esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ☐ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Unité d'enseignement : Recherche Opérationnelle
Modules : Graphes & Applications, Programmation Linéaire et Projet RO complexité
Classe(s) : 4DS, 4ERP-BI, 4INFINI, 4SAE, 4NIDS
Nombre de questions : 43
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 14
Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ■ Internet autorisé : OUI ☐ NON ■
Date : 04/02/2021 Heure : 11h00 Durée : 1h30

Partie I : Graphes & Applications

Question 1 :

Cochez la bonne affirmation.

☐ **A** L'algorithme de Welsh-Powell permet toujours de trouver la solution optimale

☐ **B** L'algorithme de Welsh-Powell permet toujours de trouver une solution différente de la solution optimale

☐ **C** L'algorithme de Welsh-Powell commence toujours par le coloriage du sommet admettant le degré le plus faible

☐ **D** Aucune des réponses citées plus haut

Question 2 :

Parmi les affirmations suivantes, concernant les deux algorithmes : Dijkstra et Ford-Bellman, pour la détermination de plus courts chemins, cochez celle qui est vraie.

☐ **A** L'algorithme de Ford-Bellman est moins complexe et applicable dans le cas d'une pondération négative

☐ **B** L'algorithme de Dijkstra est en général moins complexe mais il n'est pas applicable dans le cas d'une pondération négative

☐ **C** La complexité de l'algorithme de Dijkstra dépend du nombre d'arcs du graphe

☐ **D** L'algorithme de Ford-Bellman permet de déterminer les plus courts chemins seulement dans le cas d'une pondération négative

Question 3 :

Soit G un graphe non orienté composé de n sommets et vérifiant les conditions suivantes :

- G n'admet pas de circuits
- Le degré maximal des sommets de G est $n-1$

Cochez la réponse qui indique le nombre de couleurs nécessaires pour le coloriage de G.

☐ **A** 1

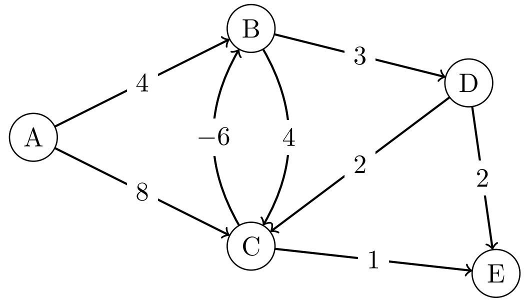
☐ **B** 2

☐ **C** $n-1$

☐ **D** n

Question 4 :

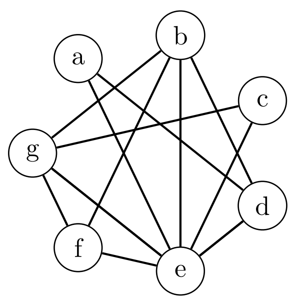
En appliquant l'algorithme de Ford-Bellman sur le graphe G, donné ci-dessous, indiquez laquelle des déclarations suivantes est vraie.



- ☐ **A** On ne peut-pas déterminer le chemin le plus cours du sommet A vers le sommet E
- ☐ **B** Le plus court chemin du sommet A vers le sommet E est : A-C-B-D-E
- ☐ **C** Le plus court chemin du sommet A vers le sommet E est : A-C-E
- ☐ **D** Il existe plusieurs plus cours chemins du sommet A vers le sommet E

Question 5 :

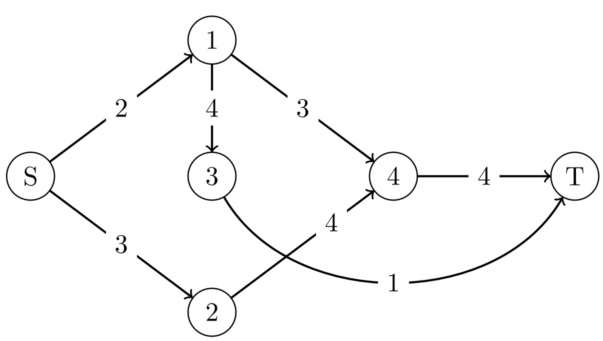
On considère le graphe G ci-dessous. Donnez son nombre chromatique $\chi(G)$ en cochant la bonne réponse.



