ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم | منطق | زمان تحویل: ۲۰ اسفندماه

مسئله‌ی ۱ *. نقیض عبارت منطقی

نقیض عبارت منطقی زیر را به‌دست آورید:

$$\exists x \forall y \big(P(x,y) \land \exists x (P(x,y) \to Q(x)) \big)$$

حل.

$$\begin{aligned}
&\neg \exists x \forall y \big(P(x,y) \land \exists x (P(x,y) \to Q(x)) \big) \\
&= \forall x \neg \forall y \big(P(x,y) \land \exists x (P(x,y) \to Q(x)) \big) \\
&= \forall x \exists y \neg \big(P(x,y) \land \exists x (P(x,y) \to Q(x)) \big) \\
&= \forall x \exists y \big(\neg P(x,y) \lor \neg \exists x (P(x,y) \to Q(x)) \big) \\
&= \forall x \exists y \big(\neg P(x,y) \lor \forall x \neg (\neg P(x,y) \lor Q(x)) \big) \\
&= \forall x \exists y \big(\neg P(x,y) \lor \forall x (P(x,y) \land \neg Q(x)) \big)
\end{aligned}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲ *. سه تفنگدار

شخصی در منزل خود به قتل رسیده است و پلیس ۵ نفر به نام‌های سروش، سبحان، سالار، سینا و سپهر را به عنوان مظنون دستگیر کرده است و در بازجویی از آن‌ها هر یک، دو نفر را به عنوان قاتل معرفی کرده است. می‌دانیم دقیقاً سه نفر از این پنج نفر در قتل مشارکت داشته‌اند و چنانچه فرد قاتل باشد؛ نام یک قاتل و یک بی‌گناه و چنانچه فرد بی‌گناه باشد؛ نام دو قاتل را بر زبان آورده است. با توجه به اظهارات این افراد، پلیس چند قاتل را می‌تواند با قطعیت تشخیص دهد؟

- سروش: سبحان و سالار قاتل هستند.
- سبحان: سروش و سالار قاتل هستند.
- سالار: سبحان و سپهر قاتل هستند.
- سینا: سالار و سپهر قاتل هستند.
- سپهر: سبحان و سینا قاتل هستند.

حل.

بی‌گناه بودن سروش، سبحان، سالار، سینا و سپهر را به‌ترتیب با گزاره‌های a، b، c، d و e نشان می‌دهیم.
اکنون دو حالت کلی داریم :

حالت اول: سروش بی‌گناه است یعنی a درست است. بنابراین، گفته‌های او درست بوده و سبحان و سالار قاتل هستند. یعنی $\neg b$ و $\neg c$. سالار سبحان را به درستی قاتل معرفی کرده‌است، بنابراین شخص دیگری که نام برده یعنی سپهر بی‌گناه است. یعنی e و چون سپهر قاتل‌ها را درست معرفی می‌کند، سینا نیز قاتل است یعنی $\neg d$. بنابراین در این حالت با قطعیت می‌توان گفت که سبحان و سالار و سینا قاتل هستند.

حالت دوم: سروش گناهکار است یعنی $\neg a$. بنابراین دو حالت دیگر پیش می‌آید:

الف) $\neg b$ و c: در این حالت سبحان نیز گناهکار است و سالار بی گناه. چون سالار راستگو است نام فرد دوم یعنی سپهر را نیز به‌درستی به‌عنوان قاتل بر زبان آورده‌است یعنی $\neg e$ و چون سپهر سبحان را به‌درستی قاتل معرفی کرده‌است، پس سینا بی‌گناه است یعنی d. چون سینا راستگو است بنابراین سالار گناهکار است یعنی $\neg c$ که با فرض اولیه که شامل بی‌گناه بودن سالار یعنی c بود در تناقض است. بنابراین این حالت امکان‌پذیر نمی‌باشد.

ب) $\neg c$ و b : در این حالت سالار گناهکار است و اسم سبحان را به‌اشتباه آورده‌است. بنابراین سپهر قاتل است یعنی $\neg e$ و سپهر نیز نام سبحان را به‌اشتباه آورده‌است بنابراین سینا قاتل است یعنی $\neg d$ بنابراین در این حالت داریم $\neg a$ و $\neg c$ و $\neg d$ و $\neg e$ که نشان می‌دهد بیشتر از ۳ قاتل داریم که تناقض است. بنابراین این حالت نیز امکان‌پذیر نیست.

حالت‌بندی بالا نشان می دهد تنها حالت ممکن همان حالتی است که سبحان و سالار و سینا قاتل هستند. بنابراین پلیس می‌تواند هر ۳ قاتل را با قطعیت تشخیص دهد.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳*. استنتاج منطقی

به کمک قواعد استنتاج نشان دهید اگر داشته باشیم:

$$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x)) \quad (۱)$$
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \quad (۲)$$
$$\forall x(R(x) \to \neg S(x)) \quad (۳)$$
$$\exists x \neg P(x) \quad (۴)$$

آن‌گاه داریم:

$$\exists x \neg R(x).$$

حل.

