ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

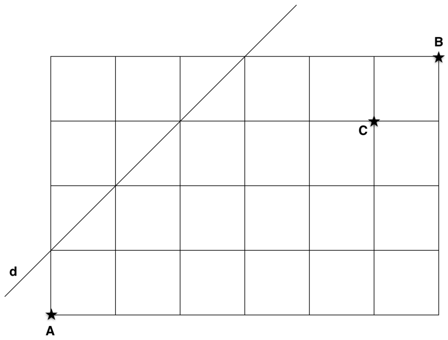
مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

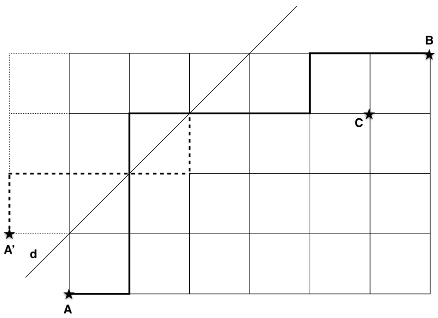
تمرین سری اول | ترکیبیات شمارشی | زمان تحویل: ۶ اسفندماه

مسئله‌ی ۱*. مسیر صعب‌العبور

در شکل زیر، اگر طول هر یک از اضلاع شبکه واحد باشد، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی از A به B را به دست آورید که نه از نقطه‌ی C بگذرد، و نه با خط d برخورد داشته باشد.



حل. ابتدا تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی از A به B که خط d را قطع می‌کنند، محاسبه می‌کنیم. در هر کوتاه‌ترین مسیری که از A شروع می‌شود و به B می‌رسد، آخرین باری که این مسیر خط d را قطع می‌کند را در نظر می‌گیریم و از آنجا به قبل آن مسیر را مانند شکل پایین، نسبت به خط d قرینه می‌کنیم. بنابراین هر مسیری که از A شروع شده، خط d را قطع کرده و به B می‌رسد، معادل یک مسیر از A' به B است. بنابراین تعداد این مسیرها $\binom{۱۰}{۳}$ است.



حال با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد روش‌هایی که می‌توان از A به B بدون گذر از نقطه‌ی C و قطع کردن خط d رسید، برابر است با تعداد روش‌هایی که می‌توان از A به B بدون محدودیت خاصی رسید، منهای تعداد روش‌هایی که می‌توان از A با گذر از C به B رسید، منهای تعداد روش‌هایی که می‌توان از A با قطع کردن خط d به B رسید، به‌علاوه‌ی تعداد روش‌هایی که می‌توان از A با قطع خط d و سپس گذر از نقطه‌ی C به B رسید:

$$\binom{۱۰}{۴} - \binom{۸}{۳} \times \binom{۲}{۱} - \binom{۱۰}{۳} + \binom{۸}{۲} \times \binom{۲}{۱} = ۳۴$$

▷

مسئله‌ی ۲*. اعداد طلایی

یک عدد ۵ رقمی را طلایی می‌نامیم، اگر و تنها اگر با حذف یکی از ارقام آن، عدد ۱۱۲۲ به دست آید. تعداد اعداد طلایی ۵ رقمی را به دست آورید.

حل. تعداد اعداد طلایی ۵ رقمی را با G نشان می‌دهیم. می‌گوییم یک عدد ۵ رقمی دارای ویژگی g_i است، اگر و تنها اگر با حذف رقم i ـام آن، عدد ۱۱۲۲ به دست آید ($۱ \leqslant i \leqslant ۵$). همچنین، برای هر $۱ \leqslant k \leqslant ۵$ ، تعداد اعداد ۵ رقمی دارای همه‌ی ویژگی‌های $g_{i_۱}$ ، $g_{i_۲}$ ، ... و g_{i_k} را به صورت $n(g_{i_۱}, g_{i_۲}, \ldots, g_{i_k})$ نمایش می‌دهیم. از این تعریف روشن است که یک عدد ۵ رقمی طلایی است، اگر و تنها اگر دست کم یکی از خواص $g_۱$ ، $g_۲$ ، $g_۳$ ، $g_۴$ یا $g_۵$ را داشته باشد. بنابر این، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، داریم:

$$\begin{aligned} G &= n(g_۱) + \cdots + n(g_۵) \\ &\quad - n(g_۱, g_۲) - \cdots - n(g_۴, g_۵) \\ &\quad + n(g_۱, g_۲, g_۳) + \cdots + n(g_۳, g_۴, g_۵) \\ &\quad - n(g_۱, g_۲, g_۳, g_۴) - \cdots - n(g_۲, g_۳, g_۴, g_۵) \\ &\quad + n(g_۱, g_۲, g_۳, g_۴, g_۵) \end{aligned}$$

