ریاضیات مهندسی جلسه ۷

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]=$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{n\pi t}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt$$

فرض کنیم $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<\infty$. در این صورت وقتی $L\to+\infty$

داریم:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt\longrightarrow 0$$

$$0\leqslant\left|\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|\,dt$$

بنابراین اگر $l \to +\infty$ می‌توان نوشت

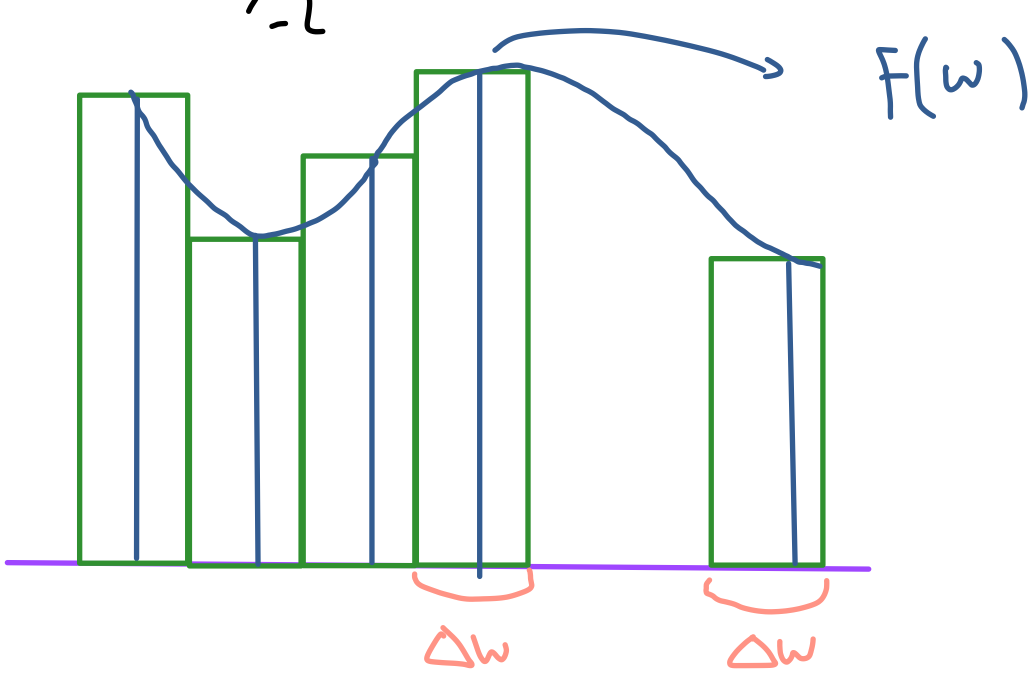
$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l}(t-x)\, dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l}(t-x)\, dt \right) \frac{\pi}{l}$$

قرار می‌دهیم $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ و $\Delta\omega = \frac{\pi}{l}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos \omega(t-x)\, dt$$



پس می‌توان گفت وقتی $l \to +\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega \longrightarrow \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, d\omega$$

و درنتیجه:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega(t-x)\, dt \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos wt \cos wx + \sin wt \sin wx\right] dt\, dw$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\, dt\right)\cos wx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\, dt\right)\sin wx\right] dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\, dt \qquad (1)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\, dt \qquad (2)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dw$$

انتگرال $\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dw$ را که $A(w)$ و $B(w)$

توسط روابط (۱) و (۲) تعریف می شوند، انتگرال فوریه‌ی f می نامند.

