

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

• سؤال‌های بیست و دو تا سی و پنج در پنج دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیحی مربوط به آن‌ها مطرح شده است.

• نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.

(۱) نوید و سعید مشغول بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» هستند. در هر دست از این بازی دو نفره، دو بازیکن دستشان را به پشت سر خود برده و سپس دست خود را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ یا قیچی به دیگران نشان می‌دهند. سنگ قیچی را می‌برد و به کاغذ می‌بازد، کاغذ سنگ را می‌برد و به قیچی می‌بازد، و قیچی کاغذ را می‌برد و به سنگ می‌بازد. در صورتی که هر دو بازیکن یک شکل یکسان را انتخاب کرده باشند، آن دست مساوی اعلام می‌شود.

در این بازی، برنده‌ی هر دست ۱ امتیاز و بازنده ۰ امتیاز می‌گیرد. در صورت تساوی نیز هر دو طرف صفر امتیاز خواهند گرفت. برنده بازی کسی خواهد بود که مجموع امتیازش زودتر از دیگری به عدد ۳ برسد.

تعداد حالات‌هایی از بازی که نوید در انتهای دست هفتم برنده بازی شود چند است؟

$$(۱) ۵۶۰ \times ۳^۷ \quad (۲) ۱۶۵ \times ۳^۷ \quad (۳) ۲۴۰ \times ۷^۳ \quad (۴) ۳۸۵ \times ۷^۳ \quad (۵) ۳۳۰ \times ۷^۳$$

(۲) علی یک انبار دارد که در آن عدد ذخیره کرده است. این انبار به شکلی است که او تنها می‌تواند اعداد خود را در دو نقطه از آن به صورت دو ستون روی هم قرار داده و ذخیره کند. علی تا کنون اعداد  $\langle ۷, ۳, ۵, ۱, ۲, ۶, ۴ \rangle$  را در انبار ذخیره کرده و آن‌ها را در ستون اول به ترتیب از چپ به راست روی هم قرار داده است؛ یعنی عدد ۷ پایین‌ترین و عدد ۴ بالاترین عدد این ستون شده‌اند. ستون دوم در حال حاضر خالی است.

علی برای جابه‌جا کردن این اعداد یک دستگاه حمل عدد دارد که در هر بار استفاده از آن می‌تواند تعداد دلخواهی از اعداد بالای یک ستون را برداشته و با همان ترتیب به بالای ستون دیگر انتقال دهد. برای مثال علی اگر بخواهد با این دستگاه ۳ عدد از ستون اول را به ستون دوم انتقال دهد، اعداد ستون اول به ترتیب  $\langle ۷, ۳, ۵, ۱ \rangle$  و اعداد ستون دوم به ترتیب  $\langle ۲, ۶, ۴ \rangle$  خواهند شد.

حداقل چند مرحله لازم است تا علی بتواند از وضعیت اولیه‌ی داده شده به وضعیتی برسد که همه‌ی اعداد در یکی از دو ستون به ترتیب صعودی از پایین به بالا قرار گرفته باشند؟

$$(۱) ۱۰ \quad (۲) ۹ \quad (۳) ۷ \quad (۴) ۸ \quad (۵) ۶$$

(۳) یک دنباله‌ی ۷ عنصری از اعداد ۱ و -۱ را «موفق» می‌گوییم اگر نتوان هیچ زیردنباله‌ای از عناصر متوالی آن (شامل حداقل دو عنصر) را یافت که مجموع اعداد آن زیردنباله منفی بشود. به عنوان مثال دنباله‌ی  $\langle ۱, -۱, ۱, ۱, ۱, -۱, ۱ \rangle$  موفق است ولی دنباله‌ی  $\langle ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, ۱ \rangle$  موفق نیست چرا که زیردنباله‌ی شامل عناصر دوم تا چهارم (از سمت چپ) در آن مجموعی برابر با -۱ دارد که منفی است.

