۵) ۱

		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	\	
				_
			ن ۱۸۰ دقیقه است.	
نفی دارد.		هی مثبت و پاسخ نادرست _و		
	اِر د پاسخنامه کنید.	ست. حتماً كد دفترچه را و	ینهها به طور تصادفی ا	 ترتیب گزب
ائه شده است.	ز هر دسته توضیحی ارا	چند سوالی آمدهاند و قبل ا	۲ تا ۳۰ در دستههای	سوالات ٣
ده و نمیخواهد کنار او	سلطان با ایلیچ قهر کر	ند سوار یک تاکسی شوند.	و مسافر دیگر میخواه	۱ سلطان، ایلیچ و دو
سه نفر عقب) بنشینند،	سی (یک نفر در جلو و	ی توانند در صندلیهای تاکس	مسافر به چند طریق م	بنشیند. این چهار
			كنار ايليچ نباشد؟	طوری که سلطان
18 (۵	74 (4	17 (4	۸ (۲	۶(۱
			t.	
			ر نظر بخیرید:	۲ دایرههای زیر را در
یک دایرهی سفید را که	در هر مرحله میتوان ب	یهی دایرهها سفید هستتند.	ردیف پایین سیاه و بقب	ابتدا پنج دایرهی ر
، دارد؟ توجه كنيد فقط	پنج مرحله چند حالت	باه کرد. شکل نهایی پس از	ین آن سیاه هستند، سب	هرِ دو دايرهي زير
		احل مهم نيست.	بوده و ترتیب انجام مر	شکل نهایی مهم ب
۱۱ (۵	٧ (۴	14 (4	۸ (۲	۵(۱
c 4		4 · 1 · 6 · 1 ·		w x) .
$x,y \in A$ ر به ارای هر	A را صربی دوییم، اد	f نظر بگیرید. تابع f از A به سد:	را در $A = \{1, 1, 1, 1\}$ دو شرط زیر برقرار با	۲,۵} مجموعهی ۲,۵} دست کم یکی از
				$\times y > \Delta \bullet$
			$f(x \times y) = f(x)$	
		د؟	1	f : : : : : : : : : : : : : : : : : : :
N. / N	A (Y		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	پ
Υ (Δ	۶۰ (۲	۵۰ (۳	1 (7	70(1
		این اعداد را به صورت صع		
	•	ہیں ہے۔۔ رہ ب عبورت عام ت نزولی مرتب می کنیم تا	•	
ن ۱۰۰ مجموعه به فرم	امبای کار $B_i=\{$	$\{b_1,\ldots,b_i\}$ و وي الرقبي المي ويتمام $A_i=\{a$	ر کنید $\{a_i\}$ نید $\{a_i\}$	ب دینی جاتی ہوتی ہوتی ہوتی ہوتی ہوتی ہوتی ہوتی ہو
		$\{b_1,\ldots,b_i\}$ و $A_i=\{a$ موعهی متمایز وجود دارد؟	بازی کی کا پاند میج $i,j \leqslant i,j \leqslant j$	$A_i \overset{.}{\cup} B_j$ که ۱۰
		۳۷ (۳		
ww (w	, w (1	, , (1	1 / (1	1/(1
، یکی از د و نفر مجاور	س دستش را به سمت	حظه به طور همزمان هر ک	دایره هستند. در یک ل	۵ ینج نفر دور یک ه
		، سمت هم دراز کردهاند با		
		نجام میشود؟	وند عمل دست دادن ا	حالات مختلف چ

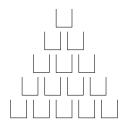
۲ (۳

١ (٢

 $\frac{\pi}{7}$ (1

<u>∆</u> (4

۶ شکل زیر، نمایی از تعدادی لیوان است:



ظرفیت هر لیوان یک لیتر است. با شروع از لحظه ی صفر، پارسا به طور پیوسته به میزان یک لیتر بر ثانیه در لیوان بالایی آب میریزد. اگر یک لیوان پر شود، آب از دو طرف آن به طور مساوی سرریز می کند. جاذبه را بسیار زیاد در نظر بگیرید و فرض کنید اگر آب سرریز شود، به سرعت به لیوان پایینی منتقل می شود. فرض کنید t، نخستین لحظه ای بر حسب ثانیه باشد که به یکی از لیوان های ردیف پایین قطره ای از آب برسد. نزدیک ترین عدد صحیح t حست t

V(0 A(F 0(T F(T 9(1

به هر رقم در مبنای دو ($^{\circ}$ یا ۱) یک بیت گفته می شود. عمل \otimes بین دو بیت به صورت زیر انجام می شود:

