-4	$(1,3)$
4	4	2	$(1,4)$	2	$(1,4)$	2	$(1,4)$	2	$(1,4)$
5	5	6	$(1,5)$	-7	$(1,3,5)$	-7	$(1,3,5)$	-7	$(1,3,5)$
6	6	∞	$(1,6)$	0	$(1,4,6)$	-12	$(1,3,5,6)$	-12	$(1,3,5,6)$


5
2
Source
1
2
4
-12
6
3
-4
5
-7

Correction exercice 4.



Le problème se ramène ainsi à la détermination d'un plus court chemin de la source *A* vers la destination *H*.

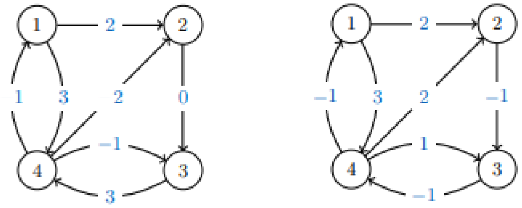
L'algorithme de DIJKSTRA

		Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5		Itération 6		Itération 7	
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pre(x_j)$
2	B	8	(A,B)	7	(A,C,B)	7	(A,C,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	C	3	(A,C)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	D	∞	(A,D)	6	(A,C,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	E	∞	(A,E)	∞	(A,E)	15	(A,C,D,E)	15	(A,C,D,E)	15	(A,C,D,E)	15	(A,C,D,E)	-	-	-	-
6	F	∞	(A,F)	12	(A,C,F)	11	(A,C,D,F)	11	(A,C,D,F)	-	-	-	-	-	-	-	-
7	G	∞	(A,G)	∞	(A,G)	∞	(A,G)	15	(A,B,G)	15	(A,B,G)	-	-	-	-	-	-
8	H	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	20	(A,C,D,F,H)	20	(A,C,D,F,H)	20	(A,C,D,F,H)	-	-
P		{A}		{A,C}		{A,C,D}		{A,C,D,B}		{A,C,D,B,F}		{A,C,D,B,F,G}		{A,C,D,B,F,G,E}		{A,C,D,B,F,G,E,H}	
T		{B,C,D,E,F,G,H}		{B,D,E,F,G,H}		{B,E,F,G,H}		{E,F,G,H}		{E,G,H}		{E,H}		{H}		$\emptyset$	

Le plus court chemin de A à H est: A, C, D, F, H.

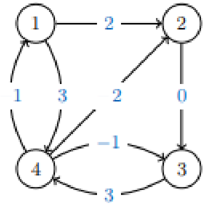
Correction exercice 5.

Appliquer l'algorithme de Floyd sur les deux graphes suivants.



Correction exercice 5.

1)



$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

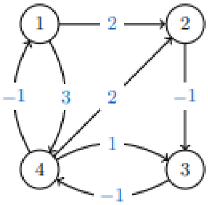
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ \infty & 0 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

2)



$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 5.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \infty & 0 & -1 & -2 \\ \infty & \infty & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il existe un circuit absorbant: $4 - 1 - 2 - 3 - 4$.