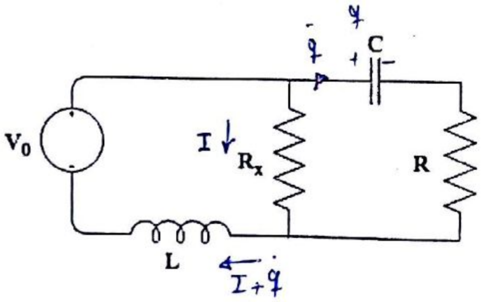
تمرین سری دوم

مبانی مدارهای الکتریکی و الکترونیکی
دکتر سیاوش بیات
دانشکده مهندسی کامپیوتر

۱۹ فروردین ۹۸

۱

الف) برای مدار داده‌شده، معادله دیفرانسیلی بر حسب بار خازن بیابید.
ب) فرض کنید $R^2 = \frac{L}{C}$ است. حال، R_x را به گونه‌ای بیابید تا پاسخ معادله دیفرانسیل، میرای بحرانی شود.
پ) با فرض اینکه بار اولیه خازن و جریان اولیه سلف هر دو صفر بوده‌اند، ولتاژ خازن را برای زمان‌های $t > 0$ بیابید.



الف)

$$\frac{q}{C} + \dot{q}R = R_x I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{R_x}\left[\frac{q}{C} + \dot{q}R\right]$$

$$V_0 = L(\dot{I} + \ddot{q}) + \frac{q}{C} + \dot{q}R$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{q}{C} + \dot{q}R + L \times \left[\frac{\dot{q}}{R_x C} + \frac{R\ddot{q}}{R_x} + \ddot{q}\right] = \ddot{q}\left(1 + \frac{R}{R_x}\right)L + \dot{q}R \times \left[1 + \frac{L}{RR_xC}\right] + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \ddot{q}L\left(1 + \frac{R}{R_x}\right) + \dot{q}R \times \left[1 + \frac{L}{RR_xC}\right] + \frac{q}{C}}$$

ب) در معادله‌ی بالا $q = e^{st}$ می‌گذاریم و برای بحرانی شدن معادله s باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Rightarrow s^2 L \times \left(1 + \frac{R}{R_x}\right) + sR \times \left[1 + \frac{R}{R_x}\right] + \frac{1}{C} \qquad \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = R^2\left(1 + \frac{R}{R_x}\right)^2 - 4\frac{L}{C} \times \left(1 + \frac{R}{R_x}\right) \Rightarrow 1 + \frac{R}{R_x} = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{R_x = R/3}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_0 = \ddot{q} \times 4L + 4R\dot{q} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4R}{8L} = -\frac{R}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{q = e^{-\frac{R}{2L}t} \times \left[A + Bt\right] + \bar{V}_0 C}$$

$t=0 \quad q=0 \quad \Rightarrow A + \bar{V}_0 C = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A = -\bar{V}_0 C}$ بار اولیه خازن صفر است.

$I_L = I + \dot{q} = \frac{1}{R} \times \left[\frac{\ddot{q}}{C} + \dot{q}R\right] + \dot{q}$ $= I + \dot{q}$ جریان خازن برابر با

$$\boxed{I_L = 4\dot{q} + \frac{3q}{RC}}$$

$t=0 \quad I_L = 0 \quad \Rightarrow 4\dot{q} + \underbrace{\frac{3q}{RC}}_{0} = 0 \quad \rightarrow \dot{q} = 0$

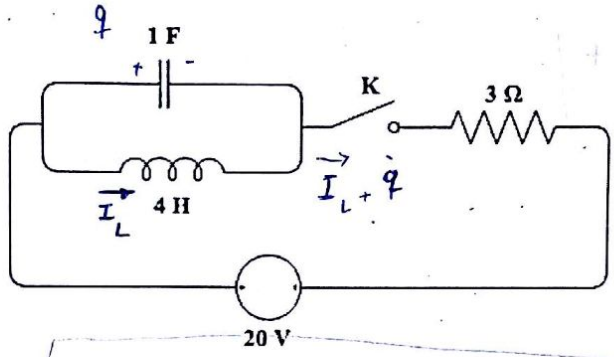
$$\Rightarrow B + \left(-\frac{R}{2L}\right)A = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{R}{2L}A = \frac{RC}{2L}\bar{V}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{(t)} = \bar{V}_0 C \times \left[1 - e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{R}{2L} t e^{-\frac{R}{2L}t}\right]}$$

