دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری سوم | نظریه‌ی اعداد و مجموعه‌ها | زمان تحویل: ۱۹ فروردین‌ماه

مسئله‌ی ۱*. بخش‌پذیری

ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n، $۸^{n+۱} + ۹^{۲n-۱}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

حل. داریم $۹^{۲} \overset{۷۳}{\equiv} ۸$. پس:

$$۹^{۲n-۱} \overset{۷۳}{\equiv} (۹^{۲})^{n-۱} \times ۹ \overset{۷۳}{\equiv} ۸^{n-۱} \times ۹.$$

در نتیجه:

$$۸^{n+۱} + ۹^{۲n-۱} \overset{۷۳}{\equiv} ۸^{n+۱} + ۸^{n-۱} \times ۹ \overset{۷۳}{\equiv} ۸^{n-۱}(۶۴ + ۹) \overset{۷۳}{\equiv} ۰.$$

▷

مسئله‌ی ۲*. اعداد بزرگ

مجموعه‌ی تمام اعداد ۷۰ رقمی با ارقام $۱, ۲, ۳, \ldots, ۷$ را در نظر بگیرید که هر رقم در هر عدد دقیقاً ۱۰ بار ظاهر شده است. ثابت کنید هیچ یک از اعداد این مجموعه بر عدد دیگری در این مجموعه بخش‌پذیر نیست.

[راهنمایی: این اعداد را به پیمانه‌ی ۹ محاسبه کنید.]

حل. فرض کنید عدد b به فرم گفته شده وجود دارد که بر عدد a دیگری به همین فرم بخش‌پذیر است.

$$a \overset{۹}{\equiv} ۱۰(۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۷) \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{۹}{\equiv} b$$

فرض کنید $b = ak$ طبق روابط بالا داریم، $k \overset{۹}{\equiv} ۱$. از آن‌جایی که k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۷ باشد، نتیجه می‌شود $k = ۱$. بنابراین این دو عدد یکی هستند. پس چنین اعدادی وجود ندارند. ▷

مسئله‌ی ۳. مقسوم‌علیه

نشان دهید اگر $۲۴ \mid n + ۱$، آن گاه مجموع تمام مقسوم‌علیه‌های n بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

حل. فرض کنید a و b دو مقسوم علیه n باشند طوری که $n = ab$.

$$۲۴|ab + ۱ \Rightarrow ۳|ab + ۱ \Rightarrow \{a, b\} \overset{۳}{\equiv} \{۱, ۲\} \Rightarrow ۳|a + b$$

به علاوه داریم:

$$۲۴|ab + ۱ \Rightarrow ۸|ab + ۱ \Rightarrow ab \overset{۸}{\equiv} -۱$$

که دو حالت ممکن است: $\{a, b\} \overset{۸}{\equiv} \{۱, ۷\}$ یا $\{a, b\} \overset{۸}{\equiv} \{۳, ۵\}$ در هر دو حالت داریم، $۸|a + b$. کافی است به این ترتیب مقسوم‌علیه‌ها را جفت کنیم و مجموع هر جفتی بر ۲۴ بخش‌پذیر خواهد بود.

حال حالتی را در نظر بگیرید که n مربع کامل باشد:

$$n = k^{۲} \Rightarrow ۲۴|k^{۲} + ۱ \Rightarrow ۳|k^{۲} + ۱$$

که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. پس n نمی‌تواند مربع کامل باشد. ▷

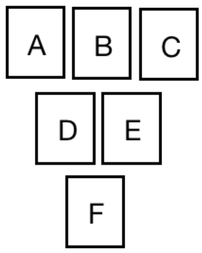
مسئله‌ی ۴. مرکب فرد

ثابت کنید بی‌نهایت n وجود دارد که $۱^{۱} + ۲^{۲} + ۳^{۳} + \cdots + n^{n}$ عددی مرکب و فرد باشد.

حل. ابتدا این اعداد را به پیمانه ۳ محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که $\phi(۳) = ۲$ دوره تناوب k^k به پیمانه ۳ برابر با ۶ است. بدین ترتیب اگر اعداد $۱^{۱}, ۲^{۲}, ..., k^{k}, ...$ را به بلوک‌های ۶تایی تقسیم کنیم، مجموع اعداد داخل هر بلوک به پیمانه ۳ برابر خواهد بود. پس اگر تعداد این بلوک‌ها به ۳ بخش‌پذیر باشد، مجموع همه اعداد بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود. پس کافی است $n = ۶k \times ۳ = ۱۸k$ باشد. ▷

مسئله‌ی ۵. مجموعه‌های پله‌ای

A، B و C سه مجموعه دلخواه‌اند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپی منهای سمت راستی) مثلا $D = A - B$. همچنین $P(A)$ نشان‌دهنده مجموعه توانی مجموعه A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $(P(A) \cup P(B)) \subseteq P(A \cup B)$

حل.

الف) نادرست. اگر عضوی در B و C باشد در F نخواهد بود.

ب) نادرست. اگر عضوی در A باشد و در B و C نباشد در F هست ولی در اشتراک A و C نیست.

ج) درست. داریم : $F = D - E$ برای این که اشتراک D و C در $D - E$ باشد، کافی‌است اشتراک F و C تهی باشد که بدیهی‌است.

