

پاسخ تمرین تئوری دوم درس هوش مصنوعی

امیر حسین عاصم یوسفی
۹۶۱۱۰۳۲۳

۱۰ تیر ۱۳۹۸

مسئله ۱

۱

تابع هزینه یا تابع ضرر در واقع میزان خطای الگوریتم در هر بار اجرا شدن است که برابر است با مجموع فاصله هر داده تا مقدار واقعی آن که به صورت زیر می باشد :

$$\text{Cost Function} = \sum_t ||w_t - w'_t||^2$$

بنابراین مقدار بالا باید مینیمم شود .

۲

فرض می کنیم داده X_i در دسته منفی ها قرار می گرفته بنابراین در صورتی اشتباه دسته بندی می شود که $W_t \cdot X_i > 0$ باشد بنابر الگوریتم وزن مرحله بعد به صورت زیر میشود :

$$W_{t+1} = W_t - X_i \Rightarrow X_i \cdot W_{t+1} = W_t \cdot X_i - X_i \cdot X_i = W_t X_i - |X_i|^2$$

بنابراین مقدار $W_{t+1} \cdot X_i$ برابر است با $W_t \cdot X_i$ که یک مقدار مثبت از آن کم شده است بنابراین قبلا مثبت بوده و الان به سمت منفی ها حرکت می کند بنابراین در جهت بهبود دسته بندی X_i تغییر می کند .

حال فرض می کنیم داده X_i جزو دسته مثبت ها قرار می گرفته در صورتی اشتباه در دسته بندی صورت می گیرد که $W_t \cdot X_i < 0$ باشد بنابر الگوریتم ، وزن در مرحله بعدی به صورت زیر تغییر می کند :

$$W_{t+1} = W_t + X_i \Rightarrow X_i \cdot W_{t+1} = W_t \cdot X_i + X_i \cdot X_i = W_t X_i + |X_i|^2$$

بنابراین مقدار $W_{t+1} \cdot X_i$ برابر است با $W_t \cdot X_i$ که با یک مقدار مثبت جمع شده است بنابراین قبلا منفی بوده و الان به سمت مثبت ها حرکت می کند بنابراین در جهت بهبود دسته بندی X_i تغییر می کند .

مسئله ۳

ابتدا برای هر دو کلاس A و B یک وزن تعیین می کنیم

$$W_A = (\text{bias} = 1, f1 = 0, f2 = 0, f3 = 0) \quad ۱.$$

$$W_B = (\text{bias} = 0, f1 = 0, f2 = 0, f3 = 0) \quad ۲.$$

حال داده ها را به ترتیب از چپ به راست به الگوریتم میدهم (مقدار bias برای تمام داده ها برابر با یک می باشد .) و الگوریتم پرسپترون را اجرا می کنیم تا جایی که بردار وزن هر کلاس ثابت باقی بماند :

First Iteration

داده D1 به الگوریتم داده می شود داریم : $(\text{bias} = 1, f1 = 2, f2 = 1, f3 = 0.5)$

$$W_A \cdot W_{D1} = 1$$

$$W_B \cdot W_{D1} = 0$$

بنابراین با توجه به مقادیر بالا داده D1 در کلاس A قرار می گیرد که درست است بنابراین بردار وزن هر دو کلاس بدون تغییر باقی می ماند .
حال داده دوم را به الگوریتم میدهم $(5, 2, 10, 1)$: W_{D2}

$$W_A \cdot W_{D2} = 1$$

$$W_B \cdot W_{D2} = 0$$

بنابراین با توجه به مقادیر بالا داده دوم در کلاس A قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین وزن ها را به روز می کنیم

$$W_A(\text{New}) = W_A - W_{D2} = (1, 0, 0, 0) - (1, 10, 2, 5) = (0, -10, -2, -5)$$

$$W_B(\text{New}) = W_B + W_{D2} = (0, 0, 0, 0) + (1, 10, 2, 5) = (1, 10, 2, 5)$$