$t > 0$

۲

در مدار زیر، جریان اولیه سلف و بار اولیه خازن، صفر است. در زمان $t = 0$، کلید را می‌بندیم.
الف) معادله دیفرانسیلی برای جریان سلف بنویسید.
ب) با دانستن این که انرژی ذخیره شده در سلف و خازن به ترتیب $\frac{1}{2}LI_L^2$ و $\frac{1}{2}CV_c^2$ هستند، کلید را در چه زمانی قطع کنیم تا بیشینه انرژی ممکن در مجموعه ذخیره شود؟



الف)

$$4\dot I_L = q \Rightarrow \dot q = 4\ddot I_L$$

$$20 = 3\times(I_L + \dot q) + 4\dot I_L$$

$$\Rightarrow \boxed{20 = 3\times[I_L + 4\ddot I_L] + 4\dot I_L = 12\ddot I_L + 4\dot I_L + 3I_L}$$

ب)

$$I_L = e^{st}$$

$$\Rightarrow 12s^2 + 4s + 3s = 0 \Rightarrow s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 144}}{24} = \frac{-4 \pm i\sqrt{128}}{24}$$

$$\boxed{s = -\frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt2}{3}} \Rightarrow I_L = e^{-\frac{t}{6}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right)\right] + \frac{20}{3}$$

$$t = 0 \quad I = 0 \Rightarrow A = -\frac{20}{3}$$

$$q = 4\dot I_L = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}A + B\times\frac{\sqrt2}{3} = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{2\sqrt2} = -\frac{10}{3\sqrt2} = -\frac{5\sqrt2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_L = \frac{20}{3} - e^{-\frac{t}{6}}\left[\frac{20}{3}\cos\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right) + \frac{5\sqrt2}{3}\sin\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right)\right]}$$

$$q = 4\dot I_L = 4e^{-\gamma t}\left[\left(\frac{20}{18} - \frac{10}{9}\right)\cos(\omega t) + \left(\frac{5\sqrt2}{18} + \frac{20\sqrt2}{9}\right)\sin\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right)\right]$$

$$\boxed{q = 10\sqrt2\, e^{-\frac{t}{6}}\sin\left(\frac{\sqrt2}{3}t\right)}$$

$$E = \frac{1}{2} C V_C^2 + \frac{1}{2} L I_L^2 = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C} + \frac{L}{2} \times I_L^2$$

$$E = \frac{1}{2} \times \left[\left(10\sqrt{2}\, e^{-\frac{t}{6}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right)\right)^2 + \left[\frac{20}{3} - e^{-\frac{t}{6}} \left[\frac{20}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right) + \frac{5\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right)\right]\right]^2 \right]$$

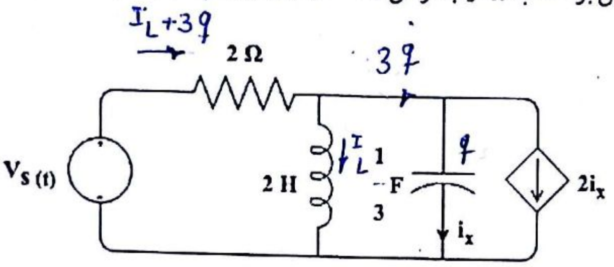
$t = T$ در اوج انرژی

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left[\left(10\sqrt{2}\, e^{-t/6} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right)\right)^2 + \left[\frac{20}{3} - e^{-\frac{t}{6}} \left[\frac{20}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right) + \frac{5\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} t\right)\right]\right]^2 \right]_{(t=T)} = 0}$$

۳

در مدار شکل مقابل، پاسخ ضربه را برای خروجی i_R (جریان گذرنده از مقاومت) بدست آورید.
شرایط اولیه معادله دیفرانسیل بر حسب i_R را با فرض $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ بدست آورید.



