

2I003: TD1 Corrigé: Rappels Mathématiques

Amira

11 March 2021

Contents

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 Exercice 1: Logique d'automne: | 1 |
| 1.1 Question 1: Donner la proposition sous forme logique | 1 |
| 1.2 Question 2 Donnez en français la contraposée de cette proposition. | 1 |
| 1.3 Question 3 Donnez en français la négation de cette proposition . | 2 |
| 2 Exercice 2: Logique élémentaire | 2 |
| 2.1 Question 1: Forme logique: | 2 |
| 2.2 Question 2: équivalence des formules: | 2 |
| 3 Exercice 3: Preuve par contraposée, preuve par l'absurde, réciproque | 2 |
| 3.1 Question 1 | 2 |
| 3.1.1 Démontrer par contraposée que si n^2 est pair alors, n est pair | 3 |
| 3.1.2 Quelle est la réciproque ? Est-elle vérifiée ? | 3 |
| 3.1.3 Quelle est la réciproque de la contraposée ? Est-elle vérifiée ? | 3 |
| 3.2 Question 2: Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel | 3 |
| 3.3 Question 3: Soit $n > 0$. Démontrez par l'absurde que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier. | 4 |
| 4 Exercice 5: Suites récurrentes homogènes | 4 |
| 4.1 Calculer les suites récurrentes : | 4 |
| 5 Exercice 6: suites récurrentes non homogènes | 4 |
| 5.1 Question 1 Calculer par substitution les suites récurrentes | 4 |
| 5.2 Q3: | 5 |
| 5.3 Q4: | 5 |

1 Exercice 1: Logique d'automne:

On considère la proposition suivante

P: "A l'automne, s'il a plu pendant la nuit, je vais toujours ramasser des champignons."

1.1 Question 1: Donner la proposition sous forme logique

Soit les prédicats a, b et c telque :

- a: A l'automne
- b: il a plu pendant la nuit
- c: je ramasser des champignons

La forme logique de P est donc :

$$a \wedge b \rightarrow c$$

1.2 Question 2 Donnez en français la contraposée de cette proposition.

on a P: "A l'automne, s'il a plu pendant la nuit, je vais toujours ramasser des champignons." et P: $(a \wedge b) \rightarrow c$

la contraposée de P sous forme logique nous donne:

$$\neg c \rightarrow \neg(a \wedge b) \equiv \neg c \rightarrow \neg a \vee \neg b \equiv c \vee \neg a \vee \neg b$$

En français:

Si je n'ai pas ramasser les champignons Alors , il n'a pas plu la nuit a l'automne.

1.3 Question 3 Donnez en français la négation de cette proposition

on a P: "A l'automne, s'il a plu pendant la nuit, je vais toujours ramasser des champignons." et P: $(a \wedge b) \rightarrow c$

La négation de P sous forme logique nous donne :

$$\neg P : \neg[(a \wedge b) \rightarrow c] \equiv \neg[\neg(a \wedge b) \vee c] \equiv \neg[\neg a \vee \neg b \vee c] \equiv a \wedge b \wedge \neg c$$

En français:

A l'automne, il a plu pendant la nuit et je n'ai pas ramasser les champignons.

2 Exercice 2: Logique élémentaire

On considère la propriété P suivante : "Tout élève qui finit son assiette aura un dessert ou un bonbon". Soit également E l'ensemble des élèves, et les prédicats suivants pour tout $x \in E$:

- $a(x)$ = x termine son assiette;
- $b(x)$ = x a un bonbon;
- $c(x)$ = x a un dessert.

2.1 Question 1: Forme logique:

Mettre P sous la forme d'une formule logique. Transformez la pour ne plus avoir que les opérateurs non, et, ou. Exprimez la négation et la contraposée sous forme logique et en français.

forme logique : $a \rightarrow (b \vee c)$

la contraposée: $\neg(b \vee c) \rightarrow \neg a \equiv (\neg b \wedge \neg c) \rightarrow \neg a$

En français :

Si un eleve n'a pas de bonbon ni de dessert alors il n'a pas terminer son assiette.

la négation: $\neg[a \rightarrow (b \vee c)] \equiv \neg[\neg a \vee (b \vee c)] \equiv a \wedge \neg b \wedge \neg c$

En français:

Un eleve termine son assiette et il n'a pas de bonbon ni de dessert

2.2 Question2: equivalence des formules:

3 Exercice 3: Preuve par contraposée, preuve par l'absurde, réciproque

3.1 Question 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

3.1.1 Démontrer par contraposée que si n^2 est pair alors, n est pair

Démontrons que P est vrai par la contraposée de P, CP: Si n est impair alors n^2 impair .