تعداد دنباله‌های ۷ عنصری موفق چندتا است؟

$$(۱) ۱۹ \quad (۲) ۱۳ \quad (۳) ۲۴ \quad (۴) ۲۱ \quad (۵) ۱۶$$

(۴) مجید در خانه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ یک جدول  $۶ \times ۶$  قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی پایین و سمت راست جدول برود. در هر گام او می‌تواند به یکی از سه خانه‌ی پایینی، سمت راستی و یا سمت چپی خودش (در صورت وجود) برود. دقت کنید که مجید مجاز نیست یک خانه را دوبار ببیند و الزامی هم ندارد که کوتاه‌ترین مسیر را طی کند.

با رعایت قوانین فوق، مجید به چند طریق می‌تواند به مقصدش برسد؟

$$(۱) ۲۵۲ \quad (۲) ۱۵۶۲۵ \quad (۳) ۴۶۶۵۶ \quad (۴) ۱۲۹۶ \quad (۵) ۷۷۷۶$$

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۵) می‌خواهیم ۱۳ نوع ماده‌ی شیمیایی با شماره‌های ۱ تا ۱۳ را با کامیون‌های ویژه‌ای از شیراز به تهران حمل کنیم. حجم همه‌ی ۱۳ ماده شیمیایی روی هم از ظرفیت یک کامیون کمتر است. اما بعضی از آن‌ها را نمی‌توانیم با هم در یک کامیون قرار دهیم.

با تحقیق‌های انجام شده متوجه شده‌ایم اگر باقیمانده‌ی حاصل ضرب شماره‌ی دو ماده‌ی شیمیایی بر ۳ مساوی ۱ شود، آن دو ماده نمی‌توانند همزمان در یک کامیون قرار بگیرند. مثلاً ماده‌ی شماره‌ی ۲ و ۵ نمی‌توانند با یک کامیون حمل شوند، چرا که باقیمانده‌ی تقسیم ۱۰ بر ۳ برابر ۱ است و بنابراین به دو کامیون جداگانه برای حمل این دو ماده نیاز است. اما به فرض ماده‌های ۳ و ۶ و ۸ می‌توانند همگی در یک کامیون قرار بگیرند.

حداقل تعداد کامیون‌های لازم برای انتقال این ۱۳ نوع ماده‌ی شیمیایی چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳ (۵) ۲

(۶) اعداد ۱ تا ۳۲ روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله می‌توانیم دو عدد ناصفر  $a$  و  $b$  را از روی تخته پاک کنیم و به جای آن‌ها اعداد  $|a - b|$  و  $|a + b|$  را بنویسیم. با تکرار این مراحل حداکثر به چند عدد صفر می‌توانیم برسیم؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۰ (۳) ۱۶ (۴) ۳۱ (۵) ۸

(۷) ۵ گزاره در زیر آمده است. حداکثر چند تا از آنها می‌توانند با هم درست باشند؟

- (الف) اگر  $b$  درست باشد آنگاه این گزاره غلط است.  
(ب) اگر تعداد گزاره‌های درست بیش‌تر از ۲ باشد یکی از آنها  $p$  است.  
(پ) حداقل یکی از  $a$  و  $b$  غلط است.  
(ت)  $b$  و  $p$  یا هر دو درست اند یا هر دو غلط.  
(ث)  $b$  یا درست است یا غلط.

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵) ۰

(۸) دستگاه برش «الوار بُر» ابزاری برای برش الوارهای چوبی است. این دستگاه به‌عنوان ورودی تعدادی الوار هم‌اندازه‌ی  $1 \times n$  و یک عدد  $k$  (کوچک‌تر از  $n$  و بزرگ‌تر از صفر) را می‌گیرد. سپس به‌طور همزمان و با یک برش عظیم هر کدام از الوارها را به دو تکه با اندازه‌های  $1 \times k$  و  $1 \times (n - k)$  تبدیل می‌کند. برای مثال می‌توانیم به این دستگاه سه الوار  $1 \times 5$  بدهیم تا در یک حرکت آن‌ها را به سه تکه‌ی  $1 \times 1$  و سه تکه‌ی  $1 \times 4$  تبدیل کند.

