۱. دنباله‌ی فیبوناچی به این صورت تعریف می‌شود که $f_1 = f_2 = 1$ و $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. نشان دهید:

الف) $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$

ب) $\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$

ج) $\gcd(f_n, f_n + 1) = 1$

د) $f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$

ه) $f_{2n}^2 = \sum_{k=1}^{2n-1} f_k f_{k+1}$

و) $f_n = f_{m+1} f_{n-m} + f_m f_{n-m-1}$

ز) $m \mid n \Rightarrow f_m | f_n$

ح) $f_{\gcd(m,n)} = \gcd(f_m, f_n)$

۲. ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

الف) $2! \times 4! \times \cdots \times (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$

ب) $(2n)! \times (n+1) \geqslant 4^n (n!)^2$

ج) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$

د) $(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2(1 + 2 + \cdots + n)^4$

ه) $\sum_{k=1}^{n^2+n} \left\lfloor \sqrt{k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \sum_{k=1}^{n} k^2$

۳. زاویه‌ی a و عدد حقیقی x داده شده‌اند، که $x + \frac{1}{x} = 2\cos(a)$. نشان دهید $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(na)$.

۴. نشان دهید برای هر a حقیقی و مثبت و n طبیعی:

$$\sqrt{a + 1 + \sqrt{a + 2 + \cdots + \sqrt{a + n}}} < a + 3$$

۵. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، معادله‌ی $a^2 + b^2 = c^n$ در اعداد طبیعی جواب دارد.

۶. دنباله‌ی a_n را تعریف می‌کنیم $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، $2^n \mid a_n$.

۷. نشان دهید عدد $2^{2^n} - 1$ حداقل n عامل اول متمایز دارد.

۸. نشان دهید به ازای هر $n \geqslant 6$، اعداد صحیح $a_1, \ldots, a_n$ وجود دارند که $\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} = 1$.

۹. نشان دهید دنباله‌ی $S_n = 1 + \cdots + n$ بی‌شمار عضو مربع کامل دارد.

۱۰. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عددی n رقمی با ارقام ۹ و ۴ وجود دارد که بر 2^n بخش‌پذیر باشد.

۱۱. مجموعه‌ی $A_n=\{(x,y)|\gcd(x,y)=1\wedge x,y\leqslant n\wedge x+y>n\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید به ازای هر n طبیعی، $\sum_{(x,y)\in A_n}\frac{1}{xy}=1$.

۱۲. نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی k و اعداد $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{Z}_2$ وجود دارند به طوری که $n=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}i^2$. (راهنمایی: نشان دهید $(m+3)^2+(m+2)^2-(m+1)^2-m^2=4$)

۱۳. نشان دهید از هر $2^{n+1}-1$ عدد صحیح می‌توان 2^n عدد را طوری انتخاب کرد که مجموع‌شان بر 2^n بخش‌پذیر باشد.

۱۴. نشان دهید جدولی $2^n\times 2^n$ از اعداد ۰ و ۱ وجود دارد که هر دو سطر آن دقیقاً در نصف ستون‌ها اختلاف داشته باشند.

۱۵. جدولی $(2n+1)\times(2n+1)$ از اعداد حقیقی داده شده است که قدرمطلق هر عدد حداکثر ۱ است. مجموع اعداد داخل هر مربع 2×2 برابر صفر است. ثابت کنید مجموع اعداد جدول حداکثر $2n+1$ است.

۱۶. جدولی $m\times n$ از اعداد حقیقی داده شده است. در هر سطر این جدول حداقل p تا از بزرگ‌ترین اعداد را علامت می‌زنیم و در هر ستون آن حداقل q تا از بزرگ‌ترین اعداد را علامت می‌زنیم. نشان دهید که حداقل pq عدد هستند که دو بار علامت خورده‌اند.

۱۷. $n-1$ خانه از یک جدول $n\times n$ را رنگ کرده‌ایم. نشان دهید با جابه‌جا کردن سطرها و ستون‌ها می‌توان جدول را طوری تغییر داد که همه‌ی خانه‌های رنگی زیر قطر اصلی قرار بگیرند.