$\dot q = \dot i_x$

$2\dot I_L = 3q$

$V_{S(t)} = 2\times[I_L + 3\dot q] + \frac{q}{C} = 2[I_L + 3\dot q] + 3q$

$V_{(S)} = \delta(t) \qquad \Rightarrow \dot V_{S(t)} = 3q + 6\ddot q + 3\dot q$

$\Rightarrow \frac{\dot V_{S(t)}}{3} = 2\ddot q + \dot q + q$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{\dot V_{S(t)}}{3} = 2\ddot I_L + \dot I_L + I_L$

با انتگرال گیری از صفر منفی تا صفر مثبت

$\Rightarrow \dot I_{L(0^+)} - \dot I_{L(0^-)} = \frac{1}{4}$

$V_C = 2\dot I_L$

$\Rightarrow \dot I_{L(0^-)} = \frac{V_0}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\dot I_{L(0^+)} = \frac{1}{4} + \frac{V_0}{2}} \quad \boxed{I_{(0^+)} = I_0}$

$\Rightarrow 2S^2 + S + 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \Rightarrow I_{L(t)} = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right)\right]e^{-t/4}$

$t=0 \qquad I_0 = A$

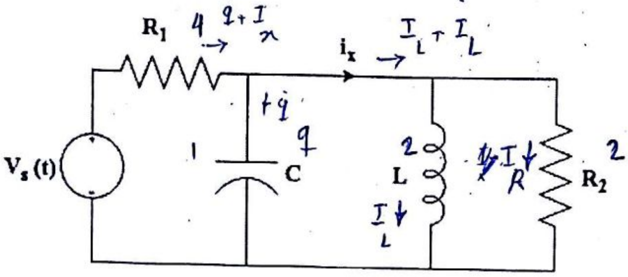
$-\frac{A}{4} + B\times\frac{\sqrt7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{V_0}{2} \Rightarrow B = \frac{(2V_0 + I_0 + 1)}{\sqrt7} \Rightarrow \boxed{I_{L(t)} = e^{-t/4}\times I_0\cos\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right) + e^{-t/4}\times\frac{(2V_0 + I_0 + 1)}{\sqrt7}\sin\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right)}$

$I_R = I_L + 2\ddot I_L = -\dot I_L$

$I_R = e^{-t/4}\times\left[\frac{I_0}{4} - \frac{1}{4}(2V_0 + I_0 + 1)\right]\cos\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right) + e^{-t/4}\left[I_0\times\frac{\sqrt7}{4} + \frac{(2V_0 + I_0 + 1)}{4\sqrt7}\right]\sin\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right)$

$\boxed{I_R = -e^{-t/4}\frac{[2V_0 + 1]}{4}\cos\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right) + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt7}\times(2I_0 + 2V_0 + 1)\sin\left(\frac{\sqrt7}{4}t\right)}$

در مدار شکل مقابل، با فرض اینکه مقادیر $R_1 = 2R_2 = 4\Omega$، $C = 1F$ و $L = 2H$ است، معادله دیفرانسیلی بر حسب i_x تشکیل دهید و پاسخ ضربه راحساب کنید.



$$2 I_R = 2 \dot{I}_L \Rightarrow \boxed{I_R = \dot{I}_L}$$

$$\frac{q}{C} = L \dot{I}_L \Rightarrow \boxed{q = 2 \dot{I}_L}$$

$$\dot{q} = 2 \ddot{I}_L$$

$$V_s(t) = 4 \times \left[\dot{q} + I_L + \dot{I}_L\right] + 2 \dot{I}_L$$

$$\Rightarrow \boxed{V_s(t) = 8 \ddot{I}_L + 6 \dot{I}_L + 4 I_L}$$

$$\Rightarrow \int_{0^-}^{0^+} 8 \ddot{I}_L \, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \, dt = 1$$

از صفر منفی تا مثبت از معادله بالا انتگرال می گیریم. جریان و بار اولیه ها صفرند.

