ریاضیات مهندسی   جلسه‌ی ۱

منابع درس:

۱) ریاضیات مهندسی تألیف دکتر پورنکی، دکتر حصارکی و دکتر فتوحی
انتشارات علمی دانشگاه شریف و انتشارات فاطمی

۲) ریاضیات مهندسی پیشرفته تألیف Erwin Kreyszig ترجمه دکتر زنگنه
و ... جهان دیده یا ترجمه‌ی دکتر عالم زاده

ارزیابی درس:

میان ترم: پنج شنبه ۹۸/۱/۲۹ ساعت ۱۳ از بخش اول درس ۵۰٪ نمره

پایان ترم: ۹۸/۳/۲۲ ساعت ۳:۳۰′ از بخش دوم درس ۵۰٪ نمره

سرفصل درس:

بخش ۱:

سری فوریه - سری فوریه توابع فرد و زوج - توسیع تناوبی (سطح نیم برد)
شکل مختلط سری فوریه - مشتق گیری و انتگرال گیری از سری فوریه
سری فوریه‌ی تعمیم یافته - تبدیل فوریه - معادله‌ی اشتورم - لیوویل
معادلات دیفرانسیل پاره ای - حل معادله‌ی موج و لاپلاس به روش جداسازی
متغیرها

ngineering

بخش ۲:

یادآوری ویژگی های اعداد مختلط - توابع تحلیلی - روابط کشی - ریمان
توابع نمایی، مثلثاتی، هذلولوی، لگاریتمی و توان - نگاشت توابع
تحت توابع خاص - انتگرال روی خم - قضیه ی انتگرال کشی - سری
توان - سری تیلور - سری لوران - نقاط تکین و قطب - مانده - محاسبه ی
برخی از انتگرال های نا سره به کمک قضیه ی مانده ها

سری فوریه:

پدیده‌های مختلفی در طبیعت به وسیله‌ی توابع متناوب مدل می‌شوند. این توابع ممکن است حتی پیوسته هم نباشند و در نتیجه برای آن‌ها بسط تیلور وجود ندارد. می‌خواهیم به جای بسط تیلور از تکنیک جدیدی موسوم به بسط فوریه برای توابع متناوب استفاده کنیم.

پیش از مطرح کردن سری فوریه، به یادآوری چند ویژگی توابع متناوب می‌پردازیم:

در این بخش توابع مورد نظر حقیقی (مقدار) هستند و دامنه‌ی آن‌ها $D \subseteq \mathbb{R}$ می‌تواند هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ باشد ولی برای سادگی بیشتر مباحث در مورد توابعی بیان می‌شود که دامنه‌ی آن‌ها $\mathbb{R}$ است.

تابع متناوب: گوییم f دارای دوره‌ی تناوب $P \neq 0$ است، هرگاه

$$\forall x: f(x+P) = f(x) \qquad (*)$$

۱- کوچک‌ترین P که در $(*)$ صدق می‌کند (در صورت وجود) دوره‌ی تناوب اصلی نامیده می‌شود.

مثال:

برای $f(x)=\sin x$ ، $P=2\pi$ دوره‌ی تناوب اصلی است.

" $f(x)=\cos x$ ، " " " " "

" $f(x)=\sin nx$ ، $P=\frac{2\pi}{n}$ " " " "

" $f(x)=\cos nx$ ، " " " " "

۲- اگر f و g توابع متناوب با دوره‌ی تناوب P باشند، $\lambda f+g$ نیز متناوب است با دوره‌ی تناوب P.

۳- اگر f متناوب با دوره تناوب P باشد، $2P$ ، $3P$ ، ... ، nP نیز یک دوره تناوب f است.

۴- اگر f روی یک دوره‌ی تناوب مثلاً $[0, T]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

$\alpha\in\mathbb{R}$

فوریه در مطالعه‌ی مسئله‌ی انتقال حرارت، ادعا کرد که هر تابع متناوب که در مسائل فنی و مهندسی ظاهر می‌شود، به شکل زیر قابل نمایش است:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

تمام توابع در مجموعه‌ی $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ دارای دوره

تناوب 2π هستند.

مجموعه‌ی مثلثاتی

در گام نخست، همچون فوریه می‌خواهیم با فرض درستی این ادعا

مقادیر a_0، a_n و b_n را بدست آوریم.

برای این منظور، فرض کنید

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

در این صورت، تحت شرایطی که بعداً مطرح می‌شود داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

نمایش سری فوریه:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad ①$$

می‌خواهیم رابطه‌ی a_0 ، a_1 ، ... ، a_n را با f بدست آوریم.

اگر تابع متناوب f در یک دوره‌ی تناوب (2π) با سری فوریه‌ی ① برابر باشد، داریم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (*)$$

با انتگرال گیری از دو طرف در بازه‌ی $(-\pi , \pi)$ و با پذیرش این که $\int$ با $\sum$ جابه جای شود، نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] dx =$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}}_{0} + b_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx}}_{0} \right] =$$

$$= 2\pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی $(*)$ در $\cos mx$ ($m \in N$ دلخواه) و انتگرال گیری روی $(-\pi , \pi)$ و با پذیرش همان شرایط قسمت قبل داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx\cos mx +$$

$$+ b_n\sin nx\cos mx\big)\Big]dx =$$

$$= a_0\underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx}}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx +$$

$$+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\Big)$$

یادآوری:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big]\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big]\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big]\end{aligned}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\big]dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

به شکل مشابه داریم:

$$\forall n,m:\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0$$

به این ترتیب داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos m \, dx$$

با بحث مشابه و با ضرب دو طرف $(*)$ در $\sin mx$ خواهیم داشت:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

برخی از مؤلفین به‌جای $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ برای نمایش سری فوریه، از شکل زیر استفاده می‌کنند:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

مزیت: یکپارچه شدن شکل a_0 و a_m

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

در علوم فنی و مهندسی دوره‌ی تناوب تابع لزوماً 2π نیست

برای سادگی فرض کنیم f تابعی با دوره تناوب $T = 2L$ است.

یادآوری: f را روی بازه‌ی $[a, b]$ قطعه‌قطعه پیوسته گوییم هرگاه حداکثر در تعداد متناهی نقطه از این بازه ناپیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ

وراست f وجود داشته (متناهی) باشد.

قضیه (دیریکله)

فرض کنیم f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=2l$ باشد، در این صورت

اگر f و f' در یک دوره‌ی تناوب قطعه به قطعه پیوسته باشند، آنگاه سری فوریه‌ی f یعنی

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

به ازای

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad n=0,1,\dots$$

Text

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

در نقطه‌ی x که f پیوسته است به $f(x)$ و در نقطه‌ی ناپیوسته‌ی x_0 به $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ همگرا است.

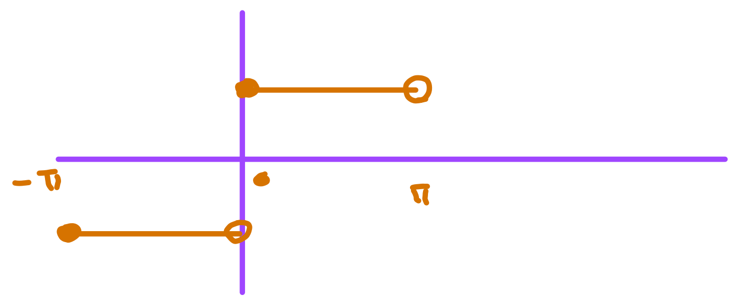
$$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x) \qquad f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

DONE

مثال: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

$$f(x+2\pi)=f(x)$$



را محاسبه کنیم.

$$T = 2\pi = 2L \longrightarrow L = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$\forall n \geq 1: \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin x\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos nx\right] + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi} - \frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \dots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x$$

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

DONE

مثال ۱: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < L \\ 0 & -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$
را محاسبه کنیم.

DONE

مثال ۲: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع
$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$
را محاسبه کنیم.

حل مثال ۱:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{L} x\,dx\right] = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} 0\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \int_{0}^{L} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{dv} = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x - \int \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx =$$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} x + C$$

$$u = x \qquad dv = \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^{0} 0 \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$b_n = - \frac{(-1)^n L}{n\pi}$$

ریاضیات مهندسی جلسه ۳

اگر f یک تابع حقیقی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=2L$ باشد، بسط فوریه‌ی f عبارت است از:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

این سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

درحالت کلی نیز می‌نویسیم:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

چند نکته درمورد سری فوریه:

اتحاد پارسوال:

اگر f یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب $T=2l$ در بازه‌ی $(-l,l)$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه ضرایب فوریه‌ی f، a_n، b_n در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx$$

Done

مثال: فرض کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{2}(\pi-x) & 0<x<2\pi \\ 1 & x=2\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

دراین صورت ضرایب بسط فوریه را بدست آورید.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)=0$$

$$\forall n\geq 1:\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}$$

استفاده از اتحاد پارسوال:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n\geq 1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}(\pi-x)\right)^2dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

تمرین: نشان دهید بسط فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=x^4$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$

$-\pi \leq x \leq \pi$ عبارت است از:

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos n\pi x$$

و به کمک آن ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

راهنمایی: مقدار سری فوریه را در $x=\pi$ محاسبه کنید.

بسط فوریه‌ی توابع فرد و زوج:

یادآوری:

f فرد است $\Leftrightarrow$ $\forall x: f(-x) = -f(x)$

f زوج است $\Leftrightarrow$ $\forall x: f(-x) = f(x)$

حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

حاصل ضرب تابع زوج و فرد، تابعی فرد است.

حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

برای تابع فرد: $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$

برای تابع زوج: $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$

درنتیجه برای توابع زوج وفرد، بسط فوریه شکل ساده تری پیدا می کند.

اگر f تابع متناوب زوجی با دوره ی تناوب $T=2L$ باشد، آنگاه:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

و درنتیجه سری فوریه ی f به شکل زیر است:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

با بحث مشابه برای تابع فرد f و مشخصات مشابه داریم:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

DONE

مثال: برای $f(x)=x\ ,\ -\pi\leq x\leq\pi\ ,\ f(x+2\pi)=f(x)$

$$T=2\pi \longrightarrow L=\pi$$

داریم:

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

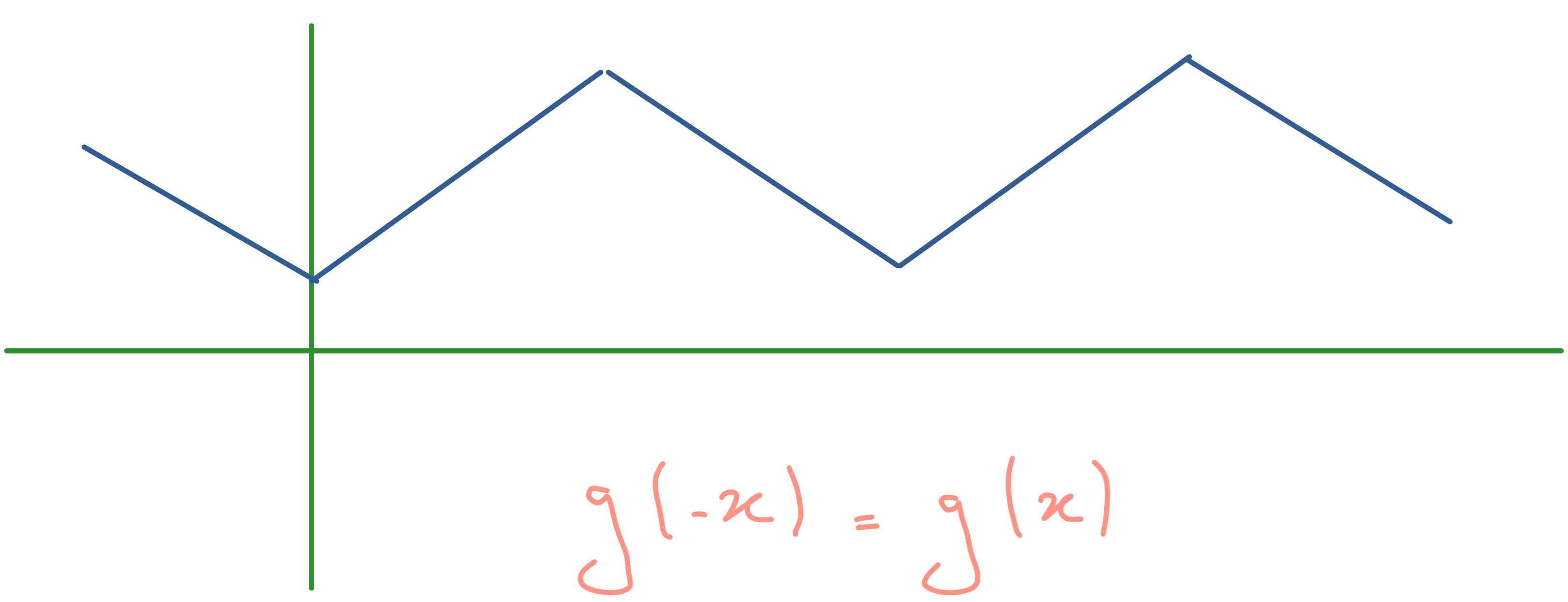
$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