۱۸. مجموعه‌ی متناهی A از رشته‌های صفر و یک مفروض است. می‌دانیم برای هر دو رشته‌ی دل‌خواه $a,b\in A$ داریم $ab=ba$ که ab رشته‌ای است که از قرار دادن رشته‌ی b در انتهای رشته‌ی a به دست می‌آید. رشته‌ی w را مولد رشته‌ی a می‌گوییم، اگر a از پشت سر هم قرار دادن تعدادی w به دست آید. مثلاً ۰۱۱ مولد رشته‌ی ۰۱۱۰۱۱۰۱۱ است. نشان دهید اعضای مجموعه‌ی A یک مولد مشترک دارند.

۱۹. دو مجموعه‌ی متناهی X و Y از اعداد صحیح مثبت داده شده‌اند، طوری که مجموع اعضای X و Y مساوی و کم‌تر از $|X|\times|Y|$ است. نشان دهید دو زیرمجموعه‌ی سره و ناتهی از X و Y وجود دارند که مجموع مساوی داشته باشند.

۲۰. نقاط (a,b) با مختصات صحیح را در نظر بگیرید که $0\leqslant a,b$ و $a+b\leqslant n$. نشان دهید برای پوشاندن این مجموعه نقاط به حداقل $n+1$ خط راست احتیاج داریم.

۲۱. نقاط $P_1,\dots,P_{2n+1}$ روی محیط دایره‌ی واحد و در یک سمت یک قطر آن داده شده‌اند. نشان دهید $\left|\sum_{i=1}^{2n+1}OP_i\right|\geqslant 1$.

۲۲. n نقطه رنگ‌های آبی و قرمز روی محیط یک دایره داده شده‌اند. نشان دهید تعداد وترهایی که می‌توان رسم کرد طوری که هیچ دو وتری یک‌دیگر را قطع نکنند و دو سر هر وتر ناهم‌رنگ باشد، حداکثر $\lfloor\frac{3n+4}{2}\rfloor$ است.

۲۳. ماتریسی $n\times n$ را یک ماتریس نقره‌ای می‌گوییم هرگاه هر درایه‌ی آن از مجموعه‌ی $A_n=\{1,\dots,2n-1\}$ باشد و به ازای هر i، اجتماع اعداد سطر و ستون i اُم آن شامل کل A_n باشد. نشان دهید بی‌شمار ماتریس نقره‌ای وجود دارد.

۲۴. n کارت قرمز و n کارت آبی داریم و روی کارت‌های هر دسته اعداد ۱ تا n نوشته شده است. این $2n$ کارت را به طور تصادفی جفت می‌کنیم و هر جفت کارت را پشت‌به‌پشت به هم می‌چسبانیم، طوری که دو طرف کارت حاصل عددی نوشته شده باشد. نشان دهید می‌توان طوری این کارت‌ها را روی میز گذاشت که اعداد ۱ تا n رو باشند.

۲۵. $2n$ نقطه در فضا داده شده‌اند. بین این نقاط n^2+1 پاره‌خط رسم شده است. نشان دهید سه نقطه وجود دارند که دوبه‌دو به هم متصل‌اند.

۲۶. عدد رمزی $R(p,q)$ را برابر کوچک‌ترین nای تعریف می‌کنیم که در هر جمع n نفره، یا p نفر هستند که دوبه‌دو یک‌دیگر را می‌شناسند، یا q نفر هستند که هیچ‌یک دیگری را نمی‌شناسد، که در این‌جا شناختن یک رابطه‌ی دوطرفه فرض شده است. نشان دهید $R(p,q) \leqslant \binom{p+q-2}{p-1}$.

۲۷. یال‌های گراف کاملی با حداقل ۴ رأس را با ۴ رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم، طوری که از هر رنگ حداقل یک بار استفاده شده باشد. نشان دهید تعدادی از رئوس وجود دارند که یال‌های بین‌شان دقیقاً ۳ رنگ مختلف داشته باشد.

۲۸. نشان دهید می‌توان نواحی یک نقشه را با دو رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که نواحی مجاور هم‌رنگ نباشند، اگر و تنها اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس نقشه زوج باشند.

۲۹. دنباله‌ی $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ داده شده است، طوری که $a_1=1$ و $a_n < a_{n+1} \leqslant 2a_n$. نشان دهید هر عدد صحیح را می‌توان به صورت مجموع تعدادی از درایه‌های متمایز این دنباله نوشت.

۳۰. نشان دهید میانگین هندسی هر n عدد حقیقی مثبت حداکثر به اندازه‌ی میانگین حسابی آن‌ها است.