د) درست. این مورد مستقل از ساختار شکل اثبات می‌شود. اعضای A در اجتماع A و B هستند. به این ترتیب در مجموعه توانی اجتماع آن‌ها اعضای مجموعه توانی A به طور کامل ایجاد خواهد شد. به همین ترتیب برای اعضای مجموعه توانی B. پس اجتماع مجموعه‌های توانی، زیر مجموعه مجموعه توانی اجتماع است. خود مجموعه اجتماع ممکن است در اجتماع مجموعه‌های توانی نباشد اما در مجموعه توانی اجتماع هست.

▷

مسئله‌ی ۶. شمارا و ناشمارا

الف) ثابت کنید مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های متناهی از هر مجموعه‌ی نامتناهی شمارا، شمارا است.

ب) ثابت کنید تعداد انسان‌های روی کره‌ی زمین از ابتدای بشریت تا ابد شمارا است. (از این فرض بدیهی استفاده کنید که هر انسان به تعداد متناهی فرزند دارد.)

حل.

الف) مجموعه اولیه را S می‌نامیم. ابتدا باید ثابت کنیم که به ازای هر عدد طبیعی k تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی S متناهی است. چون S شماراست می‌توان آن را معادل N در نظر گرفت و زیرمحموعه‌های k عضوی معادل با اعداد k رقمی بدون ارقام تکراری خواهند بود. کافی است این اعداد را به صورت مرتب شده از کوچک به بزرگ بنویسیم. به این ترتیب شمارا بودن این قبیل مجموعه‌ها ثابت می‌شود. حال باید ثابت کنیم اجتماع شمارا تا مجموعه شمارا، شماراست. کافی است اعضای هر مجموعه را در یک سطر بنویسیم و ایده مشابه اثبات شمارا بودن اعداد گویا را به کار ببریم.

ب) درخت تمامی افراد را به این ترتیب می‌سازیم که هر کس با یک یال به مادرش متصل است. درخت را از راس مربوط متناظر با حوا ریشه‌دار می‌کنیم. هر راس به تعداد متناهی فرزند خواهد داشت. به این ثابت می‌شود در هر سطری از رئوس گراف، تعداد رئوس متناهی است. پس کافی است از سطر اول شروع به شمردن رئوس گراف کنیم و پس از تمام شدن رئوس هر سطر به سطر بعدی می‌رویم. پس تعداد تمامی رئوس متناهی است.

▷

مسئله‌ی ۷*. توابع مجموعه‌ای

توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,A)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\notin A\end{cases} \qquad (۱)$$

$$g(x)=\begin{cases}\text{x(۱-x)} & x\geqslant ۱\\ \text{x(۱+x)} & x<۱\end{cases} \qquad (۲)$$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x^{۲}} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases} \qquad (۳)$$

الف) دامنه و برد توابع $g(x)$، $g(f(x,A))$ و $g(h(f(x,A)))$ را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید: $f(x,A)\times f(x,\overline{B})+f(x,\overline{A})=f(x,\overline{A\cap B})$

حل.

الف) • دامنه و برد $g(x)$:
داریم :

$$x(۱+x)=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

$$x(۱-x)=-(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱}{۴}$$

بنابراین تابع $x(۱+x)$ برای $x<۱$ برد $(-\frac{۱}{۴},+\infty)$ را ایجاد می‌کند.
تابع $x(۱-x)$ نیز برای $۱\leqslant x$ برد $(-\infty,۰)$ را ایجاد می‌کند.
بنابراین داریم:

$$Ran(g(x))=(-\frac{۱}{۴},+\infty)\cup(-\infty,۰)=(-\infty,+\infty)$$

دامنه این تابع نیز $\mathbb{R}$ می‌باشد.

• دامنه و برد $g(f(x,A))$:
دامنه این تابع نیز $\mathbb{R}$ می‌باشد.
برد آن با توجه به این که برد تابع f برابر $\{۰,۱\}$ است و هر دو مقدار نیز می‌تواند در هر دو حالت تابع g رخ دهد، بنابرین برد تابع g برابر با $Ran(g(f(x,A))=\{۰,۲\}$ می‌باشد.

• برای $x\in A$ داریم :

$$f(x,A)=۱\rightarrow h(۱)=۱\rightarrow g(۱)=۰$$

برای $x\notin A$ نیز داریم :

$$f(x,A)=۰\rightarrow h(۰)=۰\rightarrow g(۰)=۰$$

بنابراین دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن برابر با صفر می‌باشد.

ب) مقدار $f(x,A)\times f(x,\overline{B})$ زمانی برابر ۱ خواهد شد که x در هر دو مجموعه قرار داشته باشد و در غیر این صورت مقدار آن صفر خواهد بود. بنابراین این عبارت $f(x,A\cap\overline{B})=f(x,A-B)$ را نشان می‌دهد. با توجه به این که $A-B$ با $\overline{A}$ اشتراکی ندارد توابع f مربوط به این دو مجموعه، هیچ‌گاه همزمان برابر ۱ نمی‌شود و بنابراین حاصل جمع در صورتی که یکی از آن‌ها ۱ باشد برابر ۱ و در غیر این صورت صفر خواهد بود. درنتیجه حاصل جمع این تابع برابر تابع f مربوط به اجتماع این دو مجموعه می‌باشد. داریم:

$$(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}=(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})=M\cap(\overline{B}\cup\overline{A})=(\overline{B}\cup\overline{A})=\overline{A\cap B}$$

$\triangleright$