دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری چهارم | استقرا | زمان تحویل: ۳ اردی‌بهشت‌ماه

مسئله‌ی ۱*. اعداد اول زیبا

ثابت کنید اگر $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n، n عدد اول متمایز باشند، دنباله‌ای به طول $۲^n - ۱$ از P_iها موجود است که در آن حاصل‌ضرب هیچ تعداد متوالی از جملات دنباله مربع کامل نشود.

مسئله‌ی ۲*. کلاس‌های دوستی

مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد که در k کلاس تقسیم شده‌اند. به ازای هر دو کلاس مانند A و B، فردی از A و فردی از B وجود دارند که باهم دوست هستند. ثابت کنید n دانش‌آموز را می‌توان به $n - k + ۱$ دسته تقسیم کرد که افراد متعلق به هر دسته با هم دوست باشند.

مسئله‌ی ۳*. جای‌گشت

ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، جای‌گشتی از عددهای ۱ تا n وجود دارد که میانگین هر دو عددی از آن در میان آن دو عدد نباشد. در این‌جا منظور از میانگین، میانگین دقیق دو عدد است و نه میانگین صحیح آن‌ها. برای مثال میانگین اعداد ۲ و ۴ برابر با ۳ و میانگین اعداد ۱ و ۲ برابر با ۱/۵ است.

مسئله‌ی ۴. نشانه‌گذاری

در یک ماتریس $m \times n$ از اعداد حقیقی، حداقل p تا $(p \leqslant m)$ از بزرگ‌ترین عددها در هر ستون، و حداقل q تا $(q \leqslant n)$ از بزرگ‌ترین عددها در هر سطر را نشانه‌گذاری می‌کنیم. ثابت کنید که حداقل pq عدد دو بار نشانه‌گذاری شده‌اند.

مسئله‌ی ۵. صفحه‌ی اعداد مثبت

در ربع اول صفحه‌ی مختصات هر مربع واحد را یک خانه در نظر می‌گیریم. نشان دهید در این صفحه‌ی نامتناهی، می‌توانیم در هر خانه یک عدد صحیح مثبت یادداشت کنیم به گونه‌ای که در هر سطر و هر ستون نامتناهی آن، هر عدد صحیح مثبت دقیقا یک بار بیاید.

مسئله‌ی ۶. مهره‌بازی

یک سطر نامتناهی از خانه‌های ۱×۱ با شماره‌های ۱، ۲، ... داده شده است. در ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله، یکی از دو مهره را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه‌ی شماره‌ی i باشد، آن را i خانه‌ی خالی جلو می‌بریم، یعنی در صورتی که مهره‌ی دیگر در هیچ یک از خانه‌های $i + ۱$ تا $۲i$ نباشد، آن را به خانه‌ی $۲i$ و در غیر این صورت به خانه‌ی $۲i + ۱$ می‌بریم. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانه‌ی شماره‌ی n برد.

مسئله‌ی ۷. مجموعه‌ی ویژه

فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم S مجموعه‌ای ویژه است اگر مجموع اعضای هیچ دو زیرمجموعه‌ای از S برابر نباشند. برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۴$ ثابت کنید زیرمجموعه‌ای ویژه با n عضو از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ..., ۲^{n-۱} - ۱\}$ وجود دارد.