ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم	استقرا و لانه‌کبوتری	زمان تحویل: ۲ اردی‌بهشت

مسئله‌ی ۱*. گردهمایی

۲۵ مادر و ۲۵ فرزند دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید می‌توان کسی را پیدا کرد که هر دو فرد مجاورش مادر هستند.

حل. فرض کنید افراد طوری نشسته باشند که هیچ یک از آن‌ها بین دو مادر نباشند. هر گروهی از مادران را که کنار هم نشسته‌اند و دو طرفشان فرزند نشسته است را قطعه می‌نامیم. بنابر فرض ما، در هر قطعه حداکثر دو مادر نشسته است. زیرا در غیر این صورت در آن قطعه کسی هست که دو طرفش مادر است. همچنین بین هر دو قطعه حداقل دو فرزند نشسته است. زیرا اگر یک فرزند باشد، دو طرف وی مادر خواهد بود. بنابر این دست کم $13 = \lceil \frac{25}{2} \rceil$ قطعه از مادران وجود دارد و در نتیجه حداقل $26 = 13 \times 2$ فرزند باید داشته باشیم تا فواصل قطعه‌ها را پر کنیم. اما ما فقط ۲۵ فرزند در گردهمایی داشتیم و تناقض است. پس حتما کسی هست که دو طرفش مادر نشسته باشد. $\triangleright$

مسئله‌ی ۲*. مجموعه‌ها

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی متناهی و جدا از هم از اعداد صحیح‌اند طوری که به‌ازای هر $x \in A \cup B$ داریم $x+1 \in A$ یا $x-2 \in B$. ثابت کنید $|A| = 2|B|$.

حل. با استقرا روی اندازه‌ی مجموعه‌ی B ثابت می‌کنیم.

پایه‌ی استقرا: $B = \emptyset$. اگر A تهی نباشد، چون متناهی است، بزرگ‌ترین عضو دارد. آن را x می‌نامیم. طبق شرط مسئله $x+1 \in A$ یا $x-2 \in B$. از آن جایی که x بزرگترین عضو A است، حالت اول رخ نمی‌دهد. پس $x-2 \in B$ که با تهی بودن B در تناقض است. پس در حالتی که B تهی باشد، A نیز تهی است و در نتیجه پایه‌ی استقراء برقرار است.

حال مجموعه‌ی n عضوی B را با شرط $1 \leqslant n$ در نظر بگیرید. چون B متناهی است، طبق اصل خوش‌ترتیبی عددی مانند x در B وجود دارد که کوچک‌تر از سایر اعداد B است. طبق فرض سوال $x+1 \in A$ یا $x-2 \in B$. چون x کوچک‌ترین عدد در B است نتیجه می‌شود $x+1 \in A$. روند مشابه را برای $x+1 \in A \cup B$ طی می‌کنیم و نتیجه می‌شود که $x+2 \in A$.

حال عدد دل‌خواه y را به جز سه عدد x، $x+1$ و $x+2$ در نظر بگیرید، طوری که $y \in A \cup B$. می‌دانیم یا $y+1 \in A$ یا $y-2 \in B$. $x \neq y-2$ زیرا $y \neq x+2$. همچنین $x+1 \neq y+1$ زیرا $y \neq x$ و $x+2 \neq y+1$ زیرا $y \neq x+1$. پس با حذف این ۳ عدد از مجموعه‌های A و B کماکان شرایط مسئله برقرار می‌ماند، یعنی دو مجموعه‌ی $A \setminus \{x+1, x+2\}$ و $B \setminus \{x\}$ شرایط مسئله را دارند. طبق فرض استقرا داریم $2(|B|-1) = |A| - 2$. در نتیجه $|A| = 2|B|$. $\triangleright$

مسئله‌ی ۳*. مجموع خوب

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای $n+1$ عضوی از $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ باشد. ثابت کنید اعدادی مانند a، b و c در A یافت می‌شوند طوری که $a = b + c$. (b و c لزوما متمایز نیستند.)

