ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نمونه سؤالات | روابط بازگشتی | سری هفتم

۱. همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید که شامل دو عدد متوالی نباشند. نشان دهید مجموع مربعات حاصل‌ضرب‌های این زیرمجموعه‌ها برابر $(n+1)! - 1$ است.

۲. ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n$$

۳. تعداد رشته‌های بیتی به طول n را بیابید که هیچ دو یکی در فاصله‌ی ۲ ندارند.

۴. $a_0 = a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$ که $n \geqslant 1$. نشان دهید همه‌ی a_i ها عددهایی صحیح هستند .

۵. n نفر دور یک دایره نشسته‌اند. آن‌ها را به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. در هر مرحله دومین نفر از دایره حذف می‌شود و بعد از هر حذف، دایره دوباره بسته می‌شود. شماره‌ی آخرین نفر را با $f(n)$ نشان می‌دهیم.

الف) نشان دهید $f(2n) = 2f(n) - 1$ و $f(2n+1) = 2f(n) + 1$.

ب) مقدار $f(1)$ و $f(100)$ را بیابید.

ج) فرض کنید $2^{n'}$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد که $2^{n'} \leqslant n$. نشان دهید $f(n) = 2(n - 2^{n'}) + 1$

د) مقدار $f(2016)$ را بیابید.

ه) نمایش دودویی n را در نظر بگیرید و باارزش‌ترین رقم آن را به ابتدای عدد انتقال دهید (مثلاً ۱۰۱ به ۰۱۱ تبدیل می‌شود). نشان دهید عدد حاصل نمایش دودویی $f(n)$ است.

و) مقدار $f(100000)$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید $n > 1$ یک عدد صحیح باشد. n لامپ $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ دور یک دایره چیده شده‌اند. هر لامپ یا روشن است یا خاموش. در مرحله‌ی i اُم، لامپ j اُم که $i \overset{n}{\equiv} j$ تغییر حالت می‌دهد هرگاه لامپ قبلی‌ش روشن باشد. در غیر این صورت در همان حالت می‌ماند. سایر لامپ‌ها هم در هر صورت در همان حالت می‌مانند. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها روشن هستند.

الف) نشان دهید به ازای هر n عدد صحیح مثبت $M(n)$ وجود دارد که بعد از $M(n)$ گام همه‌ی لامپ‌ها دوباره روشن باشند.

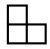
ب) اگر $n = 2^k$ باشد که k عددی صحیح است، آنگاه همه‌ی لامپ‌ها بعد از $n^2 - 1$ گام روشن هستند.

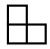
ج) اگر $n = 2^k + 1$ باشد که k عددی صحیح است، آنگاه همه‌ی لامپ ها بعد از $n^2 - n + 1$ گام روشن هستند.

۷. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 1×2 بیابد.

۸. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن نسبت به مرکز متقارن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 1×2 بیابد.

۹. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 1×2 و 2×2 بیابد.

۱۰. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 1×1 و کاشی‌های به شکل  بیابد.

۱۱. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 2×2 و کاشی‌های به شکل  بیابد.

۱۲. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 3$ با کاشی‌های 1×2 بیابد.

۱۳. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 4$ با کاشی‌های 1×3 بیابد.

۱۴. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 2$ با کاشی‌های 1×1 و 1×2 بیابد.

۱۵. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های فرش کردن یک مستطیل $n \times 4$ با کاشی‌های 1×2 بیابد.

۱۶. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد روش های پر کردن یک جعبه‌ی $n \times 2 \times 2$ با کاشی‌های $2 \times 1 \times 1$ بیابد.

۱۷. در سوال قبل ثابت کنید برای n های زوج این تعداد مربع کامل است.

۱۸. دنباله‌ی مورس_توه دنباله‌ی (t_n) از بیت‌ها است که به این صورت تعریف می‌شود. t_0 را برابر صفر قرار دهید و در هر مرحله، مکمل دنباله‌ی فعلی را به انتهای آن اضافه کنید و این کار را مکرراً انجام دهید تا رشته‌ی نامتناهی (t_n) حاصل شود.

الف) ثابت کنید $t_{2n} = t_n$ و $t_{2n+1} = 1 - t_{2n}$.

ب) ثابت کنید $t_n = 1 - t_{n-2^{n'}}$ که در آن n' بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که $2^{n'} \leqslant n$. رقم ۲۰۱۶ اُم دنباله را بیابید.

ج) ثابت کنید که این دنباله متناوب نیست.

د) عدد های صحیح نامنفی را در پایه‌ی دو بنویسید:

$$0, 1, 10, 11, 100, 101 \ldots$$

اکنون هر عدد را با حاصل یای انحصاری (exclusive or) رقم‌های آن جای‌گزین کنید:

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

ثابت کنید این دنباله، دنباله‌ی مورس_توه است.

۱۹. تعداد بلوک‌های ۱ های متوالی در نمایش باینری عدد x را با $g(x)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال $g(19) = 2$ و $g(7) = 1$. مقدار $g(1) + g(2) + \cdots + g(256)$ را حساب کنید.

۲۰. تعداد توابع مثل $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ را بیابید که برای هر عدد صحیح x داشته باشیم $f(x + 22) = f(x)$ و به علاوه عدد صحیحی مثل y وجود نداشته باشد که $f(y) = f(y + 2) = 0$.

۲۱. در هر مهمانی n نفره، هر دو نفر یا با هم دوست هستند یا دشمن. برای هر دو نفر که دشمن هستند، شخصی وجود ندارد که هر دو با آن دوست باشند. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد مهمانی‌های n نفره پیدا کنید.

۲۲. روابط بازگشتی زیر را حل کنید:

الف) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

ب) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$

ج) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2n$

۲۳. در رستوران مرغ تخم طلا هر روز یکی از غذاهای نیمرو، تخم‌مرغ آب‌پز و املت سرو می‌شود. مدیر رستوران می‌خواهد برنامه‌ی صبحانه را طوری تنظیم کند که برنامه‌ی غذایی هر دو روز متوالی متفاوت باشد. به چند حالت این کار ممکن است؟ دقت کنید که فردای جمعه، شنبه است.

۲۴. تعداد اعداد n رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ را بیابید که رقم ۱ و ۲ در آن‌ها مجاور نباشند.

۲۵. n صندلی در یک ردیف چیده شده‌اند که روی هر یک از آن‌ها یک کودک نشسته است. با صدای سوت هر کودک می‌تواند سرجای خود بنشیند یا روی یکی از صندلی‌های مجاورش برود. پس از صدای سوت به چند طریق می‌توانند روی این n صندلی بشینند؟

۲۶. الفبایی دارای سه حرف a و b و c است. چند کلمه‌ی n حرفی وجود دارد که تعداد زوجی a داشته باشد؟

۲۷. تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{۱, ۲, ۳, \dots, n\}$ را بیابید که دو عضو متوالی ندارند.

۲۸. قورباغه‌ای روی رأس A از هشت‌ضلعی منتظم $ABCDEFGH$ است. او در هر جهش به یکی از رئوس مجاورش می‌رود و هرگاه به E برسد، همان جا می‌ماند. به چند طریق می‌تواند با n پرش به E برسد؟

۲۹. فرض کنید $f(n)$ تعداد دورهای گراف کامل n رأسی باشد. رابطه‌ی بازگشتی برای آن بیابید.