(۵)	حذف سور وجودی از فرض (۴)	$\neg P(a)$
(۶)	حذف سور عمومی از فرض (۲)	$P(a) \vee Q(a)$
(۷)	قیاس فصلی(۵) و (۶)	$Q(a)$
(۸)	حذف عمومی از فرض (۱)	$\neg Q(a) \vee S(a)$
(۹)	قیاس فصلی (۷) و (۸)	$S(a)$
(۱۰)	حذف عمومی از فرض (۳)	$R(a) \rightarrow \neg S(a)$
(۱۱)	رفع تالی	$\neg R(a)$
(۱۲)		$\exists x \neg R(x)$

▷

مسئله‌ی ۴. گزاره‌های نامعلوم

فرض کنید p، q، s و t گزاره و $P(x)$ و $Q(x)$ گزاره‌نما باشند. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. در صورت درستی گزاره آن را به کمک قواعد استنتاج اثبات کنید و در صورت نادرستی مثال نقضی برای آن ارائه دهید.

الف) $(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (s \vee t)$

ب) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x P(x, x)$

ج) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$

حل.

الف) درست است؛ از فرض‌های p و $p \rightarrow q$ ، q را نتیجه می‌گیریم. بنابراین $\neg q$ صحیح نیست بنابراین r نیز نادرست است؛ طبق $s \vee r$ و نادرستی r، صحت s و در نتیجه $s \vee t$ نتیجه خواهد شد.

ب) نادرست است؛ به عنوان مثال نقض فرض کنید $P(x, y)$ درست باشد اگر و فقط اگر x و y نابرابر باشند. در این صورت به‌ازای هر x، y ای وجود دارد که با آن برابر نیست، اما هیچ x ای وجود ندارد که با خودش برابر نباشد.

ج) نادرست است؛ ادعا می‌کنیم این گزاره از راست به چپ همواره درست نیست. حال برای گزاره‌ی زیر مثال نقضی می‌آوریم.

$$(\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

فرض کنید گزاره $P(x)$ زوج بودن x و گزاره $Q(x)$ فرد بودن x را نشان دهد. چون هیچ‌یک از این دو گزاره همواره صحیح نیستند بنابراین $\forall x Q(x)$ و $\forall x P(x)$ عباراتی غلط بوده و گزاره‌ی $\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$ درست است. ولی سمت راست همواره درست نیست.

به عنوان مثال نقض فرض کنید $x = ۲$. $P(۲) \rightarrow Q(۲)$ عبارتی غلط بوده و xای وجود دارد که $P(x) \not\rightarrow Q(x)$. بنابراین $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ نادرست است.

▷

مسئله‌ی ۵. دستگاه منطق

دستگاهی از منطق داریم که در آن به ازای گزاره‌های دلخواه ϕ و ψ و θ اصول و قضایای زیر همواره صحیح است.

(الف)	$\phi \to (\psi \to \phi)$
(ب)	$(\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$
(ج)	$(\phi \to (\psi \to \theta)) \to (\psi \to (\phi \to \theta))$
(د)	$(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$
(ه)	$((\psi \to \phi) \wedge (\phi \to \theta)) \to (\psi \to \theta)$
(و)	$\psi \to \psi$

تنها قانون نتیجه‌گیری در این دستگاه وضع مقدم است. (از صحیح بودن $a \to b$ و a می‌توان صحت b را نتیجه گرفت.)

الف) تنها با استفاده از اصول و قضایای بالا ثابت کنید در این دستگاه، عبارات $\neg(\neg a) \to a$ و $a \to \neg(\neg a)$ راستگو هستند.

ب) با استفاده از اصول و قضایای بالا و قسمت (الف) ثابت کنید در این دستگاه، عبارت زیر راستگو است.

$$(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$$

حل.

الف) اگر در (الف) $\neg a$ و $\neg b$ را جایگذاری کنیم داریم:

$$\neg a \to (\neg b \to \neg a)$$

با استفاده از (د) داریم:

$$(\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$$

با استفاده از (ه) و دو گزاره‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\neg a \to (a \to b)$$

در عبارت بالا به‌جای a، $\neg a$ و به‌جای b، $\neg\neg\neg a$ را قرار می‌دهیم.

$$\neg\neg a \to (\neg a \to \neg\neg\neg a)$$

در عبارت (د) به‌جای ψ، $\neg\neg a$ را قرار می‌دهیم.

$$(\neg a \to \neg\neg\neg a) \to (\neg\neg a \to a)$$

با استفاده از (ه) و دو گزاره‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\neg\neg a \to (\neg\neg a \to a)$$