بسط تناوبی زوج و فرد :

فرض کنیم f تابعی باشد که لزوماً متناوب نیست. از روی ضابطه‌ی f در $(0,L)$ می‌توانیم یک تابع متناوب زوج یا فرد روی $(-L,L)$ به شکل زیر داشته باشیم:

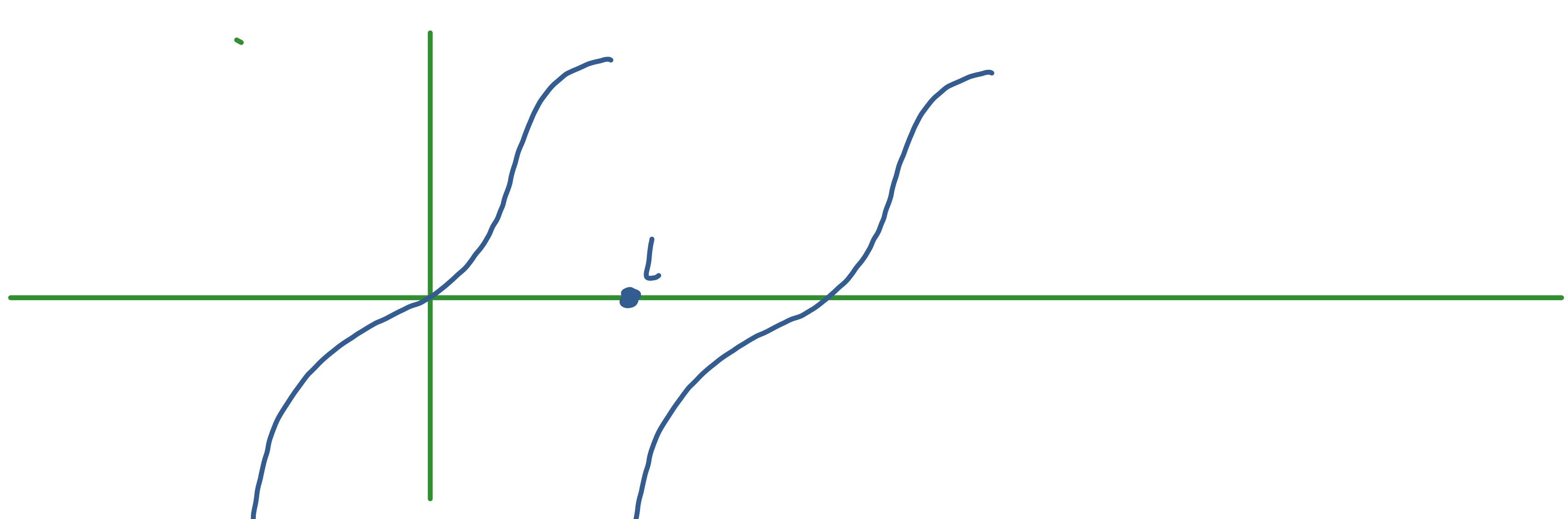
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ f(-x) & -L<x<0 \end{cases} \qquad g_1(x+2L) = g(x)$$



$$g(-x) = g(x)$$

به شکل مشابه:

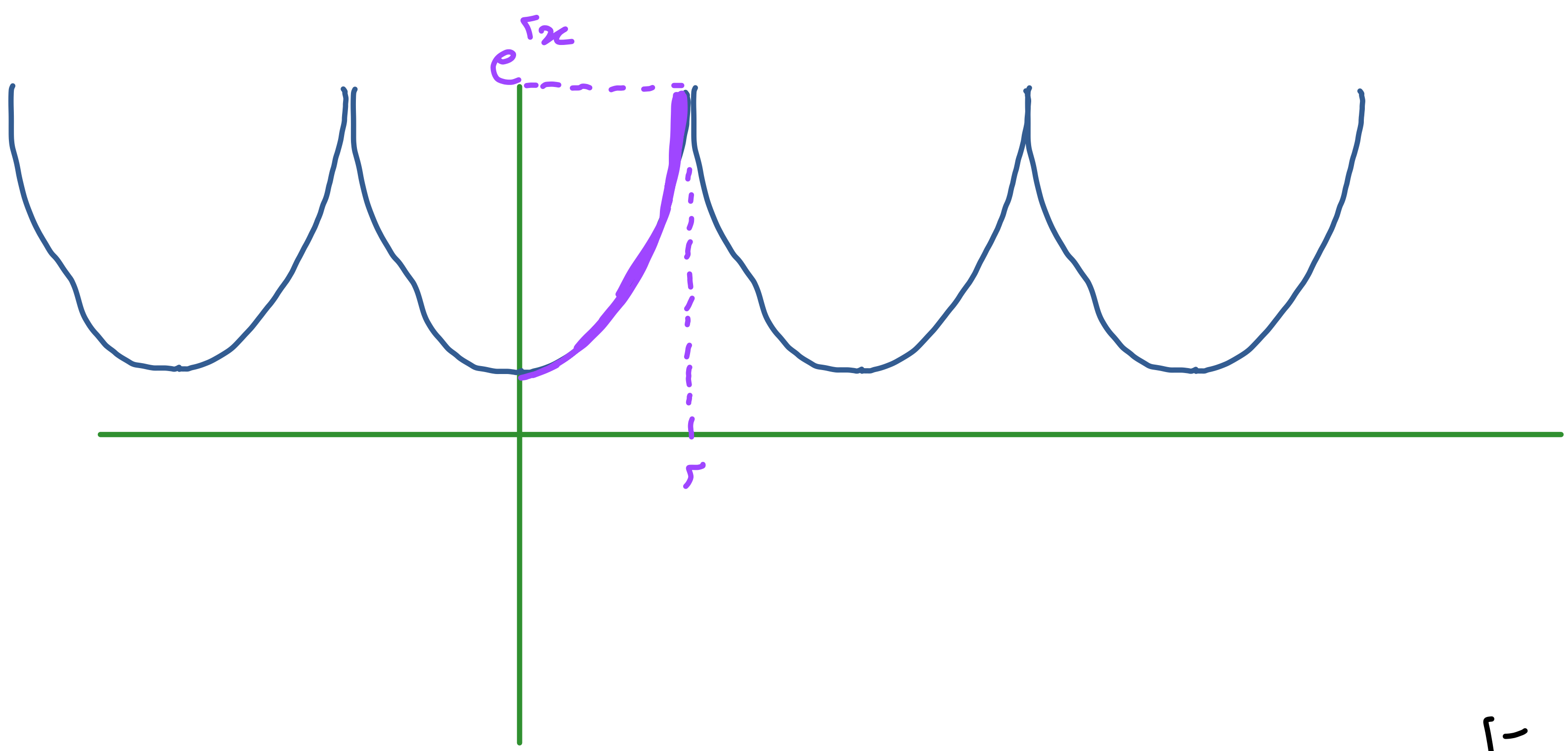
$$\text{فرد } g(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases} \qquad g_2(x+2L) = g(x)$$



g_1 را گسترش متناوب زوج و g_2 را گسترش متناوب زوج گوییم.

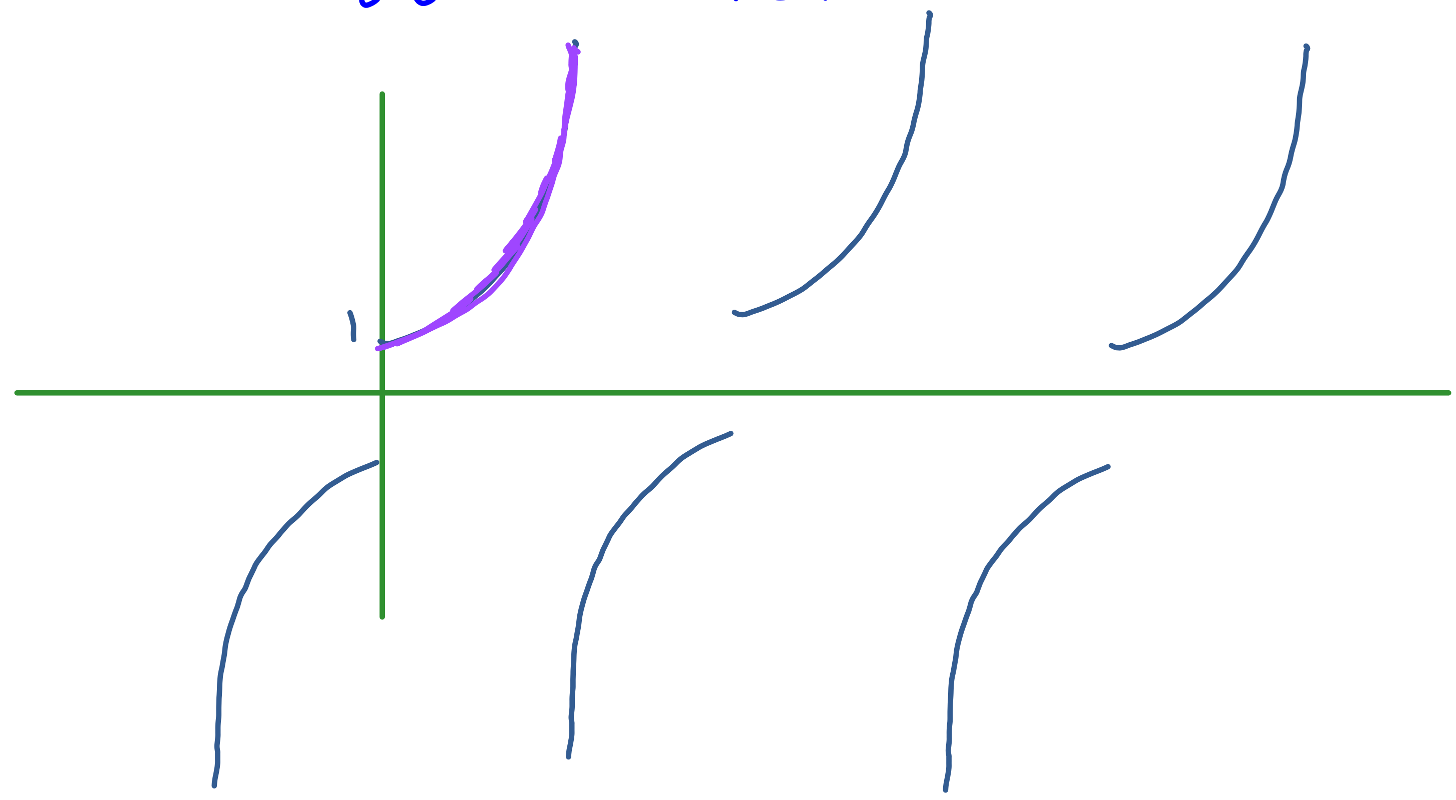
مثال: $f(x)=e^x$ ، $0<x<2$ ، گسترش f به تابع زوج عبارت است از:

$$g_1(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<2 \\ e^{-x} & -2<x<2 \end{cases} \qquad g_1(x+4)=g_1(x)$$



گسترش f به تابع فرد:

$$g_2(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<2 \\ -e^{-x} & -2<x<0 \end{cases}$$



تمرین: سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=e^x$ ، $0<x<2$ را بدست آورید

نمایش مختلط بسط فوریه:

یادآوری:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (*) \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

بدین ترتیب اگر داشته باشیم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

با کمک فرمول (*) داریم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + \beta_n e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

با یک قرارداد ساده به فرمول ساده‌تر زیر می‌رسیم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx$$

تمرین: فرض کنیم $f(x) = \cosh x \quad -\pi \leq x \leq \pi$ ، $f(x+2\pi) = f(x)$ ضرایب مختلط

بسط فوریه‌ی f را محاسبه کنید.

ریاضیات مهندسی جلسه ۴

مثال: تابع متناوب f با دوره‌ی تناوب 2π در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ با ضابطه‌ی $f(x) = \cosh x$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ مفروض است. می‌خواهیم نمایش مختلط سری فوریه‌ی f را بدست آوریم.

$T = 2L$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad L = \pi$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x \, e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \right) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-1}{1+in} e^{-(1+in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^{n}$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi) = (-1)^n$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)(-1)^n + \frac{1}{1+in}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n \sinh\pi}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n \sinh x}{\pi(1+n^2)}$$

$$\cosh x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{inx}$$

قضیه: فرض کنیم تابع پیوسته و متناوب f با دوره‌ی تناوب $2L$ در فاصله‌ی $[-L, L]$ به قسمی باشد که $f(-L) = f(L)$ و f' و f'' در $(-L, L)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد. در این صورت سری فوریه‌ی f' از سری فوریه‌ی f با مشتق‌گیری جمله به جمله بدست می‌آید.