سهراب یک الوار چوبی  $1 \times 100$  به‌عنوان کادوی تولد از رستم هدیه گرفته است! او می‌خواهد با کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه، این الوار طویل را به ۱۰۰ تکه‌ی  $1 \times 1$  تبدیل کند. کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه برای این منظور چند است؟

دقت کنید که همه‌ی الوارهای ورودی به دستگاه در یک مرحله، باید با هم هم‌اندازه باشند.

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۹ (۵) ۹۹

(۹) اشکان ۱۶ مهره در خانه‌ی بالا سمت چپ یک جدول  $4 \times 4$  قرار داده است. او در هر مرحله می‌تواند یک خانه که بیش‌تر از یک مهره دارد را انتخاب کرده، ابتدا یکی از مهره‌های آن را نابود کند، سپس از مهره‌های باقی مانده تعدادی را در همان خانه مورد نظر باقی بگذارد، تعداد دلخواهی را به خانه سمت راست آن (در صورت وجود) و نهایتاً تعداد دلخواهی را به خانه‌ی پایین آن (در صورت وجود) انتقال دهد.

هدف اشکان این است که با مجموعه‌ای از این حرکت‌ها به وضعیتی برسد که در آن تعداد خانه‌های مهره‌دار بیشینه باشد. این مقدار بیشینه چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳ (۵) ۹

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

		۶		
		۲		
۹	۵	۱	۳	۷
		۴		
		۸		

۱۰) دارا و سارا با هم این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا دارا اعداد  $۱, ۲, \dots, ۹$  را به ترتیب مقابل در شکل قرار می‌دهد. سپس سارا جای تعداد دلخواهی از این اعداد را با هم عوض می‌کند تا اعداد حسابی بر بخورد. اکنون دارا باید با تعدادی حرکت مجاز اعداد را به شکل اولیه (شکل مقابل) برگرداند. در هر حرکت مجاز دارا ابتدا بین سطر ۵ خانه‌ای شکل، یا ستون ۵ خانه‌ای شکل یکی را انتخاب کرده و ۵ عدد آن سطر یا ستون را برداشته و به دلخواه خودش دوباره می‌چیند. در بدترین حالت بر زدن سارا، دارا پس از چند حرکت می‌تواند تمام اعداد را به شکل اولیه سر جای خودش بگذارد؟

۴ (۱)      ۱۰ (۲)      ۵ (۳)      ۸ (۴)      ۹ (۵)

۱۱) یک خانواده که ۱۵ فرزند دارد به یک پیتزافروشی رفته است.

- ۵ تا از این فرزندان هر کدام با ۳ تکه پیتزای مخصوص یا ۴ تکه پیتزای پیرونی سیر می‌شوند.
- ۵ تای دیگر هر کدام با ۴ تکه پیتزای مخصوص یا ۵ تکه پیتزای پیرونی سیر می‌شوند.
- ۵ تای سوم هم هر کدام با ۵ تکه پیتزای مخصوص یا ۶ تکه پیرونی سیر می‌شوند.

اگر هر پیتزای مخصوص (۸ تکه) ۱۰ تومان و هر پیتزای پیرونی (۸ تکه) ۸ تومان باشد، این خانواده چقدر باید برای سیر کردن فرزندانش هزینه کند؟ (دقت کنید که نمی‌توان قسمتی از یک پیتزا را جداگانه خرید و همواره می‌توانیم تنها تعدادی پیتزای کامل بخریم.)

۷۴ (۱) تومان      ۷۶ (۲) تومان      ۸۰ (۳) تومان      ۷۸ (۴) تومان      ۷۲ (۵) تومان

۱۲) پدر مسعود به او برنامه‌ی زیر را داده است. مسعود مجاز است به‌عنوان ورودی به این برنامه دو عدد طبیعی کوچکتر از ۳۲ بدهد.

