



مسئله‌ی ۱*. حل رابطه‌های بازگشتی

روابط بازگشتی زیر را به کمک معادله‌ی مشخصه حل کنید.

(الف)

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3} \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + 6 \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۲*. توابع مولد

روابط بازگشتی زیر را به کمک توابع مولد حل کنید.

(الف)

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} a_n = 12a_{n-1} - 36a_{n-2} \\ a_0 = 0, a_1 = 6 \end{cases}$$

مسئله‌ی ۳*. هتل رنگارنگ

یک هتل در یک طبقه‌ی خود n اتاق به شماره‌های ۱ تا n دارد. هر اتاق با یکی از رنگ‌های قرمز، سفید یا آبی رنگ شده است طوری که سمت راست و کنار هیچ اتاق قرمزی اتاقی به رنگ آبی نیست. به چند طریق می‌توانیم اتاق‌های این هتل را رنگ کنیم؟

مسئله‌ی ۴. ماتریس متقارن

فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ باشد طوری که در هر سطر آن‌ها دقیقاً یک درایه‌ی ۱ وجود داشته باشد. رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید.

مسئله ۵. شطرنجستان!

می‌خواهیم بین دو کشور شکرستان و نمکستان، r مسابقه‌ی هم‌زمان شطرنج برگزار کنیم. بار اول n نفر از هر کشور انتخاب می‌کنیم که هر نفر از شکرستان مجاز است با هر نفر از نمکستان مسابقه دهد. بار دوم n نفر از شکرستان مانند a_1, a_2, \dots, a_n و $2n-1$ نفر از نمکستان مانند $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$ انتخاب می‌کنیم که a_i ($1 \leq i \leq n$) مجاز است با $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$ مسابقه دهد. ثابت کنید تعداد روش‌های برگزاری مسابقه در هر دو حالت برابر است.

مسئله ۶. مجموعه‌ی خودخواه

مجموعه‌ای از اعداد صحیح خودخواه است اگر تعداد اعضای آن عضوی از خود مجموعه باشد. تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ را بیابید که خودخواه و مینیمال باشند، یعنی خودشان خودخواه باشند ولی هیچ زیرمجموعه‌ی خودخواهی نداشته باشند.

مسئله ۷. فرد رنگی

ثابت کنید تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی تعدادی از یال‌های یک جدول $1 \times n$ طوری که حداقل یک ضلع از هر مربع واحد رنگ شود عددی فرد است.