Projet RO-COMPLEXITE

Le problème de coloration de graphes

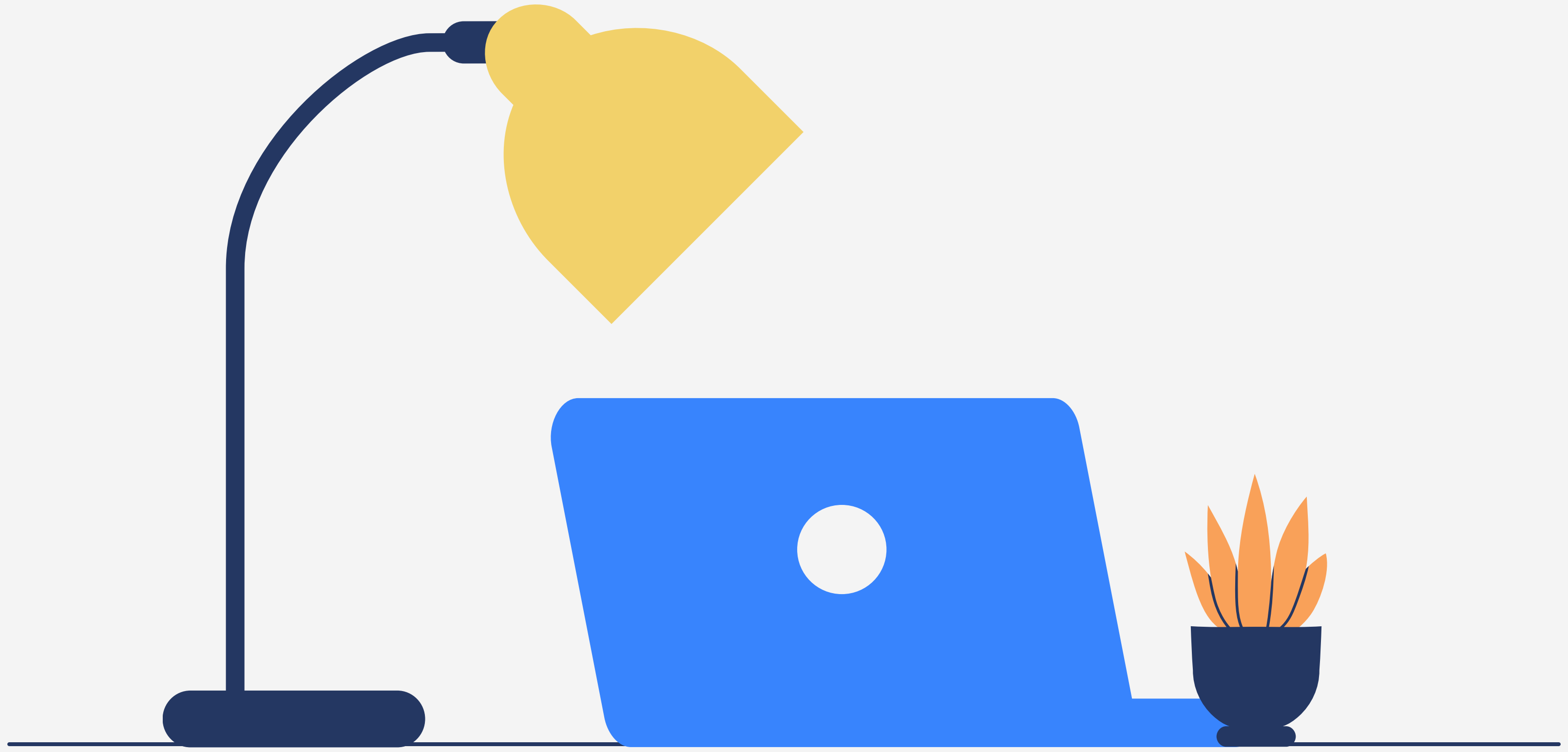
Rencontrez l'Équipe

CHAIMA FARHAT

IHEB SAADAOUI

ISSAM DZIRI

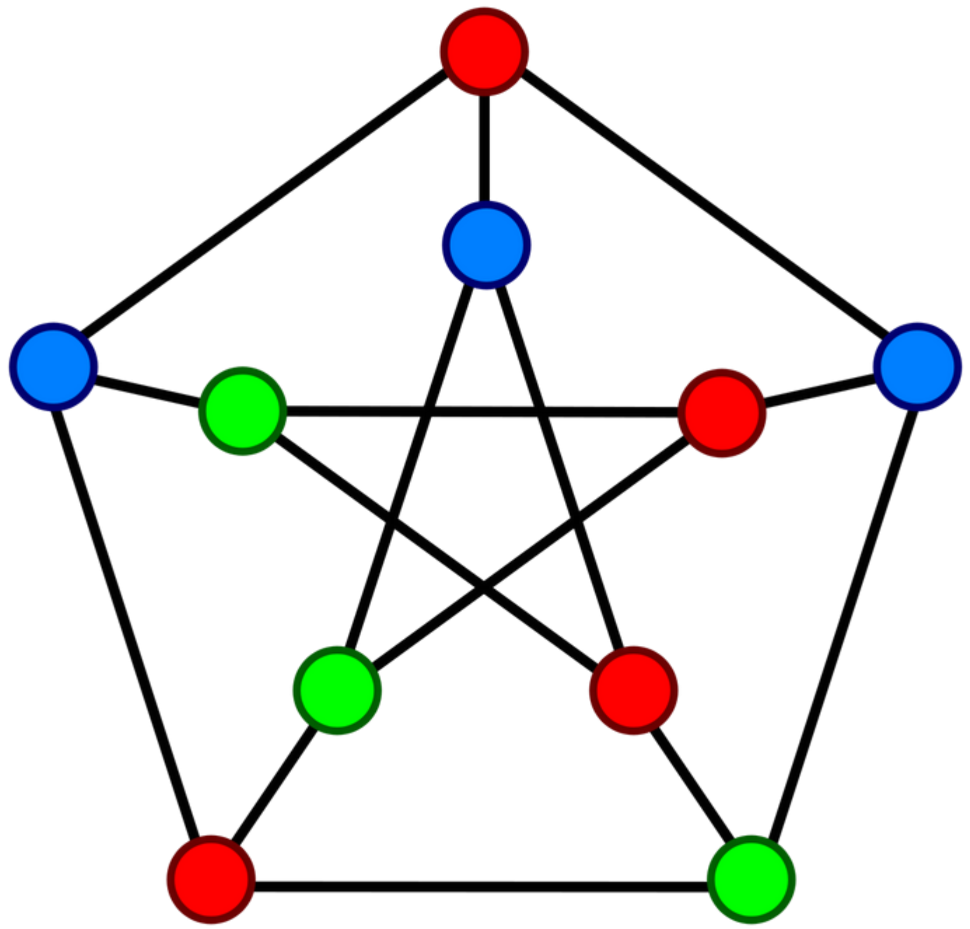
Plan



Explication du problème choisi

Problème de coloration des graphes

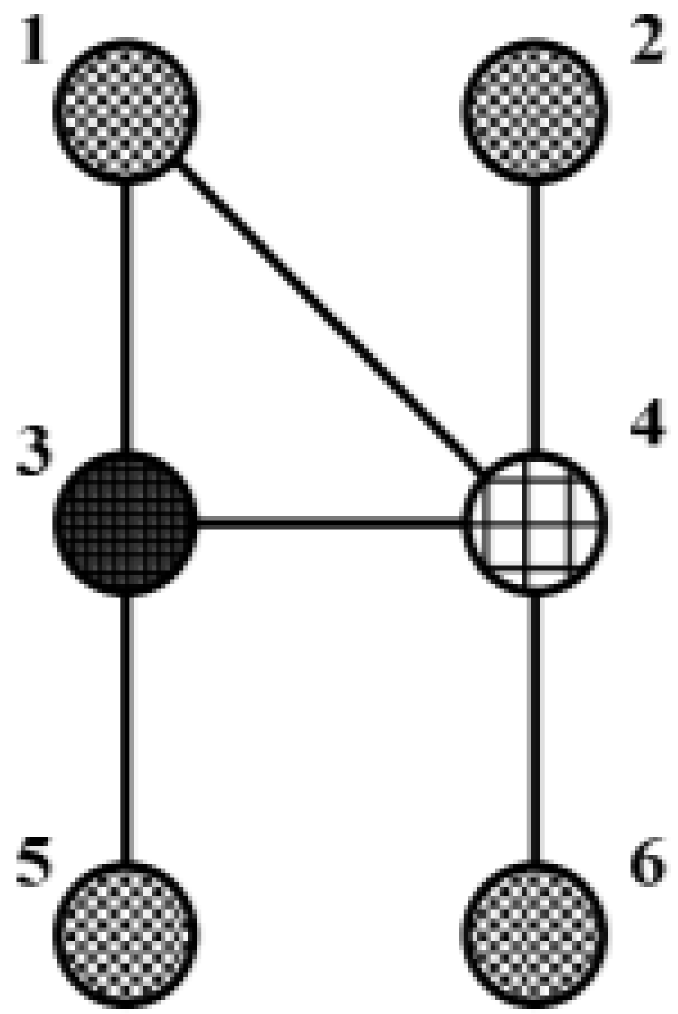
La **coloration de graphe** consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de **couleur différente**. On cherche souvent à utiliser le **nombre minimal** de couleurs, appelé **nombre chromatique**.
C’est l’un des problèmes les plus étudiés en **optimisation combinatoire** en raison de ses multiples applications (la planification des horaires, l’allocation des ressources, etc.) et de la **complexité de sa résolution**.