- ۱- اعداد  $a$  و  $b$  را از ورودی دریافت کن.
- ۲- متغیر  $i$  را برابر با ۱ و متغیر  $s$  را برابر با ۰ قرار بده.
- ۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر ۲ با باقی‌مانده‌ی تقسیم  $b$  بر ۲ متفاوت بود، به  $s$  به اندازه  $i$  واحد اضافه کن.
- ۴-  $i$  را یک واحد افزایش بده.
- ۵-  $a$  را برابر خارج‌قسمت تقسیم خودش بر ۲ و  $b$  را برابر خارج‌قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- ۶- اگر حداقل یکی از  $a$  یا  $b$  بزرگتر از ۰ بود به خط ۳ برو.
- ۷- اگر  $s$  برابر با ۳ بود به اندازه‌ی حاصل ضرب مقادیر اولیه‌ی ورودی  $a$  و  $b$  به حسام شکلات بده.
- ۸- پایان

هدف مسعود این است که اعدادی را به‌عنوان ورودی به این برنامه بدهد که حداکثر تعداد شکلات را بگیرد! برای مثال اگر مسعود اعداد ۲۳ و ۱۹ را به این برنامه بدهد در پایان ۴۳۷ شکلات می‌گیرد. اما اگر اعداد ۱۴ و ۱۷ را به‌عنوان ورودی به برنامه بدهد هیچ شکلاتی نمی‌گیرد. حداکثر تعداد شکلاتی که مسعود می‌تواند از این برنامه بگیرد چقدر است؟

۸۱۰ (۱)      ۹۲۸ (۲)      ۸۳۷ (۳)      ۸۶۸ (۴)      ۸۷۰ (۵)

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۳) خانواده‌ی آقای محسنی در ساوه زندگی می‌کنند و باغ انار دارند. حسن، پسر کوچک خانواده، می‌خواهد به دیدن دوستش حسین که در اصفهان زندگی می‌کند برود. آن‌ها قرار می‌گذارند که به محض رسیدن حسن، بازی زیر را انجام دهند:

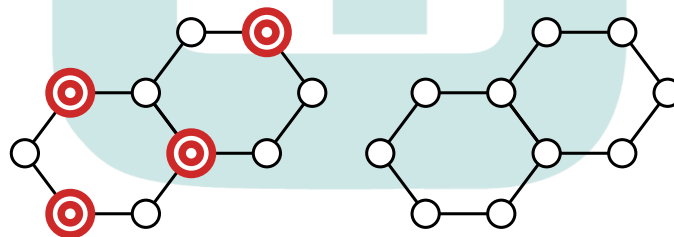
در ابتدا حسین یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از ۱۰ در ذهنش انتخاب می‌کند. سپس در هر مرحله حسن می‌تواند:

- یا یک انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی‌اش دقیقاً  $X$  است یا نه؟ ( $X$  را حسن می‌گوید)
- یا سه انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی‌اش از  $X$  (که حسن می‌گوید) کوچکتر است یا نه؟

هر وقت حسن یک سؤال نوع اول را بپرسد و حسین جواب «بله» بدهد، حسن برنده می‌شود و حسین به او یک جعبه گز سوغاتی می‌دهد. حسن حداقل چند انار باید با خودش به اصفهان ببرد که مطمئن باشد حتماً و در هر شرایطی می‌تواند به جعبه‌ی گز برسد؟ دقت کنید که حسن پس از شنیدن جواب بله برنده می‌شود و این که عدد حسین را فهمیده باشد کافی نیست.

(۱) هفت (۲) شش (۳) پنج (۴) نه (۵) هشت

۱۴) گراف شکل زیر از ۱۰ رأس و ۱۱ یال تشکیل شده است. می‌خواهیم روی تعدادی از رأس‌های این گراف خانه بسازیم به شرطی که اولاً هیچ دو خانه‌ای مجاور نباشند (با یک یال مستقیماً به هم متصل نباشند)؛ ثانیاً پس از پایان کار، در هیچ یک از رأس‌های خالی نتوان با رعایت شرط اول خانه‌ی جدیدی ساخت.



به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟ یکی از این روش‌های خانه‌سازی در شکل سمت چپ نمایش داده شده است.

