



ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

آزمونک سوم

استقرا و لانه‌گبوتری

زمان: ۲۰ دقیقه

مسئله‌ی ۱. مقسوم‌علیه مفرد

ثابت کنید مجموع بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد اعداد $۱, ۲, n, n+۱, \dots, ۲n$ برابر n^2 است.

حل. با استقرا ثابت می‌کنیم. پایه به ازای $n = ۲$ برقرار است زیرا داریم: $۳ + ۱ = ۴$.

فرض کنید برای عدد طبیعی m ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد آن را با p_m نشان دهیم.

طبق تعریف p_m می‌دانیم که $۲n - ۱ = p_{۲n-۱}$ و $p_{۲n} = p_{۲n}$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} p_{n+۱} + p_{n+۲} + \dots + p_{۲n-۱} + p_{۲n} &= p_{n+۱} + p_{n+۲} + \dots + ۲n - ۱ + p_n \\ &= p_n + p_{n+۱} + \dots + p_{۲(n-۱)} + ۲n - ۱ \\ &= (n-۱)^2 + ۲n - ۱ \quad (\text{طبق فرض استقرا}) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

پس حکم برای n نیز درست است. \triangleright

مسئله‌ی ۲. تیم‌بازی

فرض کنید یک کمیته‌ی ۲۵ نفره از افراد داریم. ثابت کنید اگر ۳۱ گروه ۵ نفره از این افراد را تشکیل دهیم، حتماً دو گروه وجود دارند که بیش از یک عضو مشترک داشته باشند.

حل. برهان خلف: فرض کنید بتوانیم ۳۱ تیم تشکیل دهیم. در این صورت هر فرد به طور میانگین در $\frac{۳۱ \times ۵}{۲۵} > ۶$ تیم شرکت کرده است. طبق اصل لانه‌گبوتری شخصی وجود دارد که حداقل در ۷ تیم شرکت کرده است. او در هر تیم با ۴ نفر دیگر هم تیمی است. بنابراین باید حداقل $۴ \times ۷ + ۱ = ۲۹$ نفر دیگر وجود داشته باشند که این طور نیست. پس فرض خلف برقرار نیست و با ۲۵ نفر نمی‌توان بیش از ۳۰ تیم ۵ نفره تشکیل داد. \triangleright