اگر f' در $x \in (-L, L)$ پیوسته باشد، سری فوریه‌ی f' به $f'(x)$ همگرا است و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ همگرا است.

مثال: سری فوریه $f(x)=x^2$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ در $(-\pi,\pi)$ عبارت

است از

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

$f(x)=x^2$ تمام ویژگی های لازم قضیه را دارد.

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

قضیه: فرض کنیم f تابع حقیقی متناوب $2l$ ودر $(-l,l)$ قطعه قطعه

پیوسته باشد و $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{\cos n\pi t}{l} + b_n \frac{\sin n\pi t}{l}\right)$

در این صورت برای هر $x \in (-l,l)$ و a داریم:

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^t \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$

مثال:

$$\cosh t = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{int}$$

$$\sinh x = \int_0^x \cosh t\,dt = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \int_0^x e^{int}\,dt$$

$$\int_0^x e^{int}\,dt = \frac{1}{in} e^{int}\Big|_0^x = \frac{1}{in}\left(e^{inx}-1\right) =$$

$$= -\frac{i}{n} e^{inx} + \frac{i}{n}$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \left(\frac{-i e^{inx}}{n} - \frac{i}{n} \right) =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{n^2+1} e^{inx} + \underbrace{\cancel{C}}_{\text{چون تابع فرد است}}{}^{0}$$

تمرین: برای
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$
و $f(x+2\pi) = \overset{=x}{2\pi}$

قضیه را بکار برده و سری فوریه ی $|x|$ را محاسبه کنید.

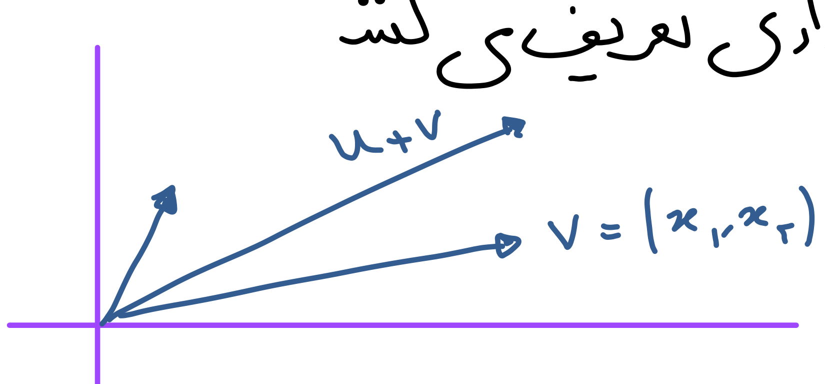
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} t$$

$$\begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 < x \leq 0 \end{cases} = \int_0^x f(t)\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum \int_0^x \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} dt$$

تعمیم سری فوریه به توابع متعامد یکه

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ توسط جمع برداری و ضرب اسکالری یک ساختار بسیار مهم ریاضی موسوم به فضای برداری تعریف می کند.



برای

$$u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$$

$$v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$v+u=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad \lambda u=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$$

مشاهده می‌شود که:

$$\forall u,v\in\mathbb{R}\qquad u+v=v+u$$

$$\forall u,v,w\in\mathbb{R}^2\qquad u+(v+w)=(u+v)+w$$

$$\exists\, 0\in\mathbb{R}^2\quad \forall u\in\mathbb{R}^2\qquad 0+u=u+0=u$$

$$\forall u\in\mathbb{R}^2\quad \exists(-u)\in\mathbb{R}^2\qquad u+(-u)=(-u)+u=0$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^2\qquad \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$$

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \forall u\in\mathbb{R}^2\qquad (\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$$

$$\forall u\in\mathbb{R}^2\qquad 1u=u$$

مثال: توابع قطعه به قطعه پیوسته روی $[a,b]$ که با نماد $PC([a,b],\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شوند با جمع برداری و ضرب اسکالری زیر ویژگی‌های

هفت گانه‌ی فوق را دارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

به طور کلی مجموعه‌ی V که روی آن یک جمع برداری و ضرب اسکالری تعریف شده باشد و ویژگی های ۱ تا ۷ را داشته باشد، فضای برداری (حقیقی) نامیده می‌شود.

در یک فضای برداری V برای بردارهای $v_1, \dots, v_n$ بردار

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

را یک ترکیب خطی $v_1, \dots, v_n$ می نامیم.

مثال: در $\mathbb{R}^2$ $(21,3) = v = 2(1,3) + 4(1,-1) + 5(3,-1)$

بردارهای $v_1, \dots, v_n$ را مستقل خطی گوییم هرگاه تنها ترکیب خطی از آن‌ها که صفر می‌شود، ترکیب خطی بدیهی باشد:

اگر $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$، آنگاه $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

مثال: $i = (1,0)$ و $j = (0,1)$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی هستند.

ریاضیات مهندسی جلسه ۵

بردارهای $v_1, \dots, v_n$ در فضای برداری $\bar{V}$ را مستقل گوییم هرگاه:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

مثال: i و j در $\mathbb{R}^2$ مستقلند.

گوییم بردارهای $v_1, \dots, v_n$ فضای برداری $\bar{V}$ را تولید می‌کنند هرگاه برای هر $v \in \bar{V}$ اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود داشته باشد که:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی که فضای $\bar{V}$ را تولید کنند، پایه‌ی فضا نامیده می‌شوند.

مثال: $\{\overset{j}{(0,1)}, \overset{i}{(1,0)}\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ هستند.

تذکر: پایه، یکتا نیست.

تذکر: بین پایه‌های مختلف یک فضا تناظری یک به یک و پوشا وجود دارد (اصطلاحاً هم عددند)

درحالت خاص اگر یک پایه‌ی متناهی برای فضای $\bar{V}$ داشته باشیم تمام

پایه‌های V متناهی و تعداد یکسانی عضو دارند. به‌ای تعداد عناصر پایه، بعد فضا می‌گوییم. اگر $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ی V باشد، می‌نویسیم:

$$\dim V = n$$

تذکر: با این تعریف از پایه، هر بردار فضا را می‌توان به شکل یکتایی برحسب بردارهای پایه‌ی $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ نمایش داد.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

n تایی $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ را مختصات v در پایه‌ی B می‌نامیم.

مثال: در $\mathbb{R}^2$، $v=(3,4)$

$$v = 3i + 4j \quad \longrightarrow \quad i=(1,0) \quad \text{و} \quad j=(0,1)$$

فضای برداری توابع قطعه به قطعه پیوسته روی $[a,b]$ یعنی $PC([a,b],\mathbb{R})$ یک فضای برداری با بعد نامتناهی است.

ضرب داخلی:

در فضای $\mathbb{R}^2$ برای $u=(x_1,y_1)$ و $v=(x_2,y_2)$ ضرب داخلی عبارت است از:

$$u.v = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

نمادگذاری های دیگر:

$\langle u, v\rangle$ و $\langle u | v\rangle$

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle = u.v$$

برای ضرب داخلی داریم:

۱) $\forall v \in \mathbb{R}^2 : \langle v,v\rangle \geq 0$

$$\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0$$

۲) $\forall u,v \in \mathbb{R}^2 \quad \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

۳) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^2 :$

$$\langle \lambda v_1 + \mu v_2 , u\rangle = \lambda \langle v_1 , u\rangle + \mu \langle v_2 , u\rangle$$

فضای برداری V همراه با یک نگاشت $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$$

که ویژگی های ۱ و ۲ و ۳ برای آن برقرار است را یک فضای ضرب داخلی

می نامیم.

مثال مهم: فضای $PC([-L,L],\mathbb{R})$ را در نظر بگیریم. تحقیق می‌شود (تمرین) که نگاشت زیر، یک ضرب داخلی است،

$$\langle\ ,\ \rangle_r : PC([-L,L],\mathbb{R}) \times PC([-L,L],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longmapsto \int_{-L}^{L} f(x)\,g(x)\,r(x)\,dx$$

r تابعی مثبت و پیوسته است.

در حالت خاص $r=1$:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)\,g(x)\,dx$$

به عنوان مثال خاص‌تر:

$$V = PC([-L,L],\mathbb{R})$$

$$f(x) = \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad g(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

از این به بعد $r \equiv 1$:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

برای بردار $v \in V$ که V مجهز به یک ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ است، نرم v عبارت است از:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

مثال: روی $\mathbb{R}^2$، ضرب داخلی استاندارد

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$$

برای $u, v \in V$، فاصله‌ی u و v عبارت است از:

$$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$$

بردار u را یکه گوییم هرگاه $\|u\| = 1$

مثال: در $\mathbb{R}^2$ $\|\vec{i}\| = \|j\| = 1$

تذکر: اگر $u \neq 0$، دلخواه باشد $\frac{u}{\|u\|}$ برداری یکه است.

دو بردار u و v را در فضای ضرب داخلی V متعامد گوییم، هرگاه $\langle u, v\rangle = 0$

مثال: در مجموعه‌ی زیر هر دو بردار متمایز برهم متعامدند و یکه.

$$O = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\sin\frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos\frac{m\pi x}{L}}{\sqrt{L}} : m, n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\| \sin\frac{n\pi x}{L} \right\| = \sqrt{\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L} \right\rangle} = \sqrt{\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx} =$$

$$= \sqrt{L}$$

اکنون فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد و $O = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد. سری با جمع جزئی

$$c_k \in \mathbb{R} \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$$

را همگرا به v گوییم. هرگاه

$$\lim_{n \to +\infty} \| S_n - v \| = 0$$

به سری $\sum_{k=1}^{n} c_k v_k$ سری فوریه‌ی نظیر O گوییم. می‌خواهیم c_kها را محاسبه کنیم.

$$\langle S_n , v_m \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_k v_k , v_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle v_k , v_m \rangle = c_m$$

$$\langle v, v_m \rangle = \langle \lim_{n \to +\infty} S_n , v_m \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle S_n , v_m \rangle = \lim_{n \to +\infty} c_m = c_m$$

به این ترتیب اگر V را بتوان به صورت یک سری فوریه برحسب اعضای O نوشت، ضرایب فوریه (c_n ها) عبارتند از:

$$c_m = \langle v, v_m \rangle$$

مثال: به سادگی تحقیق می‌شود اگر:

$$O = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} , \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}} , \frac{\cos \frac{m\pi x}{L}}{\sqrt{L}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

بر تابع $f \in PC([-L,L],\mathbb{R})$ سری فوریه‌ی f نسبت به O همان سری فوریه‌ای است که پیش از این مطرح شد.

$$f = v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n$$

$$C_n = \langle v, v_m \rangle = \int_{-L}^{L} f(x) v_n \, dx$$

جلسه ۶

ریاضیات مهندسی

معادلات دیفرانسیل با مقدار مرزی اشتورم - لیوویل منظم:

$$\begin{cases} \left(p(x)y'\right)' + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 & |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 & |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0 \end{cases}$$

$y = y(x)$ تابع جواب در $[a,b]$

مقادیری از λ که این معادله جواب غیربدیهی را $y \neq 0$ دارد، مقادیر ویژه‌ی معادله و توابع غیربدیهی جواب، توابع ویژه‌ی معادله نامیده می‌شوند.

قضیه: برای یک معادله‌ی دیفرانسیل با مقدار مرزی اشتورم-لیوویل مقادیر ویژه یک دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{\lambda_n\}$ و اگرا به بی‌نهایت تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم y_n تابع ویژه‌ی نظیر λ_n و در فضای ضرب داخلی $PC([a,b], \mathbb{R})$ با ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_r$ توابع $v_n = \dfrac{y_n}{\| y_n \|}$، تشکیل یک مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد $\{v_1, \dots, v_n\} = O$ می‌دهند. برای تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته‌ی f بر $[a,b]$ که f' نیز بر این بازه پیوسته باشد، بسط فوریه‌ی f نسبت به O در

نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگرا است.

مثال: معادله‌ی اشتورم - لیوویل منظم

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

و $r(x) = \frac{1}{x}$ و $a = 1$, $b = e$

را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی نظیر. سپس به کمک آن‌ها بسط فوریه‌ی $f(x) = x$ را نسبت به مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد حاصل بدست آورید.

حالت ۱: $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} (xy')' = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow xy' = C_1 \to y' = \frac{C_1}{x}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \ln x + C_2$$

$$\left.\begin{cases} y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y(e) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \end{cases}\right\} \to C_1 = C_2 = 0$$

در این حالت جواب غیر بدیهی در این معادله وجود ندارد.

حالت ۲: $\lambda < 0$:

می‌توان فرض کرد $\lambda = -\alpha^2$ ، $\alpha > 0$

$$(xy')' - \frac{\alpha^2}{x} y = 0$$

$$y' + xy'' - \frac{\alpha^2}{x} y = 0$$

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' - \alpha^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

$$y = x^m \longrightarrow y' = m x^{m-1} \longrightarrow y'' = m(m-1) x^{m-2}$$

$$m(m-1) + m - \alpha^2 = 0 \longrightarrow m^2 - m + m - \alpha^2 = 0$$

$$m = \pm \alpha$$

$$\Rightarrow y = C_1 x^{\alpha} + C_2 x^{-\alpha}$$

$$y' = \alpha C_1 x^{\alpha - 1} - \alpha C_2 x^{-\alpha - 1}$$

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} \alpha C_1 - \alpha C_2 = 0 \\ C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \end{cases}\right\} \longrightarrow C_1 = C_2 = 0$$

پس در این حالت هم جواب غیر بدیهی وجود ندارد.

