



مسئله‌ی ۱*. بخش‌پذیری

ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n ، $9^{2n-1} + 8^{n+1}$ بر 73 بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۲*. اعداد بزرگ

مجموعه‌ی تمام اعداد 70 رقمی با ارقام $1, 2, 3, \dots, 7$ را در نظر بگیرید که هر رقم در هر عدد دقیقاً 10 بار ظاهر شده است. ثابت کنید هیچ یک از اعداد این مجموعه بر عدد دیگری در این مجموعه بخش‌پذیر نیست. [راهنمایی: این اعداد را به پیمانه‌ی 9 محاسبه کنید.]

مسئله‌ی ۳. مقسوم‌علیه

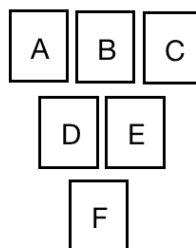
نشان دهید اگر $n + 1 \mid 24$ ، آن‌گاه مجموع تمام مقسوم‌علیه‌های n بر 24 بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۴. مرکب فرد

ثابت کنید بی‌نهایت n وجود دارد که $1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$ عددی مرکب و فرد باشد.

مسئله‌ی ۵. مجموعه‌های پله‌ای

A ، B و C سه مجموعه دلخواه‌اند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپی منهای سمت راستی) مثلاً $D = A - B$. همچنین $P(A)$ نشان‌دهنده مجموعه توانی مجموعه A است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



الف) $B \subseteq F$

ب) $F \subseteq A \cap C$

ج) $D \cap C \subseteq F$

د) $(P(A) \cup P(B)) \subseteq P(A \cup B)$

مسئله‌ی ۶. شمارا و ناشمارا

- الف) ثابت کنید مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های متناهی از هر مجموعه‌ی نامتناهی شمارا، شمارا است.
- ب) ثابت کنید تعداد انسان‌های روی کره‌ی زمین از ابتدای بشریت تا ابد شمارا است. (از این فرض بدیهی استفاده کنید که هر انسان به تعداد متناهی فرزند دارد.)

مسئله‌ی ۷*. توابع مجموعه‌ای

توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x, A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

$$g(x) = \begin{cases} x(1-x) & x \geq 1 \\ x(1+x) & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

الف) دامنه و برد توابع $g(x)$ ، $g(f(x, A))$ و $g(h(f(x, A)))$ را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید: $f(x, A) \times f(x, \overline{B}) + f(x, \overline{A}) = f(x, \overline{A \cap B})$