 $\circ \otimes \circ = \circ$ $\circ \otimes 1 = \circ$ $1 \otimes \circ = \circ$ $1 \otimes 1 = 1$

برای انجام عمل \otimes بین دو عدد، ابتدا آن دو عدد را در مبنای دو مینویسیم. اگر تعداد ارقام دو عدد برابر نبود، آنقدر سمت چپ عدد کوچکتر رقم \circ میگذاریم تا تعداد ارقامشان برابر شود. در انتها بیت به بیت عمل \otimes را انجام میدهیم. برای مثال:

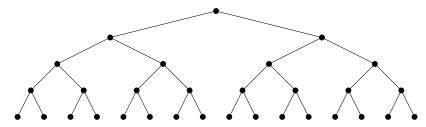
$$14 \otimes 0 = 4$$

زیرا:

 $111\circ\otimes\circ1\circ1=\circ1\circ\circ$

. تعداد زوجهای مرتب (a,b) را از اعداد صحیح بیابید که $a\otimes b=a$ و $a\otimes b=a$ باشد.

۸ نقشهی یک موزه به شکل زیر است:



هر یک از نقاط پایینی یک در ورودی هستند و یک گنج در رأس بالا قرار دارد. دو نقطه که با پارهخط به هم وصل هستند، به هم راه مستقیم دارند. ایلیچ میتواند از یک در ورودی وارد شده و با حرکت در موزه به گنج برسد. برای سرعت دادن به کار، ایلیچ از هر نقطه حداکثر یک بار عبور میکند. به چند طریق میتوان در نقاط شکل دوربین قرار داد، طوری که ایلیچ از هر مسیری که به گنج برسد، توسط دقیقاً یک دوربین دیده شود؟

94 (D 1074 (4 94

۲ در ابتدا دو جعبهی خالی به نامهای A و B و چهار توپ با شمارههای ۱ تا ۴ داریم. برای هر i به ترتیب از ۱ تا ۴ در ابتدا دو جعبه ی
در مرحله ی i أم توپ شماره i را به احتمال $rac{a+1}{i+1}$ در جعبه ی A و به احتمال $rac{b+1}{i+1}$ در جعبه ی B می اندازیم که a
به ترتیب تعداد توپهای جعبههای A و B قبل از انجام مرحلهی i اُم هستند. احتمال این را بیابید که در انتها b
در هر جعبه دست کم یک توپ باشد.

j گرافی ۱۰۰۰ رأسی با رأسهای ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیرید. برای هر ۱۰۰۰ و بین دو رأس i و رأس و و رأس i و رأس قرار می دهیم، اگر و تنها اگر i أمین رقم نمایش دودویی عدد j (از سمت راست) برابر ۱ باشد. کوچکترین k را بیابید که بتوان با k رنگ رأسهای این گراف را رنگ آمیزی کرد، طوری که هر دو رأس مجاور ناهم رنگ باشند.

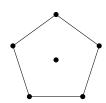
Y (0 0 (4 Y (7 Y (7)

در خانهی پایین چپ جدول زیر، یک لاکپشت قرار دارد و میخواهد به خانهی بالا راست برسد. روی هر خانه، ارتفاع آن نوشته شده است. لاکپشت در هر مرحله میتواند یک واحد به راست یا بالا برود و در هر گام، به اندازه ی اختلاف ارتفاع دو خانه خسته می شود (حتی اگر ارتفاع کم شود). کمینه ی مجموع میزان خستگی در مسیر چیست؟

٧٠٠	140	٣٠٠	۱۳۰	۰۰ ۲
900	110	۵۰۰	٨٠٠	۵۰۰
100	400	190	900	۸۰۰
٨٠٠	٣٠٠	۱۲۰	100	۲۰۰
0	٧٠٠	۲۰۰	٧٠٠	٩٠٠

ΥΥ··· (Δ 197· (۴ ΥΥ·)· (Υ ΥΛ··· (Υ Υ···· (1

۱۲ شکل زیر یک پنجضلعی منتظم به همراه یک نقطه در مرکز آن است:



میخواهیم بین برخی از شش نقطهی شکل، پارهخطهایی بکشیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ دو پارهخطی همدیگر را قطع نکنند (مگر در خود نقاط شکل).
- سطح داخل شکل به تعدادی مثلث افراز شود، طوری که هر کدام از نقاط شکل، رأس حداقل یکی از مثلثها باشند.