- ☐ **A** $\chi(G) = 3$
- ☐ **B** $\chi(G) = 4$
- ☐ **C** $\chi(G) = 5$
- ☐ **D** $\chi(G) = 6$

Question 6 :

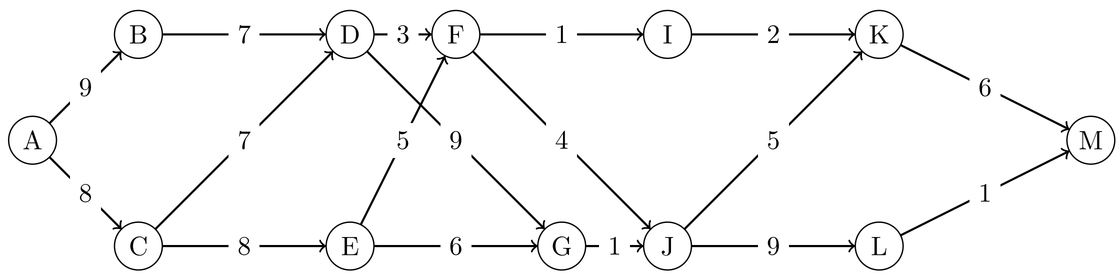
Soit le réseau de transport suivant. Cochez la réponse indiquant la valeur du flot maximum circulant entre S et T.



- ☐ **A** 3
- ☐ **B** 4
- ☐ **C** 5
- ☐ **D** 6

Question 7 :

On considère le graphe donné ci-dessous :

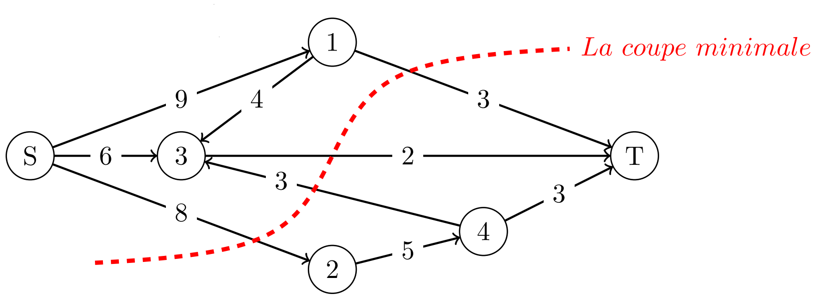


En partant du sommet A, on applique l'algorithme de Dijkstra sur ce graphe. Parmi les propositions suivante, cochez celle qui indique le sommet sélectionné après la troisième itération de l'algorithme de Dijkstra :

- ☐ **A** B
- ☐ **B** D
- ☐ **C** F
- ☐ **D** G

Question 8 :

On considère le réseau de transport suivant et la coupe minimale correspondante, donnée par la courbe discontinue. Les valeurs numériques représentent les capacités des liaisons.

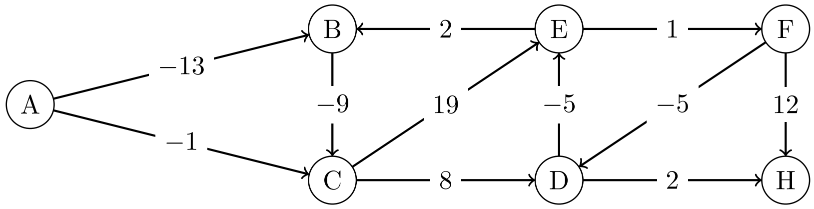


Parmi les affirmations suivantes cochez celle qui est vraie.

- ☐ **A** La capacité de la coupe minimale est 2
- ☐ **B** La capacité de la coupe minimale est 13
- ☐ **C** La capacité de la coupe minimale est 16
- ☐ **D** La capacité de la coupe minimale est 11

Question 9 :

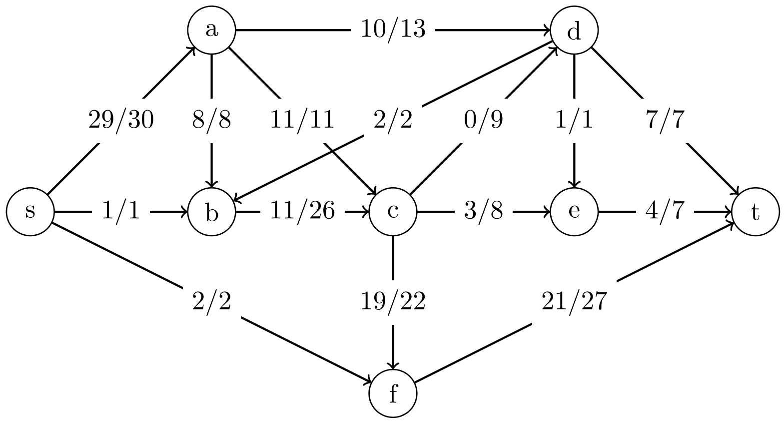
On considère le graphe suivant. Cochez la bonne réponse.



