۱. فرض کنید A مجموعه‌ای n عضوی باشد. مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف) تعداد روابط تعریف شده روی مجموعه‌ی A که پادتقارنی باشند.

ب) تعداد روابط تعریف شده روی مجموعه‌ی A که تقارنی باشند.

ج) تعداد روابط تعریف شده روی مجموعه‌ی A که هم تقارنی باشند و هم پادتقارنی.

۲. اگر به ازای هر رابطه‌ی R، بستار ترایی، تقارنی و بازتابی آن را به ترتیب با $t(R)$، $s(R)$ و $r(R)$ نشان دهیم، آنگاه ثابت کنید:

الف) $r(t(R)) = t(r(R))$

ب) $r(s(R)) = s(r(R))$

ج) $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$

۳. ثابت کنید رابطه‌ی R ترایی و تقارنی است اگر و تنها اگر $R = R \circ R^{-1}$

۴. فرض کنید رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A ترایایی باشد. ثابت کنید R ترتیبی جزئی روی A است اگر و فقط اگر $R \cap R^{-1} = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

۵. فرض کنید (A, R_1) و (A, R_2) دو مجموعه‌ی مرتب جزئی باشند. رابطه‌ی R را روی $A \times B$ چنین تعریف می‌کنیم: $(a,b)R(x,y) \Leftrightarrow aR_1x \wedge bR_2y$. ثابت کنید که R ترتیبی جزئی است.

۶. رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم: aRb، در صورتی که $a-b$ عدد صحیح نامنفی زوجی باشد. تحقیق کنید R ترتیبی جزئی برای $\mathbb{Z}$ تعریف می‌کند. آیا این ترتیب جزئی، ترتیبی کامل است؟

۷. الف) اگر $A = \{x, y\}$، برای چند تا از ترتیب‌های جزئی روی A، x عنصری مینیمال است؟

ب) اگر $B = \{x, y, z\}$، برای چند تا از ترتیب‌های جزئی روی B، x عنصری مینیمال است؟

۸. اگر $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$، که در آن $A_1 = \{1, 2\}$، $A_2 = \{2, 3, 4\}$، و $A_3 = \{5\}$، رابطه‌ی R را روی A چنین تعریف می‌کنیم: xRy، در صورتی که x و y در یک زیرمجموعه مانند A_i، $1 \leqslant i \leqslant 3$، قرار داشته باشد. آیا R رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

۹. فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه متقارن روی مجموعه‌ی A باشند. اگر $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$ ثابت کنید $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

۱۰. اگر R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد، ثابت یا رد کنید: اگر R^2 بازتابی باشد آنگاه R بازتابی است.

۱۱. فرض کنید $P(n)$ تعداد رابطه‌های هم‌ارزی بر روی یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. همان‌طور که می‌دانید $P(n)$ برابر تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی n عضوی است. نشان دهید عبارت زیر همواره برقرار است.

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P(n-i-1)$$

۱۲. فرض کنید F مجموعه‌ی تمام تابع‌های پیوسته‌ای است که دامنه‌ی آن‌ها شامل بازه $[۰, ۱]$ است. تعریف می‌کنیم: $f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in [۰, ۱] : f(x) \leqslant g(x)$. نشان دهید $(F, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. آیا این مجموعه مرتب کامل نیز هست؟ چرا؟

۱۳. می‌گوییم افراز $P_۱$ با افراز $P_۲$ در رابطه است، اگر هر مجموعه در $P_۱$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ای در افراز $P_۲$ باشد (به عبارت دیگر، افراز $P_۱$ خردشده‌ی افراز $P_۲$ باشد). ثابت کنید این رابطه روی تمام افرازهای یک مجموعه مانند S یک مشبکه است.

۱۴. نشان دهید رابطه‌ی R متقارن است اگر و تنها اگر $R = R^{-۱}$.

۱۵. به ازای مجموعه‌های A, B, C و روابط $R_۱ \subseteq A \times B$ و $R_۲ \subseteq B \times C$ گزاره زیر را ثابت یا رد کنید:

$$(R_۱ \circ R_۲)^{-۱} = R_۲^{-۱} \circ R_۱^{-۱}$$

۱۶. فرض می‌کنیم (A, R) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، n طول بزرگ‌ترین زنجیر آن $(n \geqslant ۲)$ و M مجموعه‌ی همه عناصر ماکسیمال مجموعه‌ی A است. مجموعه‌ی $B = A - M$ را در نظر می‌گیریم و رابطه‌ی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = (B \times B) \cap R$$

ثابت کنید که طول بزرگ‌ترین زنجیر مجموعه‌ی مرتب جزئی B برابر است با $n - ۱$.

