

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m³ d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

** *** .. .

Modélisation

Var de décisions

x_1 surface allouée pour la récolte des tomates (Ha)

x_2 surface allouée pour la récolte des piments (Ha)

Fonction-objectif

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 200x_2$$

Contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Résoudre ce problème c'est trouver toutes les couples (x_1, x_2) qui vérifient toutes les contraines et qui maximisent Z

$$\max Z = 100x_1 + 200x_2$$

$$x_1 + x_2 + e_1 = 150$$

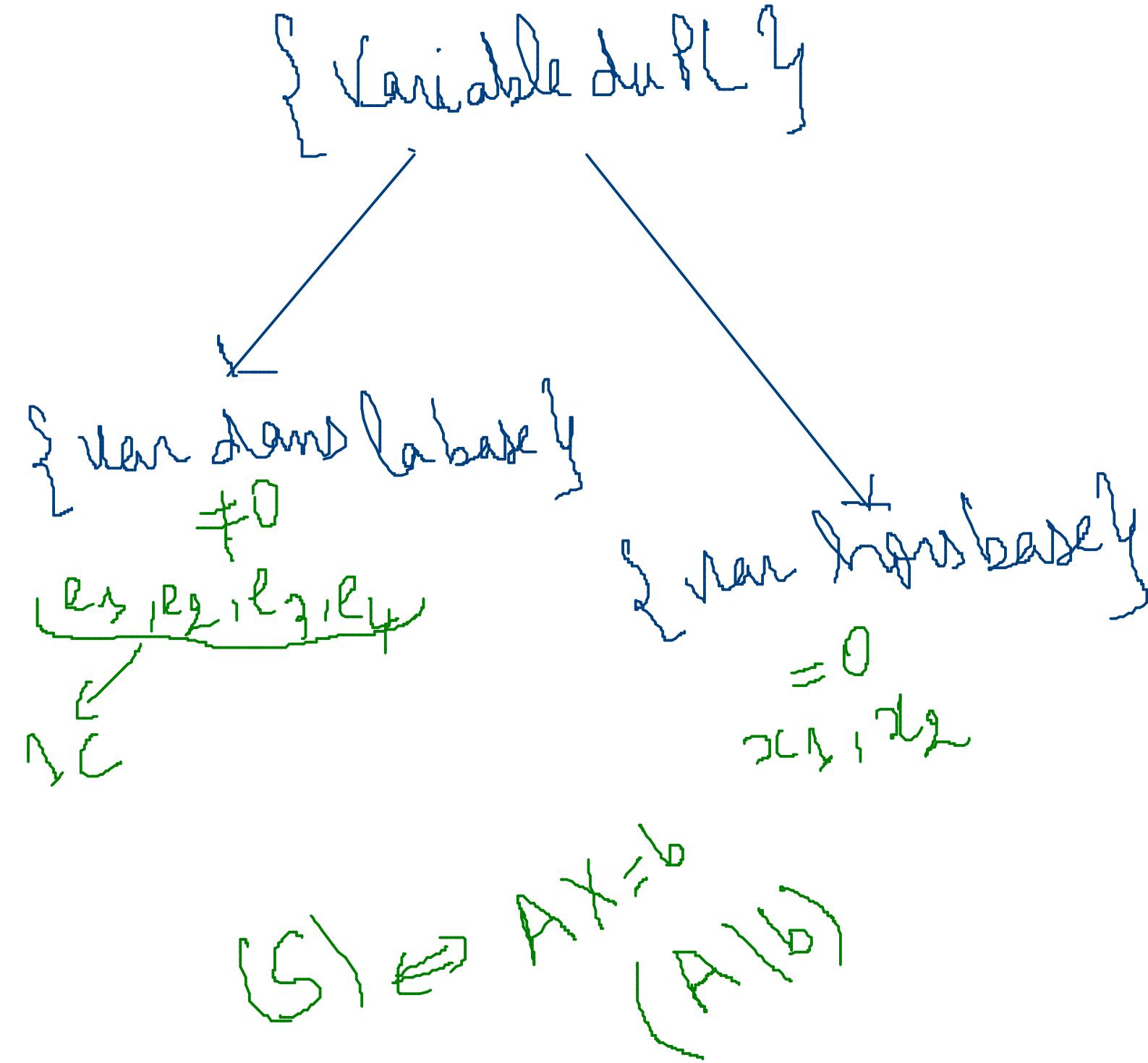
$$x_1 + 4x_2 + e_2 = 480$$

$$4x_1 + 2x_2 + e_3 = 440$$

