

۱. ثابت کنید سری مثلثاتی  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  در سراسر  $\mathbb{R}$  همگراست، ولی سری فوریه هیچ تابع قطعه به قطعه پیوسته با دوره تناوب  $2\pi$  نیست.

۲.

الف: بسط های سینوسی و کسینوسی تابع  $f(x) = \sin x$  را روی  $(0, \pi)$  به دست آورید.

ب: مطلوب است محاسبه سری فوریه تابع  $f(x) = \sin x$  به شکل کلاسیک و مختلط.

ج: با استفاده از قسمت الف مقدار سری  $S = \frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$  را به دست آورید.

۳. در سری فوریه سینوسی  $f(x) = [x] + 1$ ،  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، ضریب  $\sin 5x$  را به دست آورید.

۴. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل منظم زیر را روی  $[1, 2]$  بیابید. سپس سری فوریه تعمیم یافته به دست آمده را برای توابع  $f(x) = 1$  و  $g(x) = x$  به دست آورید.

$$\begin{cases} (x^2 y')' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

۵. در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع  $f(x) = x^2$ ،  $-L \leq x \leq L$ ، به صورت  $(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{L}$  باشد،  $\frac{1}{\pi} L^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{(n\pi)^2}$ ، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع  $g(x) = \frac{x}{\pi} \left( \frac{x^2}{L^2} - 1 \right)$  را به دست آورید.