- ☐ **A** Le chemin le plus court du nœud A au nœud F est : A-B-C-E-F
- ☐ **B** Le chemin le plus court du nœud A au nœud F est : A-C-E-F
- ☐ **C** Le chemin le plus court du nœud A au nœud F est : A-C-D-E-F
- ☐ **D** Rien de ce qui précède

Question 10 :

Sur le réseau de transport ci-dessous, on donne la distribution du flot maximal $\varphi_{max} = 32$:

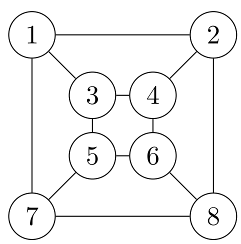


Si on diminue la capacité de l'arc (s, a) à 29, parmi les affirmations suivantes indiquez celle qui est vraie.

- ☐ **A** La valeur du flot maximal reste inchangée
- ☐ **B** La valeur du flot maximal augmente de 1
- ☐ **C** La valeur du flot maximal diminue de 1
- ☐ **D** Rien de ce qui précède

Question 11 :

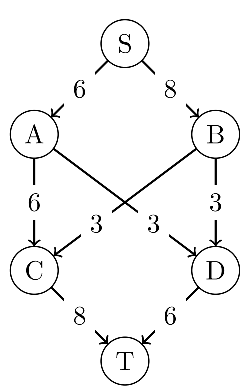
En appliquant l'algorithme de Welsh-Powell sur le graphe ci-dessous, le nombre de couleurs nécessaires pour la coloration du graphe ci-dessous est :



- ☐ **A** 2 et il se trouve en 2 itérations (étapes)
- ☐ **B** 2 et il se trouve en 3 itérations (étapes)
- ☐ **C** 3 et il se trouve en 3 itérations (étapes)
- ☐ **D** 4 et il se trouve en 4 itérations (étapes)

Question 12 :

Pour le réseau ci-dessus, on cherche à trouver le flot (flux) maximum φ_{max} en appliquant un algorithme vu en cours.

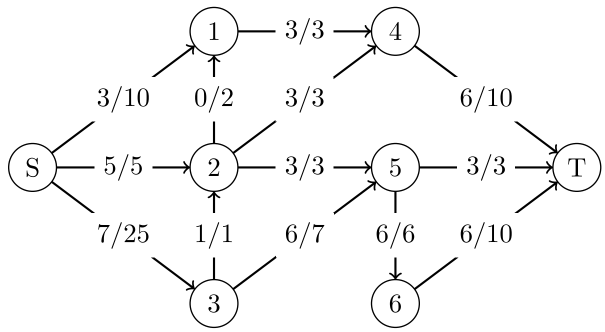


Donnez la valeur du flot maximum φ_{max} en cochant la bonne réponse.

- ☐ **A** $\varphi_{max} = 12$
- ☐ **B** $\varphi_{max} = 14$
- ☐ **C** $\varphi_{max} = 8$
- ☐ **D** $\varphi_{max} = 6$

Question 13 :

Sur le réseau de transport ci-dessous, on donne la distribution du flot maximal $\varphi_{max} = 15$:



Identifiez les arcs bloquants associés à ce réseau de transport en cochant la bonne réponse :

- ☐ **A** $(1,4)$, $(2,4)$, $(5,6)$, et $(5,T)$
- ☐ **B** $(4,T)$, $(5,T)$, et $(6,T)$
- ☐ **C** $(5,2)$, $(3,2)$, $(5,6)$, et $(1,4)$
- ☐ **D** $(5,2)$, $(3,2)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(5,6)$, et $(5,T)$