$$\Rightarrow \dot{I}_L(0^+) = \frac{1}{8} + \underbrace{\dot{I}_L(0^-)}_{0} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 8s^2 + 6s + 4 = 0 \Rightarrow s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 8}}{8} = \frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{8}$$

$$\Rightarrow I_L = e^{-\frac{3}{8}t}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{8}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{8}t\right)\right]$$

$$I_L(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

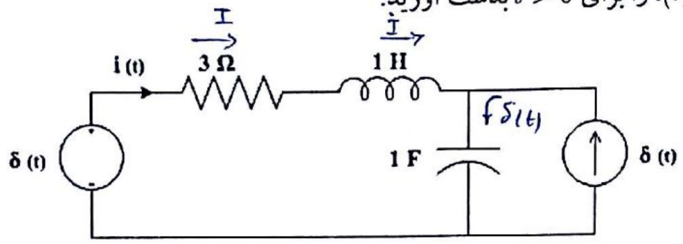
$$\dot{I}_L(0) = \frac{1}{8} \Rightarrow B \times \frac{\sqrt{23}}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{I_L = \frac{e^{-\frac{3}{8}t}}{\sqrt{23}} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{8}t\right)}$$

۴

$$\boxed{I_x = I_L + \dot{I}_L = e^{-\frac{3}{8}t}\left[\frac{1}{\sqrt{23}}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{8}t\right) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{8}t\right)\right]}$$

۵

در مدار شکل زیر، $i(t)$ را برای $t > 0$ بدست آورید.



$$\dot{q} = \delta(t) + I \qquad \frac{q}{C} + 3I + \dot{I} = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \dot{q} + 3\dot{I} + \ddot{I} = \dot{\delta}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{I} + 3\dot{I} + I = \dot{\delta}(t) - \delta(t)$$

$$\Rightarrow s^2 + 3s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \left[A e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + B e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}\right] u(t) = f(t)\, u(t)$$

$$I(t) = f(t)\, u(t) \qquad \dot{I}(t) = f(0)\, \delta(t) + \dot{f}(t)\, u(t)$$

$$\ddot{I}(t) = f(0)\, \dot{\delta}(t) + \dot{f}(0)\, \delta(t) + \ddot{f}(t)\, u(t)$$

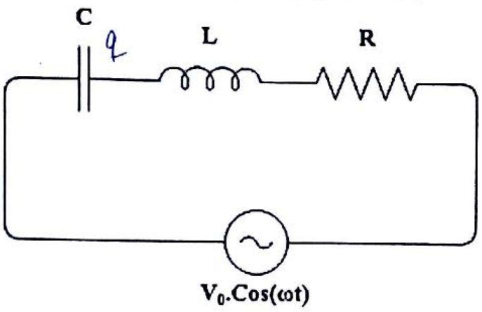
$$\Rightarrow \dot{\delta}(t)\left[f(0) - 1\right] + \delta(t)\left[\dot{f}(0) + 3f(0) + 1\right] = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \quad \dot{f}(0) = -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ (3+\sqrt{5})A + (3+\sqrt{5})B = -8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(t) = \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}\right]}$$

۶.

الف) با توجه به شکل مقابل، مقدار بار خازن را در زمان‌های طولانی پیدا کنید.

ب) مقدار LC را به گونه‌ای تعیین کنید که دامنه بار خازن، بیشینه شود.



الف) $\frac{q}{C} + \dot{q}R + \ddot{q}L = V_0 \cos\omega t$

$$\Rightarrow q = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)\times\left[\frac{A}{C} + B\omega R - \omega^2 AL\right] + \sin(\omega t)\left[\frac{B}{C} - A\omega R - \omega^2 BL\right] = V_0\cos\omega t$$

با توجه به این‌که $\sin(\omega t)$ و $\cos(\omega t)$ برهم عمودند باید ضریب هریک در دو طرف معادله یکی باشند.

$$\Rightarrow \frac{B}{\cancel{C}}\left[1-\omega^2 LC\right] = A\omega RC$$

$$\Rightarrow \frac{A}{C}\times\left[1-\omega^2LC\right] + B\omega R = V_0 = \frac{A}{C}\times\frac{(1-\omega^2LC)^2 + \cancel{A}\omega^2R^2C^2}{\left[1-\omega^2LC\right]}$$

