Formulation d'un Programme linéaire

Exemple 1 : Problème de médecine [1]

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

<u>Formulation du problème en un PL :</u>

Le problème de médecine présente certaines ressemblances avec le problème de l'agriculture, dans les deux cas c'est un problème d'allocation de ressources.
Les variables de décision qui représentent des valeurs inconnues par le décideur qui est dans ce cas le spécialiste en médecine sont :

- x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
- x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.
Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de x_1 et x_2 sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$.
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$.
- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est $x_1 + 6x_2 \geq 24$.

Etape 3 : Identification de la fonction objectif. On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions $(x_1,\ x_2)$ qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $z = x_1 + x_2$.

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

[1] An introduction to linear programming and the theory of games, A. M. Glicksman

$$\begin{array}{ll} Min & x_1 + x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 3 : problème de production [2]

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.
La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3 .

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.
Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation en un PL :

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M1
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M2
- $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$ pour la machine M3

Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000x_2$

Le programme linéaire résultant est :

[2] Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, A. Kaufmann, pp 22-23

$$\begin{array}{ll} Max & 900x_1 + 1000x_2 \\ s.c. & 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ & 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 4 : Problème d'alimentation [3]

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D ; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D.
Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 10 DT le Kg et N coûte 4 DT le Kg. Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Formulation en un PL :

On peut résumer toutes les données du problème dans le tableau suivant

	M	N	Quantités prescrites
A	0.1	0	0.4
B	0	0.1	0.6
C	0.1	0.2	2
D	0.2	0.1	1.7
Coût	10	4	

Ce genre de tableau peut aider à mieux analyser le problème et ainsi formuler le programme linéaire correspondant.
Les variables de décision sont

- x_M : la quantité d'aliments M à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux
- x_N : la quantité d'aliments N à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux

Les contraintes de non-négativité sont $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
Le choix de cette quantité est contraint à la présence dans l'alimentation du composant

- A : $0.1x_1 \geq 0.4 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 4$
- B : $0.1x_2 \geq 0.6 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq 6$
- C : $0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 \geq 20$
- D : $0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.7 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 \geq 17$

La fonction objectif est une fonction coût : $z = 10x_1 + 4x_2$.
Le programme linéaire est un programme de minimisation :

[3] Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, A. Kaufmann, pp 24-25

$$
\begin{array}{ll}
Min & 10\,x_1 + 4x_2 \\
s.c. & x_1 \geq 4 \\
 & x_2 \geq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 17 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Exemple 5 : Problème de mélange [4]

Un industriel veut produire un alliage Z à 30% de plomb, 30% de zinc et 40% d'étain. Supposons qu'il puisse se procurer sur le marché des alliages A, B, C, D, E, F, G, H, I dont les compositions et les prix respectifs sont donnés dans le tableau suivant :

Compositions des alliages (en %)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Alliage à fabriquer
Plomb	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
Zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
Etain	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Coût au Kilo	4.1	4.3	5.8	6	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3	

Combien doit-il acheter de chaque alliages A, B, C, D, E, F, G, H et I pour obtenir au prix de revient minimum un 1 Kg de l'alliage Z ?

Formulation en un PL :

La décision à prendre : Combien acheter de chaque alliage A, B, …, I ?
Les variables de décision sont :

- x_i : la quantité d'alliage i, i= A, B, …, I, à acheter.

