Résumé : Fonctionnement du Moteur à Courant Continu (CC)

1. Description Générale

Un moteur à courant continu (CC) convertit l'énergie électrique en énergie mécanique de rotation. Il est modélisé comme un système linéaire du second ordre.

Grandeurs électriques

- $U_m(t)$: tension aux bornes du moteur (entrée)
- $i(t)$: courant
- R : résistance
- L : inductance
- $E(t)$: force contre-électromotrice

Grandeurs mécaniques

- $\Omega(t)$: vitesse angulaire
- $\Gamma(t)$: couple moteur
- J : inertie du rotor
- f : coefficient de frottement visqueux

Constantes

- k_e : constante de FCEM
- k_c : constante de couple

2. Équations fondamentales

$$E(t) = k_e \cdot \Omega(t) \quad \text{(FCEM)}$$
$$\Gamma(t) = k_c \cdot i(t) \quad \text{(couple)}$$
$$U_m(t) = E(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{(électrique)}$$
$$J \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} + f \cdot \Omega(t) = \Gamma(t) \quad \text{(mécanique)}$$

3. Simplification : $L \approx 0$

L'équation électrique devient :

$$i(t) = \frac{U_m(t) - k_e \cdot \Omega(t)}{R}$$

Équation mécanique :

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{k_c \cdot i(t) - f \cdot \Omega(t)}{J}$$

En combinant les deux :

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{k_c}{J} \left(\frac{U_m(t) - k_e \cdot \Omega(t)}{R} \right) - \frac{f}{J} \cdot \Omega(t)$$

4. Solution analytique : réponse à un échelon

Soit $U_m(t) = U_0$ constante. Posons :

$$a = \frac{k_c \cdot k_e}{JR} + \frac{f}{J}, \qquad b = \frac{k_c \cdot U_0}{JR}$$

L'équation devient :

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} + a \cdot \Omega(t) = b$$

Solution :

$$\Omega(t) = \Omega_\infty \left(1 - e^{-at}\right), \quad \text{où} \quad \Omega_\infty = \frac{b}{a}$$

5. Implémentation numérique (méthode d'Euler)

À chaque pas de temps Δt :

$$i = \frac{U_m - k_e \cdot \Omega}{R}$$
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k_c \cdot i - f \cdot \Omega}{J}$$
$$\Omega \mathrel{+}= \frac{d\Omega}{dt} \cdot \Delta t$$
$$\theta \mathrel{+}= \Omega \cdot \Delta t$$