۱۷. مجموعه‌ی S و رابطه‌ی $\preceq$ روی آن داده شده است. $(S, \preceq)$ را خوب می‌نامیم اگر هیچ دنباله‌ی نزولی نامتناهی‌ای از اعضای آن پیدا نشود. به این معنی که عناصر متمایز $x_۱, x_۲, \ldots$ موجود نباشند طوری که $\cdots \preceq x_۲ \preceq x_۱$. همچنین $(S, \preceq)$ را چگال می‌نامیم اگر برای هر دو عضو متمایز x و y از S که $x \preceq y$، عضوی مانند z در S باشد که $x \preceq z \preceq y$.

الف) نشان دهید $(S, \preceq)$ خوش‌ترتیب است اگر و تنها اگر خوب باشد و هر دو عضوی از آن قابل مقایسه باشند.

ب) نشان دهید مجموعه‌ی رشته‌های متناهی متشکل از حروف زبان انگلیسی با ترتیب لغت‌نامه‌ای نه خوب است نه چگال.

ج) نشان دهید اگر $(S, \preceq)$ چگال باشد و حداقل دو عضو متمایز قابل مقایسه داشته باشد، آنگاه خوب نخواهد بود.

۱۸. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. رابطه‌ی $\sim$ را روی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ به این صورت تعریف می‌کنیم که $A \sim B$ هرگاه اختلاف متقارن A و B متناهی باشد.

الف) نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است.

ب) عدد اصلی مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی این رابطه را مشخص کنید.

۱۹. اعداد صحیح a، b، c و d داده شده‌اند. رابطه‌ی R را روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \exists r, s, r', s' \in \mathbb{Z} : x - x' = ar + cs \wedge y - y' = br' + ds'$$

الف) نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است.

ب) نشان دهید تعداد رده‌های هم‌ارزی R متناهی است اگر و تنها اگر $ad \neq bc$.

ج) نشان دهید اگر $ad \neq bc$، آنگاه تعداد رده‌های هم‌ارزی R برابر $|ad - bc|$ است.

۲۰. رابطه‌ی $\sim$ را روی مجموعه‌ی دنباله‌های گویا به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$$

نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است و عدد اصلی مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی آن را بیابید.

۲۱. رابطه‌ی $\sim$ را روی مجموعه‌ی توانی اعداد گویا به این صورت تعریف می‌کنیم که $A \sim B$ هرگاه $A \Delta B$ متناهی باشد. نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است و عدد اصلی مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی آن را بیابید.

۲۲. مجموعه‌ی چندگانه، مفهومی شبیه مفهوم مجموعه است، با این تفاوت که اعضای آن می‌توانند تکراری باشند. برای مثال $\{۴, ۰, ۱, ۱, ۵\}$ یک مجموعه‌ی چندگانه با ۵ عضو است. فرض کنید $\mathbb{K}$ مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های چندگانه‌ی k عضوی باشد، که k یک عدد صحیح و ثابت است. رابطه‌ی $\preceq$ را روی $\mathbb{K}$ این گونه تعریف می‌کنیم: $A \preceq B$ اگر و تنها اگر ترتیبی از اعضای A و B مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_k)$ و $(b_۱, b_۲, \ldots, b_k)$ وجود داشته باشد که به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant k$ داشته باشیم $a_i \leqslant b_i$. برای مثال $\{۴, ۰, ۱, ۱, ۵\} \preceq \{۲, ۲, ۸, ۲, ۶\}$.

الف) ثابت کنید رابطه‌ی $(\mathbb{K}, \preceq)$ ترتیب جزئی است.

ب) ثابت کنید رابطه‌ی $(\mathbb{K}, \preceq)$ مشبکه است.

۲۳. فرض کنید L یک مشبکه باشد طوری که برای هر سه عضو L مانند x, y, z داریم $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$، ثابت کنید $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

۲۴. نشان دهید در هر مشبکه‌ی متناهی و توزیع‌پذیر، متمم هر عضو یکتا است.

۲۵. ثابت کنید ضرب دکارتی دو مشبکه یک مشبکه است.

۲۶. برای هر عدد طبیعی مانند n، مجموعه‌ی A_n را به صورت $A_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم. خانواده‌ی S از مجموعه‌ها را به صورت $S = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم. برای هر دو عضو دل‌خواه از S مانند A_t و A_s تعریف می‌کنیم $A_t \preceq A_s$ هرگاه $A_t \subseteq A_s$. آیا $(S, \preceq)$ یک مشبکه است؟

۲۷. در یک درخت ریشه دار، تعریف می‌کنیم $u \preceq v$ هرگاه مسیر از ریشه تا u شامل مسیر از ریشه تا v باشد.

الف) ثابت کنید $\preceq$ روی هر درخت ریشه دار یک ترتیب جزئی است.

ب) در چه صورت $\preceq$ روی یک درخت ریشه‌دار تشکیل مشبکه می‌دهد؟

۲۸. نشان دهید مجموعه‌ی D_n شامل مقسوم‌علیه‌های n با رابطه‌ی عاد کردن یک جبر بول است، اگر و تنها اگر n بر هیچ عدد مربع کاملی به جز ۱ بخش‌پذیر نباشد.