حال با وزن های جدید بالا داده سوم را به الگوریتم می دهیم $(0.1, 7, 10, 1)$: W_{D3}

$$W_A(New) \cdot W_{D3} = -114.5$$

$$W_B(New) \cdot W_{D3} = 115.5$$

بنابراین با توجه به مقادیر بالا داده سوم در کلاس B قرار می گیرد که درست است ، پس مقادیر وزن ها تغییری نمی کند .
حال داده چهارم را وارد می کنیم $W_{D4} = (1, 3, 3, 9)$ بنابراین

$$W_A(New) \cdot W_{D4} = -81$$

$$W_B(New) \cdot W_{D4} = 82$$

با توجه به مقادیر بالا می توان دید که داده چهارم در کلاس B قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین وزن ها را به روز می کنیم :

$$W_A(New2) = W_A(New) + W_{D4} = (0, -10, -2, -5) + (1, 3, 3, 9) = (1, -7, 1, 4)$$

$$W_B(New2) = W_B(New) - W_{D4} = (1, 10, 2, 5) - (1, 3, 3, 9) = (0, 7, -1, -4)$$

حال داده پنجم را وارد می کنیم $W_{D5} = (1, 2, 9, 8)$:

$$W_A(New2) \cdot W_{D5} = 28$$

$$W_B(New2) \cdot W_{D5} = -27$$

بنابراین طبق مقادیر بالا داده پنجم در کلاس A قرار می گیرد که درست است بنابراین مقادیر وزن ها ثابت می ماند .

Second Iteration

با مقدار وزن های زیر به دوباره داده ها را بررسی میکنیم :

$$W_A = (1, -7, 1, 4)$$

$$W_B = (0, 7, -1, -4)$$

داده اول را وارد می کنیم

$$W_A \cdot W_{D1} = -10$$

$$W_B \cdot W_{D1} = 12$$

با توجه به مقادیر داده اول داخل کلاس B قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین باید مقدار وزن ها را تغییر دهیم :

$$W_A(New) = W_A + W_{D1} = (1, -7, 1, 4) + (1, 2, 1, 0.5) = (2, -5, 2, 4.5)$$

$$W_B(New) = W_B - W_{D1} = (0, 7, -1, -4) - (1, 2, 1, 0.5) = (-1, 5, -2, -4.5)$$

حال داده دوم را وارد می کنیم :

$$W_A(New) \cdot W_{D2} = -21.5$$

$$W_B(New) \cdot W_{D2} = 22.5$$

با توجه به مقادیر می بینیم که داده دوم در کلاس B قرار می گیرد که درست است بنابراین مقادیر وزن ها ثابت می ماند .
حال داده سوم را وارد می کنیم :

$$W_A(New) \cdot W_{D3} = -33.55$$

$$W_B(New) \cdot W_{D3} = 34.55$$

با توجه به مقادیر بالا می توان دید که داده سوم به کلاس B تعلق می گیرد که درست است . بنابراین مقادیر وزن ها ثابت می ماند .
حال داده چهارم را وارد می کنیم :

$$W_A(New) \cdot W_{D4} = 33.5$$

$$W_B(New) \cdot W_{D4} = -32.5$$

که با توجه به مقادیر بالا می توان دید که داده چهارم در کلاس A قرار می گیرد که درست است . بنابراین مقادیر وزن ها ثابت می ماند .
حال داده پنجم را وارد می کنیم :

$$W_A(New) \cdot W_{D5} = 46$$

$$W_B(New) \cdot W_{D5} = -45$$

با توجه به مقادیر بالا می توان دید که داده پنجم در کلاس A قرار می گیرد بنابراین مقادیر وزن ها ثابت می ماند .

Third Iteration

از مرحله قبل مقادیر وزن ها به صورت زیر است :

$$W_A = (2, -5, 2, 4.5) \\ W_B = (-1, 5, -2, -4.5)$$

حال داده اول را وارد می کنیم :

$$W_A \cdot W_{D1} = -3.75 \\ W_B \cdot W_{D1} = 4.75$$

با توجه به مقادیر بالا داده اول در کلاس B قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین باید وزن ها را update کنیم :

$$W_A(New) = W_A + W_{D1} = (2, -5, 2, 4.5) + (1, 2, 1, 0.5) = (3, -3, 3, 5) \\ W_B(New) = W_B - W_{D1} = (-1, 5, -2, -4.5) - (1, 2, 1, 0.5) = (-2, 3, -3, -5)$$

