

**مسئله‌ی ۱.*. شمارش**

با ذکر استدلال محاسبه کنید:

الف) تعداد روابط روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا n که بستر تراییی آن‌ها یک رابطه‌ی ترتیب کامل است.

ب) تعداد روابط روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا n مانند R که دو شرط زیر را دارند:

۱. R زیرمجموعه‌ی متقارن تک‌عضوی نداشته باشد.

۲. R^2 تقارنی، بازتابی و پادتقارنی باشد.

مسئله‌ی ۲.*. وراثت هم‌ارزی

موارد زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه‌ی هم‌ارزی متمایز روی مجموعه‌ی A باشند. آیا $R_1 \cup R_2$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

ب) فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه‌ی هم‌ارزی متمایز روی مجموعه‌ی A باشند. آیا $R_1 \cap R_2$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

ج) فرض کنید از یک رابطه، ابتدا بستر بازتابی، سپس بستر تراییی و در نهایت بستر تقارنی بگیریم. آیا حاصل همیشه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

مسئله‌ی ۳. چالش شبکه

ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی ناتهی متناهی از یک شبکه، یک کوچک‌ترین کران بالا دارد.

مسئله‌ی ۴. لغت‌نامه

فرض کنید S مجموعه‌ی تمام رشته‌های متشکل از حروف کوچک الفبای انگلیسی و R ترتیب لغت‌نامه‌ای روی S باشد. اگر s و t دو عضو از S باشند، sRt اگر و تنها اگر s پیشوند t باشد یا اولین حرفی که بعد از پیشوند مشترک s و t در s آمده است زودتر از حرف متناظر در t در الفبا ظاهر شود. ثابت کنید R خوش‌ترتیب نیست.

مسئله‌ی ۵. زنگ بازگشتی

تعداد روابط هم‌ارزی یک مجموعه‌ی n عضوی را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P(n-k-1)$$

مسئله ۶. کوچک‌ترین هم‌ارزی

فرض کنید R یک رابطه‌ی دلخواه روی مجموعه‌ی متناهی A باشد. از R به ترتیب ابتدا بستر بازتابی، سپس بستر تقارنی و در نهایت بستر ترایی می‌گیریم و حاصل را با P نشان می‌دهیم. ثابت کنید P یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. همچنین ثابت کنید P کوچک‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی است که R زیرمجموعه‌ی آن است.

مسئله ۷*. مقسوم‌علیه

الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد n تشکیل شبکه‌ی توزیع‌پذیر می‌دهند.

ب) نشان دهید مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد n تشکیل جبر بول می‌دهد اگر و تنها اگر n بر مربع کامل هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بخش‌پذیر نباشد.