$$x_1 + e_4 = 50$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$

PL muss die Form
standard



$$\max Z = 100x_1 + 200x_2$$

$$x_1 + x_2 + e_1 = 150$$

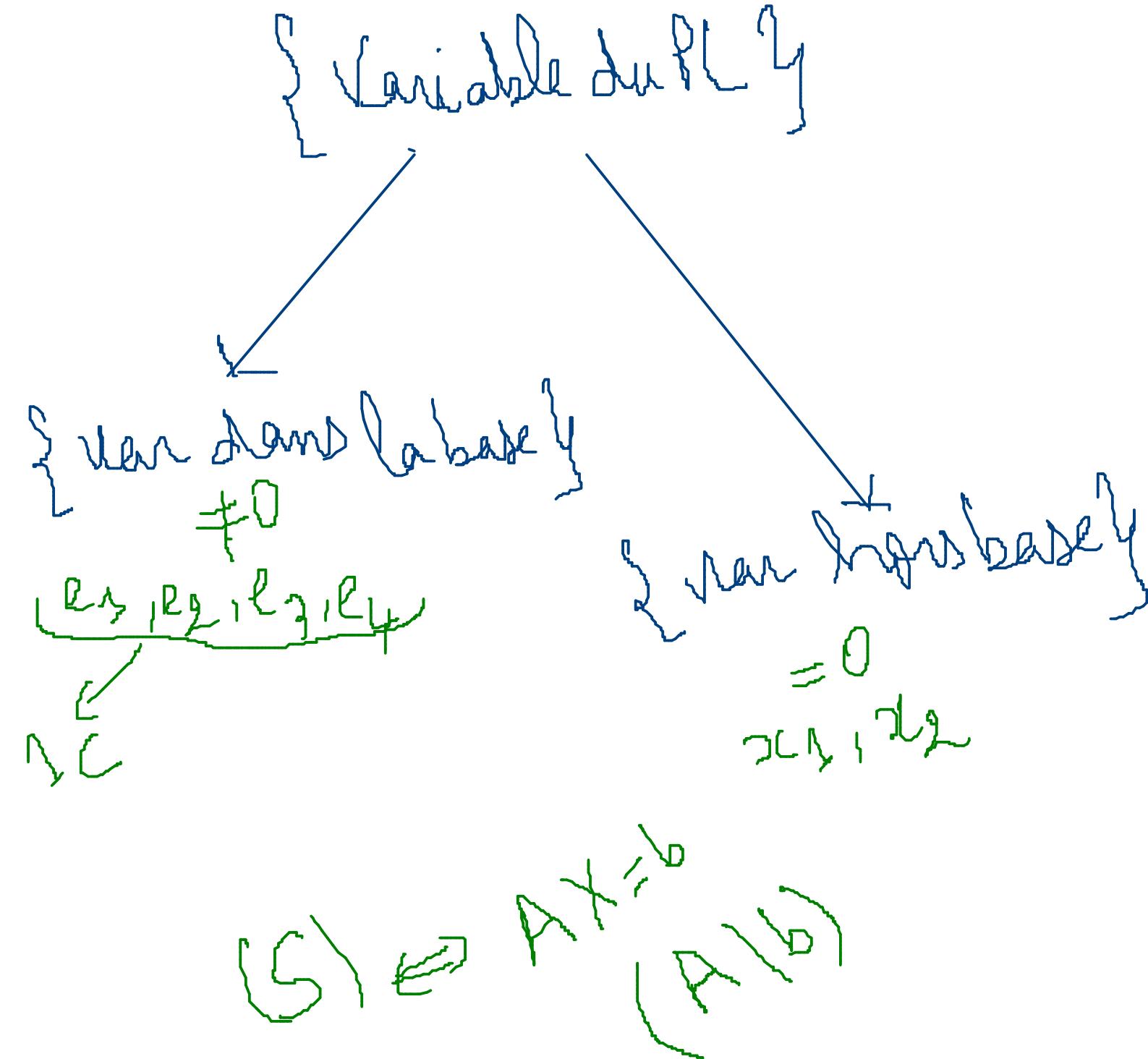
$$x_1 + 4x_2 + e_2 = 480$$

$$4x_1 + 2x_2 + e_3 = 440$$

$$x_1 + e_4 = 50$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$

PL muss die Form
standard



tab2

$(\begin{matrix} 0 \\ 100 \end{matrix})$	Z	50	0	0	-50	0	0	-24000	✓opt
\downarrow	x_1	$3/4$	0	1	$-3/4$	0	0	30	40
\downarrow	x_2	$3/4$	$1/4$	0	$1/4$	0	0	120	480
\downarrow	e_3	$7/2$	0	0	$-3/2$	1	0	200	$400/7$
\downarrow	e_4	1	0	0	0	0	1	90	30

tab2 n'est pas optimal x_1 entrante x_2 sortante