حال داده دوم را وارد می کنیم :

$$W_A(New) \cdot W_{D2} = 4 \\ W_B(New) \cdot W_{D2} = -3$$

که با توجه به مقادیر بالا داده دوم در کلاس A قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین وزن ها را باید update کنیم :

$$W_A(New2) = W_A(New) - W_{D2} = (3, -3, 3, 5) - (1, 10, 2, 5) = (2, -13, 1, 0) \\ W_B(New2) = W_B(New) + W_{D2} = (-2, 3, -3, -5) + (1, 10, 2, 5) = (-1, 13, -1, 0)$$

حال داده سوم را وارد می کنیم :

$$W_A(New2) \cdot W_{D3} = -124 \\ W_B(New2) \cdot W_{D3} = 122$$

با توجه به مقادیر بالا داده سوم در کلاس B قرار میگیرد که درست است پس مقادیر وزن ها را تغییر نمی دهیم .
داده چهارم را وارد می کنیم :

$$W_A(New2) \cdot W_{D4} = -34 \\ W_B(New2) \cdot W_{D4} = 35$$

با توجه به محاسبات بالا داده چهارم در کلاس B قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین باید وزن ها را update کنیم :

$$W_A(New3) = W_A(New2) - W_{D4} = (2, -13, 1, 0) - (1, 3, 3, 9) = (1, -16, 0, -9) \\ W_B(New3) = W_B(New2) + W_{D4} = (-1, 13, -1, 0) + (1, 3, 3, 9) = (0, 16, 2, 0)$$

حال داده پنجم را وارد می کنیم :

$$W_A(New3) \cdot W_{D5} = -103 \\ W_B(New3) \cdot W_{D5} = 50$$

بنابراین داده پنجم در کلاس B قرار می گیرد که اشتباه است بنابراین باید وزن ها را update کنیم :

$$W_A(New4) = W_A(New3) - W_{D5} = (1, -16, 0, -9) - (1, 2, 9, 8) = (0, -18, -9, -17) \\ W_B(New4) = W_B(New3) + W_{D5} = (0, 16, 2, 0) + (1, 2, 9, 8) = (1, 18, 4, 0)$$

بعد از مرحله سوم می بینیم که در این مرحله ۴ بار بردار وزن را به روز رسانی کردیم و فقط دو داده را درست تشخیص دادیم ولی در Second Iteration دیدم که با یک بار به روز کردن وزن ها توانستیم ۴ داده را درست تشخیص دهیم بنابراین دقت در مرحله دوم برابر با ۸۰ درصد می باشد این در حالی است که در مرحله سوم ۴۰ درصد می باشد بنابراین اگر اجرای الگوریتم را ادامه دهیم بردار های وزن overfit می شوند بنابراین بهترین مقدار برای بردارهای وزن دو کلاس A و B برابر است با

$$W_A = (2, -5, 2, 4.5) \\ W_B = (-1, 5, -2, -4.5)$$

مسئله ۴

هوشنگ حداکثر ۲ خواهر دارد

:

$$\forall x, y, z ((HasSibling(hosing, x) \wedge Female(y) \wedge HasSibling(hoshang, y) \wedge Female(y) \wedge HasSibling(hoshang, z) \wedge Female(z)) \Rightarrow (x = y \vee y = z \vee y = z))$$

همه دانشجویان حداقل یک درس را برداشته اند

به ازای هر دانشجو یک درس وجود دارد که آن دانشجو آن را گرفته است

$$\forall x \exists y (Taken(x, y))$$

که X بیانگر دانشجو و Y بیانگر درس می باشد

هیچ دانشجویی نمی تواند تمام دانشجویان را گول بزند

یعنی به ازای هر دانشجو یک دانشجو وجود دارد که از آن دانشجو گول نمی خورد

$$\forall x \exists y (Student(x) \wedge Student(y) \Rightarrow \neg Deceive(x, y))$$