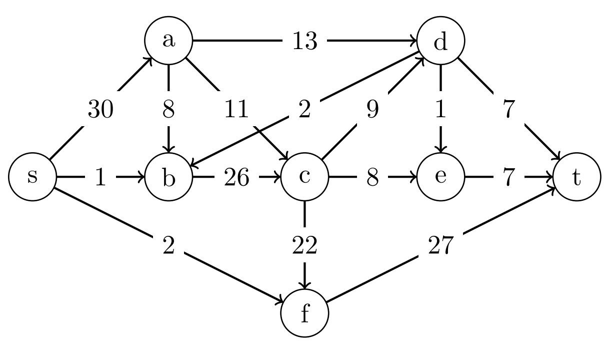
Question 14 :

Soient G un graphe orienté à poids mixtes et (z,t) un arc de G. Le plus court chemin reliant le sommet de départ s et le sommet z est de 53. Le plus court chemin reliant s et le sommet t est de 65.
Soit P le poids de l'arc (z,t). Cochez la bonne réponse.

- ☐ **A** P est supérieur ou égal 13
- ☐ **B** P est supérieur ou égal 12
- ☐ **C** P est négatif
- ☐ **D** P est positif

Question 15 :

En partant du sommet s et en appliquant l'algorithme de Dijkstra sur le graphe ci-dessous, indiquez la longueur du chemin du sommet s vers le sommet e après 2 itérations ($k = 2$).



- ☐ **A** 35
- ☐ **B** 44
- ☐ **C** $+\infty$
- ☐ **D** 49

Partie 2 : Programmation linéaire

Enoncé 1

Une entreprise fabrique deux biens A et B en quantités x1 et x2.
Ces productions utilisent deux ateliers dont les capacités de production exprimées en heures (h) d'usinage. Chaque atelier est disponible pendant 200h.
Chaque unité de A nécessite 2 h 30 dans le premier atelier et 4 h dans le second.
Chaque unité de B nécessite 5 h dans le premier atelier et 3 h dans le second.
Les profits réalisés sont de 250 dinars par unité de A et 300 dinars par unité de B.
D'autre part, le commercial confirme la vente de toute la production de B.
Cependant, la production de B ne peut dépasser la production de A que de 3 unités au maximum.
L'objectif de l'entreprise est de déterminer un profit maximal.
On vous propose de valider quelques éléments du programme linéaire **(P_E)** qui modélise le problème de l'entreprise.

Question 16: Cocher la case de la fonction-objectif de (**P_E**).

A. max $Z = 50\,x1 + 60\,x2$
B. max $Z = 200\,x1 + 200\,x2$
C. min $Z = 120\,x1 + 120\,x2$
D. max $Z = 250\,x1 + 300\,x2$

Question 17 : Cocher la contrainte relative au second atelier.

A. $4\,x1 + 3\,x2 \leq 500$
B. $x1 + x2 \leq 400$
C. $4\,x1 + 3\,x2 \leq 200$
D. $5x1 + 5x2 \leq 200$

Question 18 : Cocher la case de la contrainte qui définit la relation entre les quantités de A et B, de **(P_E).**