tab3

$(\begin{matrix} 40 \\ 110 \end{matrix})$	Z	0	0	- $200/3$	- $300/3$	0	0	-26000	
\downarrow	x_1	1	0	0	$4/3$	$-3/3$	0	0	40
\downarrow	x_2								110
\downarrow	e_3								60
\downarrow	e_4								50

$Z^* = 16700$ tab3 optimal

$$\begin{aligned}
 L_{x_1} &\leftarrow \frac{4}{3} L_{e_1} \\
 L_z &\leftarrow L_z - 50 L_{x_1} \\
 L_{x_2} &\leftarrow L_{x_2} - \frac{1}{4} L_{x_1} \\
 L_{e_3} &\leftarrow L_{e_3} - \frac{7}{2} L_{x_1} \\
 L_{e_4} &\leftarrow L_{e_4} - L_{x_1}
 \end{aligned}$$

tab3 x_1 x_2 e_1 e_2 e_3 e_4

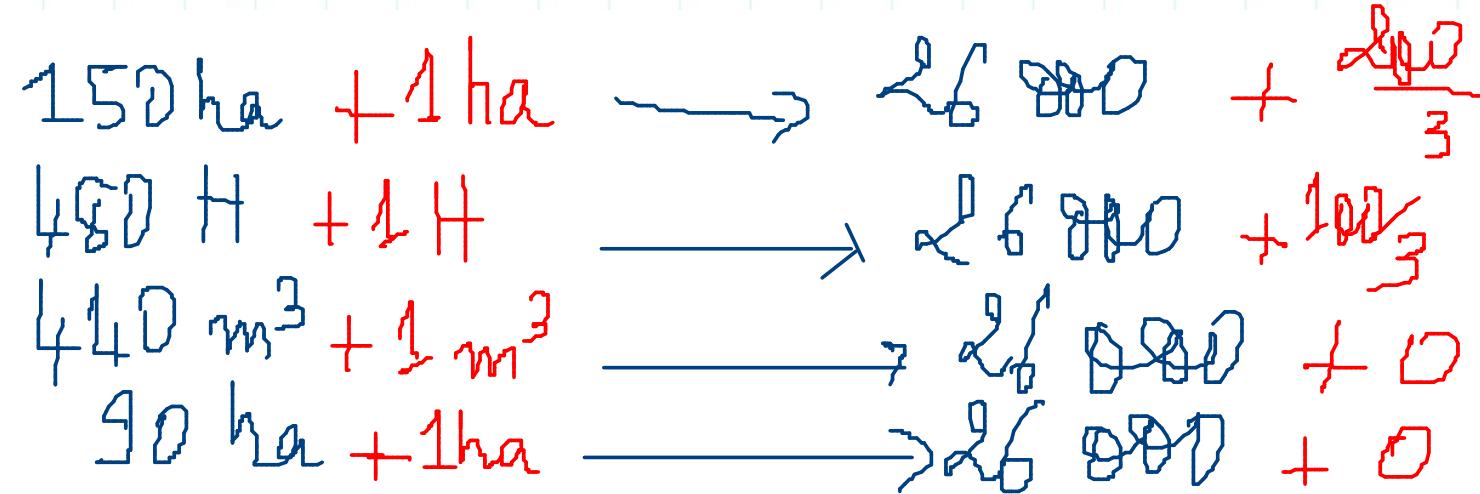
Z	0	0	$-20/3$	$-10/3$	0	0	$-2/300$
x_1	1	0	$4/3$	$-1/3$	0	0	40
x_2							40
e_3							60
e_4							50