Plus précisément

Soit **G = (V, E)** un graphe simple non orienté où **V** représente l'ensemble des sommets et **E** l'ensemble de ses arêtes. Deux sommets **u** et **v** sont adjacents s'ils sont reliés par une arête de **E**. Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents et un stable est un ensemble de sommets deux à deux non-adjacents.

Le problème de coloration de graphe consiste à assigner à chaque sommet une couleur de sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur, tout en utilisant un nombre minimal de couleurs. Ce dernier est le nombre chromatique **χ(G)** du graphe **G**. La figure ci-après illustre la coloration optimale d'un graphe **G avec χ(G) = 3.**



Formulation mathématique

La fonction objectif

L'objectif est de minimiser le nombre de couleurs attribuées aux sommets (nombre chromatique mixte), soit : $min\ \chi$.

Les paramètres

- Le nombre de chemins
- Le nombre de sommets des chemins
- Le nombre chromathique

Les contraintes

Ces contraintes permettent d'assurer que les couleurs des sommets soient toutes inférieures au nombre chromatique mixte (qu'il faut minimiser). Sachant que pour un chemin donné, la couleur maximale est attribuée à son dernier sommet, ces contraintes s'écrivent :

$\varphi\ (uini\ ) \leq \chi\ \forall\ i \in \{1, 2, \ldots , n\}$

Les différentes variantes

Théorème de brooks

Le mérite du théorème de Brooks est donc de réduire le nombre de couleurs nécessaires à Δ pour la plupart des graphes.

Conjecture de Hadwiger

La conjecture de Hadwiger est démontrée pour les graphes dont le nombre de Hadwiger est au plus 6 ; la preuve est basée sur le théorème des quatre couleurs.

Problème de Hadwiger–Nelson

Déterminer le nombre chromatique du graphe dont les sommets sont les points du plan (euclidien) et tel que deux sommets sont adjacents si la distance qui les sépare vaut 1.

Conjecture de Grünbaum

Pour tout $m>1$ et $n>2$ il existe un graphe n-régulier de nombre chromatique m et de maille au moins n