A. $x1 - x2 \leq 3$
B. $x2 - x1 \leq 3$
C. $x1 - x2 = 3$
D. $x2 - x1 = 3$

Enoncé 2

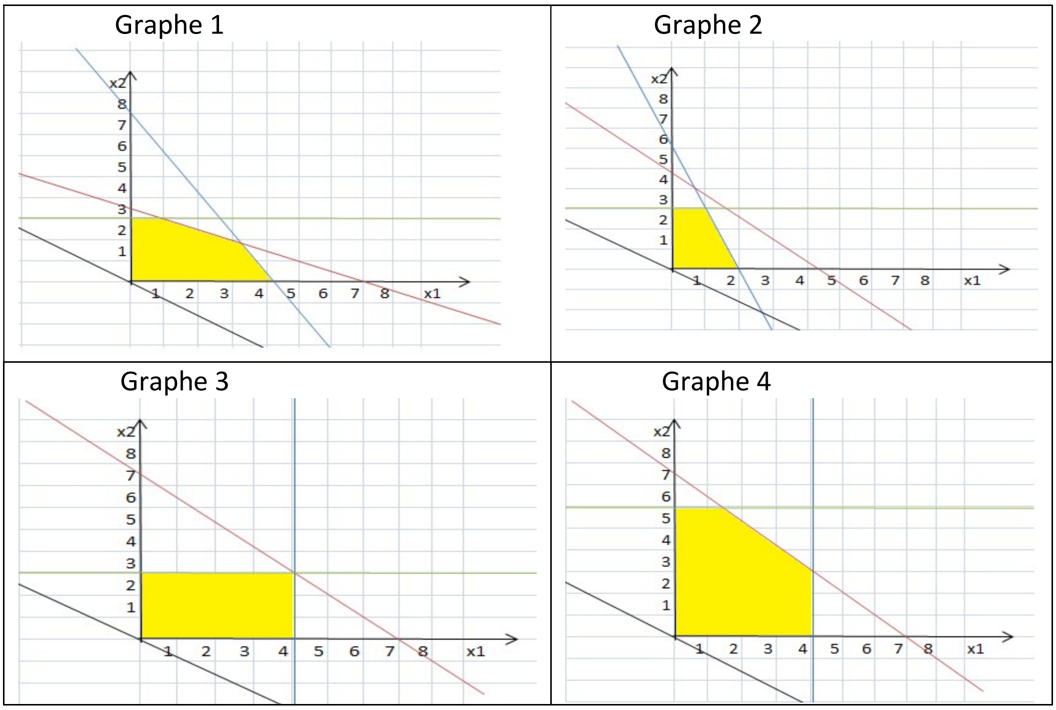
On souhaite résoudre graphiquement le programme linéaire (P1) suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$sc \qquad \begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Question 19 : Parmi les 4 graphes ci-dessous, lequel illustre le domaine réalisable du problème (P1).

A. Graphe 1
B. Graphe 2
C. Graphe 3
D. Graphe 4



Question 20: Quelle est la solution optimale (x^*_1, x^*_2) de (P1) ?

A. $x^*_1 = 3$ et $x^*_2 = 2$
B. $x^*_1 = 4$ et $x^*_2 = 0$
C. $x^*_1 = 1$ et $x^*_2 = 3$
D. $x^*_1 = 3$ et $x^*_2 = 3$

Question 21: Quelle est la valeur optimale de la fonction objectif de (P1) ?

A. Z*= 10
B. Z*= 17
C. Z*= 15
D. Z*= 21

<u>Enoncé 3</u>

On considère le programme linéaire suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \max \mathrm{Z} = 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soient S_1 et S_2 les variables d'écart associées respectivement à la première et à la deuxième contrainte.

Question 22 : Quelles seront les variables de base du tableau initial du simplexe de (P_2)?

A. x_1 *et* x_2
B. x_1 et S_1
C. S_1 et S_2
D. x_2 et S_2

Question 23: A l'issue de l'application de la première itération de la méthode de simplexe à (P_2), les variables dans la base, seront:

A. x_1 et S_2
B. x_1 et S_1
C. x_2 et S_2
D. x_2 et S_1

Question 24: A l'issue de l'application de la première itération de la méthode de simplexe à (P_2), la valeur de la fonction objectif est:

A. 40
B. 12
C. 7
D. 11

Question 25 : Après un certain nombre d'itérations de l'algorithme de simplexe, une variable dans la base est nécessairement :

A. Non-nulle
B. Non-négative
C. Nulle
D. Négative

<u>Enoncé 4</u>

On considère le programme linéaire(P) suivant :

$$\begin{gathered} Max\ Z = 2X_1 + X_2 \\ Sous\ contraintes \\ X_1 + X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1 - X_2 \geq -4 \\ X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Question 26 :

Parmi les alternatives suivantes, quelle est celle qui correspond au Dual de (P)?

A.

$$\begin{gathered} Min\ C = 8Y_1 + 10Y_2 + 4Y_3 \\ Sous\ contraintes \\ Y_1 + 2Y_1 + Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + Y_1 - Y_3 \geq 1 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{gathered}$$

B.

$$\begin{gathered} Min\ C = 8Y_1 + 10Y_2 + 4Y_3 \\ Sous\ contraintes \\ Y_1 + 2Y_1 - Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + Y_1 + Y_3 \geq 1 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{gathered}$$