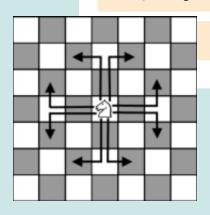
شكل نهايي چند حالت دارد؟

۵ (۵) (۴) ۱۲ (۳) ۱۱ (۲) ۰ (۱

۱۳ به یک مجموعه از اعداد شکننده گوییم، اگر بتوان اعداد آن را به دو مجموعه افراز کرد، طوری که مجموع اعداد آنها برابر باشد. چند تا از مجموعههای زیر شکننده هستند؟

$$A = \{ \mathsf{1}, \mathsf{7}, \dots, \mathsf{1} \circ \circ \} \qquad B = \{ \mathsf{7}, \mathsf{7}, \dots, \mathsf{1} \circ \circ \} \qquad C = \{ \mathsf{1}, \mathsf{7}, \dots, \mathsf{4} \mathsf{4} \} \qquad D = \{ \frac{\mathsf{1}}{\mathsf{1}}, \frac{\mathsf{1}}{\mathsf{7}}, \dots, \frac{\mathsf{1}}{\mathsf{1} \circ \circ} \}$$

۱۴ یک صفحه شطرنج نامتناهی داریم. برخی از خانههای این صفحه امن هستند. در هر خانه از صفحه یک عدد می نویسیم که برابر با حداقل تعداد حرکاتی است که یک مهرهی اسب باید انجام دهد تا از آن خانه به یک خانهی امن برسد. برای مثال روی خانههای امن، عدد صفر نوشته شده است. برای کسانی که با شطرنج آشنا نیستند، اگر مهرهی اسب در خانهی مشخص شده ی شکل زیر باشد، در یک گام می تواند به یکی از هشت خانهی مشخص شده برود:



فرض کنید A و B دو خانهی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) باشند که عدد خانهی A برابر ۵۷ است. کدام یک نمی تواند عدد خانه ی B باشد؟

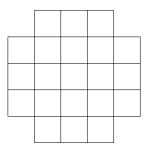
$$\Delta \Upsilon (\Delta \qquad \qquad \mathcal{S} \circ (\Upsilon \qquad \qquad \Delta \mathcal{S} (\Upsilon \qquad \qquad \Delta \mathcal{S} (\Upsilon \qquad \qquad \Delta \mathcal{V} (\Upsilon))$$

 $1 \times 1 \times m$ موازی محورهای مختصات داریم و میخواهیم آن را به طور کامل با آجرهای $a \times b \times c$ یک مکعب $a \times b \times c$ موازی محورهای مختصات داریم و میخواهیم آن را به طور کامل با آجرهای به همین پر کنیم. آجرها نمی توانند از مکعب بیرون بزنند. به آجرهای موازی محور $a \times b \times c$ می گوییم. به همین ترتیب آجرهای نوع $a \times b \times c$ و نوع $a \times b \times c$ را تعریف می کنیم. به ازای چند تا از حالات زیر برای ابعاد مکعب می توان این کار را انجام داد، طوری که تعداد آجرهای هر سه نوع برابر باشد؟

$$\mathcal{F} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$
 $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathbf{V}$ $\Delta \times \mathcal{F} \times \mathbf{V}$ $\Delta \times \mathbf{V} \times \mathbf{A}$

۱۶ تعدادی کیسه دور یک دایره هستند که در مجموع ۱۰۰ سنگریزه دارند. در هر دقیقه به طور همزمان، از هر کیسه که دست کم دو سنگریزه دارد، یک سنگریزه به هر یک از دو کیسهی مجاور منتقل می شود. اگر پس از یک مرحله تعداد سنگریزههای هیچ کیسهای تغییر نکند، کار متوقف می شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا مطمئن باشیم کار متوقف شده است؟

۱۷ شکل زیر، یک جدول ۵ × ۵ با حذف چهار گوشهی آن است. میخواهیم این شکل را به طور کامل با کاشیهای ا × ۱ × ۲ × ۲ و ۳ × ۳ بپوشانیم، طوری که کاشیها روی هم قرار نگرفته و از جدول بیرون نزنند. نیازی نیست از هر سه نوع کاشی استفاده کنیم. حداقل تعداد کاشیها برای انجام این کار چیست؟



17 (D 18 (F 1) (T 4 (T 1) (1)

۱۸ میخواهیم روی هفت ن<mark>قطهی شکل زیر، اعداد ۱ تا ۷ را</mark> بنویسیم (هر کدام از اعداد دقیقاً روی یک نقطه و هر نقطه شامل دقیقاً یک عدد باشد):