حالت ۳: $\lambda > 0$:

می‌توان فرض کرد $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + \alpha^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

معادله‌ی اویلر

$$y = C_1 \cos(\alpha \ln x) + C_2 \sin(\alpha \ln x)$$

$$y' = -\frac{\alpha C_1}{x} \sin(\alpha \ln x) + \frac{C_2 \alpha}{x} \cos(\alpha \ln x)$$

می‌توان $C_1 = 1$ را درنظر گرفت

$$\left.\begin{array}{l} y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 \alpha = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y(e) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

پس در این حالت

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

مقادیر ویژه عبارتند از:

$$y_n = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \ln x\right) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\|y_n\| = \langle y_n , y_n \rangle_r = \int_1^e \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_1^e \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{(2n-1)\pi}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \cos^2 u\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \frac{1+\cos u}{2}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\frac{1}{4}(2n-1)\pi + \frac{1}{4}\sin\left((2n-1)\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \implies \|y_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$O = \left\{v_n : n = 1, 2, \dots\right\} \qquad v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)$$

$$f(x) = x \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

$$c_n = \langle f, v_n\rangle_r = \int_1^e x\sqrt{2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_1^e \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)dx$$

$$\frac{(2n-1)\pi}{2} \ln x = u \Rightarrow \frac{(2n-1)\pi}{2x} dx = du$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2x}{(2n-1)\pi} du \Rightarrow \ln x = \frac{2u}{(2n-1)\pi} \Rightarrow x = e^{\frac{2u}{(2n-1)\pi}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} e^{\frac{2}{(2n-1)\pi} u} \cos u \, du$$

انتگرال و تبدیل فوریه:

دیدیم که برای تابع متناوب و قطعه قطعه پیوسته ی f روی $[-l, l]$ سری فوریه ی $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ بدست می آید که در آن

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx \,,\quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

اکنون می خواهیم برای تابع غیرمتناوب f جایگزین مناسبی برای سری فوریه بدست آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi t}{l} dt\right) \cos\frac{n\pi x}{l} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{n\pi t}{l} dt\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \right] =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(t-x)\right) dt$$

جلسه ۷   ریاضیات مهندسی

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right] =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} +\right.$$

$$\left. + \frac{\sin n\pi t}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt$$

فرض کنیم $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt < \infty$. در این صورت وقتی $L \to +\infty$

داریم :

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt \longrightarrow 0$$

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|\,dt$$

بنابراین اگر $l \to +\infty$ می‌توان نوشت

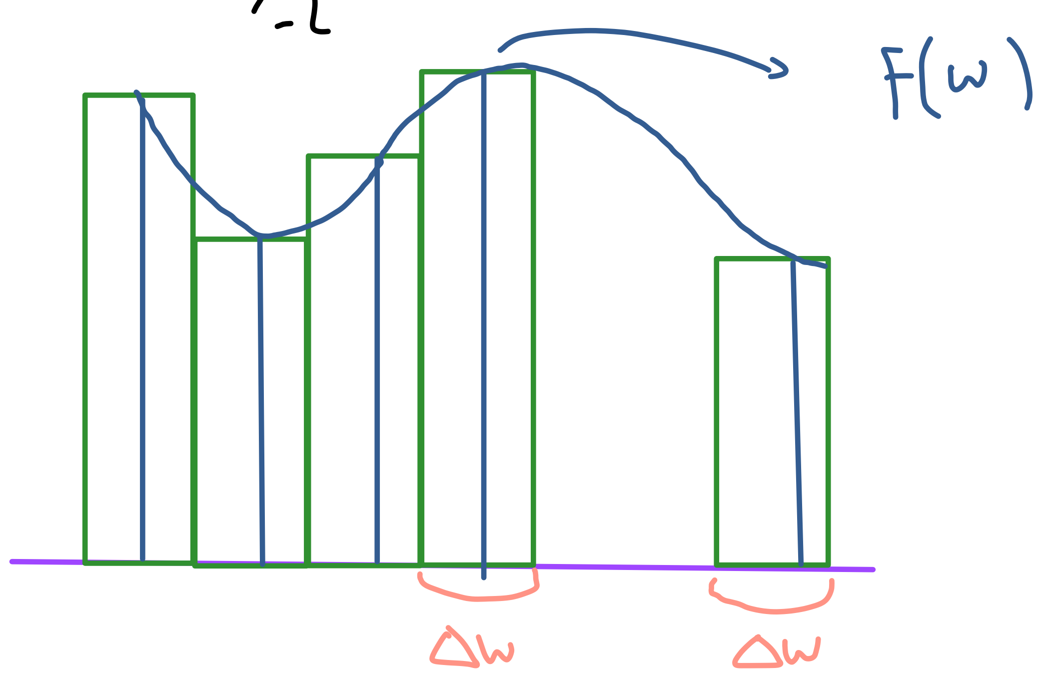
$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\, dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\, dt \right) \frac{\pi}{l}$$

$\Delta w = \frac{\pi}{l}$ و $w_n = \frac{n\pi}{l}$ قرار می‌دهیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim \sum_{n=1}^{\infty} F(w_n) \Delta w$$

$$F(w) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos w(t-x)\, dt$$



پس می‌توان گفت وقتی $l \to +\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(w_n) \Delta w \longrightarrow \int_{0}^{\infty} F(w)\, dw$$

و در نتیجه:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(w)\, dw = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos w(t-x)\, dt \right) dw$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\cos wt \cos wx + \sin wt \sin wx \right] dt\, dw$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos wt\, dt \right) \cos wx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin wt\, dt \right) \sin wx \right] dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos wt\, dt \qquad (1)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin wt\, dt \qquad (2)$$

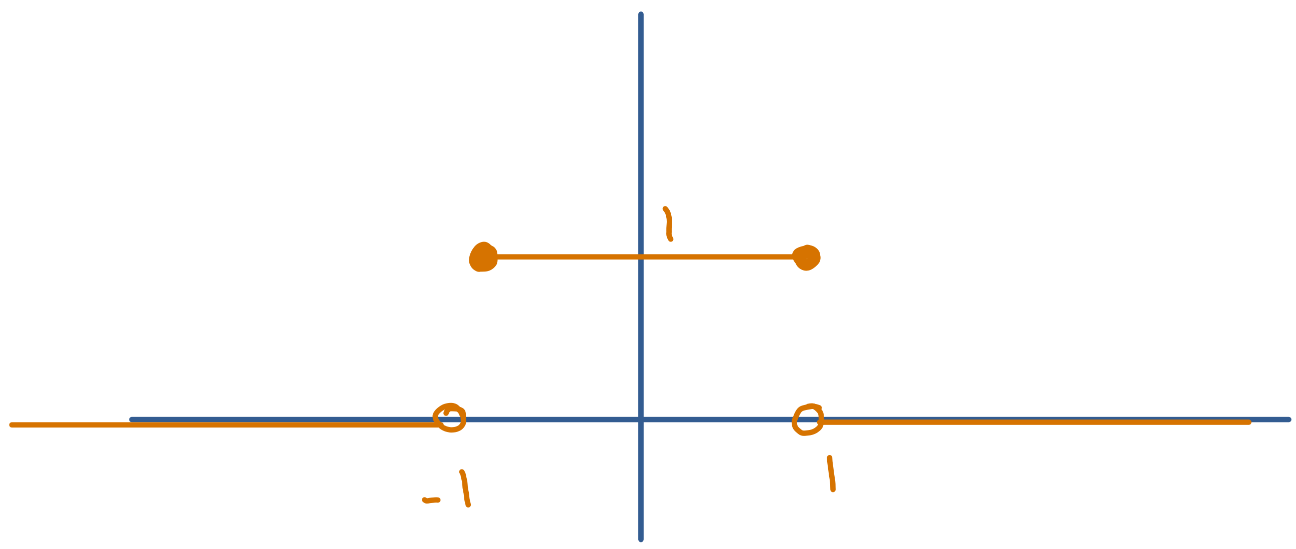
$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(w) \cos wx + B(w) \sin wx \right) dw$$

انتگرال $\int_0^{\infty} (A(w)\cos wx + B(w) \sin wx)\, dw$ را که $A(w)$ و $B(w)$ توسط روابط (1) و (2) تعریف می شوند، انتگرال فوریه‌ی f می نامند.

قضیه: اگر f در هر بازه‌ی متناهی قطعه به قطعه پیوسته باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ و مشتقات یک طرفی چپ و راست وجود داشته باشند آنگاه انتگرال فوریه‌ی f در نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ همگراست.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



شرایط قضیه‌ی همگرایی انتگرال فوریه برقرارند (چرا؟) **قطعه قطعه پیوسته**

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi\omega}\sin\omega t\Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\omega t\,dt = 0$$

$$\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

بنابر قضیه‌ی همگرایی:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x = \pm 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & x=\pm 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

برای $x=0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$$

$$Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin w}{w}\, dw$$

تذکر: برای توابع زوج $B(w)=0$ و انتگرال فوریه به شکل:

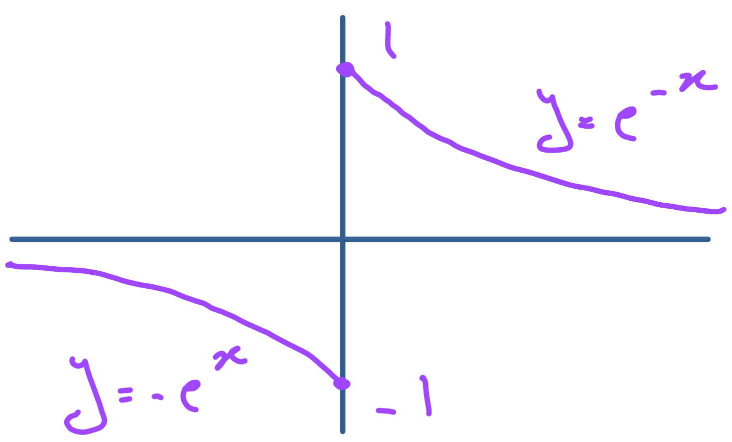
$$\int_0^{\infty} A(w) \cos wx\, dw$$

و برای توابع فرد $A(w)=0$ و انتگرال فوریه به شکل:

$$\int_0^{\infty} B(w) \sin wx\, dw$$

است.

مثال: فرض کنیم
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x=0 \\ -e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$



شرایط قضیه برقرارند (چرا؟)

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} -e^{t}\sin wt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\underbrace{e^{-t}}_{dv}\,\underbrace{\sin wt}_{u}\,dt=$$

$$=\frac{2w}{\pi(1+w^2)}=\int_{0}^{\infty}B(w)\sin wx\,dw=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{w}\frac{w\sin wx}{1+w^2}\,dw$$

تمرین:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx+w\sin wx}{1+w^2}\,dw=$$

$$=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-x} & x>0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}}$$

تبدیل فوریه:

برای تابع پیوسته f که شرایط قضیه همگرایی را دارد، داریم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos w(t-x)\,dt\right)dw$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\cos w(t-x) = \frac{1}{2}\left(e^{w(t-x)i} + e^{-w(t-x)i}\right)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)\, e^{iwt} e^{-iwt} + f(t)\, e^{-iwt} e^{iwt}\right) dt\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-iwt} e^{-iwt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{iwt} e^{iwx}\, dt \right) dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt \right) e^{iwt}\, dw$$

جلسه ۸

ریاضیات مهندسی

تبدیل فوریه :

مشاهده کردیم که اگر f روی بازه های متناهی قطعه به قطعه پیوسته، $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ (از این پس اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$ باشد می نویسیم f به طور مطلق انتگرال پذیر است.) و مشتقات یک طرفی f همه جا وجود داشته باشد، در نقاطی که f پیوسته است، داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos w(t-x)\,dt\right)dw$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\frac{1}{2}\left(e^{iw(t-x)}+e^{-iw(t-x)}\right)dt\right]\right)dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iw(t-x)}dt\right)dw$$

در انتگرال دوم از عبارت فوق با تبدیل w به $-w$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega(t-x)} dt \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)\, e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega x} d\omega$$

قرار می‌دهیم:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

درنتیجه (در چه نقاطی؟!)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x} d\omega$$

تابع F را تبدیل فوریه‌ی f می‌نامند و می‌نویسند:

$$\mathcal{F}(f) = F$$

پس:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega)$$

در بسیاری از مراجع با کمی سهو رایج می‌نویسند:

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega)$$

قضیه: اگر f پیوسته، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر و مشتقات یک طرفه‌ی f همه جا وجود داشته باشد، آنگاه برای $F = \mathcal{F}(f)$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega$$

نتیجه: (قضیه تقارن) برای تابع $y=f(x)$

$$\mathcal{F}(F)(\omega)=f(-\omega)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

مثال (مهم): برای $f(x)=e^{-|x|}$ می‌خواهیم $F=\mathcal{F}(f)$ را بدست آوریم.