با جایگذاری $\neg\neg a$ به‌جای ϕ و ψ و a به‌جای θ در عبارت (ب) خواهیم داشت:

$$(\neg\neg a \to (\neg\neg a \to a)) \to ((\neg\neg a \to \neg\neg a) \to (\neg\neg a \to a))$$

با استفاده از دو گزاره‌ی بالا، اصل استنتاج و (و) خواهیم داشت:

$$\neg\neg a \to a$$

در عبارت بالا $\neg a$ را قرار می‌دهیم:

$$\neg\neg\neg a \to \neg a$$

با جای‌گذاری $\neg\neg a$ به‌جای ϕ و a به‌جای ψ در عبارت (د) خواهیم داشت:

$$(\neg\neg\neg a \to \neg a) \to (a \to \neg\neg a)$$

با استفاده از دو گزاره‌ی بالا و اصل استنتاج داریم:

$$a \to \neg\neg a$$

ب) در اصل (الف) به‌جای ϕ، $b \to \neg\neg b$ و به‌جای ψ، $\neg a$ را قرار می‌دهیم.

$$(b \to \neg\neg b) \to (\neg a \to (b \to \neg\neg b))$$

طبق اصل استنتاج و $b \to \neg\neg b$ طبق قسمت (الف) داریم:

$$\neg a \to (b \to \neg\neg b) \quad \star$$

اگر در اصل (ج) به‌جای ϕ، $\neg a$ و به‌جای ψ، b و به‌جای θ، $\neg\neg b$ را قرار دهیم، داریم:

$$(\neg a \to (b \to \neg\neg b) \to ((\neg a \to b) \to (\neg a \to \neg\neg b))$$

طبق رابطه‌ی $(\star)$ و اصل استنتاج خواهیم داشت:

$$(\neg a \to b) \to (\neg a \to \neg\neg b)$$

طبق رابطه‌ی (د) و با جای‌گذاری a به‌جای ψ، و $\neg b$ به‌جای ϕ داریم:

$$(\neg a \to \neg\neg b) \to (\neg b \to a)$$

طبق دو رابطه‌ی قبل و قضیه‌ی (ه) نتیجه می‌گیریم:

$$(\neg a \to b) \to (\neg b \to a)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶. گزاره‌های معادل

فرض کنید $P(x,y)$، $Q(x,y)$ و $R(x)$ گزاره‌نما باشند. معادل بودن عبارت‌های منطقی زیر را نشان دهید.

$$\neg\forall x\big((\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)) \vee R(x)\big) \equiv \exists x\big(\neg R(x) \wedge \forall y(\neg Q(x,y) \wedge P(x,y))\big)$$

حل.

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x\big((\exists y(P(x,y)\to Q(x,y))\vee R(x)\big)\\
&=\exists x\neg\big((\exists y(P(x,y)\to Q(x,y)))\vee R(x)\big)\\
&=\exists x\big(\neg(\exists y(P(x,y)\to Q(x,y)))\wedge\neg R(x)\big)\\
&=\exists x\big(\neg R(x)\wedge(\forall y\neg(P(x,y)\to Q(x,y)))\big)\\
&=\exists x\big(\neg R(x)\wedge(\forall y\neg(\neg P(x,y)\vee Q(x,y)))\big)\\
&=\exists x\big(\neg R(x)\wedge(\forall y(P(x,y)\wedge\neg Q(x,y))\big)
\end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۷. گزاره‌ی عظیم

با استفاده از برهان خلف گزاره زیر را ثابت کنید.

$$\forall x(r(x)\to\exists y(r(y)\wedge p(x,y)))\equiv\forall x\exists y(r(x)\to(r(y)\wedge p(x,y))$$

حل.

طرف چپ گزاره را p و طرف راست را q می‌نامیم. ابتدا $q\to p$ را ثابت می کنیم. فرض کنید این گزاره نادرست باشد، یعنی p درست و q نادرست باشد. چون q نادرست است، بنابراین x ای مانند $x_.$ وجود دارد که گزاره $\exists y(r(x_.)\to(r(y)\wedge p(x_.,y)))$ نادرست باشد. بنابراین به‌ازای هر y، $r(x_.)\to(r(y)\wedge p(x_.,y))$ نادرست خواهد بود که یعنی $r(x_.)$ درست و به‌ازای هر y، $r(y)\wedge p(x_.,y)$ نادرست است. بنابراین $r(x_.)$ درست و $\exists y(r(y)\wedge p(x_.,y))$ نادرست است. که یعنی $r(x_.)\to(r(y)\wedge p(x_.,y))$ نادرست است و در نتیجه

$$\forall x(r(x)\to\exists y(r(y)\wedge p(x,y)))$$

نبر نادرست است. که با درست بودن p که در ابتدا فرض کرده بودیم در تناقض است. اثبات طرف دیگر قضیه نیز با روشی مشابه قابل انجام است و مراحل ذکر شده بازگشت پذیر خواهند بود.

▷