(۱) ۱۷ (۲) ۲۴ (۳) ۱۱ (۴) ۲۷ (۵) ۱۵

۱۵) تمام اعداد ۵ رقمی که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند را در نظر بگیرید. اگر تمام این اعداد را در یکدیگر ضرب کنیم و عدد حاصل را  $X$  بنامیم، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم  $X$  بر ۵ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱ (۵) ۰

۱۶) محمد ۱۳ قاب چوبی به شکل مربع دارد که حاشیه‌ی هر کدام ۲ سانتی‌متر عرض دارد. طول ضلع قاب‌های محمد به ترتیب ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۵ و ۲۹ هستند. مثلاً مساحت قاب به ضلع ۱۵ با توجه به حاشیه‌ی داخلی برابر با ۱۲۱ سانتی‌متر مربع است.

محمد می‌خواهد حداقل ۴ تا از این قاب‌ها را برای اسباب‌کشی انتخاب کند. او می‌خواهد این قاب‌ها را طوری انتخاب کند که اولاً همگی درون هم بروند (قاب به ضلع ۲۵ دقیقاً درون قاب به ضلع ۲۹ می‌رود)؛ ثانیاً مساحت فضای خالی درون قاب‌ها که او حمل می‌کند (مساحت درونی خارجی‌ترین قاب منهای مساحت چوب‌های حاشیه‌های قاب‌های داخلی) کمینه بشود! این میزان کمینه کدام است؟

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

دقت کنید که درون هر قاب (به‌جز داخلی‌ترین قاب) دقیقاً یک قاب باید مستقیماً برود و هر قاب (به‌جز خارجی‌ترین قاب) هم می‌بایست به‌طور مستقیم دقیقاً درون یک قاب دیگر باشد.

۶۸ (۱) ۶۴ (۲) ۵۰ (۳) ۸۹ (۴) ۵۷ (۵)

(۱۷) چند دنباله با اعداد غیر تکراری از اعداد ۶ تا ۱۲ وجود دارد که با ۶ شروع شود و به ۱۲ ختم شود و بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو عدد متوالی دنباله، بزرگ‌تر از ۱ باشد؟

۶ (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۸ (۵)

(۱۸) به چند طریق می‌توان  $k$  مهره از میان  $n$  تا مهره‌ای که در یک ردیف چیده شده‌اند انتخاب کرد به طوری که فاصله اولین و آخرین مهره‌ی انتخاب شده حداکثر  $k+1$  باشد؟ فرض کنید  $n$  و  $k$  اعداد صحیح بزرگتر از ۲ هستند و  $n \geq k+1$ . دقت کنید که فاصله‌ی دو مهره‌ی کنار هم ۱ است.

$$\begin{aligned} & 1 + (n-k) \left( \frac{k^y - k}{y} \right) - \frac{k^y - k}{y} \quad (۲) \\ & 1 + (n-k) \left( \frac{k^y + k}{y} \right) - \frac{k^y + k}{y} \quad (۱) \\ & 1 + (n-k) \left( \frac{k^y - k}{y} \right) - \frac{k^y - k}{y} \quad (۴) \\ & 1 + (n+k) \left( \frac{k^y - k}{y} \right) - \frac{k^y - k}{y} \quad (۳) \\ & 1 + (n-k) \left( \frac{k^y - k}{y} \right) - \frac{k^y + k}{y} \quad (۵) \end{aligned}$$

(۱۹) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عدد نامنفی  $x$  را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و عدد صحیح  $z$  را به عنوان خروجی بر می‌گرداند.

منظور از  $\lfloor x \rfloor$  بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی  $x$  است. منظور از  $x \oplus y$  نیز عمل XOR بیتی بین این دو عدد است که برابر است با حاصل جمع تمام  $2^i$ هایی که بیت  $i$ ام از سمت راست (با شروع از اندیس صفر) در دقیقاً یکی از آن دو عدد، برابر با «یک» باشد. برای مثال XOR هر عددی با صفر خود همان عدد می‌شود و  $14 \oplus 5 = 11$ .

۱- عدد  $y$  را برابر با  $x$  قرار بده و  $z$  را برابر با صفر قرار بده.

