ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری هفتم | رابطه‌ها و ترتیب جزئی | زمان تحویل: ۸ خرداد

مسئله‌ی ۱*. شمارش

با ذکر استدلال محاسبه کنید:

الف) تعداد روابط روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا n که بستار ترایایی آن‌ها یک رابطه‌ی ترتیب کامل است.

ب) تعداد روابط روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا n مانند R که دو شرط زیر را دارند:

۱. R زیرمجموعه‌ی متقارن تک‌عضوی نداشته باشد.

۲. $R^۲$ تقارنی، بازتابی و پادتقارنی باشد.

حل.

الف) فرض کنید بستار ترایایی رابطه‌ی R، رابطه‌ی R^* باشد که یک رابطه‌ی ترتیب کامل است. بنابراین دقیقا یک جایگشت $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ از اعداد ۱ تا n وجود دارد که به ازای هر i ($۱ \leqslant i \leqslant n-۱$)، $(p_i, p_{i+۱}) \in R^*$. ثابت می‌کنیم که به ازای هر i ($۱ \leqslant i \leqslant n-۱$)، $(p_i, p_{i+۱})$ عضو رابطه‌ی R نیز هست. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. در صورتی که $(p_i, p_{i+۱})$ عضو رابطه‌ی R نباشد، حتما دنباله‌ای از اعداد مانند $p_{a_۰}, p_{a_۱}, \ldots, p_{a_l}$ وجود دارد که $a_۰ = i$، $a_l = i+۱$، $l \geqslant ۲$، و جفت مرتب هر دو عنصر متوالی عضو رابطه‌ی R هست. حال فرض کنید این دنباله کوتاه‌ترین دنباله با این خاصیت باشد. بنابراین یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

۱. $a_۱ < i$ در این‌صورت اولا طبق تعریف جایگشت p خواهیم داشت $p_{a_۱} \; R^* \; p_i$. اما از طرفی با توجه به وجود دنباله‌ی گفته شده حتما $p_i \; R^* \; p_{a_۱}$ ؛که با توجه به این‌که $p_{a_۱} \neq p_i$ به تناقض می‌رسیم.

۲. $a_۱ > i+۱$ در این‌صورت اولا طبق تعریف جایگشت p خواهیم داشت $p_{i+۱} \; R^* \; p_{a_۱}$. اما از طرفی با توجه به وجود دنباله‌ی گفته شده حتما $p_{a_۱} \; R^* \; p_{i+۱}$ ؛که با توجه به این‌که $p_{a_۱} \neq p_{i+۱}$ به تناقض می‌رسیم.

حال از طرفی این شرط به وضوح برای ترتیب کامل بودن بستار ترایایی R کافی نیز هست. بنابراین R باید تمام جفت‌های مرتب عناصر متوالی یک جایگشت را داشته باشد و به جز این نیز می‌تواند تعداد دلخواهی از $\binom{n}{۲} - (n-۱)$ جفت مرتب ممکن دیگر را داشته باشد. بنابراین تعداد خواسته شده برابر است با:

$$n! \times ۲^{\frac{(n-۱)^۲}{۲}}$$

ب) شرط اول معادل آن است که هیچ عضوی از مجموعه با خودش رابطه نداشته باشد. شرط دوم معادل آن است که

$$R^۲ = \{(i,i) \mid ۱ \leqslant i \leqslant n; i \in \mathbb{N}\}$$

. فرض کنید A مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا n باشد. برای برقرار بودن این شرط‌ها باید رابطه‌ی R خواص زیر را داشته باشد:

۱. هر عضو از A با عضو دیگری از A رابطه داشته باشد. برای اثبات توجه کنید که اگر عضوی از A با هیچ عضوی رابطه نداشته باشد، در $R^۲$ نخواهد بود. از طرفی هیچ عضوی نمی‌تواند با خودش رابطه داشته باشد.

۲. اگر عضوی از A مانند a با عضو دیگری مانند b رابطه داشته باشد، b تنها می‌تواند با a رابطه داشته باشد. برای اثبات فرض کنید b با عنصری از A مثل c رابطه داشته باشد. بنابراین

$$a\ R\ b \wedge b\ R\ c \Longrightarrow a\ R^۲\ c \Longrightarrow c = a$$

با توجه به خواص بالا، باید بتوان مجموعه‌ی A را به مجموعه‌هایی به اندازه‌ی دو افراز کرد که اعضای آن مجموعه‌ها در R با هم رابطه داشته باشند. بنابراین اگر n فرد باشد پاسخ مسئله صفر است. از طرفی اگر n زوج باشد پاسخ مسئله برابر با $\frac{n!}{۲^{\frac{n}{۲}} \times \frac{n}{۲}!}$ خواهد بود (چرا؟).