$$x^* = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$



$$Z^* = 16000$$

tab3 optimal



Etat des ressources à l'optimalité

Surface (e_1) = 0 } épuisée

main d'œuvre (e_2) = 0 } exécutée

éau (e_3) = 60 } excédent

ant. bétail (e_4) = 50 } limité

coût marginal
valeur marginale

Le coût (valeur) marginal(e) est l'amélioration de la valeur de l'objectif pour chaque augmentation d'une unité du second membre d'une contrainte.

Problème de l'agriculture

(Primal)



Problème de la chêvre

(Dual)

$$\begin{aligned} \text{Min } W = & 150U_1 + 480U_2 + 440U_3 \\ & + 30U_4 \end{aligned}$$

Contraintes

$$x_1 + x_2 \leq 150$$

1 ha $\hookrightarrow U_1$

$$x_1 + 4x_2 \leq 480$$

1 H $\hookrightarrow U_2$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 440$$

1 m³ $\hookrightarrow U_3$

$$x_1 \leq 90$$

1 out $\hookrightarrow U_4$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 + U_2 + 4U_3 + U_4 \geq 150 \\ U_1 + 4U_2 + 2U_3 \geq 480 \\ U_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \end{array} \right.$$

Primal \longleftrightarrow Dual

Max

\leftrightarrow (2Var, 4contrainte) \leftrightarrow (4Var, 4contrainte)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tab3

$x_1 \quad x_2 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$

Z	0	0	-20/3	-100/3	0	0	-2000
x_1	1/3	0	4/3	-1/3	0	0	40
x_2							40
e_3							
e_4							

$$X^* \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$



$$Z^* = 16000 \text{ tab3 optimal}$$

$$U_i \leftrightarrow e_i$$

$$U^* = \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 100/3 \\ 100/3 \\ 100/3 \\ 0 \end{array} \right\}$$

\Downarrow

$$W^* \in Z^* = 16000$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 40 \\ 140 \end{pmatrix} \rightarrow U^* = ?$$

Théorème des écarts complémentaires

$$\left\{ \begin{array}{l} [150 - (U_1 + 2U_2)] U_1 = 0 \\ [480 - (U_1 + 4U_2)] U_2 = 0 \\ [440 - (4U_1 + 2U_2)] U_3 = 0 \Rightarrow U_3 = 0 \\ [40 - 2U_1] U_4 = 0 \Rightarrow U_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [160 - (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)] U_4 = 0 \\ [U_1 - (U_1 + 4U_2 + 2U_3)] U_2 = 0 \\ U_1 + U_2 = 100 \\ U_1 + 4U_2 = 40 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 + U_2 = 100 \quad (1) \\ U_1 + 4U_2 = 40 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 3U_2 = 60 \Rightarrow U_2 = 20$$

$$(1) \ U_1 = 80$$

Problème de l'agriculteur

(Primal)

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 200x_2 + C_3 x_3$$

Contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\text{ha} \leftrightarrow U_1 \\ 1\text{H} \leftrightarrow U_2 \\ 1\text{m}^3 \leftrightarrow U_3 \\ 1\text{out} \leftrightarrow U_4 \end{cases}$$

L'agriculteur prévoit de produire des pommes de terre. Un hectare de pomme de terre demande 3 m^3 d'eau et 2 heures de travail pour un revenu de C_3 dinars.