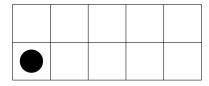
به یک مثلث ایدهآل گوییم، اگر با خواندن اعداد مثلث به ترتیب ساعت گرد از کوچک ترین عدد، دنبالهای صعودی به دست آید. برای مثال در شکل زیر مثلث سمت چپ ایدهآل است، اما مثلث سمت راست ایدهآل نیست:



پس از عددگذاری شکل گفته شده، حداکثر چند مثلث از شش مثلث موجود ایدهآل خواهند بود؟

 $Y(\Delta)$ Y(Y) Y(Y) Y(Y)

۱۹ جدول زیر را در نظر بگیرید:



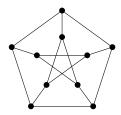
در خانهی پایین ـ چپ جدول یک مهره قرار دارد. دو خانه از جدول را همسایه گوییم، اگر یک ضلع یا یک رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق میتوان از وضعیت مشخص شده در شکل آغاز کرده، در هر مرحله مهره را به یک خانهی همسایه ببریم، از هر خانه دقیقاً یک بار عبور کنیم و به خانهی آغازین برگردیم؟

خانهی بالا_راست برسانیم، طوری که از	خانهی پایین۔چپ به	مهره را از ·	، چند طریق میتوانیم	در سوال قبل، به	۲.
		,	یک بار عبور کنیم؟	هر خانه حداکثر	

- ۲۱ حافظه ی سلطان ۲۰ خانه با شمارههای ۱ تا ۲۰ دارد. خانه ی i ام حافظه را با A[i] نشان می دهیم. در ابتدا در تمام خانههای حافظه، عدد ۱ نوشته شده است. الگوریتم زیر را اجرا می کنیم:
 - ۱. مقدار ans را برابر قرار بده.
 - ۲. اگر مقدار تمام خانه های حافظه ی سلطان برابر ۰ بود به خط ۱۵ برو.
 - ans را یک واحد زیاد کن. ans
 - ۴. مقدار index را برابر ۱ قرار بده.
 - ۵. اگر r>1 برو. index>1 برو.
 - . اگر o = A[index] = A برو.
 - ۷. مقدار A[index] را برابر \circ کن.
 - ndex را e واحد زیاد کن.
 - ٩. به خط ۵ برو.
 - tmp را برابر tmp مقدار بده.
 - ۱۱. اگر r < x < 1 بود، مقدار tmp را برابر A[index + 1] قرار بده.
 - ۱۲. مقدار A[index] را برابر tmp قرار بده.
 - ۱۳. مقدار index را یک واحد زیاد کن.
 - ۱۴. به خط۵ برو.
 - ۱۵. پایان

پس از پایان الگوریتم، مقدار ans چیست؟

۲۲ گراف زیر را در نظر بگیرید:



یک گنج در یکی از رأسهای گراف مخفی شده است. روزبه یک دستگاه گنجیاب دارد. او در هر مرحله می تواند یک دور به طول پنج از گراف را به دستگاه بدهد و بفهمد گنج در رأسهای این دور هست یا خیر. روزبه دست کم به چند مرحله استفاده از دستگاه نیاز دارد تا مطمئن باشد می تواند جای گنج را بفهمد؟

9(0 9(4)(7)(7

دستگاه پخش کننده ی موسیقی یکسان و n هندزفری یکسان داریم. به هر کدام از دستگاهها یک هندزفری وصل کرده ایم. هر هندزفری نیز دو گوشی دارد که یکی مخصوص گوش راست و یکی مخصوص گوش چپ است.