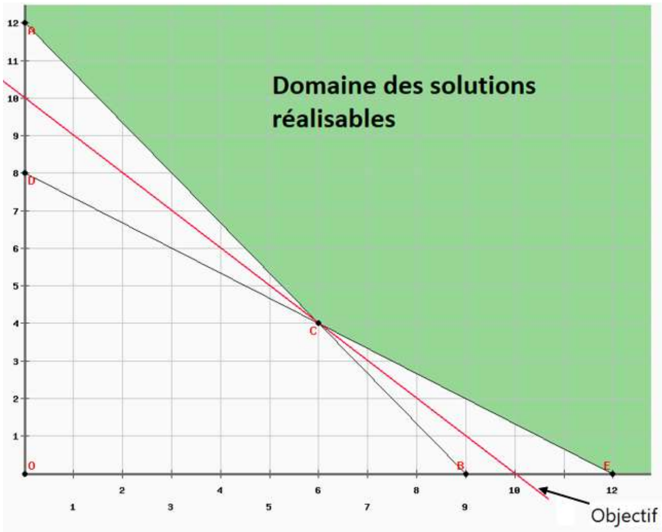
C.

$$\begin{gathered} Min\ C = 8Y_1 + 10Y_2 - 4Y_3 \\ Sous\ contraintes \\ Y_1 + 2Y_1 + Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + Y_1 - Y_3 \geq 1 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{gathered}$$

D.

$$\begin{gathered} Min\ C = 8Y_1 + 10Y_2 - 4Y_3 \\ Sous\ contraintes \\ Y_1 + 2Y_1 - Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + Y_1 + Y_3 \geq 1 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{gathered}$$

Enoncé 5 La figure ci-dessous présente la résolution graphique d'un programme linéaire de maximisation(P2).



Question 27 : Parmi les alternatives suivantes laquelle décrit de son dual ?

A. Le dual admet une infinité de solutions
B. Le dual n'admet pas de solution optimale
C. Le dual admet une solution non bornée
D. Le dual admet une solution unique

Enoncé 6

Soit le programme linéaire primal (P) suivant :

$$Max\ Z = 2\,x_1 + x_2$$

$$\text{s.c}\begin{cases} -2\,x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + \qquad \leq 3 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit (D) Le programme dual de (P).

Question 28 : Sachant que la solution optimale de (P) est X=(3,6), alors la solution optimale du problème (D) est :

A. (0, 3, 1)
B. (3, 1, 1)
C. (3, 2, 0)
D. (0, 1, 3)

Partie 3 : Projet RO Complexité

Question 29.

Pour un algorithme récursif non terminal :

A. les appels récursifs sont empilés dans la pile d'exécution
B. l'appel suivant remplace simplement l'appel précédent dans le contexte d'exécution
C. le résultat de chaque appel récursif sera utilisé pour un calcul arithmétique ultérieur
D. il faut toujours afficher un message après l'appel récursif

Question 30.

Soit l'algorithme Algo1 suivant :

```
int Algo1 (int n, int r)
{
if(n <= 1) return r + n ;
else
return Algo1(n - 1,r + 1)+1;
}
```

Cocher la bonne réponse.

A. Algo1 est un algorithme itératif
B. Algo1 est un algorithme récursif non terminal
C. Algo1 est un algorithme récursif terminal
D. Algo1 est un algorithme qui contient une récursivité imbriquée

Question 31.

Soit la fonction FnA suivante :

```
int FnA(int n,int b)
{
if (n==1) return a;
else
return (FnA (n-1,a)+b);
}
```

Qu'elle est l'équation récurrente de complexité de la fonction FnA?

A. C(n)= C(n-2)+O(1)
B. C(n)=C(n-1)+ O(1)
C. C(n)=C(n-2)+O(n)
D. C(n)=C(n-1)+O(n)

Question 32.

Soit l'équation récurrente suivante $T(n) = 5T\left(\frac{n}{8}\right) + n\log n$. Qu'elle est la complexité correspondante à cette équation?

A. Θ(n log(n))
B. Θ(log(n))
C. $\Theta(\log_8(5))$
D. $\Theta(n^2)$

Question 33.

Soit l'algorithme AlgoB suivant :

```
int AlgoB (int n) {
int S=0;
for(int i=n;i>1;i=i/2)
        S=S+1;
return S;
}
```

Quelle est la complexité temporelle de l'algorithme AlgoB au pire des cas?

A. O(n)
B. O(log(n))
C. O(nlog(n))
D. $O(n^2)$

Question 34.

La complexité d'un algorithme est dite polynomiale si elle est d'ordre:

A. O(n).
B. $O(n^a)$
C. O(n log(n))
D. $O(2^n)$

Question 35.

