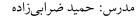
ساختارهای گسسته

نيمسال دوم ۹۶-۹۷





دانشكدهي مهندسي كامييوتر

نظر یه ی گرافها زمان: ۲۰ دقیقه

آزمونک چهارم

مسئلهی ۱. دور همیلتنی

یک گراف ساده ی n+1 رأسی داریم. به ازای هر n رأس از این گراف، رأسی خارج از این مجموعه وجود دارد که به تمام رأسهای مجموعه یال دارد. همچنین می دانیم که درجه ی هیچ رأسی برابر با n نیست. ثابت کنید این گراف همیلتنی است.

حل.

ثابت می کنیم کم ترین درجه ی رأسها در این گراف حداقل n+1 است. فرض کنید راس با کم ترین درجه u باشد. اگر درجه ی این راس کم تر از n باشد، راس u و تمام همسایه هایش را در نظر می گیریم. چون تعداد آنها حداکثر n است، باید راسی در خارج از این مجموعه وجود داشته باشد که به همه ی آنها یال داشته باشد. ولی چون تمام همسایه های راس u در این مجموعه هستند به تناقض می رسیم. همچنین می دانیم طبق صورت سوال، درجه ی هیچ راسی نمی تواند u باشد. در نتیجه درجه ی هر راس حداقل u+1 است. طبق قضیه ی دیراک، اگر در گرافی کم ترین درجه حداقل اندازه ی نصف تعداد راس ها باشد، آنگاه گراف مورد نظر همیلتنی است.

مسئلهی ۲. یال برشی

فرض کنید یالی از یک گراف در تمام زیردرختهای فراگیر آن آمده باشد، ثابت کنید این یال برشی است.

حل.

فرض کنید یال e از گراف G خاصیت گفته شده را داشته باشد. اگر e برشی نباشد، G همبند است و بنابراین یک زیردرخت فراگیر مانند T دارد. T زیردرخت فراگیر G نیز هست اما e در G نیامده است که با فرض سوال در تناقض است. بنابراین فرض برشی نبودن e غلط است و e برشی است.