تنها یک دانشجو درس هوش را افتاده است

$$\exists x (Fail(x, AI) \wedge \forall y : (Fail(y, AI) \Rightarrow x = y))$$

مسئله ۵

همسایگان خوب حیوانات پر سروصدا ندارند

$$\forall x \forall y (GoodNeighbour(x) \wedge HaveAnimal(x, y) \Rightarrow \neg Noisy(y))$$

اگر کسی گربه داشته باشد آنگاه موش ندارد

$$\forall x \forall y (HaveAnimal(x, y) \wedge IsCat(y) \Rightarrow \neg HaveMouse(x))$$

همه سگ ها حیوانات پر سر و صدایی هستند

$$\forall y (IsDog(y) \Rightarrow Noisy(y))$$

علی سگ یا گربه دارد

$$\forall y (HaveAnimal(Ali, y) \Rightarrow (IsDog(y) \vee IsCat(y)))$$

حکم : اگر علی همسایه خوبی باشد ، آنگاه موش ندارد

$$\forall y (GoodNeighbour(Ali) \wedge HaveAnimal(Ali, y) \Rightarrow \neg HaveMouse(Ali))$$

حال جملات را به صورت CNF می نویسیم :

$$1. \neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y)$$

$$2. \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x)$$

$$3. \neg IsDog(y) \vee Noisy(y)$$

$$4. \neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y)$$

$$5. \neg GoodNeighbour(Ali) \vee \neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg HaveMouse(Ali)$$

حال NOT عبارت پنجم (حکم) را به KB اضافه می کنیم بنابراین KB به صورت زیر است :

$$1. \neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y)$$

$$2. \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x)$$

$$3. \neg IsDog(y) \vee Noisy(y)$$

$$4. \neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y)$$

$$5. GoodNeighbour(Ali)$$

$$6. HaveMouse(Ali)$$

$$7. HaveAnimal(Ali, y)$$

ابتدا عبارات ۱ و ۵ را به ازای $x = Ali$ با یک دیگر resolve می کنیم بنابراین KB به شکل زیر است :

$$1. \neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y)$$

$$2. \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x)$$

$$\neg IsDog(y) \vee Noisy(y) \quad ۳$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y) \quad ۴$$

$$GoodNeighbour(Ali) \quad ۵$$

$$HaveMouse(Ali) \quad ۶$$

$$HaveAnimal(Ali, y) \quad ۷$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۸$$

حال دو عبارت ۷ و ۸ را با یک دیگر resolve می کنیم بنابراین KB به شکل زیر می باشد :

$$\neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۱$$

$$\neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x) \quad ۲$$

$$\neg IsDog(y) \vee Noisy(y) \quad ۳$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y) \quad ۴$$

$$GoodNeighbour(Ali) \quad ۵$$

$$HaveMouse(Ali) \quad ۶$$

$$HaveAnimal(Ali, y) \quad ۷$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۸$$

$$\neg Noisy(y) \quad ۹$$

حال دو عبارت ۹ و ۳ را با یکدیگر resolve می کنیم پس :

$$\neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۱$$

$$\neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x) \quad ۲$$

$$\neg IsDog(y) \vee Noisy(y) \quad ۳$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y) \quad ۴$$

$$GoodNeighbour(Ali) \quad ۵$$

$$HaveMouse(Ali) \quad ۶$$

$$HaveAnimal(Ali, y) \quad ۷$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۸$$

$$\neg Noisy(y) \quad ۹$$

$$\neg IsDog(y) \quad ۱۰$$

حال دو عبارت ۲ و ۶ را به ازای $X = Ali$ با یک دیگر resolve می کنیم پس :

$$\neg GoodNeighbour(x) \vee \neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۱$$

$$\neg HaveAnimal(x, y) \vee \neg IsCat(y) \vee \neg HaveMouse(x) \quad ۲$$

$$\neg IsDog(y) \vee Noisy(y) \quad ۳$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee IsDog(y) \vee IsCat(y) \quad ۴$$

$$GoodNeighbour(Ali) \quad ۵$$

$$HaveMouse(Ali) \quad ۶$$

$$HaveAnimal(Ali, y) \quad ۷$$

$$\neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg Noisy(y) \quad ۸$$

$$\neg Noisy(y) \quad ۹$$

$$\neg IsDog(y) \quad ۱۰$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \quad .11$$