حل. با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا به ازای $n = 1$ برقرار است، زیرا در این حالت $A = \{1, 2\}$ و داریم $2 = 1 + 1$.

حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ی $n+1$ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ باشد. سه حالت وجود دارد.

۱) $2n \in A$. در این حالت اگر $n \in A$ آنگاه داریم $2n = n + n$. در غیر این صورت اعداد را به دسته‌های دوتایی

$$\{(1, 2n-1), (2, 2n-2), \ldots, (n-1, n+1)\}$$

تقسیم می‌کنیم. $n-1$ دسته داریم و n عضو از A در این دسته‌ها قرار دارند. طبق اصل لانه‌کبوتری از یکی از دسته‌ها دو عدد در A وجود دارند و چون مجموع هر دسته برابر با $2n$ است، حکم ثابت می‌شود.

۲) بزرگ‌ترین عضو A عدد $2n-1$ است. در این حالت دسته‌ها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\{(1, 2n-2), (2, 2n-3), \ldots, (n-1, n)\}$$

و با استدلال مشابه حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۳) بزرگ‌ترین عضو A از $2n-1$ کوچک‌تر است. در این حالت مجموعه‌ی مرجع $\{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ است و در نتیجه طبق فرض استقرا حکم نتیجه می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۴. هم‌وزنی و هم‌قدی

۳۳ نفر در یک اتاق قرار دارند. از هر کس دو سوال پرسیده می‌شود:

- چند نفر دیگر در این اتاق هم‌وزن شما هستند؟
- چند نفر دیگر در این اتاق هم‌قد شما هستند؟

تمامی جواب‌ها در بازه‌ی ۰ تا ۱۰ قرار دارد و تمامی اعداد ۰ تا ۱۰ شنیده می‌شوند. ثابت کنید در این اتاق دو فرد هم‌قد و هم‌وزن وجود دارند.

حل. ایده‌ی حل: اصل لانه‌کبوتری.

به‌ازای هر $0 \leqslant i \leqslant 10$ عدد i حداقل $i+1$ بار شنیده می‌شود. زیرا اگر یک نفر عدد i را بگوید، i نفری که با او هم‌قد یا هم‌وزن هستند نیز عدد i را می‌گویند. چون تمامی اعداد ۰ تا ۱۰ شنیده می‌شوند، داریم:

$$\text{تعداد جواب‌های شنیده‌شده} \geqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = 66$$

از طرفی ۳۳ نفر هستند که هر یک دقیقا دو پاسخ می‌دهند. پس تعداد جواب‌ها دقیقا برابر با ۶۶ خواهد بود. در نتیجه به ازای هر i دقیقا یک گروه $i+1$ نفره هم‌وزن یا هم‌قد وجود دارد. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم یک گروه ۱۱ نفره وجود دارد که همگی هم‌قد هستند. اگر ۲ نفر در این گروه هم‌وزن باشند، حکم ثابت می‌شود. دو حالت وجود دارد:

۱) دو نفر از این ۱۱ نفر در جواب «چند نفر هم‌وزن شما هستند» پاسخ یکسان می‌دهند. اگر این پاسخ i باشد، یعنی هر دو در یک گروه $i+1$ نفره‌ی هم‌وزن قرار دارند و در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

۲) این ۱۱ نفر ۱۱ جواب متمایز می‌دهند. از آن جایی که جواب‌ها از ۰ تا ۱۰ هستند، همه‌ی اعداد ۰ تا ۱۰ شنیده می‌شوند. به این ترتیب یک گروه ۱۱ نفره‌ی هم‌وزن نیز وجود خواهد داشت. در حالی که ثابت کردیم تنها یک گروه ۱۱ نفره می‌تواند وجود داشته باشد. پس این حالت اتفاق نمی‌افتد.

