ریاضیات مهندسی جلسه‌ی ۱

منابع درس:

۱) ریاضیات مهندسی تألیف دکتر پورنکی، دکتر حصارکی و دکتر فتوحی
انتشارات علمی دانشگاه شریف و انتشارات فاطمی

۲) ریاضیات مهندسی پیشرفته تألیف Erwin Kreyszig ترجمه دکتر زیلکنه
وَد ـ جهان دیده یا ترجمه‌ی دکتر عالم زاده

ارزیابی درس:

میان ترم: پنج شنبه ۹۸/۱/۲۹ ساعت ۱۳ از بخش اول درس ۵۰٪ نمره

پایان ترم: ۹۸/۳/۲۲ ساعت ۳:۳۰ از بخش دوم درس ۵۰٪ نمره

سرفصل درس:

بخش ۱:

سری فوریه ـ سری فوریه توابع فرد و زوج ـ توسیع تناوبی (سطح نیم برد)

شکل مختلط سری فوریه ـ مشتق گیری و انتگرال گیری از سری فوریه

سری فوریه‌ی تعمیم یافته ـ تبدیل فوریه ـ معادله‌ی اشتورم ـ لیویل

معادلات دیفرانسیل پاره ای ـ حل معادله‌ی موج و لاپلاس به روش جداسازی

متغیرها

بخش ۲:

یادآوری ویژگی های اعداد مختلط - توابع تحلیلی - روابط کشی-ریمان

توابع نمایی، مثلثاتی، هذلولوی، لگاریتمی و توان - نگاشت نواحی

تحت توابع خاص - انتگرال روی خم - قضیه ی انتگرال کشی - سری

توان - سری تیلور - سری لوران - نقاط تکین و قطب - مانده - محاسبه ی

برخی از انتگرال های ناسره به کمک قضیه ی مانده ها

سری فوریه:

پدیده‌های مختلفی در طبیعت به وسیله‌ی توابع متناوب مدل می‌شوند.

این توابع ممکن است حتی پیوسته هم نباشند و درنتیجه برای آن‌ها

بسط تیلور وجود ندارد. می‌خواهیم به جای بسط تیلور از تکنیک جدیدی

موسوم به بسط فوریه برای توابع متناوب استفاده کنیم.

پیش از مطرح کردن سری فوریه، به یادآوری چند ویژگی توابع متناوب

می‌پردازیم:

در این بخش توابع مورد نظر حقیقی (مقدار) هستند و دامنه‌ی آن‌ها $D \subseteq \mathbb{R}$

می‌تواند هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ باشد ولی برای سادگی بیشتر مباحث در مورد توابعی

بیان می‌شود که دامنه‌ی آن‌ها $\mathbb{R}$ است.

تابع متناوب: گوییم f دارای دوره‌ی تناوب $P \neq 0$ است، هرگاه

$$\forall x: f(x+P) = f(x) \qquad (*)$$

۱- کوچک‌ترین P که در $(*)$ صدق می‌کند (درصورت وجود) دوره‌ی تناوب

اصلی نامیده می‌شود.

مثال:

برای $f(x)=\sin x$ ، $P=2\pi$ دوره‌ی تناوب اصلی است.

" $f(x)=\cos x$ ، " " " " "

" $f(x)=\sin nx$ ، $P=\frac{2\pi}{n}$ " " " "

" $f(x)=\cos nx$ ، " " " " "

۲- اگر f و g توابع متناوب با دوره‌ی تناوب P باشند، $\lambda f+g$ نیز متناوب است با دوره‌ی تناوب P.

۳- اگر f متناوب با دوره تناوب P باشد، ۲P ، ۳P ، ... ، nP نیز یک دوره تناوب f است.

۴- اگر f روی یک دوره‌ی تناوب مثلاً [۰ , T] انتگرال‌پذیر باشد آنگاه:

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

فوریه در مطالعه‌ی مسئله‌ی انتقال حرارت، ادعا کرد که هر تابع متناوب که در مسائل فنی و مهندسی ظاهر می‌شود، به شکل زیر قابل نمایش است:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

تمام توابع در مجموعه‌ی $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ دارای دوره

تناوب 2π هستند. ← مجموعه‌ی مثلثاتی

در گام نخست، همچون فوریه می‌خواهیم با فرض درستی این ادعا

مقادیر a_0، a_n و b_n را بدست آوریم.

برای این منظور، فرض کنید

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

در این صورت، تحت شرایطی که بعداً مطرح می‌شود داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$