فرض کنید عدد ۵ رقمی $A = \overline{a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵}$ دو ویژگی متفاوت g_i و g_j را داشته باشد ($i \neq j$). با حذف رقم i ـام از A ، عدد ۱۱۲۲ به دست می‌آید. همچنین، با حذف رقم j ـام از A نیز عدد ۱۱۲۲ به دست می‌آید. بنابر این ارقام عدد A را می‌توان به صورت یکتا تعیین کرد. یعنی در واقع برای هر دو ویژگی مانند g_i و g_j ، حداکثر یک عدد ۵ رقمی وجود دارد که هر دو ویژگی را داشته باشد. اکنون توجه کنید که هر عدد ۵ رقمی‌ای که دست کم دو تا از ویژگی‌ها را داشته باشد، یا باید سه رقم ۱ و دو رقم ۲ داشته باشد، یا این که سه رقم ۲ و دو رقم ۱ داشته باشد و همه‌ی ارقام ۱ باید پیش از همه‌ی ارقام ۲ آمده باشند. پس در کل دو عدد ۵ رقمی وجود دارند که دست کم دو تا از ویژگی‌ها را دارند: $G_۱ = ۱۱۱۲۲$ و $G_۲ = ۱۱۲۲۲$. عدد $G_۱$ تنها ویژگی‌های $g_۱$ ، $g_۲$ و $g_۳$ و عدد $G_۲$ تنها ویژگی‌های $g_۳$ ، $g_۴$ و $g_۵$ را دارد. بدین ترتیب، تعداد اعداد طلایی ۵ رقمی برابر است با:

$$G = ۹ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ - ۲ \times \binom{۳}{۲} + ۲ = ۴۵$$

▷

مسئله‌ی ۳*. جدول‌بازی

به چند روش می‌توان خانه‌های یک جدول ۳×۳ را با اعداد صفر و یک پر کرد، طوری که مجموع اعداد حداقل یکی از سطرها برابر صفر شود؟

حل. تعداد کل حالات برای عددگذاری یک جدول ۳×۳ برابر با $۵۱۲ = ۲^۹$ می‌باشد. از طرفی تعداد حالات برای عددگذاری یک سطر، به طوری که مجموع اعداد آن صفر نشود برابر با $۷ = ۱ - ۲^۳$ می‌باشد. بنابراین تعداد حالات برای عددگذاری یک جدول طوری که مجموع اعداد هیچ‌یک از اعداد آن صفر نشود برابر با $۳۴۳ = ۷^۳$ می‌شود. با استفاده از اصل متمم نتیجه می‌گیریم که تعداد حالات برای عددگذاری جدول طوری که مجموع اعداد حداقل یکی از سطرهای آن صفر شود، برابر با $۱۶۹ = ۳۴۳ - ۵۱۲$ می‌باشد. ▷

مسئله‌ی ۴. چهاروجهی‌ها

تعداد چهاروجهی‌های مختلف که وجوه آن‌ها با یکی از اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری شده، چندتا است؟ استفاده‌ی مکرر از اعداد برای وجوه مجاز است.

حل. اگر از هر چهار عدد استفاده شده باشد، ۲ حالت داریم زیرا اگر چهاروجهی را طوری بچرخانیم که وجه با شماره‌ی ۱ پایین قرار گیرد، برای ترتیب ۳ وجه دیگر ۲ حالت خواهیم‌داشت. اگر از سه عدد استفاده شود، $\binom{۴}{۳}$ حالت برای انتخاب این سه عدد داریم. همچنین ۳ حالت برای انتخاب عددی که روی دو وجه ظاهر شده خواهیم داشت و ۲ حالت نیز برای ترتیب دو عدد دیگر. اگر از دو عدد استفاده شده باشد، $\binom{۴}{۲}$ حالت برای انتخاب دو عدد داریم. حال اگر از هر کدام از دو عدد دو بار استفاده شود، با انتخاب شدن اعداد تنها یک حالت خواهیم داشت ولی اگر از یک عدد سه بار و از دیگری یک بار استفاده شود، دو حالت داریم که مشخص می‌کند کدام عدد سه بار استفاده شده است. در حالتی که کلا از یک عدد استفاده شده باشد نیز ۴ حالت برای انتخاب آن عدد داریم. بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$۲ + \binom{۴}{۳} \times ۳ \times ۲ + \binom{۴}{۲} \times (۱ + ۲) + ۴ = ۴۸$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵. رشته‌های دودویی

تعداد رشته‌های دودویی به طول n را بیابید که عبارت ۱۰ دقیقا دو بار در آن ظاهر شده باشد. برای مثال رشته‌ی ۱۰۰۱۱۱۰ این ویژگی را دارد، اما رشته‌ی ۱۰۰۱۰۱۰ چنین نیست.

