



مسئله‌ی ۱.*. حل رابطه‌های بازگشتی

روابط بازگشتی زیر را به کمک معادله‌ی مشخصه حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_0 = 2, a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2} + 7 \times 5^n \\ a_0 = 4, a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

مسئله‌ی ۲.*. توابع مولد

رابطه‌های بازگشتی زیر را به کمک توابع مولد حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 9 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 4n \\ a_0 = 3, a_1 = 2 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

مسئله‌ی ۳.*. مردان آهنین

فرامرز می‌خواهد یک مسابقه‌ی سنگین برای مردان آهنین طراحی کند. برای این منظور او می‌خواهد k وزنه را روی هم قرار دهد تا یک وزنه بسیار سنگین ساخته شود. وزنه‌ها به ترتیب ۱ تا k تن هستند. او برای قرار دادن این وزنه‌ها روی یک دیگر از دو قانون زیر تبعیت می‌کند:

(الف) هر وزنه می‌تواند پایین‌ترین وزنه باشد.

(ب) وزنه‌ای که دقیقاً روی وزنه‌ی دیگری قرار می‌گیرد وزنش حداکثر ۲ تن بیش‌تر از وزنه‌ی زیرین باشد.

اگر a_n تعداد راه‌های مختلف فرامرز برای تهیه‌ی این وزنه باشد، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n یافته و آن را به‌روش دلخواه حل کنید.

مسئله ۴. دفاع اتوبوسی

ژوزه مورینیو برای فینال جام حذفی می‌خواهد ۱۰ بازیکن را به همراه دروازه‌بان درون دروازه قرار دهد. او با خرج‌های زیاد خود در تیمش به تعداد نامحدود بازیکن دارد که تمامی آن‌ها را در پست مدافع به‌کار می‌گیرد که برخی از آن‌ها سرعتی و بقیه قدرتی هستند. مورینیو می‌داند که برای کسب نتیجه‌ی دلخواه یعنی ۰-۰ باید این ۱۰ مدافع را به گونه‌ای بچیند که بلوک‌های مدافعان قدرتی همواره زوج‌تایی و بلوک‌های مدافعان سرعتی همواره فردتایی باشد. بلوک به مجموعه ماکزیمالی از بازیکنان گفته می‌شود که پشت سرهم قرار گرفته‌اند و از یک نوع هستند. مثلاً در (قدرتی، قدرتی، قدرتی، قدرتی، قدرتی، قدرتی، قدرتی، قدرتی) سه بلوک بازیکنان قدرتی و دو بلوک بازیکنان سرعتی داریم. به‌کمک روابط بازگشتی به مورینیو بگویید که به چند طریق می‌تواند این ۱۰ مدافع را از نظر سرعتی و قدرتی بودن انتخاب کند تا به نتیجه‌ی دلخواه ۰-۰ دست یابد.

مسئله ۵. قهرمانی شطرنج جهان

فابیانو می‌خواهد برای آماده‌شدن جهت رویارویی دوجانبه‌ی قهرمانی شطرنج جهان یک برنامه‌ی فشرده‌ی n روزه برای خود ترتیب دهد. وی هرروز خود را به مطالعه‌ی یکی از مباحث شروع بازی، وسط بازی و یا آخر بازی اختصاص می‌دهد و از آن‌جایی که فاصله‌ی مراحل شروع و آخر بازی زیاد است، وی هیچ دو روز متوالی را به مطالعه‌ی شروع بازی و آخر بازی (یا بالعکس) اختصاص نمی‌دهد. اگر a_n تعداد برنامه‌ریزی‌های مطلوب فابیانو را نشان دهد، رابطه‌ی بازگشتی برای a_n یافته و به‌کمک آن تعداد برنامه‌های ۹ روزه‌ی مطلوبی که فابیانو می‌تواند برای خود ترتیب دهد را محاسبه کنید.

مسئله ۶. دوازده صندوق نامه

یک پست‌چی وظیفه‌ی رساندن نامه‌های ۱۲ خانه را در یک روستای دورافتاده برعهده دارد. می‌دانیم هیچ دوخانه‌ی مجاوری وجود ندارند که در یک روز هردو نامه دریافت کنند و هیچ سه‌خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که در یک روز هیچ‌یک نامه دریافت نکنند. به کمک روابط بازگشتی تعداد حالات ممکن در یک روز را از نظر نامه داشتن یا نداشتن این ۱۲ خانه پیدا کنید.

مسئله ۷. شمارش

می‌خواهیم با حروف a, b, c و d کلماتی به‌طول بین ۴ تا ۱۲ بسازیم. به‌طوری که کلمات ساخته‌شده، حداقل یکی از هر حرف داشته باشند و جایگاه حروف در کلمات اهمیتی نداشته‌باشد؛ یعنی بین ۴ تا ۱۲ حرف از این حروف انتخاب می‌کنیم. به‌عنوان مثال کلمات $abcbcd$ و $abcbcd$ معادل‌اند و یک‌بار شمرده می‌شوند. همچنین مهم نیست کدام حرف‌ها تکرار شده‌اند و برای هر کلمه تنها تعداد دفعات تکرار مهم است، به‌عنوان مثال کلمات $aabcd$ و $abbbcd$ نیز معادل‌اند و یک‌بار شمرده می‌شوند. با استفاده از تابع مولد، تعداد کلمات به‌دست‌آمده طبق این شروط را برای طول‌های بین ۴ تا ۱۲ به‌دست آورید.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید اگر تابع مولد تعداد راه‌های نوشتن یک عدد صحیح به صورت جمع حداکثر k عدد صحیح را با $P^{(\leq k)}(z)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P^{(\leq k)}(z) = \prod_{m=1}^k \frac{1}{1-z^m}$$