*شرایط قضیه * برقرارند (چرا؟)

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{i\omega t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{i\omega t}\,dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{i\omega t}\,dt\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1+i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1+i\omega)t}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} e^{(1+i\omega)} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1+i\omega} e^{(-1+i\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{-1+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-2}{-\omega^2-1} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-k|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{k^2+\omega^2} \right)$$

چند ویژگی مهم تبدیل فوریه

$$c \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{F}(cf+g) = c\,\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

$$c \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{F}(f(x-c)) = e^{i\omega c}\,\mathcal{F}(f)$$

$$c \neq 0 : \quad \mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right) \qquad F = \mathcal{F}(f)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \quad \mathcal{F}(f') = -i\omega\,\mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega)$$

$$\mathcal{F}(F(x)) = f(-\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}}$$

مثال:

$$f(x) = e^{-|x|} \quad , \quad F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|-\omega|} = e^{-|\omega|}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|\omega|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-|\omega|}$$

مثال:

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x+5|}\right) = ?$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x+5|}\right) = e^{-5i\omega}\,\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = e^{-5i\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

مثال:

$$\mathcal{F}\left(e^{-|3x|}\right) = ?$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|3x|}\right) = \frac{1}{3}\,F\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{9}{9+\omega^2} = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{9+\omega^2}$$

مثال: $\mathcal{F}(tg^{-1}x) = ?$

$$(tg^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = tg^{-1}x$$

$$\mathcal{F}(f') = -i\omega\, \mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -i\omega\, \mathcal{F}(tg^{-1}x) \Rightarrow \mathcal{F}(tg^{-1}x) =$$

$$= \frac{1}{-i\omega}\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{i}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega|}$$

تمرین:

$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{t^2+2t+5}\right)=?$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)=?$$

$$f*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

$$\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)=\mathcal{F}(f*g)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\omega t+i\sin\omega t\right)d\omega=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt}_{F_c(\omega)}+i\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt}_{F_s(\omega)}$$

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای:

موضوع مورد بحث ما در این بخش، توابع حقیقی چند متغیره است.

برای سادگی تمرکز ما روی توابع دو و سه متغیره است.

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad u = u(x,y)$

$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad u = u(x,y,z)$

در برخی مدل‌ها، متغیر زمان ظاهر می‌شود که آن را با t نمایش می‌دهیم.

منظور از یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای معادله‌ای به شکل زیر است که در آن u، یک تابع حقیقی چند متغیره است (مشتق جزئی نسبت به دو متغیر حداقل وجود دارد).

$$F(\underbrace{x, y, \dots}_{\text{متغیرها}}, \underbrace{u_x, u_y, \dots}_{\text{مشتقات مرتبه‌ی ۱}}, u_{xx}, u_{yx}, \dots)$$

چند مثال:

$$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \quad u_{xx} + x^2 y\, u_{yy} + \sin(x+y)\, u_{xy} - u - xy = 0$$

$$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad Ln\left(u_{xxy} + x^2 \sin(u) - xy\right) + x - 1 = 0$$

$$u = u(t, x) \qquad u_{tt} = 4u_{xx}$$

$$u_{xyzt} + xyzt\, u_x + u_y = 0$$

به بالاترین مرتبه‌ی مشتقات جزئی در این معادله، مرتبه‌ی معادله گفته می‌شود.

درحالت خاص اگر F یک ترکیب خطی از u و مشتقات جزئی آن باشد به

قسمی که ضرایب توابع حقیقی باشند، معادله را خطی می‌نامند.

مثال: یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی ۲ درحالت کلی به شکل زیر

است:

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y +$$
$$+ F(x,y)u + G(x,y) = 0$$

درصورتی که $G(x,y) = 0$، معادله را همگن می‌نامند.

فرض کنیم ناحیه‌ی D، یک ناحیه‌ی باز و همبند باشد. در این صورت

D را یک دامنه (میدان) می‌نامیم. در این بخش، جواب‌های از

معادلات دیفرانسیل پاره ای مورد نظر هستند که روی یک دامنه تعریف شده اند.

در مورد وجود و یکتایی جواب‌های معادلات پاره ای نمی توان اظهار نظر کلی کرد ولی تحت شرایط خاص می توان وجود و یکتایی جواب را ثابت کرد.

این شرایط را می توان به دو دسته تقسیم کرد.

۱- شرایط اولیه: مقدار تابع u و مشتقات جزئی آن در نقاطی از دامنه‌ی جواب مشخص هستند.

۲- شرایط مرزی: مقدار تابع و مشتقات جزئی آن روی مرز ناحیه‌ی جواب یا نقاطی از آن مشخص است.

مثال: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$u(0,t) = u(P,t) = 0$ شرایط مرزی

$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x)$ شرایط اولیه

$u(x,t) = ?$

دسته بندی معادلات خطی مرتبه ۲:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + \dots = 0$$

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) + 4A(x,y)C(x,y)$$

$\Delta(x_0,y_0) > 0$ معادله در (x_0,y_0) هذلولوی است.

$\Delta(x_0,y_0) = 0$ معادله در (x_0,y_0) سهموی است.

$\Delta(x_0,y_0) < 0$ معادله در (x_0,y_0) بیضوی است.

اگر در تمام نقاط دامنه‌ی D، معادله هذلولوی یا سهموی یا بیضوی باشد، گوییم معادله روی D هذلولوی، سهموی یا بیضوی است.

مثال: معادله‌ی پاره‌ای زیر را در نظر گیریم:

$$(x-1)u_{xx} + 2(y+1)u_{xy} - (x+1)u_{yy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = 4(y+1)^2 + 4(x-1)(x+1)$$

$$\Delta = 0 \iff 4(y+1)^2 + 4x^2 - 4 = 0 \iff (y+1)^2 + x^2 = 1$$

معادله درون دایره‌ی $(y+1)^2+x^2=1$ بیضوی و خارج دایره هذلولوی است

در ادامه‌ی بحث می‌خواهیم با تغییر متغیر مناسب، معادله‌ی پاره‌ای خطی مرتبه‌ی ۲ را به معادله‌ی دیفرانسیل عادی تبدیل و آن را به روش دالامبر حل کنیم.

شکل کانونیک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی ۲ :

به معادله‌ی دیفرانسیل عادی

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + C(x,y) = 0$$

معادله‌ی مشخصه و به جواب های آن منحنی های مشخصه می‌گویند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (2)$$

اگر $\Delta > 0$ ، جواب معادله ی (۱) به صورت $\varphi(x,y) = C_1$ و جواب (۲) به صورت $\psi(x,y) = C_2$ قابل تعیین است. با تغییر متغیر $\eta = \psi(x,y)$ ، $\xi = \varphi(x,y)$ می‌توان مشاهده کرد که معادله‌ی دیفرانسیل

برای خطی به صورت اصطلاحاً کانونیک زیر قابل بیان است :

$$u_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

به ویژه اگر در سمت راست u_ξ و u_η یا u و u_η وجود نداشته باشند

معادله‌ی کانونیک به سادگی تبدیل به یک معادله‌ی عادی می‌شود.

مثال مهم : معادله‌ی موج یک بعدی

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$-\infty < x < +\infty$

$t \geq 0$

$u = u(x,t)$

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, -\infty < x < +\infty\}$$

$$A(x,t) = -c^2 \quad , B(x,t) = 0 \quad , C(x,t) = 1$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0 \Rightarrow$$ معادله هذلولوی است

$$A\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dt}{dx}\right) + C = 0$$

$$-c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c^2$$

$$\frac{dx}{dt} = C \Rightarrow \varphi(x,t) = x - ct = C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = -C \Rightarrow \psi(x,t) = x + ct = C_2$$

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = Cu_\xi + Cu_\eta$$

حل معادله‌ی موج یک بعدی به روش دالامبر:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$A(x,t) = -c^2$ ، $B(x,t) = 0$ ، $C(x,t) = 1$

$B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) = 4c^2 > 0$ معادله‌ی هذلولوی

$$A(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right) + C(x,t) = 0$$

$$-c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm c$$

$x + ct = C_1$

$x - ct = C_2$

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\xi + u_\eta\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} u_\xi + \frac{\partial}{\partial x} u_\eta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi) = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$

$$\frac{\partial (u_\eta)}{\partial x} = u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c u_\xi + c u_\eta$$

$$u_{tt} = -c^2 u_{\xi\xi} + 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(u_\xi) = 0 \Rightarrow u_\xi = \varphi_1(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(u) = \varphi_1(\xi) \Rightarrow u = \int \varphi_1(\xi) + \psi(\eta)$$

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$ φ و ψ توابعی حقیقی و مشتق پذیرند

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct) \quad ①$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \quad ③$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad ②$$

$$① \rightarrow u_t(x,t) = -c\,\varphi'(x-ct) + c\,\psi'(x+ct)$$

$$② \rightarrow -c\,\varphi'(x) + c\,\psi'(x) = g(x) \quad ④$$

$$③ \text{ و } ④ \rightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ -c\,\varphi(x) + c\,\psi(x) = \int_0^x g(s)\,ds + A \end{cases}$$

$$-2c\,\varphi(x) = -c\,f(x) + \int_0^x g(s)\,ds + A$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - \frac{A}{2c}$$

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds +$$

$$+ \frac{A}{2c}$$

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct) =$$

$$= \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)\,ds - \frac{A}{2c} +$$

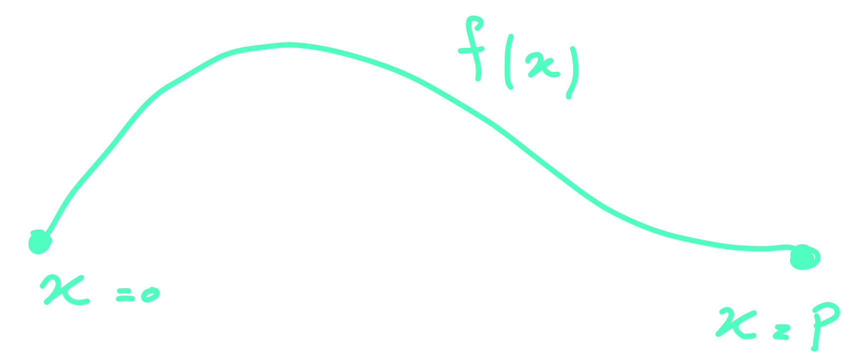
$$+\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} g(s)\,ds+\frac{A}{2c}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(x-ct)+f(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

این روش موسوم به روش دالامبر است.

حل معادله‌ی موج یک‌بعدی به کمک سری فوریه:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(p,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \qquad u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$



در بازه‌ی $[0,p]$، برای هر t، u را می‌توان تابعی پیوسته در نظر گرفت

پس برای هر t سری فوریه‌ای برای $u(x,t)$ وجود دارد.

$$\forall t:\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{p} \qquad T=2p$$

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{p} \qquad u_x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\frac{n\pi}{p}\cos\frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{tt}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{p} \qquad u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}-A_n(t)\frac{n^2\pi^2}{p^2}\sin\frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(t) + \frac{n^2\pi^2 c^2}{p^2} A_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{p} x = 0$$

$$\forall n \geq 1 : A_n''(t) + \frac{n^2\pi^2 c^2}{p^2} A_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow A_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{p} t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{p} t \right) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{p} = f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx}$$

