جلسه ۸

ریاضیات مهندسی

تبدیل فوریه :

مشاهده کردیم که اگر f روی بازه های متناهی قطعه به قطعه پیوسته، $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ (از این پس اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$ باشد می نویسیم f به طور مطلق انتگرال پذیر است.) و مشتقات یک طرفی f همه جا وجود داشته باشد، در نقاطی که f پیوسته است، داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos w(t-x)\,dt\right)dw$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\frac{1}{2}\left(e^{iw(t-x)}+e^{-iw(t-x)}\right)dt\right]\right)dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iw(t-x)}dt\right)dw$$

در انتگرال دوم از عبارت فوق با تبدیل w به -w داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iw(t-x)}dt\right)dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega(t-x)}\, dt \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \right) e^{-i\omega x}\, d\omega$$

قرار دهیم:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

درنتیجه (درچه نقاطی؟!)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

تابع F را تبدیل فوریه‌ی f می‌نامند و می‌نویسند:

$$\mathcal{F}(f) = F$$

پس:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega)$$

در بسیاری از مراجع با کمی سهو رایج می‌نویسند:

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega)$$

قضیه: اگر f پیوسته، به طور مطلق انتگرال‌پذیر و مشتقات یک طرفه‌ی f همه جا وجود داشته باشد، آنگاه برای $F = \mathcal{F}(f)$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

نتیجه: (قضیه تقارن) برای تابع $y=F(x)$

$$\mathcal{F}(F)(\omega)=f(-\omega)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)e^{-i\omega t}dt$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

مثال (مهم): برای $f(x)=e^{-|x|}$ می‌خواهیم $F=\mathcal{F}(f)$ را بدست آوریم.

* شرایط قضیه برقرارند (چرا؟)

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{i\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{i\omega t}dt\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1+i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1+i\omega)t}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} e^{(1+i\omega)} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1+i\omega} e^{(-1+i\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{-1+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-2}{-\omega^2-1} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} \right)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-k|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{k^2+\omega^2} \right)$$

چند ویژگی مهم تبدیل فوریه

$c \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(cf+g) = c\,\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$

$c \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(f(x-c)) = e^{i\omega c}\,\mathcal{F}(f)$

$c \neq 0 : \mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right) \qquad F = \mathcal{F}(f)$

$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \quad \mathcal{F}(f') = -i\omega\,\mathcal{F}(f)$

$$\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega)$$

$$\mathcal{F}(F(x)) = f(-\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}}$$

مثال:

$$f(x) = e^{-|x|} \quad , \quad F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|-\omega|} = e^{-|\omega|}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|\omega|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-|\omega|}$$

مثال:

$$\mathcal{F}(e^{-|x+5|}) = ?$$

$$\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}(e^{-|x+5|}) = e^{-5i\omega}\,\mathcal{F}(e^{-|x|}) = e^{-5i\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

مثال:

$$\mathcal{F}(e^{-|3x|}) = ?$$

$$\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}(e^{-|3x|}) = \frac{1}{3}\,F\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{9}{9+\omega^2} = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{9+\omega^2}$$

مثال: $\mathcal{F}(tg^{-1}x) = ?$

$$(tg^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = tg^{-1}x$$

$$\mathcal{F}(f') = -i\omega\,\mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -i\omega\,\mathcal{F}(tg^{-1}x) \Rightarrow \mathcal{F}(tg^{-1}x) =$$

$$= \frac{1}{-i\omega}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{i}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\omega|}$$

تمرین:

$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{t^2+2t+5}\right)=?$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)=?$$

$$f*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

$$\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)=\mathcal{F}(f*g)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\omega t+i\sin\omega t\right)d\omega=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt}_{F_c(\omega)}+i\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt}_{F_s(\omega)}$$