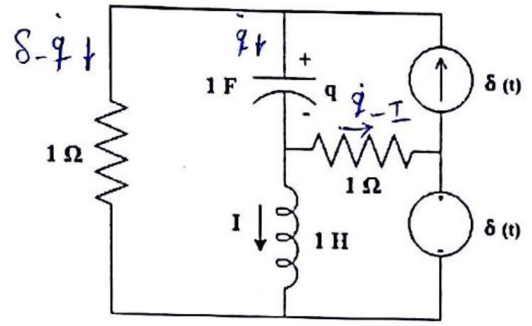
$$\Rightarrow A = \frac{V_0 C\left[1-\omega^2LC\right]}{\omega^2R^2C^2+(1-\omega^2LC)^2} \qquad B = \frac{V_0 C\times R\omega C}{\omega^2R^2C^2+(1-\omega^2LC^2)}$$

ب) $q = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t) = \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{\text{دامنه}}\sin\left(\omega t + tg^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)\right)$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2R^2C^2+(1-\omega^2LC)^2}} \Rightarrow \boxed{LC = \frac{1}{\omega^2}}$$

۷

با فرض اینکه بار اولیه خازن و جریان اولیه سلف، هر دو صفر هستند، مقادیر $q(0^+)$ و $I(0^+)$ را بیابید.



$$\dot I = (\dot q - I) + \delta$$

$$(\delta - \dot q) = q + \dot I$$

$$\Rightarrow \cancel{\dot q + \delta}$$

$$\Rightarrow \dot q = \dot I + I - \delta$$

$$\dot I = \delta - \dot q - q$$

با انتگرال گیری از صفر منفی تا مثبت

روش ①

$$q(0^+) - I(0^+) = -1$$

$$q(0^+) + I(0^+) = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} q(0^+) = 0 \\ I(0^+) = 1 \end{array}}$$

$$\ddot I = \dot\delta - \ddot q - \dot q = \dot\delta - (\ddot I + \dot I - \dot\delta) - \dot I - I + \delta$$

$$\Rightarrow 2\ddot I + 2\dot I + I = 2\dot\delta + \delta$$

روش ②

$$I = f(t)u(t) \qquad \dot I = f(0)\delta(t) + \dot f(t)u(t)$$

$$\ddot I = f(0)\dot\delta(t) + \dot f(0)\delta(t) + \ddot f(t)u(t)$$

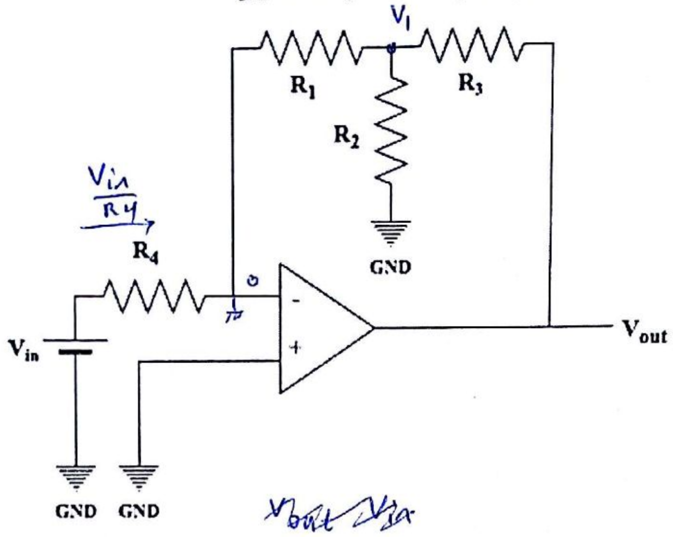
$$\Rightarrow 2f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{I(0^+) = 1}$$

$$\ddot q = (\delta - \dot q - q) + (\dot\delta - \ddot q - \dot q) - \dot\delta \Rightarrow 2\ddot q + 2\dot q + q = \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{q(0^+) = 0}$$

۸

برای مدار داده‌شده، $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ را بر حسب پارامترهای مسئله بدست آورید.



$$\frac{V_{out}-V_1}{R_3} - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_1}{R_2} = 0 \Rightarrow V_{out} = R_3 V_1 \left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]$$

$$\frac{V_{in}}{R_4} = -\frac{V_1}{R_1} \Rightarrow V_1 = -\frac{R_1}{R_4} V_{in}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_1 R_3}{R_4}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]}$$