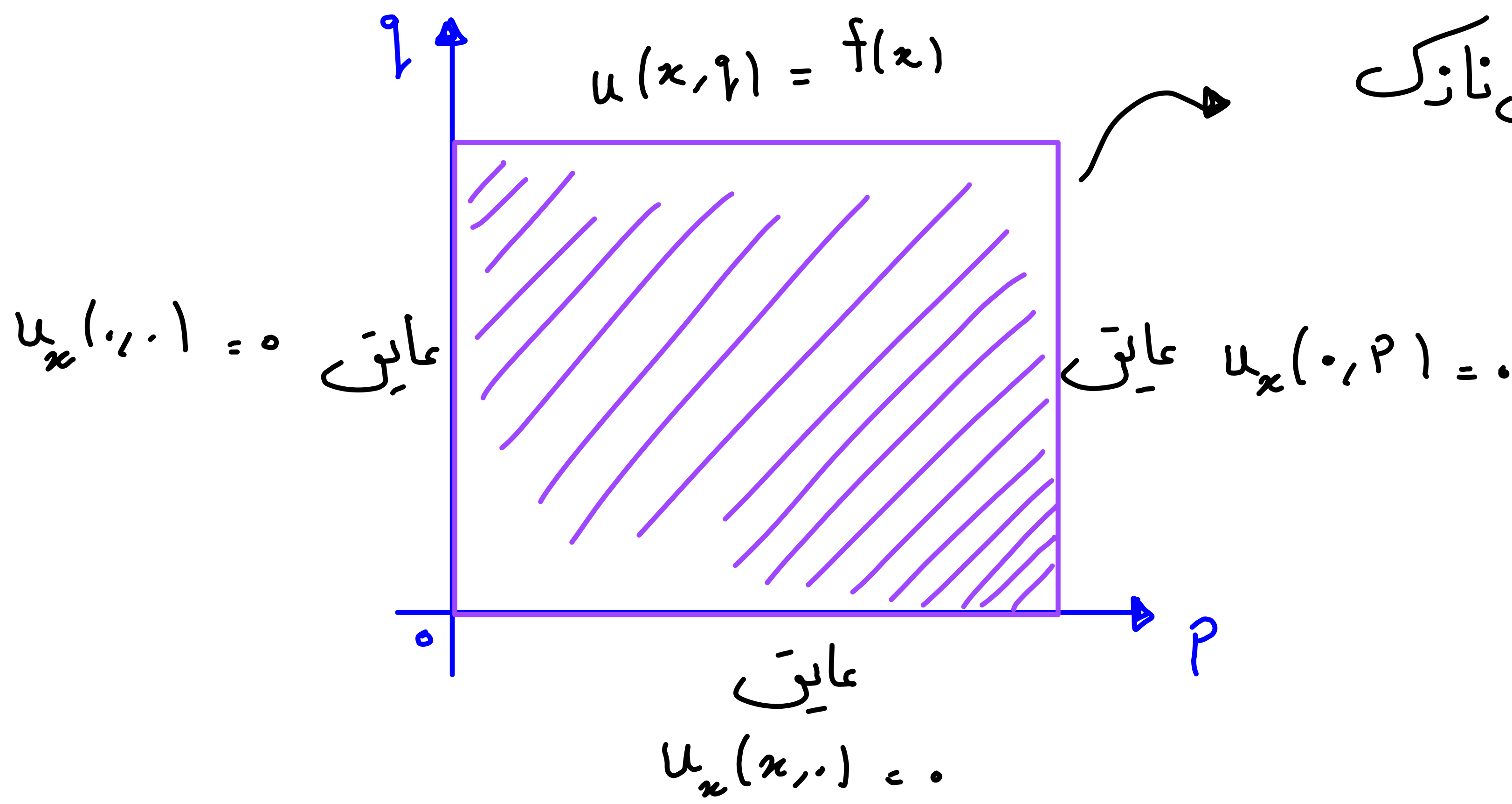
$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{p} \left(a_n \sin \frac{n\pi c}{p} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{p} t \right) \sin \frac{\pi x}{p}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{p} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi c}{p} b_n = \frac{2}{p} \int_0^p g(x) \sin \frac{n x}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^p g(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx}$$

معادله‌ی لاپلاس:



$$u = u_x(x,y)$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < p \ , \ 0 < y < q \\ u_x(0,y) = 0 = u_x(0,p) \\ u(x,0) = 0 \ , \ u(x,q) = f(x) \end{cases}$$

شرط مرزی نیومن

شرط مرزی دیریکله

شرط مرزی روبین

هدف ما یافتن جواب پیوسته‌ی $u = u(x,y)$ است که در ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \mid 0 < x < p \ , \ 0 < y < q\}$ پیوسته و دوبار مشتقات جزئی پیوسته دارد.

برای u به عنوان تابع دو متغیره در هر y دلخواه و ثابت تابعی یک متغیره

بر حسب x است که می توان برای آن یک توسیع متناوب و در نتیجه

یک بسط فوریه نوشت. با توجه به شرط مرزی روبین بسط فوریه‌ی کسینوسی

با شرایط مرزی سازگار است.

$$\forall y : u(x,y) = \frac{A_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \cos\frac{n\pi x}{p} \qquad 0<x<p$$

$$u_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(y) \frac{n\pi}{p} \sin\frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(y) \frac{n^2\pi^2}{p^2} \cos\frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{A_0''(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(y) \cos\frac{n\pi x}{p}$$

با جایگذاری در معادله‌ی $u_{xx}+u_{yy}=0$ داریم:

$$\frac{A_0''(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{p^2} A(y) \right) \cos\frac{n\pi x}{p} = 0$$

ضرایب بسط فوریه‌ی تابع صفر، همگی صفرند، پس:

$$\begin{cases} A_0''(y) = 0 \\ A_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{p^2} A_n(y) = 0 \qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$

درنتیجه:

$$\begin{cases} A_0(y) = C_0 + D_0 y \\ A_n(y) = C_n \cosh \frac{n\pi}{p} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{p} y \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(C_0 + D_0 y\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cosh \frac{n\pi}{p} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{p} y\right) \cos \frac{n\pi}{p} x$$

باتوجه به شرایط مرزی داریم:

$$0 = u(x,0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{p} x \Rightarrow \forall n \quad C_n = 0$$

$$f(x) = u(x,q) = \frac{1}{2}\left(C_0 + D_0 q\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cosh \frac{n\pi q}{p} + D_n \sinh \frac{n\pi q}{p}\right) \cos \frac{n\pi}{p} x$$

$$f(x) = \frac{D_0 q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi q}{p} \cos \frac{n\pi x}{p}$$

$$D_0 q = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)\,dx \longrightarrow \boxed{D_0 = \frac{2}{pq} \int_0^p f(x)\,dx}$$

$$D_n \sinh \frac{n\pi q}{p} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\,dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{D_n = \frac{2}{p \sinh \frac{n\pi x}{p}} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\,dx}$$

$$\boxed{u = \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi}{p} y \cos \frac{n\pi}{p} x}$$

معادله‌ی تیر مرتعش:

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 \qquad 0<x<p \qquad t>0 \\ u(0,t) = 0 = u(p,t) \\ u_{xx}(0,t) = 0 = u_{xx}(p,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

برای هر t تابع u به عنوان تابعی از x تابعی پیوسته است که دست کم چهار بار مشتق پیوسته دارد. با توجه به شرط مرزی، بسط فوریه‌ی سینوسی آن را در نظر می‌گیریم.

$$\forall t: \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(t) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \frac{n^4 \pi^4}{p^4} \sin \frac{n\pi}{p} x$$

با جایگذاری در معادله‌ی $u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(t) + \frac{c^2 n^4 \pi^4}{p^4} A_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{p} x = 0$$

اما ضرایب بسط فوریه‌ی سینوسی صفر، همگی صفرند پس:

$$A_n''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{p^2} A_n(t) = 0$$

$$A_n(t) = a_n \cos \frac{cn\pi}{p} t + b_n \sin \frac{cn\pi}{p} t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{cn\pi}{p} t + b_n \sin \frac{cn\pi}{p} t \right) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{p} x \Rightarrow a_n = \frac{2}{p} \int_0^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{cn\pi}{p} \right) \sin \frac{n\pi}{p} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n \frac{cn\pi}{p} = \frac{2}{p} \int_0^{p} g(x) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$\boxed{b_n = \frac{2p}{cn\pi} \int_0^{p} g(x) \sin \frac{n\pi}{p} x}$$

تعمیم روش‌های به کار گرفته شده توسط فوریه، منجر به تکنیکی موسوم به روش جداسازی متغیرها شد که برای رده‌ی وسیعی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به ویژه خطی و مرتبه‌ی ۲ قابل استفاده است. این روش را با حل چند مسأله توضیح می‌دهیم.

مثال: ابتدای میله‌ای فلزی به طول P با ضریب انتقال حرارت k، گرمای ویژه‌ی σ و چگالی ρ، در دمای صفر است. دمای محیط صفر است و انتهای میله، عایق بندی نشده و با محیط تبادل حرارت دارد. اگر توزیع دمای اولیه‌ی میله $f(x)$ باشد، دمای میله در زمان t که با $u(x,t)$ نمایش داده می‌شود. توسط معادله‌ی زیر مدل می‌شود:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & \\ u(0,t) = 0 & \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < P \\ u(P,t) + k u_t(P,t) = 0 & k \text{ ثابت} \end{cases}$$

جوابی از مسأله پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

در این صورت باید داشته باشیم:

$$u_t(x,y) = X(x)T'(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

با جایگذاری در معادله‌ی $u_t = c^2 u_{xx}$ داریم:

$$X(x)\,T'(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = -\sigma$$

* سمت چپ برحسب x و سمت راست فقط برحسب t است،

پس باید هر دو مقدار ثابتی باشند، بنابراین با توجه به شرایط مرزی به

معادلات دیفرانسیل اشتورم-لیوویل زیر می‌رسیم:

$$T'(t) = -\sigma c^2 T$$

$$\begin{cases} X''(x) + \sigma X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(p) + k X'(p) = 0 \end{cases}$$

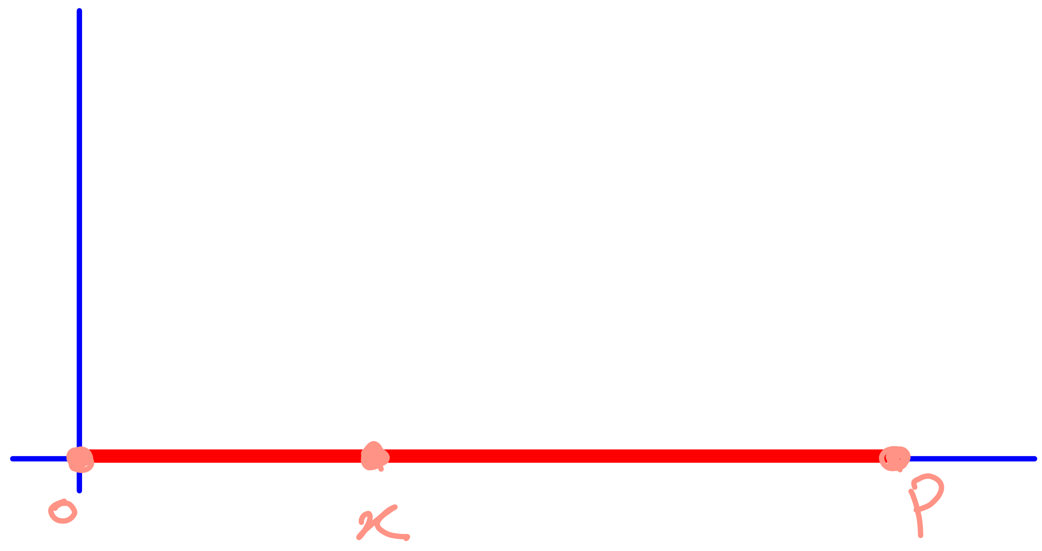
مثال ۵ ص ۳۲۸ کتاب.

روش جداسازی:

می‌خواهیم مسأله‌ی انتقال حرارت (یک بعدی) زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنیم:

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < p$$

$$u(0,t) = 0$$
$$u_x(p,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$



برای حل این مسأله فرض کنیم جوابی به شکل زیر برای مسأله داشته باشیم:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$
$$u_t(x,t) = X(x)\,T'(t)$$
$$u_x(x,t) = X'(x)\,T(t)$$
$$u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$$

با جایگزینی در معادله‌ی $u_t = c^2 u_{xx}$ داریم:

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

سمت چپ رابطه‌ی فوق فقط برحسب t و سمت راست فقط برحسب x است. بنابراین به ازای تابعی مانند x داریم:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} c^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\forall t \quad 0 = u(0,t) = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\forall t \quad 0 = u_x(p,t) = X'(p)T(t) \Rightarrow X'(p) = 0$$

$$\begin{cases} c^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(p) = 0 \end{cases}$$

مسأله‌ی اشتورم-لیوویل منظم

چند جمله ای مشخص معادله‌ی $c^2X''(x) + \lambda X(x) = 0$ عبارت است از:

$$P(r) = c^2 r^2 + \lambda$$

۱) $\lambda = -c^2\alpha^2 < 0$

$$P(r) = 0 \iff c^2 r^2 - c^2\alpha^2 = 0 \iff r = \pm\alpha$$

$$X(x) = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x$$

$$0 = X(0) = C_1$$

$$0 = X'(p) = C_2 \alpha \cosh \alpha p \Rightarrow C_2 = 0$$

X بدیهی است و مقدار ویژه متولد نداشت.