مرحلهي يكم بيست و هشتمين المپياد كامپيوتر كشور

		ه و آهنگ گوش کند. دو	هستند و میخواهند از طرب یک گوشی ِراسِت برداشت	یک گوشی چپ و ب
		را پخش كنند.	د، اما باید آهنگ یکسانی نیم دستگاههای پخش کن	یک هندزفِری نباشن
	ير پاسخ دهيد	يحات بالا به ۲ سؤال ز	با توجه به توض	
			است. دو تا از دستگاهها ه چند طریق میتوانند هند	
74 (0	18 (4	۱۸ (۳	17(7	44 (1
از افراد $\langle C_1, C_7, \ldots$	(C_k) یم، اگر دنبالهی (C_k) یا باشد، (C_k) با	های <i>A و B ر</i> ا آشنا گوی باشد، <i>C</i> ر با C _۷ دوست	و B را $oldsymbol{cemuno}$ و B را $oldsymbol{cemuno}$ بار B باشد. دو نفر با نام $b \geqslant 1$ خود A و C_k و ر C_k باشد. واض C_k	گوشی دیگر در اخت وجود داشته باشد ک
غیر آشنایی، موسیقی	رسیقی M_1 و پنج تای ئوییم، اگر هیچ دو نفر ع	نگاهها در حال پخش مو ن موسیقیها سلطانی گ	n اس <mark>ت. پنج تا از دست</mark> د. به حالتی از گوش کرد د. افراد به چند حالت س	$=$ فرض کنید $M_{ ext{ iny M}}$ هستنا
۲۹ (۵	1 • ! (4	<u>70!</u> (٣	$Y^{\Lambda} \times \Delta! \times \Delta!$ (Y	9! (1
تم م <i>ی</i> شود. به چنین ۶, ۳,۶,۳۰ کا یک	وع شده و به عدد n خ \cdot برای مثال دنبالهی	بگیرید که از عدد ۱ شر ضرب عدد قبلی باشد.	بیعی و متمایز را در نظر م، اگر هر عدد دنباله، م	دنبالهای از اعداد ط دنبالهای عول گویی دنبالهی عول است.
	ير پاسخ دهيد	يحات بالا به ٣ سؤال ز	با توجه به توض	
		ېست $n=$ ۸۱۰۰۰۰	ین دنبالهی عول به ازای ^ه	۲ تعداد عناصر بلندتر
۱۲ (۵	9 (4	11 (٣	18 (2	1 0 (1
ای عول k عنصره به	ر بگیرید. تعداد دنبالهه	را k در نظ $n=1$ ۰۸۰۰	ین دنبالهی عول به ازای [.] چیست؟	تعداد عناصر بلندتر $n = 1 \circ \Lambda \circ \circ$ ازای
۶! (۵	1750 (4	۹! (۳	۲۸۸ (۲	۵۱۲۰ (۱
		. دارد؟	ازای ۵۱۲۰ $n=$ وجود	۲ چند دنبالهی عول به
۲۰۷۲ (۵	4.98 (4	۵۶۳۲ (۳	8144 (4	17711
		ف رزندان او میگوییم. مم	ىنگام تولىد مثل به سه باك به باكترى به وجود آمده، ف به سرعت تجزيه شده و اث	می کند، والد و به س

مدتها پیش، سلطان یک باکتری فلاجلا به نام آر.بی.جی خرید و آن را در قفس نگهداری می کرد! پس از مدتی
ین باکتری از بین رفته است، اما قفس تعدادی باکتری دارد که طبیعتاً از نوادگان آر.بی.جی هستند. سلطان دلش
رای آر.بی.جی تنگ شده و میخواهد ژن آر.بی.جی را بازیابی کند. زیستشناسان به تکنولوژیای دست پیدا
کردهاند که با استفاده از ژن دو تا از فرزندان یک باکتری والد، میتوانند ژن او _ِ را بازیابِی کنند.
فرض کنید تعداد باکتریهای درون قفس n باشد. به یک وضعیت بحرانی گوییم، اگر بتوانیم ژن آر.بی.جی را
ازیابی کنیم، اما در این بازیابی به همهی n باکتری نیاز داشته باشیم.
با توجه به توضيحات بالا به ٣ سؤال زير پاسخ دهيد

دان فرزندان او در تعداد باکتریهای	ام از فرزندان آر.بی.جی و فرزنا آر.بی.جی وجود دارد، کمینهی	ن باشد که هیچ که امکان بازیابی ژن	، كنيد نتايج تحقيقات اير ين تمام حالات ممكن كه ،؟	۲۸ در این سوال فرض قفس نیستند. در ب درون قفس چیست
4 (0	۸ (۴	۹ (۳	۶ (۲	٧(١
	ورون قفس داشت؟	<mark>حرانی با <i>n</i> با</mark> کتری	تا ۱۰ میتوان وضعیتی ب	۲۹ به ازای چند n از ۲

۵ (۳

۳۰ کدام گزاره یا گزارههای زیر درست هستند؟

7(1

9 (7

آ) وضعیتی با شش باکتری درون قفس وجود دارد که با استفاده از هر پنج باکتری میتوانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی بازیابی کنیم، اما چهار باکتری وجود دارند که نمیتوان فقط با استفاده از آنها ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

1 (4

- ب) وضّعیتی با چهار باکتری درون قفس وجود دارد که به ازای هر دو باکتری، با استفاده از فقط همان دو باکتری میتوان ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.
 - ج) وضعیتی بحرانی با پنج باکتری وجود دارد که هر باکتری فرزند یا فرزند فرزند آر.بی.جی باشد.

١) ب و ج ٢) ب ٣) آ و ج ٥) آ و ب

٧ (۵