Les différents domaines d'application

01 Télécommunications

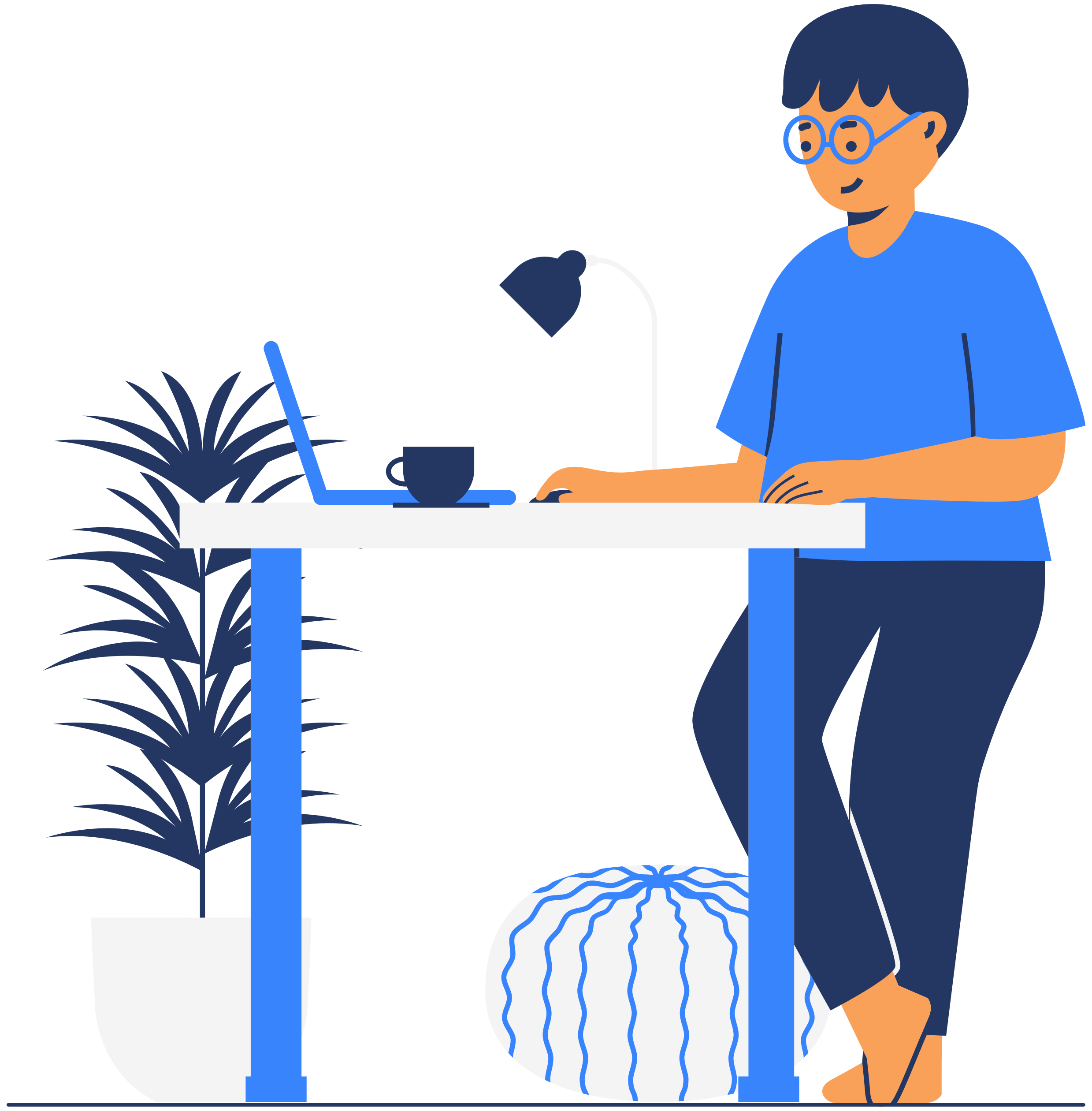
02 Coloration des maps

03 Domaine santé

04 La planification des horaires

05 L’allocation des ressources

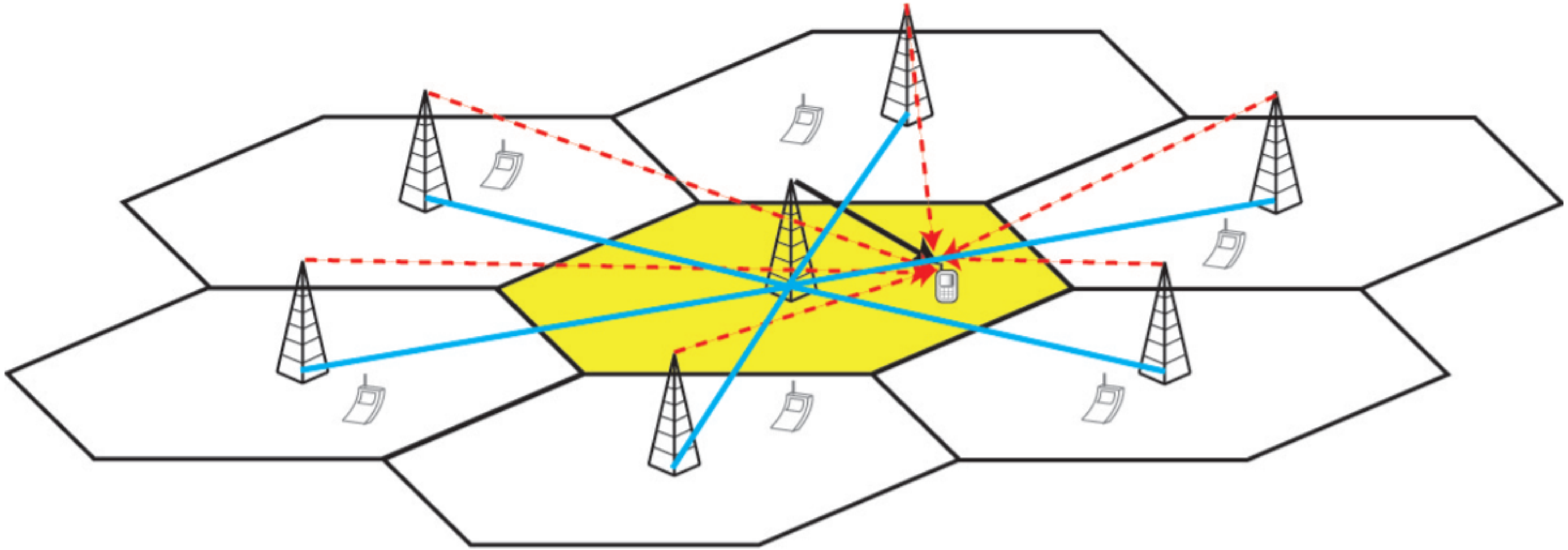
06 La planification des examens dans une université



Un exemple de résolution du problème

Allocation de fréquences dans les réseaux GSM

Attribuer aux antennes relais des bandes de fréquences pour communiquer avec les usagers.



Les algorithmes proposés pour résoudre le problème étudié

01

Algorithme de Welsh et Powel

02

Algorithme glouton

03

Algorithme de 2-coloriage

04

Agorithme de Wigderson