در نتیجه حکم مسئله ثابت می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۵. محاسبات بابا چارعلی

دو عدد طبیعی نسبت به هم اول m و n و عدد ۰ را به بابا چارعلی داده‌اند، طوری که $n \leqslant m$. بابا چارعلی تنها می‌تواند یک کار انجام دهد: او می‌تواند دو عدد را بگیرد و میانگین حسابی آن‌ها را با شرط این که هر دو عدد زوج

یا هر دو عدد فرد باشند، اعلام کند. ثابت کنید تنها به کمک بابا چارعلی می‌توان با استفاده از سه عددی که بابا چارعلی دارد و تمامی اعداد جدیدی که بعد از آن تولید می‌شوند، تمام اعداد ۱ تا n را ساخت.

حل. با استقرای قوی روی n اثبات می‌کنیم.

پایه به ازای $n = ۱$ بدیهی است.

فرض کنید بابا چارعلی با داشتن سه عدد ۰، m و k به ازای $k < n$ می‌تواند همه‌ی اعداد ۱ تا k را بسازد. نشان می‌دهیم بابا چارعلی با داشتن ۰، m و n نیز می‌تواند همه‌ی اعداد ۱ تا n را بسازد.

از میان m و n و عدد ۰ دو عددی را که زوجیت یکسان دارند، انتخاب می‌کنیم و میانگینشان را از بابا چارعلی می‌پرسیم. میانگین حاصل را x در نظر بگیرید. در این پرسش حداقل یک عدد غیر صفر به بابا چارعلی داده‌ایم. به جای این عدد x را جایگزین می‌کنیم و دوباره از بابا چارعلی می‌پرسیم. این کار را تا زمانی که عدد جدیدی کوچکتر از n تولید شود ادامه می‌دهیم. فرض کنید l بزرگترین عدد کوچکتر از n باشد که می‌توان ساخت. علاوه بر این فرض کنید $l \neq n - ۱$. بنابر فرض استقرا همه اعداد طبیعی از ۱ تا l را می‌توان ساخت. اگر l و n زوجیت یکسان داشته باشند، می‌توان میانگین آن‌ها را پرسید که حاصل عددی بین l و n خواهد بود که با بیشینه بودن l در تناقض است. در غیر این صورت اگر زوجیت l و n یکسان نباشد، محاسبه میانگین $l - ۱$ و n مجددا تناقض مشابهی را ایجاد می‌کند. بنابراین داریم $l = n - ۱$ و حکم اثبات می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۶. جدول رنگی‌رنگی

هر خانه از یک جدول $۲n \times ۲n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است طوری که در هر مربع ۲×۲ هیچ دو خانه‌ای هم‌رنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول نیز هم‌رنگ نیستند.

حل. ایده حل: با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

پایه به ازای $n = ۱$ بدیهی است.

فرض استقرا: به‌ازای هر جدول $۲(n - ۱) \times ۲(n - ۱)$ که شرایط سوال را داشته باشد، رنگ هر ۴ گوشه آن متمایز خواهد بود.

حکم: به‌ازای هر جدول $۲n \times ۲n$ که شرایط سوال را داشته باشد، رنگ هر ۴ گوشه آن متمایز خواهد بود.

ابتدا نشان می‌دهیم که خانه‌های واقع در گوشه‌های مجاور جدول نمی‌توانند هم‌رنگ باشند. به این منظور برای خانه‌های گوشه بالا راست و چپ این موضوع را نشان داده و برای گوشه‌های مجاور دیگر نیز به همین ترتیب اثبات خواهد شد. دو سطر اول را در نظر می‌گیریم که در آن n مربع ۲×۲ وجود دارد. مربع اول با مربع دوم در ستون دوم مشترک است. با توجه به این که هر مربع با ۴ رنگ، رنگ شده است و دو رنگ آن در ستون دوم بین مربع اول و دوم مشترک است، بنابراین دو رنگ ستون اول و سوم نیز یکسان خواهد بود. به همین ترتیب ستون‌های اول، سوم، پنجم و ... باهم و ستون‌های دوم، چهارم، ششم و ... نیز باهم در رنگ‌های به کار رفته مشترک خواهند بود. از آن‌جایی که تعداد ستون‌ها زوج است پس ستون اول و آخر زوجیت یکسانی ندارند و در رنگ های به کار رفته مشترک نیستند. بنابراین دو خانه گوشه بالا راست و چپ دو رنگ متمایز دارند.