Supposons que n est impair , alors on sait qu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{N}$ telque $n=2k+1$, démontrons que n^2 est impaire :

on a donc si $n=2k+1$ alors $n^2=(2k+1)^2= (4k^2 + 2k + 1) = 2(2k^2+2k)+1$ et comme $2k^2 + 2 \in \mathbb{N}$ alors $n^2=2k+1$ donc n^2 est impaire. Cependant la contraposée CP de P est vrai ce qui fait qu'on a demontrer par la contraposée que P vrai.

3.1.2 Quelle est la réciproque ? Est-elle vérifiée ?

La réciproque de P est Si n est pair alors n^2 est pair.

Oui elle est bien vérifié car par equivalence logique la réciproque est equivalente à la contraposé de P et comme on a demontrer que cette dernière est vrai alors la réciproque de P est vrai et vérifiée aussi.

3.1.3 Quelle est la réciproque de la contraposée ? Est-elle vérifiée ?

La réciproque de CP est Si n^2 est impair alors n est impair.

Oui elle est bien vérifié car la reciproke est equivalente a la contraposé.

3.2 Question 2: Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Démontrons par l'absurde que P est vrai, donc on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et vérifions si cette proposition est vraie, par définition on sait que tout nombre rationnel s'écrit sous forme fractionnelle irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux, c'est à dire si l'un des deux est pair l'autre doit être impair. Alors on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, en développant on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair d'où p est pair et $p = 2k$.

donc maintenant on sait que, $(p)^2 = 2q^2 = 2(2k)^2 = 2(4k^2)$ en développant on obtient que

$q^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et comme $k \in \mathbb{N}$ alors maintenant on sait que q^2 est pair aussi ce qui fait que q est pair aussi.

On sait maintenant que p et q sont paires donc ces deux entiers ne sont pas premiers entre eux et donc aussi la fraction de $\sqrt{2}$ peut bien s'écrire comme forme irréductible ce qui contredit notre hypothèse précédente donc on a démontré que la proposition $\sqrt{2}$ est irrationnel est vraie par l'absurde.

3.3 Question 3: Soit $n > 0$. Démontrez par l'absurde que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Supposons que si n est carré d'un entier alors $2n$ est le carré de cet entier aussi. Par définition on sait que le carré d'un entier est rationnel et que le produit d'un entier avec un nombre rationnel nous donne un nombre rationnel aussi. Comme n est carré d'un entier k alors $\sqrt{n} = k = \frac{k}{1}$. donc n est rationnel. Soit $2n$ carré d'un entier k alors $\sqrt{2n} = \sqrt{2}\sqrt{n}$. comme on a $\sqrt{n} = k$, on obtient $\sqrt{2n} = \sqrt{2}\sqrt{n} = \sqrt{2}k$. donc on peut conclure que $\sqrt{2n}$ est irrationnel ce qui contredit notre hypothèse donc $2n$ n'est pas un carré d'un entier.

4 Exercice 5: Suites récurrentes homogènes

4.1 Calculer les suites récurrentes :

1. $U_n = U_{(n-1)} + 6U_{(n-2)}$ si $n \geq 2$, $U_0 = 0, U_1 = 1$

Le polynôme caractéristique de U_n est :

$$r^2 - r - 6$$

$$\Delta = 1 - 4(1 \cdot -6) = 25$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La forme de la solution générale de U_n est :

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= U_0 = 0 \equiv c_1 = -c_2 \\
c_1 r_1 + c_2 r_2 &= U_1 = 1 \\
&\equiv c_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \\
&\equiv -c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \\
&\equiv c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\
&\equiv c_2 (\sqrt{5}) = 1 \\
\text{d'où } c_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } c_1 = -(c_2) = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\
\text{donc la solution générale de } U_n &\text{ est:} \\
U_n &= -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

5 Exercice 6: suites reccurentes non homogenes

5.1 Question 1 Calculer par substitution les suites récurrentes

1. $U_n = U(n-1) + n$, si $n \geq 1$, $U_0 = 0$

Supposons que la solution est $U_n = O(n)$ alors $U(n) \leq cn$ pour une constante c . donc, $U(n-1) = U(n) - n$ Pour tout $n \geq 1$ et donc on a,

$$\begin{aligned}
U(n) &= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - (n-1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{[(n+1)][(n+1)-1]}{2} \\
&= \frac{(n+1)n}{2} \\
\text{donc } U(n) &= \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}$$

2. $U_n = 2U(n-1) + 1$, si $n \geq 1$, $U_0 = 2$

5.2 Q3:

5.3 Q4: