نمایش سری فوریه:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

می‌خواهیم رابطه‌ی a_0، a_1، ...، a_n را با f بدست آوریم.

اگر تابع متناوب f در یک دوره‌ی تناوب (2π) با سری فوریه‌ی (۱) برابر باشد، داریم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (*)$$

با انتگرال گیری از دو طرف در بازه‌ی $(-\pi, \pi)$ و با پذیرش این که $\int$ با $\sum$ جابه جای شود، نتیجه می شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] dx =$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx}}_{0} + b_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx}}_{0} \right] =$$

$$= 2\pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی $(*)$ در $\cos mx$ $(m \in N$ دلخواه$)$ و انتگرال گیری روی $(-\pi, \pi)$ و با پذیرش همان شرایط قسمت قبل داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx\big)\Big]dx =$$

$$= a_0\,\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\Big)$$

یادآوری:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big]\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big]\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big]\end{aligned}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\big]dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

به شکل مشابه داریم:

$$\forall n,m:\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0$$

به این ترتیب داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos m\, dx$$

با بحث مشابه و با ضرب دو طرف (*) در $\sin mx$ خواهیم داشت:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin mx\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

برخی از مؤلفین به‌جای $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ برای نمایش سری فوریه، از شکل زیر استفاده می‌کنند:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

مزیت: یکپارچه شدن شکل a_0 و a_m

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

در علوم فنی و مهندسی دوره‌ی تناوب تابع لزوماً 2π نیست

برای سادگی فرض کنیم f تابعی با دوره تناوب $T = 2L$ است.

یادآوری: f را روی بازه‌ی $[a, b]$ قطعه‌قطعه پیوسته گوییم هرگاه حداکثر

در تعداد متناهی نقطه از این بازه ناپیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ

وراست f وجود داشته (متناهی) باشد.

قضیه (دیریکله)

فرض کنیم f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=2l$ باشد، در این صورت

اگر f و f' در یک دوره‌ی تناوب قطعه به قطعه پیوسته باشند، آنگاه سری فوریه‌ی

f یعنی $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

به ازای

$n=0,1,\dots$ $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$n=1,2,\dots$ $$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

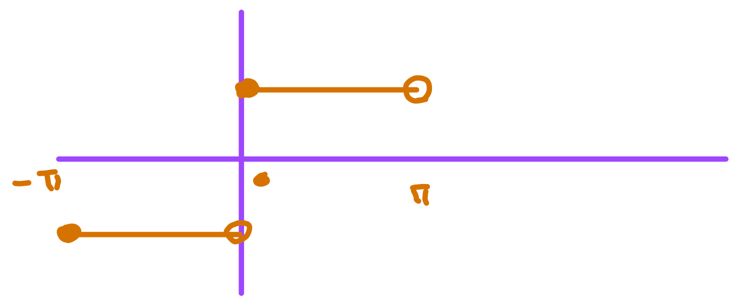
در نقطه‌ی x که f پیوسته است به $f(x)$ و در نقطه‌ی ناپیوسته x_0 به $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ همگرا است.

$$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

مثال: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leq x<0\\ 1 & 0\leq x<\pi\end{cases}$$

$$f(x+2\pi)=f(x)$$



را محاسبه کنیم.

$$T = 2\pi = 2L \longrightarrow L = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$\forall n \geq 1 : \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin x\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos nx\right] + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi} - \frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \dots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x$$

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

مثال ۱: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < L \\ 0 & -L < x < 0 \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$$

را محاسبه کنیم.

مثال ۲: می‌خواهیم بسط فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi \le x \le 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

را محاسبه کنیم.

حل مثال ۱:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{L} x\,dx\right] = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} 0 \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \int_{0}^{L} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{dv} = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x - \int \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x\,dx =$$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} x + C$$

$$u = x \qquad dv = \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^{0} 0 \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx + \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx \right] =$$

$$= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$b_n = - \frac{(-1)^n L}{n\pi}$$