On vérifie bien que les variables de décision x_i , i= A, B, …, I, sont positives : $x_A \geq 0,\ x_B \geq 0, x_C \geq 0,\ x_D \geq 0, x_E \geq 0,\ x_F \geq 0, x_G \geq 0,\ x_H \geq 0, x_I \geq 0$.
Les contraintes relatives au problème sont :

- Equation de la conservation de la matière :

$$x_A \geq 0,\ x_B \geq 0, x_C \geq 0,\ x_D \geq 0, x_E \geq 0,\ x_F \geq 0, x_G \geq 0,\ x_H \geq 0, x_I \geq 0$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Plomb :

$$x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\ \ x_I = 0.3$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Zinc :

$$0.1\,x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\,x_I = 0.3$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Etain :

$$0.8\,x_A + 0.6\,x_B + 0.1\,x_C + 0.1\,x_D + 0.4\,x_E + 0.3\,x_F + 0.5\,x_G + 0.1\,x_H + 0.5\,x_I = 0.4$$

La fonction objectif dans cet exemple représente le coût d'achat des différents alliages A, B, C, D, E, F, G, H et I. Donc l'expression de la fonction objectif est la suivante :

$$z = 4.1\,x_A + 4.3\,x_B + 5.8\,x_C + 6\,x_D + 7.6\,x_E + 7.5\,x_F + 7.3\,x_G + 6.9\,x_H + 7.3\,x_I$$

---

[4] G. B. Dantzig applications et prolongements de la programmation linéaire pp :13-14

Le programme linéaire qui modélise ce problème mélange s'écrit :

$$\begin{array}{ll} Min & 4.1\,x_A + 4.3\,x_B + 5.8\,x_C + 6\,x_D + 7.6\,x_E + 7.5\,x_F + 7.3\,x_G + 6.9\,x_H + 7.3\,x_I \\ s.c. & x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I = 1 \\ & 0.1\,x_A + 0.1\,x_B + 0.4\,x_C + 0.6\,x_D + 0.3\,x_E + 0.3\,x_F + 0.3\,x_G + 0.5\,x_H + 0.2\,x_I = 0.3 \\ & 0.1\,x_A + 0.3\,x_B + 0.5\,x_C + 0.3\,x_D + 0.3\,x_E + 0.4\,x_F + 0.2\,x_G + 0.4\,x_H + 0.3\,x_I = 0.3 \\ & 0.8\,x_A + 0.6\,x_B + 0.1\,x_C + 0.1\,x_D + 0.4\,x_E + 0.3\,x_F + 0.5\,x_G + 0.1\,x_H + 0.5\,x_I = 0.4 \\ & x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F x_G, x_H, x_I \geq 0 \end{array}$$

Exemple 6 : Sélection de Médias [5]

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision		Radio	Journaux
	Locale	Par satellite		
Coût d'une publicité	40 DT	75 DT	30 DT	15 DT
Nombre de client potentiel par publicité	400	900	500	200
Nombre de client potentiel femme par publicité	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que 800DT pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

1. Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
2. La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser 500 DT ;
3. Au moins 3 spots publicitaires seront assurés par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
4. Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux sont pour chacun entre 5 et 10.

Formulation en un PL :

Les variables de décision du problème sont

- x_1 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision locale
- x_2 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision par satellite
- x_3 : le nombre de spots publicitaires dans la radio
- x_4 : le nombre d'affiches publicitaires dans les journaux

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.
Les contraintes du problème sont :

- Coût total de la compagne publicitaire : $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$
- Nombre de clients femmes potentiels par publicité :
$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$$
- Contraintes de la télévision : $40x_1 + 75x_2 \leq 500,\ x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 2$

[5] Operations research principles and practice, pp17-18

- Contraintes sur le nombre de publicités dans la radio et dans les journaux $5 \le x_3 \le 10$ et $5 \le x_4 \le 10$.

La fonction objectif à maximiser représente le nombre de clients potentiels par publicité $z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$.

Le programme linéaire résultant est :

$$
\begin{array}{lll}
Max & 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 & \\
s.c. & 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 & \le 800 \\
 & 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 & \ge 2000 \\
 & 40x_1 + 75x_2 & \le 500 \\
 & x_1 & \ge 3 \\
 & x_2 & \ge 2 \\
 & x_3 & \ge 5 \\
 & x_3 & \le 10 \\
 & x_4 & \ge 5 \\
 & x_4 & \le 10 \\
 & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 &
\end{array}
$$