▷

مسئله‌ی ۲*. وراثت هم‌ارزی

موارد زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه‌ی هم‌ارزی متمایز روی مجموعه‌ی A باشند. آیا $R_۱ \cup R_۲$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

ب) فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه‌ی هم‌ارزی متمایز روی مجموعه‌ی A باشند. آیا $R_۱ \cap R_۲$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

ج) فرض کنید از یک رابطه، ابتدا بستار بازتابی، سپس بستار ترایایی و در نهایت بستار تقارنی بگیریم. آیا حاصل همیشه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟

حل.

الف) غلط است. به عنوان مثال نقض، تعریف کنید:

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$
$$R_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۱, ۲), (۲, ۱)\}$$
$$R_۲ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$$

در این صورت می‌توان دید که $R_۱ \cup R_۲ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$. این رابطه خاصیت ترایایی را ندارد و بنابراین رابطه‌ی هم‌ارزی نیست.

ب) درست است. $R_۱ \cap R_۲$ خاصیت بازتابی دارد چرا که:

$$\forall x \in A:\ (x\ R_۱\ x) \wedge (x\ R_۲\ x) \Longrightarrow \forall x \in A:\ (x, x) \in (R_۱ \cap R_۲)$$

این مجموعه خاصیت تقارنی دارد چرا که:

$$(x, y) \in R_۱ \cap R_۲ \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in R_۱ \Longrightarrow (y, x) \in R_۱ \\ (x, y) \in R_۲ \Longrightarrow (y, x) \in R_۲ \end{array} \right\} \Longrightarrow (y, x) \in R_۱ \cap R_۲$$

همچنین این مجموعه خاصیت ترایایی نیز دارد چرا که:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R_۱\cap R_۲\\(y,z)\in R_۱\cap R_۲\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R_۱\\(y,z)\in R_۱\end{array}\right\}\Longrightarrow(x,z)\in R_۱\\\left.\begin{array}{l}(x,y)\in R_۲\\(y,z)\in R_۲\end{array}\right\}\Longrightarrow(x,z)\in R_۲\end{array}\right\}\Longrightarrow(x,z)\in R_۱\cap R_۲$$

ج) خیر. به عنوان مثال نقض، تعریف کنید:
$R=\{(۱,۲),(۳,۲)\}$.

حاصل بستار بازتابی رابطه‌ی $R_r=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۳,۲)\}$ است. این رابطه خاصیت ترایایی دارد و درنتیجه بستار ترایایی آن برابر با خود آن است. $R_{rt}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۳,۲)\}$ درنهایت بستار تقارنی آن برابر با $R_{rts}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۳,۲),(۲,۱),(۲,۳)\}$ است. اما این رابطه خاصیت ترایایی را ندارد و بنابراین رابطه‌ی هم‌ارزی نیست.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۳. چالش مشبکه

ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی ناتهی متناهی از یک مشبکه، یک کوچک‌ترین کران بالا دارد.

حل. با توجه به متناهی بودن زیرمجموعه می‌توان از استقرا استفاده کرد. بنابراین حکم وجود کوچک‌ترین کران بالا را به استقرا روی اندازه‌ی زیرمجموعه اثبات می‌کنیم که آن را با n نشان می‌دهیم. همچنین مشبکه را با $(A,\leqslant)$ و زیرمجموعه‌ی مورد نظر را با S نشان می‌دهیم.
به عنوان پایه‌ی استقرا توجه کنید که درستی حکم برای $n=۲$ همان تعریف مشبکه است. همچنین درستی حکم برای $n=۱$ واضح است.
برای گام استقرا فرض کنید $S=\{s_۱,s_۲,\dots,s_n\}$. دو مجموعه‌ی $S_۱=\{s_۱,s_۲,\dots,s_{n-۱}\}$ و $S_۲=\{s_۲,s_۳,\dots,s_n\}$ را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا این دو زیرمجموعه‌ی $n-۱$ عضوی، کوچک‌ترین کران بالا دارند. آن‌ها را به ترتیب با $u_۱$ و $u_۲$ نشان دهید. مجموعه‌ی $\{u_۱,u_۲\}$ کوچک‌ترین کران بالا دارد که آن را با u نشان دهید. ثابت می‌کنیم u کوچک‌ترین کران بالای S است. برای اثبات فرض کنید v عضو کران بالای S باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{c}s_۱\leqslant v\\s_۲\leqslant v\\\vdots\\s_{n-۱}\leqslant v\end{array}\right\}\Longrightarrow u_۱\leqslant v$$