حال دو عبارت ۱۱ و ۷ را با یکدیگر resolve می کنیم پس :

$$\neg \text{GoodNeighbour}(x) \vee \neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .1$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \vee \neg \text{HaveMouse}(x) \quad .2$$

$$\neg \text{IsDog}(y) \vee \text{Noisy}(y) \quad .3$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \text{IsDog}(y) \vee \text{IsCat}(y) \quad .4$$

$$\text{GoodNeighbour}(\text{Ali}) \quad .5$$

$$\text{HaveMouse}(\text{Ali}) \quad .6$$

$$\text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \quad .7$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .8$$

$$\neg \text{Noisy}(y) \quad .9$$

$$\neg \text{IsDog}(y) \quad .10$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \quad .11$$

$$\neg \text{IsCat}(y) \quad .12$$

حال دو عبارت ۴ و ۷ را با یکدیگر Resolve می کنیم پس :

$$\neg \text{GoodNeighbour}(x) \vee \neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .1$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \vee \neg \text{HaveMouse}(x) \quad .2$$

$$\neg \text{IsDog}(y) \vee \text{Noisy}(y) \quad .3$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \text{IsDog}(y) \vee \text{IsCat}(y) \quad .4$$

$$\text{GoodNeighbour}(\text{Ali}) \quad .5$$

$$\text{HaveMouse}(\text{Ali}) \quad .6$$

$$\text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \quad .7$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .8$$

$$\neg \text{Noisy}(y) \quad .9$$

$$\neg \text{IsDog}(y) \quad .10$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \quad .11$$

$$\neg \text{IsCat}(y) \quad .12$$

$$\text{IsDog}(y) \vee \text{IsCat}(y) \quad .13$$

حال دو عبارت ۱۳ و ۱۲ را با یکدیگر resolve می کنیم پس :

$$\neg \text{GoodNeighbour}(x) \vee \neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .1$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(x, y) \vee \neg \text{IsCat}(y) \vee \neg \text{HaveMouse}(x) \quad .2$$

$$\neg \text{IsDog}(y) \vee \text{Noisy}(y) \quad .3$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \text{IsDog}(y) \vee \text{IsCat}(y) \quad .4$$

$$\text{GoodNeighbour}(\text{Ali}) \quad .5$$

$$\text{HaveMouse}(\text{Ali}) \quad .6$$

$$\text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \quad .7$$

$$\neg \text{HaveAnimal}(\text{Ali}, y) \vee \neg \text{Noisy}(y) \quad .8$$

$$\neg \text{Noisy}(y) \quad .9$$

$$10. \neg IsDog(y)$$

$$11. \neg HaveAnimal(Ali, y) \vee \neg IsCat(y)$$

$$12. \neg IsCat(y)$$

$$13. IsDog(y) \vee IsCat(y)$$

$$14. IsDog(y)$$

حال دو عبارت ۱۴ و ۱۰ را با یک دیگر resolve می کنیم که در این مرحله به کلاز nil می رسیم بنابراین اگر not حکم برقرار باشد به تناقض می رسیم بنابراین خود حکم برقرار است .

مسئله ۶

ابتدا با استفاده از $P(A)$ از جدول $P(C|A, B)$ مقدار $P(C|B)$ را به دست می آوریم که به صورت زیر است :

| B | C | P(C B) |
|---|---|--------|
| F | F | 0.75 |
| F | T | 0.25 |
| T | F | 0.75 |
| T | T | 0.25 |

حال با استفاده از $P(B)$ از طریق جدول $P(C|B)$ مقدار $P(C)$ را به دست می آوریم :

| C | P(C) |
|---|------|
| T | 0.8 |
| F | 0.2 |

حال با استفاده از جدول $P(C)$ و جدول $P(D|C)$ مقادیر $P(D)$ را به دست می آوریم :

| D | P(D) |
|---|------|
| T | 0.13 |
| F | 0.87 |

بنابراین احتمال false بودن D برابر است با ۰/۸۷