قضیه: اگر f در هر بازه‌ی متناهی قطعه به قطعه پیوسته باشد و

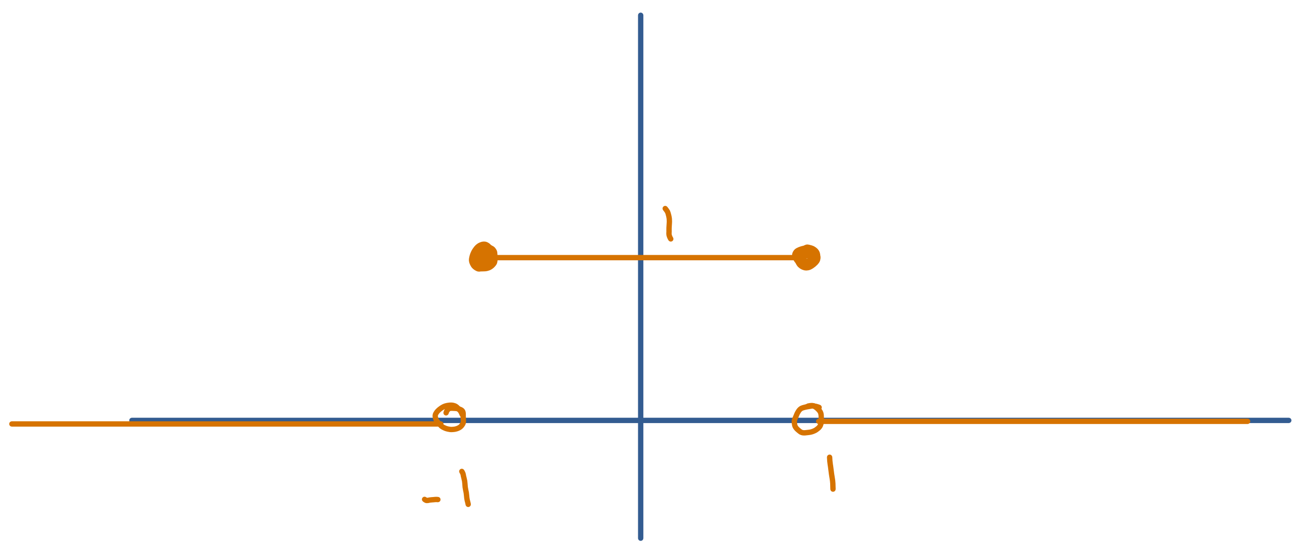
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ و مشتقات یک طرفی چپ و راست وجود داشته باشند

آنگاه انتگرال فوریه‌ی f در نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به

$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ همگراست.

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leq 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



شرایط قضیه‌ی همگرایی انتگرال فوریه برقرارند (چرا؟)

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wt\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi w}\sin wt\Big|_{t=-1}^{t=1}=\frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin wt\,dt=0$$

$$\int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos wx}{w}\,dw$$

بنابر قضیه‌ی همگرایی:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin w\cos wx}{w}\,dw=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=\pm 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & x=\pm 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

برای $x=0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$$

$$Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin w}{w}\, dw$$

تذکر: برای توابع زوج $B(w)=0$ و انتگرال فوریه به شکل:

$$\int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw$$

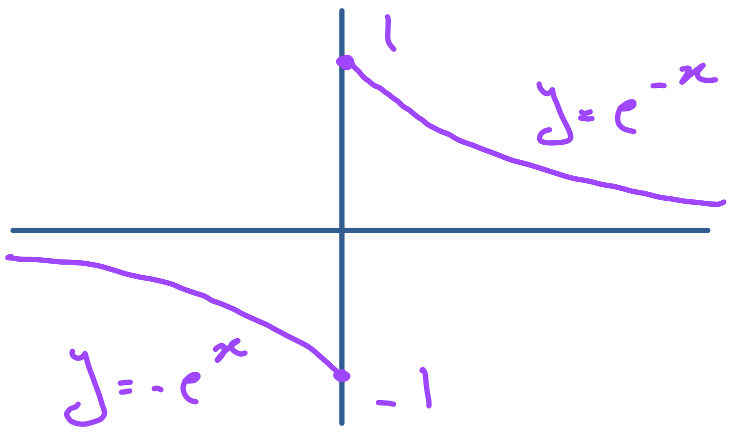
و برای توابع فرد $A(w)=0$ و انتگرال فوریه به شکل:

$$\int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw$$

است.

مثال: فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x=0 \\ -e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$



شرایط قضیه برقرارند (چرا؟)

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} -e^{t}\sin wt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{dv}\,\underbrace{\sin wt}_{u}\,dt =$$

$$= \frac{2w}{\pi(1+w^2)} = \int_0^{\infty} B(w)\sin wx\,dw =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{w\sin wx}{1+w^2}\,dw$$

تمرین:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w^2}\,dw =$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-x} & x>0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}}$$

تبدیل فوریه:

برای تابع پیوسته f که شرایط قضیه همگرایی را دارد، داریم:

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos w(t-x)\,dt\right)dw$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\cos w(t-x) = \frac{1}{2}\left(e^{w(t-x)i} + e^{-w(t-x)i}\right)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)\, e^{iwt} e^{-iwt} + f(t)\, e^{-iwt} e^{iwt}\right) dt\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-iwt} e^{-iwt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{iwt} e^{iwx}\, dt \right) dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt \right) e^{iwt}\, dw$$