Supposons que T est un tableau de caractères de taille n, O(n) est la complexité de l'algorithme qui permet de supprimer toutes les occurrences d'un caractère donné :

A. au pire des cas
B. au meilleur cas
C. au moyen cas
D. au pire cas et au meilleur cas

Question 36.

Soit l'algorithme récursif AlgoC suivant. Quelle est l'équation de récurrence correspondante à AlgoC en termes du nombre d'opérations arithmétiques et logiques?

```
int AlgoC (int n) {

if (n==0) then
   return 1;
else
         if (AlgoC(n-1) < AlgoC(n-2))
             return AlgoC(n-1) * AlgoC(n-2);
         else
           return AlgoC(n-2);
}
```

A. $C(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ C(n-1) + 2C(n-2), & si > 1 \end{cases}$

B. $C(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ C(n-1) + 2C(n-2) + O(1), & si > 1 \end{cases}$

C. $C(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ 2C(n-1) + 2C(n-2) + O(1), & si > 1 \end{cases}$

D. $C(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ 2C(n-1) + 3C(n-2) + O(1), & si > 1 \end{cases}$

Question 37.

Quel est l'algorithme dont la classe de complexité n'est pas linéaire ?

A. Recherche séquentielle dans un tableau
B. Recherche d'un maximum dans un tableau
C. Suppression d'une case du tableau
D. Recherche dichotomique

Question 38.

On applique l'algorithme de tri à bulles (croissant) sur un tableau où le plus petit élément est à la fin de ce tableau. La complexité temporelle de l'algorithme tri à bulles dans ce cas est :

A. $O(n^2)$
B. O(nlog(n))
C. O(n)
D. O(1)

Question 39.

L'algorithme de tri par fusion est construit suivant le paradigme "diviser pour régner":

- ✓ Il divise la séquence de n nombres à trier en deux sous-séquences de taille n/2.
- ✓ Il trie récursivement les deux sous-séquences.
- ✓ Il fusionne les deux sous-séquences triées pour produire la séquence complète triée.

La complexité de l'algorithme de tri par fusion est donnée par la récurrence :

A. $2T(n/2) + \Theta(1)\, si \quad n \succ 1$

B. $2T(n/2) + \Theta(n)\, si \quad n \succ 1$

C. $T(n/2) + \Theta(1)\, si \quad n \succ 1$

D. $T(n/2) + \Theta(n)\, si \quad n \succ 1$

Question 40.

Pour le tri rapide, la complexité au meilleur cas se produit quand :

A. le partitionnement produit deux régions de longueur n/2.
B. le partitionnement produit une région à n-1 éléments et une à 1 élément.
C. on tire au hasard l'indice de départ de partitionnement.
D. le partitionnement produit deux régions de longueurs respectives n/3 et 2n/3

Question 41.

Soit la fonction AlgoD suivante.

```
int  AlgoD (int B[],int i,int j)
{
int m;
if (i==j)
         return B[i];
m= (i+j)/2;
gauche= AlgoD (B,i,m);
droite= AlgoD (B,m+1,j);
retourner (gauche+droite);
}
```

Quelle est la complexité de la fonction AlgoD?

A. $O(n^2)$
B. O(log(n))
C. O(nlog(n))
D. O(n)

Question 42. Soit l'équation récurrente suivante $T(n)=4T(n/2)+O(n^2)$. Qu'elle est la complexité correspondante à cette équation?

A. O(nlog(n))
B. $O(n^2)$
C. O(n)
D. $O(n^2 \log(n))$

Question 43. Soit le code suivant :

```
char texte[N] ; {on suppose que la chaine ne contient que des lettres en majuscules et des
espaces}
int cpt, pos, occ[26] ;
for (cpt = 0; cpt< 26 ; cpt++)
         occ[cpt]= 0 ;
cpt = 0 ;
space =' ' ;
while (cpt < longueur(texte))
{
         if (texte[cpt]!=space) {
         pos = texte[cpt]- 65 ;
         occ[pos] = occ[pos] + 1 ;
         }
         cpt = cpt + 1 ;
}
```

Cocher la bonne réponse.

A. La complexité en termes d'opérations arithmétiques est : au pire=3N et au meilleur=N
B. La complexité en termes d'opérations arithmétiques est : au pire=3N et au meilleur=3
C. La complexité en termes d'opérations logiques est : au pire=N+1 et au meilleur=2
D. La complexité en termes d'opérations logiques est : au pire=2N+2 et au meilleur=N