

**مسئله‌ی ۱.*. گراف جهت‌دار**

ثابت کنید به ازای هر گراف دلخواه G می‌توان یال‌های آن را طوری جهت‌دار کرد که به ازای هر رأس در این گراف، اختلاف درجه‌ی ورودی و خروجی آن حداکثر ۱ باشد.

مسئله‌ی ۲.*. گراف دوبخشی

ثابت کنید یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دو رأس مجاوری موجود نباشند که فاصله‌شان از هر رأس دیگری برابر باشد.

مسئله‌ی ۳.*. یال برشی

نشان دهید گرافی که درجه‌ی تمام رأس‌های آن زوج است، یال برشی ندارد.

مسئله‌ی ۴. دورها

G گرافی ساده با m یال و n رأس است. ثابت کنید G تعداد حداقل $m - n + 1$ دور دارد.

مسئله‌ی ۵. آشنایی

فرض کنید در گروهی از افراد، تعدادی از آن‌ها هم‌دیگر را می‌شناسند. می‌دانیم هر شب یکی از افراد این جمع، تمام آشنایان خود را به مهمانی دعوت می‌کند و آن‌ها را به یک‌دیگر معرفی می‌کند. فرض کنید پس از یک‌بار مهمانی دادن تمام افراد این جمع، دو نفر وجود دارند که یک‌دیگر را نمی‌شناسند. ثابت کنید این دو در مهمانی بعدی هم باهم آشنا نخواهند شد.

مسئله‌ی ۶. گراف جذاب

با در نظر گرفتن دو عدد طبیعی p و k ، گرافی با $\binom{p}{k}$ رأس داریم. فرض کنید هر رأس از این گراف متناظر با یک زیرمجموعه‌ی k تایی از $\{1, \dots, p\}$ است. یال (u, v) بین رأس‌های u و v وجود دارد اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های متناظر با این دو رأس مجزا باشند.

(الف) نشان دهید اندازه‌ی بزرگترین خوشه در این گراف حداکثر $\lfloor \frac{p}{k} \rfloor$ است.

(ب) رأس‌های گراف را با p رنگ، رنگ‌آمیزی کنید.

(ج) نشان دهید رأس‌های این گراف $p - 2k + 2$ رنگ‌پذیر است.

مسئله ۷. دورهای همیلتنی

فرض کنید e یالی از گراف ساده‌ی G باشد که u و v دو سر آن هستند. اگر هر رأس دیگری به‌جز u و v در G درجه‌ای فرد داشته‌باشد، ثابت کنید تعداد زوجی دور همیلتنی از e می‌گذرد.