۲) $\lambda = 0$

$$X''(x) = 0$$

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$0 = X(0) = C_2$$

۳) $\lambda = c^2\beta^2 > 0$

$P(r) = c^2 r^2 + c^2$ جت.

$$X(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

$0 = x(0) = C_1$ و $0 = x'(0) = \beta C_2 \cos \beta p$

می‌توانیم قرار دهیم: $C_2 = 1$

$$\cos \beta p = 0 \Rightarrow \beta_n p = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\beta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{p}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = c^2\beta^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \dfrac{\pi^2 c^2}{p^2} \\ X_n(x) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{p}\right) \end{cases}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

پس برای $T(t)$ نیز جواب‌های زیر را داریم:

$$T'(t) + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 c^2}{p^2} T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 c^2}{p^2} t}$$

پس برای $n = 1, 2, \ldots$ جواب‌های به شکل زیر داریم:

$$U_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(x)$$

طبق معادله‌ی دیفرانسیل داریم:

$$U_n(x,t) = e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi^2 c^2}{p^2} t} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p}\right)$$

پس بنابر قضیه:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi^2 c^2}{p^2}t}\sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right)$$

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right) \quad (*)$$

* یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ی $\left\{\frac{X_1}{\|X_1\|}, \frac{X_2}{\|X_2\|},\dots\right\} = O$ که در آن

$X_n=\sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right)$ یک مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد برای فضای

برداری $PC([0,P],\mathbb{R})$ است. و $f(x)$ نسبت به این پایه یک بسط

فوریه با ضرایب $\langle f, \frac{X_n}{\|X_n\|}\rangle$ دارد.

معادله‌ی $(*)$ به شکل زیر هم بیان می‌شود:

$$f(x)=\sum a_n \|X_n\| \frac{X_n}{\|X_n\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n\|X_n\| = \langle f, \frac{X_n}{\|X_n\|}\rangle = \frac{1}{\|X_n\|}\langle f, X_n\rangle$$

$$a_n=\frac{\langle f, X_n\rangle}{\|X_n\|^2}$$

$$a_n = \frac{\int_0^p f(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p}\right)dx}{\int_0^p \sin^2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p}\right)dx}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{p}\right)dx$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t-u_{xx}=0 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ u(0,t)=0=u(2,t) & 0<t \\ u(x,0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ u_t(x,0)=-\sin(2\pi x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad u_x=X'(x)T(t)$$

$$u_t=X(x)T'(t) \qquad u_{xx}=X''(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t)+X(x)T'(t)+X''(x)T(t)=0$$

$$\frac{T''(t)+T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$0=u(0,t)=X(0)T(t) \Rightarrow X(0)=0$$

$$0=u(2,t)=X(2)T(t) \Rightarrow X(2)=0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 = X(2) \end{cases} \qquad p(r) = r^2 + \lambda$$

برای $\lambda \leq 0$ مقدار ویژه نداریم (چرا؟)

برای $\lambda = \alpha^2 > 0$ ، $\alpha > 0$ ؛

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

$$0 = X(0) = C_1$$

$$0 = X(2) = C_2 \sin 2\alpha \xRightarrow{C_2 = 1} 2\alpha = n\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \lambda(n) &= \frac{n^2\pi^2}{4} \\ X_{(n)}(x) &= \sin \frac{n\pi x}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$T''(t) + T'(t) + \frac{n^2\pi^2}{4} T(t) = 0$$

$$p(r) = r^2 + r + \frac{n^2\pi^2}{4}$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - n^2\pi^2}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}}{2}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(a_n \cos\left(\frac{n^2\pi^2 - 1}{2} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}}{2} t\right)\right)$$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\left(a_n \cos\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2-1}}{2}\,t\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2-1}}{2}\,t\right)\right) \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_n = 0$$

$$-\sin\frac{4\pi x}{2} = -\sin 2\pi x = u_t(x,0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-a_n}{2} + \sqrt{n^2\pi^2-1}\,\frac{b_n}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_4 = 0 \longrightarrow -\frac{0}{2} + \sqrt{16\pi^2-1}\,\frac{b_4}{2} = -1$$

$$n = 1 \longrightarrow -\frac{1}{2} + \sqrt{\pi^2-1}\,\frac{b_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_4 = \dfrac{-2}{\sqrt{16\pi^2-1}} \quad , \quad b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^2-1}} \end{cases}$$

حل معادلات پاره‌ای غیرهمگن:

برای سادگی به کمک یک مثال نشان می دهیم که چگونه می توان این نوع مسائل را حل کرد.

مثال: $u_t - u_{xx} = x + 1$ ، $0 < x < 1$ و $t > 0$

$u(0,t) = t$ و $u_x(1,t) = 1$ و $u(x,0) = x$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

در این مسأله ابتدا شرایط مرزی را با یک ترفند ساده همگن می کنیم. برای این منظور تابع $\hat{u}(x,t)$ را به قسمی می یابیم که

$$U(x,t) = u(x,t) - \hat{u}(x,t)$$

در معادله‌ی دیفرانسیل با شرایط همگن صدق کند.

درصورتی که شرایط مرزی از نوع دیریکله یا نیومن باشد، $\hat{u}$ مناسب به شکل زیر است.

$$\hat{u}(x,t) = b(t)x + c(t)$$

توابعی برحسب t اند که تعیین می شوند.

درصورتی که شرط مرزی از نوع روبین باشد، یعنی شرایط مرزی برحسب

مشتقات جزئی باشند، $\hat{u}$ مناسب به شکل زیر است:

$$\hat{u}(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

در این مثال $\hat{u}(x,t) = b(t)x + c(t)$ مناسب است.

برای آن که روی مرز $v = 0$ باشد باید $u = \hat{u}$ باشد:

$$t = u(0,t) = \hat{u}(0,t) = b(t)(0) + c(t) = c(t)$$

$$1 = u_x(1,t) = \hat{u}_x(1,t) = b(t)$$

$$c(t) = t \quad , \quad b(t) = 1$$

$$\hat{u}(x,t) = x + t$$

$$v(x,t) = u(x,t) - (x+t)$$

در این صورت واضح است:

$$v(0,t) = 0 \qquad \text{و} \qquad v_x(0,t) = 0$$

$$v(x,t) = u(x,t) - (x+t)$$

$$\begin{aligned} v_t &= u_t - 1 \\ v_{xx} &= u_{xx} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = v_t + 1 \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases}$$

$$u_t - u_{xx} = x + 1 \Rightarrow v_t + 1 - v_{xx} = x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_t - v_{xx} = x$$

$$v(x,0) = u(x,0) - x = x - x = 0$$

$$(2)\begin{cases} v_t - v_{xx} = x \\ v(0,t) = 0 \qquad v_x(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله‌ی (۲) ابتدا مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی نظیر معادله‌ی همگن نظیر را بدست می آوریم.

$$v_t - v_{xx} = 0 \qquad v_t = X(x)T'(t)$$

$$v = X(x)T(t) \qquad v_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$v(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$v_x(1,t) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 = X'(1) \end{cases}$$

به سادگی مشاهده می‌شود که:

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$X_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$$

$$\|X_n\| = \sqrt{\langle X_n, X_n \rangle} = \sqrt{\int_0^1 X_n^2(x)\, dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \sin^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

جواب معادله‌ی (۲)

برای هر مقدار دلخواه t تابع $v(x,t)$ به عنوان تابعی از x نسبت به مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد $O = \left\{ \frac{X_0}{\|X_0\|}, \frac{X_1}{\|X_1\|}, \dots \right\}$ یک بسط فوریه دارد.

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sqrt{2}\, X_n$$

در این صورت داریم:

$$v_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t) \sqrt{2}\, X_n$$

$$v_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} -\sqrt{2}\, a_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 X_n$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{2}\, X_n$$

$$c_n = \langle x, \sqrt{2} X_n \rangle = \int_0^1 x \sqrt{2} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\,(-1)^n}{\pi^2(4n^2+4n+1)}$$

با جایگزینی در معادله‌ی $v_t - v_{xx} = x$ داریم:

$$\sum a_n'(t)\sqrt{2}\,X_n - \sum -\sqrt{2}\,a_n(t)\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 X_n =$$

$$= \sum \frac{4\sqrt{2}\,(-1)^n X_n}{\pi^2(4n^2+4n+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n'(t) + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 a_n\right)X_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8(-1)^n}{\pi^2(4n^2+4n+1)}X_n$$

$$a_n'(t) + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 a_n(t) = \frac{4\sqrt{2}\,(-1)^n}{\pi^2(4n^2+4n+1)}$$

$$0 = v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\sqrt{2}\,X_n \Rightarrow a_n(0) = 0$$

یادآوری:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y = y_0 e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx$$

$$a_n(t) = Ce^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} + e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\int \frac{4\sqrt{2}\,(-1)^n}{\pi^2(4n^2+4n+1)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\,dt = Ce^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t^2} +$$

$$+\frac{4\sqrt{2}\,(-1)^n}{\pi^4(n+\frac{1}{2})^2(4n^2+4n+1)}$$

$$0 = a_n(0) \Rightarrow C = \frac{-4\sqrt{2}\,(-1)^n}{\pi^4(n+\frac{1}{2})^2(4n^2+4n+1)}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^4(n+\frac{1}{2})^2(4n^2+4n+1)}\left(-e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t^2}+1\right).\sin\left((n+\frac{1}{2})\pi x\right)$$

معادله‌ی لاپلاس در دستگاه مختصات قطبی:

در دستگاه دکارتی:

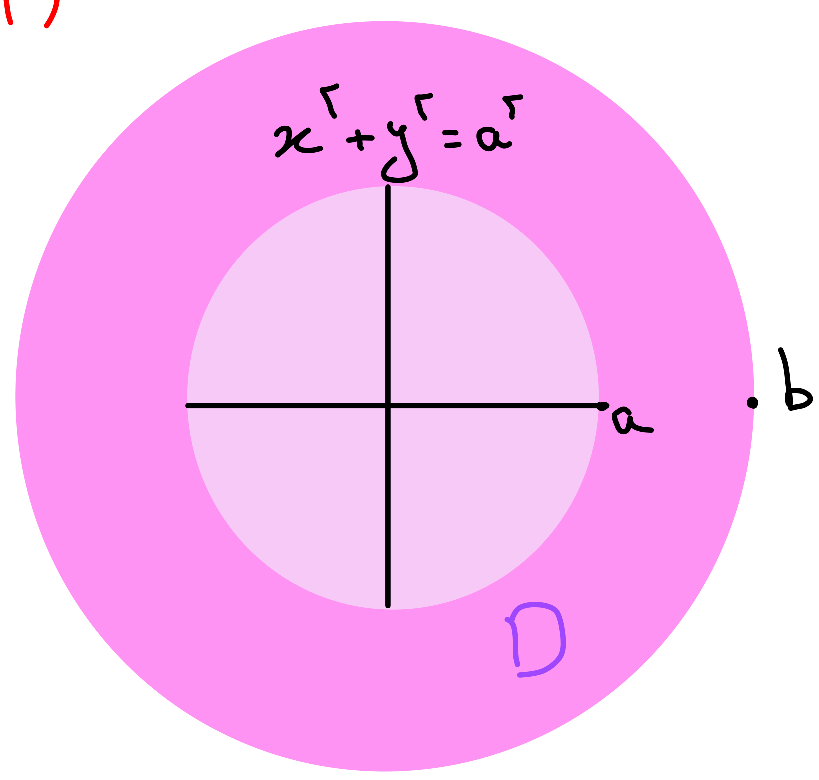
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

در دستگاه قطبی:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

زمانی که ناحیه‌ی داده شده در دستگاه دکارتی مستطیلی نباشد ولی با تغییر متغیر قطبی، مستطیل شود.