۲-  $x$  را برابر با  $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$  قرار بده.

۳- اگر  $x$  برابر با صفر نبود  $y$  را برابر  $x \oplus y$  قرار بده و به خط ۲ برو.

۴-  $z$  را برابر با دو برابر  $z$  قرار بده

۵-  $z$  را با باقیمانده‌ی  $y$  بر ۲ جمع کن.

۶-  $y$  را برابر با  $\lfloor \frac{y}{4} \rfloor$  قرار بده.

۷- اگر  $y$  مخالف صفر بود به خط ۴ برو.

۸-  $z$  را به عنوان خروجی برگردان.

به ازای چند  $x$  کمتر یا مساوی ۱۰۲۳ خروجی این الگوریتم برابر با صفر است؟

۱۰۲۴ (۱) ۳۲ (۲) ۵۱۲ (۳) ۶۴ (۴) ۰ (۵)

(۲۰) به چند طریق می‌توان در خانه‌های یک جدول  $5 \times 3$  ستاره گذاشت طوری که در هر خانه حداکثر یک ستاره قرار بگیرد و در هر سطر و ستون ۱ یا ۲ ستاره قرار بگیرد؟

(راهنمایی: ابتدا سعی کنید حداقل و حداکثر تعداد ستاره‌های که می‌توانیم بگذاریم را بیابید.)

۲۷۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۱۰ (۵)

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) شنگول و منگول و حبه انگور در حال بحث در مورد سؤالات مرحله اول المپیاد هستند:

شنگول: آزمون مرحله اول المپیاد کامپیوتر امسال ۳۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای دارد.

منگول: ۳۵ تا؟!

حبه انگور: این که خیلی زیاد است! می‌دانی نمره‌های دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این آزمون چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

شما اگر جای شنگول بودید چه جوابی به حبه انگور می‌دادید؟ دقت کنید که هر پاسخ صحیح ۱ نمره، هر پاسخ نرده صفر نمره و هر پاسخ نادرست ۰/۲۵ - نمره دارد.

(۱) ۱۷۱ (۲) ۱۷۲ (۳) ۱۷۰ (۴) ۱۶۹ (۵) ۱۷۳

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- ۱- مقدار  $x$  را برابر با عدد  $A$  قرار بده.
- ۲- مقدار  $y$  را برابر با صفر قرار بده.
- ۳- تا وقتی که  $x$  بزرگتر از صفر است عملیات زیر را انجام بده:
  - ۳-۱-  $B$  را برابر با باقیمانده‌ی تقسیم  $x$  بر ۱۰ در نظر بگیر.
  - ۳-۲-  $y$  را برابر با مقدار  $B + 10 \times y$  قرار بده.
  - ۳-۳-  $x$  را برابر با خارج قسمت تقسیم  $x$  بر ۱۰ قرار بده.
  - ۴-  $x$  را برابر با  $A + y$  قرار بده.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:

(۲۲) فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان  $A$  به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی بر ۳ بخش‌پذیر است؟

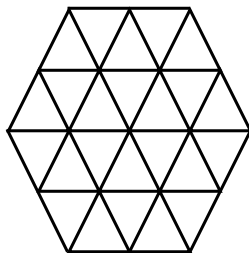
(۱) ۱۶۶۶ (۲) ۱۰۰۰۰ (۳) ۳۳۳۳ (۴) ۶۶۶۷ (۵) ۶۶۶۶

(۲۳) فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان  $A$  به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی بر ۲ بخش‌پذیر است؟

(۱) ۴۰۰۹ (۲) ۴۰۰۴ (۳) ۲۰۱۲ (۴) ۵۰۰۴ (۵) ۵۰۰۹

(۲۴) فرض کنید اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ را به عنوان  $A$  به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی یک عدد اول است؟