x_1 surface allouée à la récolte du tomate
 x_2
 x_3

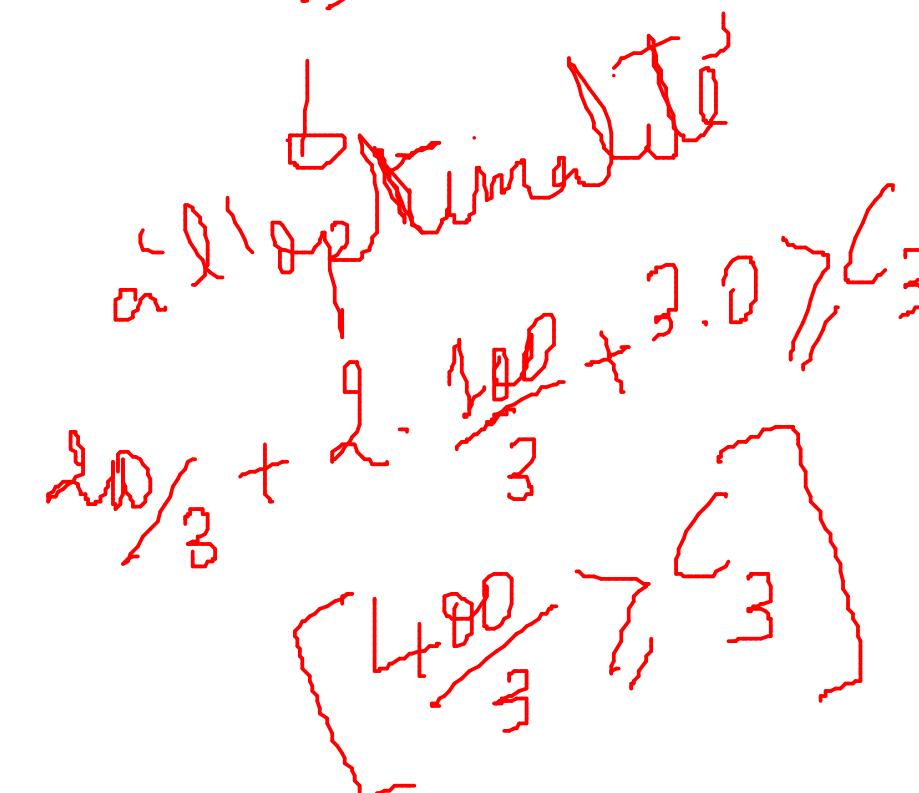
fléchissement
 pomme de terre

Problème de l'acheteur

(dual)

$$\text{Min } W = 150U_1 + 480U_2 + 440U_3 + 90U_4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 + U_2 + 4U_3 + U_4 \geq 100 \\ U_1 + 4U_2 + 2U_3 \geq 200 \\ U_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \\ U_1 + 2U_2 + 3U_3 \geq C_3 \end{array} \right.$$



- La question est pour qu'elle valeur de C_3 , l'agriculteur a-t-il intérêt à introduire cette nouvelle production ?

Pour $C_3 > 49$

	Adib BENNOUR	 
	Ahmed HELIOUI	 
	Aymen BOUTHOUR	 
	Chiheb BENREJEB	 
	Elyes BENKHLIFA	 
	Fajez ABID	 
	Feriel MANKAI	 
	Hamza FOJJA	 
	Hichem BENAMAR	 
	Imen OUNI	 
	Khaled BENHAMOUDA	 
	Mariem ABDELAALI	 
	Marwa MAHDoui	 
	Marwen FRAJ	 
	Marwen Zorai	 
	MohamedAmine BENHMI...	 
	MohamedHamza AJLANI	 
	Nazih JLASSI	 
	Nour BOUMNIJEL	 
	Oussama AMRI	 
	Selima MNAKBI	 

Séance du 9 octobre 2021

Remarque: L'étudiante Marwa MAHDAOUI s'est distingué par sa participation active durant toutes les séances

	Adib BENNOUR		Adib BENNOUR		Feriel MANKAI
	Ahlem Zouaghi		Ahlem Zouaghi		Khaled BENHAMOUDA
	Ahmed HELIOUI		Ahmed HELIOUI		Mariem ABDELAALI
	Azhar BEJAoui		Aymen BOUTHOUR		Marwa MAHDOUI
	Chiheb BENREJEB		Azhar BEJAoui		Marwen FRAJ
	Elyes BENKHLIFA		Chiheb BENREJEB		Marwen Zorai
	Elyes BENKHLIFA		Elyes BENKHLIFA		MohameAmine BACCAR
	Faiez ABID				MohamedAmine BENHMI...
					
	Nazih JLASSI		Oussama AMRI		Syrine BEDOUI
	Selima Mnakbi				

Présence du 23 octobre