و همچنین

$$\left.\begin{array}{c}s_۲\leqslant v\\s_۳\leqslant v\\\vdots\\s_n\leqslant v\end{array}\right\}\Longrightarrow u_۲\leqslant v$$

درنتیجه با توجه به تعریف u، ثابت می‌شود $u\leqslant v$. از طرفی u عضو کران بالای S نیز هست چرا که:

$$
\begin{aligned}
s_1 &\leqslant u_1 \leqslant u \\
s_2 &\leqslant u_1 \leqslant u \\
&\vdots \\
s_{n-1} &\leqslant u_1 \leqslant u \\
s_n &\leqslant u_2 \leqslant u
\end{aligned}
$$

بنابراین u کوچک‌ترین کران بالای S است. به عنوان تمرین می‌توانید وجود بزرگ‌ترین کران پایین را نیز اثبات کنید.
$\triangleright$

مسئله‌ی ۴. لغت‌نامه

فرض کنید S مجموعه‌ی تمام رشته‌های متشکل از حروف کوچک الفبای انگلیسی و R ترتیب لغت‌نامه‌ای روی S باشد. اگر s و t دو عضو از S باشند، sRt اگر و تنها اگر s پیشوند t باشد یا اولین حرفی که بعد از پیشوند مشترک s و t در s آمده است زودتر از حرف متناظر در t در الفبا ظاهر شود. ثابت کنید R خوش‌ترتیب نیست.

حل.

دنباله‌ی $s_1, s_2, \ldots$ از رشته‌ها را در نظر بگیرید که s_i رشته‌ای است که از تکرار شدن i حرف a و سپس یک حرف b به دست می‌آید. برای مثال $s_1 = ab$ و $s_2 = aab$. توجه کنید که طبق این تعریف $s_{i+1} \; R \; s_i$. بنابراین زیرمجموعه‌ی $X = \{s_1, s_2, \ldots\}$ عضو کمینه ندارد. بنابراین R خوش‌ترتیب نیست. $\triangleright$

مسئله‌ی ۵. زنگ بازگشتی

تعداد روابط هم‌ارزی یک مجموعه‌ی n عضوی را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P(n-k-1)$$

حل.

مجموعه‌ی n عضوی A را درنظر بگیرید و فرض کنید x، یکی از اعضای A باشد. همچنین B زیرمجموعه‌ی دلخواه k عضوی از $A - \{x\}$ باشد. می‌خواهیم تعداد روابط هم‌ارزی را بشماریم که در آن اعضای مجموعه‌ی $B \cup \{x\}$ تشکیل یک کلاس هم‌ارزی می‌دهند. تعداد چنین روابطی برابر با تعداد روابط هم‌ارزی متفاوت روی $A - B - \{x\}$ است که برابر با $P(n-k-1)$ است. تعداد روش‌های انتخاب زیرمجموعه‌ی B برابر با $\binom{n-1}{k}$ است. پس تعداد روابط هم‌ارزی که در آن اندازه‌ی کلاس هم‌ارزی شامل x برابر با $k+1$ است، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\binom{n-1}{k} P(n-k-1)$$

برای شمارش تمام روابط هم‌ارزی باید تمام حالت‌های مختلف برای اندازه‌ی کلاس هم‌ارزی x را در نظر بگیریم و بنابراین رابطه‌ی گفته شده به دست می‌آید. یعنی:

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P(n-k-1)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶. کوچک‌ترین هم‌ارزی

فرض کنید R یک رابطه‌ی دلخواه روی مجموعه‌ی متناهی A باشد. از R به ترتیب ابتدا بستار بازتابی، سپس بستار تقارنی و در نهایت بستار ترایایی می‌گیریم و حاصل را با P نشان می‌دهیم. ثابت کنید P یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. همچنین ثابت کنید P کوچک‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی است که R زیرمجموعه‌ی آن است.