(۱) ۱۱ (۲) ۵۳ (۳) ۹۴ (۴) ۰ (۵) ۱۲۲




امین می‌خواهد کف اتاق خود را که به شکل شش ضلعی است، کاشی کاری کند. پدر امین کف اتاق و کاشی‌ها را مثلث‌بندی کرده و از او می‌خواهد طوری کاشی کاری کند که مثلث‌های کاشی‌ها و کف اتاق دقیقاً روی هم قرار بگیرند. امین برای این کار تنها یک نوع کاشی در اختیار خواهد داشت و نمی‌تواند کاشی‌ها را بشکند. شکل مثلث‌بندی شده‌ی روبرو کف اتاق امین را نشان می‌دهد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۵) امین به چند طریق می‌تواند با کاشی‌هایی به شکل  کف اتاق خود را بپوشاند؟  
 ۳ (۱)      ۲۱ (۲)      ۱۲ (۳)      ۹ (۴)      ۴ (۵)

۲۶) امین به چند طریق می‌تواند با کاشی‌هایی به شکل  کف اتاق خود را بپوشاند؟  
 ۱۳۶ (۱)      ۱۰۰ (۲)      ۷۸۴ (۳)      ۷۶۸ (۴)      ۸۵۶ (۵)

امین، علی، محمد، مصطفی و مهدی در یک اتاق نشسته‌اند. هر یک از آن‌ها به طور ثابت به دقیقاً یک نفر دیگر نگاه می‌کنند و البته متوجه می‌شوند که او نیز به چه کسی نگاه می‌کند.  
 مرتضی وارد اتاق می‌شود و از هر یک از آنها دو سوال می‌پرسد:

- (آ) در لحظه‌ی ورود من به اتاق چه کسی را می‌دید؟  
 (ب) فردی که به او نگاه می‌کردی، چه کسی را می‌دید؟

او  $۱۰ = ۲ \times ۵$  پاسخ می‌شنود و آنها را در یک جدول  $۲ \times ۵$  به صورت زیر تنظیم می‌کند:

امین	علی	محمد	مصطفی	مهدی

پاسخ سوال «آ»


پاسخ سوال «ب»

— با توجه به توضیحات بالا به ۵ سؤال زیر پاسخ دهید (فرض‌های هر سؤال مستقل از سایر سؤالات است): —

۲۷) اگر همه افراد پاسخ درستی بدهند جدول مرتضی به چند حالت مختلف ممکن می‌تواند پر شود؟  
 ۲۱۰ (۱)      ۵! (۲)      ۲۰۵ (۳)      ۴۴ (۴)      ۵۵ (۵)

۲۸) مرتضی جدولی را که در آن تنها نام دو نفر به چشم بخورد، یک «جدول دونفره» می‌نامد! چند تا از جدول‌های معتبر و ممکن، «دونفره» هستند؟  
 ۳۲ (۱)      ۱۰ (۲)      ۸۰ (۳)      ۸ (۴)      ۳۲۰ (۵)

۲۹) فرض کنید مهدی از پاسخ دادن به سوالات طفره رفته است. با این حال مرتضی با بررسی پاسخ دیگران موفق می‌شود ستون مربوط به پاسخ مهدی را پر کند. چند تا از جدول‌های ممکن مرتضی این ویژگی را دارند که بتوان با خالی بودن پاسخ مهدی، مقدار آن خانه را به‌طور یکتا استنباط کرد؟  
 ۹۴۳ (۱)      ۱۷۵ (۲)      ۸۱ (۳)      ۳۶۹ (۴)      ۷۰۰ (۵)

۳۰) مرتضی جدول معتبری که بتوان با دانستن هر چهار ستون آن جدول، ستون پنجم را به‌طور دقیق و یکتا استنباط کرد، یک جدول «رؤیائی» می‌نامد. چند تا از جدول‌های ممکن رؤیائی هستند؟  
 ۲۴ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۴۴ (۳)      ۳۲ (۴)      ۶ (۵)



## مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۱) فرض کنید یکی از این پنج نفر به حداقل یک سوال، پاسخ اشتباه داده است ولی بقیه راست گو هستند. مرتضی می‌خواهد از روی پاسخ‌ها فرد دروغ‌گو را پیدا کند. می‌دانیم پاسخ‌های امین به این صورت است:

(آ) علی را می‌دیدم.