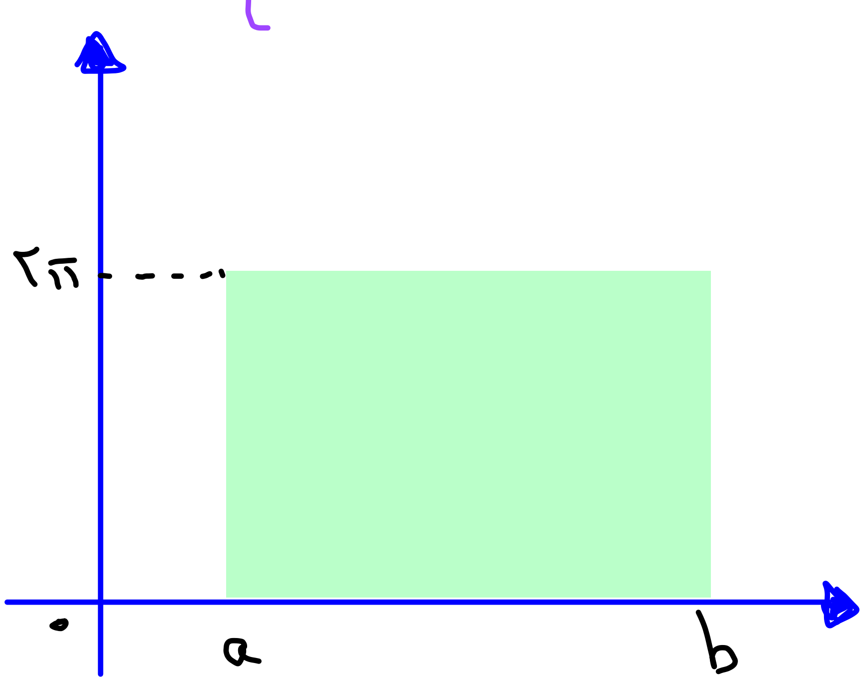
(1)

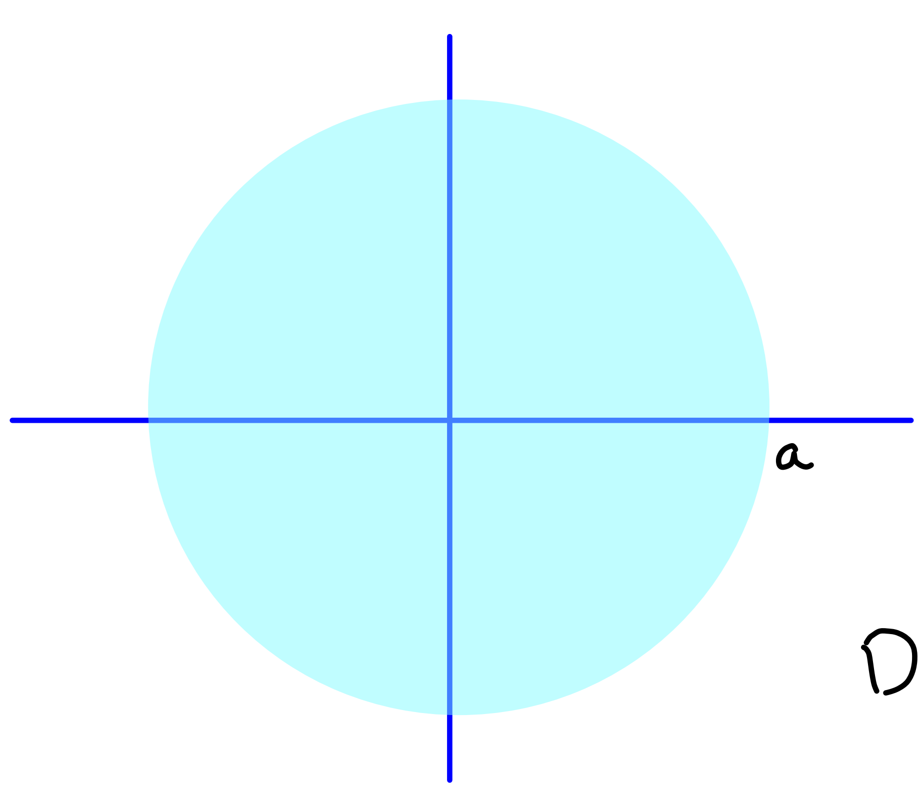


$$u\Big|_{r=a} = f(\theta)$$

$$u\Big|_{r=b} = g(\theta)$$

$$D = \{(r,\theta) : ۰ \leqslant \theta < ٢\pi \,,\, a < r < b\}$$

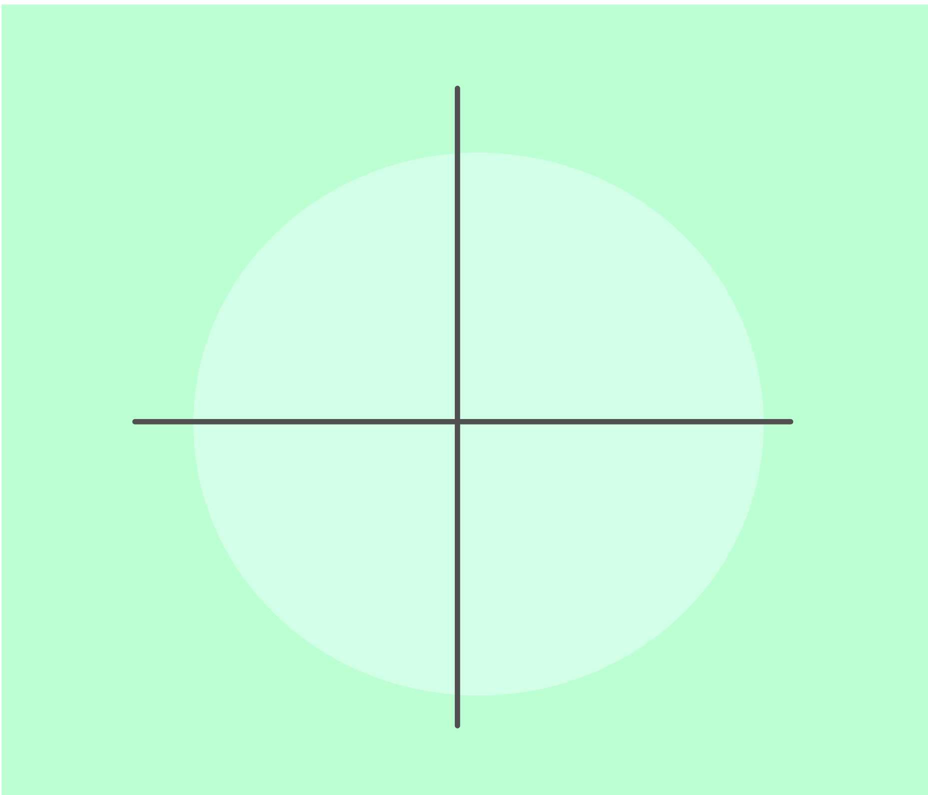




$$u\Big|_{r=a} = f(\theta)$$

$r \to ۰^+$ u کراندار

$$D = \{(r,\theta) : ۰ \leqslant r < a \,,\, ۰ \leqslant \theta < ٢\pi\}$$



$$D = \{(r,\theta) : a < r ,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

مثال:

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r,0) = u(r,2\pi) \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi) \\ u(a,\theta) = f(\theta) \\ u(b,\theta) = g(\theta \end{cases}$$

$$U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$r^2 R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0$$

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(0)} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

$$\cos n\theta + \sin n\theta = e^{in\theta}$$

$$\Theta_n(\theta) = e^{in\theta} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r^2 R''(r) + r R' - n^2 R = 0$$

$$R(r) = r^k \qquad R'(r) = k r^{k-1} \qquad R''(r) = k(k-1) r^{k-2}$$

$$r^k \left(k(k-1) + k - n^2 \right) = 0$$

$$r^k (k^2 - n^2) = 0 \Rightarrow k = \pm n$$

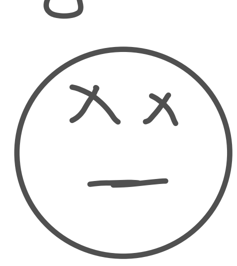
$$R(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n a^n + b_n a^{-n}) e^{in\theta}$$

$$g(\theta) = u(b,\theta) = \sum (a_n b^n + b_n b^{-n}) e^{in\theta}$$

$$\begin{cases} a_n a^n + b_n a^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta \\[2ex] a_n b^n + b_n b^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta \end{cases}$$


a_n و b_n بدست می آید

$$D = \{ (r,\theta) : a < r < b, \; 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

مطلوب حل معادله‌ی موج:

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} & 0<x \ , \ 0<t \\ U(0,t) = 0 & t>0 \\ U(x,0) = e^{-2x} & 0<x \\ U_t(x,0) = e^{-x} & 0<x \end{cases}$$

U کراندارد

$$U(x,y) = X(x)T(t)$$

$$U_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$U_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$U_{tt} = U_{xx} \Rightarrow X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Leftarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

برای $\lambda < 0$ جواب $X'' + \lambda X = 0$ ازنوع نمایی است که با کراندار بودن $U(x,0)$ وقتی $x \to \infty$ سازگار نیست.

برای $\lambda = w^2 > 0$ و $w > 0$:

$$X(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx \Rightarrow C_1 = 0$$
$$X(0) = 0$$

$$X_w(x) = \sin wx \qquad w>0$$

$$T'' + w^2 T = 0$$

$$T_w(t) = \sin wt, \ \cos wt$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \left(A(w)\cos wt + B(w)\sin wt \right) \sin wx \, dw$$

$$e^{-2x} = u(x,0) = \int_0^{+\infty} A(w) \sin wx \, dw$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{w}{w^2+4}$$

$$e^{-x} = u_t(x,0) = \int_0^{\infty} w B(w) \sin wx \, dw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{w}{w^2(1+w^2)}$$

$$\rightarrow B(w) = \frac{2}{\pi(1+w^2)}$$

یادآوری:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iwx} \, dx$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(w)$$

قضیه:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{-iwx} \, dw$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(w))$$

نتیجه:

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(w) \Rightarrow \mathcal{F}(F(x)) = f(-w)$$

۱) $\mathcal{F}(cf + g) = c\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$

۲) $\mathcal{F}(f(x)) = F(w) \Rightarrow \mathcal{F}(f(x-a)) = e^{iaw} F(w)$

۳) $\mathcal{F}(f(x)) = F(w) \Rightarrow \mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{w}{c}\right)$

۴) $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(f'(x)) = -iw\,\mathcal{F}(f(x))$

نتیجه الف) $\mathcal{F}(f^{(k)}(x)) = (-iw)^k \mathcal{F}(f(x))$

نتیجه ب) $F(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\right) = -\frac{1}{iw} \mathcal{F}(f(x))$

۵) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f(x))\,\mathcal{F}(g(x))$

به کمک تبدیل فوریه، معادله‌ی موج را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ \lim_{|x| \to +\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

فرض کنیم $U(w,t)$، تبدیل فوریه‌ی $u(x,t)$، نسبت به متغیر x برای t دلخواه باشد.

نسبت به x:

$$U(w,t) = \mathcal{F}(u(x,t))$$

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = (-iw)^2 \mathcal{F}(u) = -w^2 U(w,t)$$

$$U_{tt}(w,t) = \frac{d^2}{dt^2} U(w,t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}(u(x,t)) =$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{d^2}{dt^2} u(x,t)\right) = \mathcal{F}(u_{tt}(x,t))$$

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = U_{tt}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \Rightarrow \mathcal{F}(u_{tt}) = a^2 \mathcal{F}(u_{xx}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{tt}(w,t) = -a^2 w^2 U(w,t)$$

$$\mathcal{F}(u(x,t))(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{iwx}\, dx$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} u(x,t)\, e^{iwx}\, dx$$

$$U_t(w,0) = G(w)$$

$$\begin{cases} U_{tt}(w,t) + a^2 w^2 U(w,t) = 0 \\ U(w,0) = F(w) \\ U_t(w,0) = G(w) \end{cases}$$

معادلهٔ عادی مرتبهٔ ۲
برحسب t

$$\left.\begin{array}{l} U(w,t) = C_1 \cos awt + C_2 \sin awt \\ U(w,0) = F(w) \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = F(w)$$

$$\begin{cases} U_t(w,t) = -aw C_1 \sin awt + aw C_2 \cos awt \\ U_t(w,0) = G(w) \end{cases}$$

$$\Rightarrow aw C_2 = G(w) \Rightarrow C_2 = \frac{G(w)}{aw}$$

$$U(w,t) = F(w) \cos awt + \frac{G(w)}{aw} \sin awt$$

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

$$f * g = g * f$$

$$U(w,t) = F(w) \left(\frac{e^{iawt} + e^{-iawt}}{2} \right) + \frac{G(w)}{aw} \left(\frac{e^{iawt} - e^{-iawt}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{iwat} F(w) + \frac{1}{2} e^{iw(-at)} F(w) + \frac{1}{2a} \frac{1}{iw} e^{iwat} G(w)$$

$$- \frac{1}{2a} \frac{1}{iw} e^{iw(-at)} G(w)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-at) + \frac{1}{2} f(x+at) -$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at} g(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at} g(s)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(x-at) + f(x+at)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

مسئله‌ی دیریکله:

$$\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ U(x,0) = f(x) \end{cases}$$

لاگرانژ

$$\lim_{|x|\to+\infty} U(x,y) = 0$$

فرض کنیم $U(w,y)$ تبدیل فوریه $U(x,y)$ برحسب x باشد، (برای y دلخواه ثابت)

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(U_{xx}) + \mathcal{F}(U_{yy}) = 0$$

$$-w^2 U(w,y) + U_{yy}(w,y) = 0$$

$$U(w,0) = F(w)$$

$$\begin{cases} U_{yy}(w,y) - w^2 U(w,y) = 0 \\ U(w,0) = F(w) \end{cases}$$ معادله‌ی عادی مرتبه ۲ برحسب y

$$U(w,y)=B(w)e^{-wy}+A(w)e^{wy} \qquad w>0$$

با توجه به کراندار بودن u باید داشته باشیم $A(w)=0$ و برای w دلخواه

$$U(w,y)=B(w)e^{-|w|y}$$

$$\Rightarrow B(w)=F(w)$$

$$U(w,0)=F(w)$$

$$U(w,y)=F(w)e^{-|w|y}$$

$$u(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w|y}F(w)\right)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-k|x|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+w^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+w^2}\right)=e^{-k|w|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k|w|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+w^2}$$

$$U(x,y)=F(w)e^{-|w|y}\longrightarrow u(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|w|y}F(w)\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{y^2+x^2}*f\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{y^2+(y-\xi)^2}f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,f(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi$$