حل.

حاصل گرفتن بستار بازتابی از R را با B و حاصل گرفتن بستار تقارنی از B را با C نشان می‌دهیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم P یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. توجه کنید که خاصیت بازتابی با اضافه شدن عضو به رابطه و درنتیجه با بستارگیری از بین نمی‌رود. بنابراین P خاصیت بازتابی دارد. همچنین P خاصیت ترایایی نیز دارد. C خاصیت تقارنی دارد. بنابراین کافی است ثابت کنیم با گرفتن بستار ترایایی از C خاصیت تقارنی حفظ می‌شود.

فرض کنید (a,b) عضو دلخواهی از P باشد. اگر (a,b) عضو C نیز باشد، در این صورت طبق خاصیت تقارنی C، جفت (b,a) نیز عضو C و درنتیجه عضو P است. در غیر این صورت دنباله‌ی $(u_1,u_2),(u_2,u_3),\dots,(u_{n-1},u_n)$ وجود دارد که $n>2$ و $(u_i,u_{i+1})\in C$. همچنین $u_1=a$ و $u_n=b$. حال با توجه به خاصیت تقارنی C خواهیم داشت

$$\left.\begin{array}{c}(u_n,u_{n-1})\in C\\ \vdots\\ (u_3,u_2)\in C\\ (u_2,u_1)\in C\end{array}\right\}\Longrightarrow (u_n,u_1)\in P\Longrightarrow (b,a)\in P$$

بنابراین ثابت شد اگر (a,b) عضو دلخواهی از P باشد، حتما (b,a) نیز عضو P است. پس P خاصیت تقارنی نیز دارد و درنتیجه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید G یک رابطه‌ی هم‌ارزی دلخواه باشد که $R\subseteq G$. با توجه به این‌که G و R هر دو روی مجموعه‌ی A تعریف شده‌اند و G خاصیت بازتابی دارد، پس $B\subseteq G$. طبق تعریف بستار، می‌توان نوشت:

$$C=B\cup\{(b,a)\mid(a,b)\in B\}$$

از طرفی چون B زیرمجموعه‌ی G است و G خاصیت تقارنی دارد، پس:

$$\{(b,a)\mid(a,b)\in B\}\subseteq G$$

و درنتیجه $C\subseteq G$. در نهایت چون C زیرمجموعه‌ی G است و G خاصیت ترایایی دارد، پس طبق تعریف بستار P کوچک‌تر از G است. چون G به صورت دلخواه انتخاب شده بود، پس P از هر رابطه‌ی هم‌ارزی شامل R کوچک‌تر است و بنابراین کوچک‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی شامل R است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۷*. مقسوم‌علیه

الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد n تشکیل مشبکه‌ی توزیع‌پذیر می‌دهند.

ب) نشان دهید مجموعه مقسوم علیه‌های عدد n تشکیل جبر بول می‌دهد اگر و تنها اگر n بر مربع کامل هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بخش‌پذیر نباشد.

حل.

الف) اگر تعریف کنیم $a \wedge b = gcd(a,b)$ و $a \vee b = lcm(a,b)$ آنگاه به وضوح مجموعه مقسوم‌علیه‌های یک عدد مشبکه می‌شوند. از طرفی اگر a، b و c را به عوامل اولشان تجزیه کنیم، خواهیم داشت $gcd(a, lcm(b,c)) = lcm(gcd(a,b), gcd(a,c))$. که همان توزیع پذیری را نشان می‌دهد.

ب) فرض کنید n بر مربع هیچ عددی بخش‌پذیر نباشد. در نتیجه برای هر a که مقسوم‌علیه n است، $\frac{n}{a}$ متمم a است زیرا ب.م.م a و $\frac{n}{a}$ برابر یک است و ک.م.م آن‌ها برابر n یا ماکسیمم مشبکه. پس در این حالت مجموعه مقسوم‌علیه‌ها متمم دار هستند.

اگر n بر مربع کامل عددی بخش‌پذیر باشد، بر مربع کامل عدد اولی مثل p هم بخش‌پذیر است. حال فرض کنید p متمم داشته باشد و آن را x بنامید. پس باید ب.م.م x و p برابر ۱ باشد. چون p اول است نتیجه می‌شود ک.م.م p و x برابر px است. اما باید داشته باشیم $p^2|n = px$ پس $p|x$ که تناقض است.

$\triangleright$