(ب) علی محمد را می‌دید.

چندتا از گزاره‌های زیر درست هستند؟

- اگر امین دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر علی دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر محمد دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر مصطفی یا مهدی دروغ‌گو باشند مرتضی آنها را پیدا می‌کند.

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

کامبیز کفش‌های جدیدی خریده است. این کفش‌ها ویژگی جالبی دارند و آن این که بعد از پیمودن اولین گام، اگر طول گام قبلی‌ای که با این کفش برداشته شده است  $x$  باشد در گام بعدی او فقط می‌تواند گامی یا به طول  $2x$  یا به طول  $\frac{x}{2}$  بردارد. به دلیل وزن زیاد کامبیز، کامبیز نمی‌تواند گامی با طول کوچکتر از یک بردارد! همچنین او نمی‌تواند هرگز جهت حرکتش را تغییر بدهد و همواره مستقیم پیش می‌رود.

در ابتدای کار کامبیز در خانه صفرم یک جدول ۱-در-بی‌نهایت قرار دارد. در اولین مرحله، کامبیز با برداشتن یک گام به طول یک از خانه‌ی صفرم به خانه‌ی یکم می‌رود. هدف کامبیز این است که با پیمودن تعدادی گام به یک نقطه‌ی مشخص شده برسد. مثلاً یک دنباله حرکات قابل قبول برای رسیدن به خانه‌ی سیزده می‌تواند به این صورت باشد:

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 13$

یک خانه را «خوب» می‌گوییم اگر کامبیز بتواند با اتخاذ یک سیاست گام برداشتن به آن خانه برسد. به‌طور مشابه، یک خانه را «بد» می‌گوییم اگر کامبیز هرگز نتواند با هر ترتیبی به آن برسد. برای مثال ۱۳ یک خانه‌ی خوب و ۲ یک خانه‌ی بد است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

(۳۲) کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) ۱۳۹۰ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۱۲ یک خانه‌ی بد است.
- (۲) ۲۰۰۰ یک خانه‌ی خوب و ۱۴۰۰ یک خانه‌ی بد است.
- (۳) ۱۴۰۰ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۰۰ یک خانه‌ی بد است.
- (۴) ۱۳۹۱ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۱۳ یک خانه‌ی بد است.
- (۵) ۲۰۱۲ یک خانه‌ی خوب و ۱۳۹۰ یک خانه‌ی بد است.

(۳۳) فرض کنید تمام خانه‌های خوبی که با حداکثر ۱۰۰ حرکت می‌توان به آن رسید را با شروع از یک، در دنباله‌ای مرتب پشت سر هم نوشته‌ایم. این دنباله به شکل  $\langle 1, 3, 4, 6, \dots \rangle$  است. ۲۰۱۲ امین عدد این دنباله کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)



رشته‌ی  $S_1 = aAbBaAb$  را در نظر بگیرید. از روی این رشته می‌توانیم رشته‌ی  $S_1$  را با این قاعده بسازیم که به جای هر حرف  $A$  عبارت  $BaB$  و به جای هر  $B$  عبارت  $AbA$  را بگذاریم. با این وصف رشته‌ی  $S_1$  برابر با  $aBaBbAbAaBaBb$  خواهد بود. با همین قاعده می‌توانیم رشته‌های  $S_2$ ،  $S_3$  و ... را بسازیم.

با توجه به توضیحات بالا به دو سؤال زیر پاسخ دهید:

(۳۴) ۷۷۷ امین حرف از سمت چپ در رشته‌ی  $S_7$  کدام است؟

(۱)  $a$  (۲) اندازه‌ی رشته کمتر از ۷۷۷ است. (۳)  $A$  (۴)  $B$  (۵)  $b$

(۳۵) ۱۰۲۷ امین حرف از سمت چپ در رشته‌ی  $S_9$  کدام است؟

(۱) اندازه‌ی رشته کمتر از ۱۰۲۷ است. (۲)  $a$  (۳)  $A$  (۴)  $B$  (۵)  $b$