حل. هر رشته به طول n را می‌توان با بلوک‌های یک در میان صفر و یک نشان داد. به ازای هر بلوک ۱ که سمت چپ یک بلوک ۰ آمده باشد یک بار ۱۰ ظاهر شده است. پس چهار بلوک با طول ناصفر داریم که بلوک اول و سوم آن ۱ و بلوک دوم و چهارم آن صفر هستند. هم‌چنین می‌توان بلوک به طول دلخواه یک به سمت راست رشته و بلوک دلخواه صفر به سمت چپ رشته اضافه کرد. پس باید معادله زیر را در اعداد طبیعی حل کنیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = n$$

که در آن $x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ > ۰$ و $x_۶, x_۱ \geqslant ۰$.

تعداد جواب‌های این معادله برابر است با

$$\binom{n+۱}{۵}.$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶. چندضلعی

به چند روش می‌توان k راس از یک n ضلعی را انتخاب کرد طوری که هیچ‌کدام از دو راس انتخابی متوالی نباشند؟ (فرض کنید راس‌ها متمایز هستند.)

حل. فرض می‌کنیم راس x حتما انتخاب می‌شود. کافی است تعداد جواب‌های معادله زیر را در مجموعه اعداد طبیعی به‌دست آوریم:

$$x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n - k$$

که برابر با $\binom{n-k-۱}{k-۱}$ است.

اگر راس x را راس شروع درنظر بگیریم، $x_۱$ تعداد راس‌های بین راس اول و راس دوم از این k راس است. به همین‌ترتیب x_i تعداد راس‌های بین راس i و راس $i + ۱$ از این راس‌هاست. همچنین، برای انتخاب راس اول این k

راس n حالت داریم. اما در یک انتخاب k تایی از راس‌ها با شرط داده‌شده، به‌ازای هر راس آن، می‌توان با انتخاب آن راس به عنوان راس شروع و تنظیم مقدار فواصل بین راس‌های انتخابی به این چینش رسید. بنابراین هرحالت معتبر، k بار شمرده می‌شود.

جواب نهایی برابر با $\frac{n}{k} \times \binom{n-k-1}{k-1}$ است. ▷

مسئله‌ی ۷. آزمون عجیب

تعدادی دانش‌آموز در یک آزمون سخت با ۹ سوال شرکت کردند. پس از برگزاری آزمون، مشخص شد که هر دانش‌آموز دقیقا ۳ سوال را حل کرده است. با بررسی‌های بیشتر، معلوم شد که به ازای هر دو سوال، فقط یک دانش‌آموز وجود دارد که هر دو را حل کرده باشد. ثابت کنید هر سوال توسط ۴ دانش‌آموز حل شده است.

حل. فرض کنید تعداد کل دانش‌آموزان n باشد. یک سوال خاص از آزمون مانند x را در نظر بگیرید. تعداد دانش‌آموزانی را که این سوال را حل کرده‌اند، با r_x نمایش می‌دهیم. همچنین برای دانش‌آموز i ـام، مقدار s_i را برابر با تعداد مجموعه‌های دو عضوی مانند $\{a, b\}$ تعریف می‌کنیم که a و b دو سوال هستند و $a = x$ یا $b = x$ و دانش‌آموز i ـام هر دو سوال a و b را حل کرده است. پس در واقع، s_i برابر با تعداد جفت سوال‌های حل شده توسط دانش‌آموز i ـام است که یکی از آن‌ها سوال x است. مقدار S را برابر با $\sum_{i=1}^{n} s_i$ تعریف می‌کنیم و آن را به دو صورت زیر حساب می‌کنیم:

۱. چون هر دو سوال دقیقا توسط یک دانش‌آموز حل شده‌اند، پس سوال x به همراه هرکدام از ۸ سوال دیگر نیز توسط دقیقا یکی از دانش‌آموزان حل شده است. بنابراین: $S = 8$.

۲. سوال x توسط r_x دانش‌آموز حل شده است و هر کدام از این r_x دانش‌آموز هم دقیقا ۳ سوال را حل کرده‌اند که یکی از آن‌ها سوال x است. سوال x به همراه هرکدام از دو سوال دیگری که هرکدام از این دانش‌آموزان حل کرده‌اند، تشکیل یک جفت می‌دهد. پس $S = r_x \times 2$.

از دو تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که $r_x = 4$. چون مقدار به دست آمده برای r_x به x وابسته نیست، پس می‌توان نتیجه گرفت که هر سوال دقیقا توسط ۴ دانش‌آموز حل شده است. ▷