حال فرض کنید خانه‌های گوشه‌ی متقابل $(۱, ۱)$ و $(۲n, ۲n)$ متمایز نباشند و به رنگ یکسان ۱ باشند. نشان می‌دهیم خانه‌های $(۲, ۲n - ۱)$ و $(۲n - ۱, ۲)$ نیز باید به همین رنگ باشند.

با توجه به توضیحات قبلی، دو رنگ خانه‌های $(۱, ۲n - ۱)$ و $(۲, ۲n - ۱)$ با $(۱, ۱)$ و $(۲, ۱)$ یکسان است و به صورت مشابه دو رنگ خانه‌های $(۲, ۲n - ۱)$ و $(۲, ۲n)$ با $(۲n, ۲n)$ و $(۲n, ۲n - ۱)$ یکسان است. چون سه خانه‌ی $(۱, ۲n - ۱)$ و $(۲, ۲n - ۱)$ و $(۲, ۲n)$ در یک مربع باهم حضور دارند و باید سه رنگ متفاوت داشته باشند، بنابراین خانه‌ی $(۲, ۲n - ۱)$ که اشتراک سطر و ستون این مربع است که هر دو رنگ ۱ را در خود دارند، به رنگ ۱ است. به صورت مشابه همین موضوع برای خانه‌ی $(۲n - ۱, ۲)$ اثبات می‌شود.

با توجه به این که حذف سطر و ستون اول و آخر شرط جدول را از بین نخواهد برد، با این حذف به یک جدول $۲(n-۱) \times ۲(n-۱)$ می‌رسیم که دو گوشه آن هم‌رنگند. این موضوع با فرض استقرا در تناقض است. پس وجود دو گوشه هم‌رنگ ممکن نیست و هر ۴ گوشه رنگ‌های متمایز دارند.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷. ده علی‌آباد

در ده علی‌آباد صد خانه‌ی کاه‌گلی وجود دارد. هر ۱۰ خانه را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ قفس مرغ و خروس در حیاطشان هست. (ممکن است در حیاط یک خانه هیچ یا چند قفس باشد.) هر ۳ قفسی را که در نظر بگیریم، حداقل دو مرغ درون آن هستند. (ممکن است در یک قفس چند مرغ هم باشد.) این ده حداقل چند مرغ دارد؟

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم تعداد قفس‌ها حداقل ۹۳ است. فرض کنید تعداد قفس‌ها کمتر یا مساوی ۹۲ باشد. در این صورت طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۸ خانه وجود دارد که هیچ قفسی در حیاطشان نیست و از بین ۹۲ خانه دیگر می‌توان ۲ خانه انتخاب کرد که تعداد قفس‌های حیاط هر کدام کمتر یا مساوی یک باشد و به این ترتیب در حیاط‌های این ۱۰ خانه کمتر از ۲ قفس است که با فرض سوال در تناقض است. پس تعداد قفس‌ها حداقل ۹۳ است.

حال ثابت می‌کنیم تعداد مرغ‌ها حداقل ۹۲ است. اگر تعداد مرغ‌ها کمتر یا مساوی ۹۱ باشد، ۲ قفس وجود دارد که هیچ مرغی درون آن‌ها نیست و از بین بقیه قفس‌ها می‌توان قفسی پیدا کرد که حداکثر یک مرغ در آن باشد. در این صورت تعداد مرغ‌های درون این سه قفس حداکثر یک است که با فرض سوال در تناقض است. پس تعداد مرغ‌ها نیز حداقل ۹۲ است.

از طرفی اگر ۹۳ خانه را انتخاب کرده و در حیاط هر کدام یک قفس بگذاریم و ۹۲ قفس را انتخاب کرده و درون هر کدام یک مرغ بگذاریم، با حفظ تمام شرایط مسئله ۹۲ مرغ خواهد داشت. پس این عدد دقیق است. $\triangleright$