

۱. حساب کنید.

الف:

$$\operatorname{Re} \frac{(1+i)^2}{3+2i}$$

ب:

$$\operatorname{Im}((1+i)^n + (1-i)^n)$$

۲. به ازای هر دو عدد مختلط مانند  $z_1$  و  $z_2$  ثابت کنید

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

۳. ثابت کنید اگر  $z$  عددی مختلط باشد و  $z \neq 1$ ، آنگاه

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

سپس ثابت کنید اگر  $k \in \mathbb{Z}$ ،  $\theta \neq 2k\pi$ ، آنگاه

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

۴. به دو طریق ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$|z + 4i| + |z - 4i| = 10$$

صدق می کنند بیضی است.

۵. ثابت کنید  $2^{100} = (1+i)^{200}$  و  $(1-i\sqrt{3})^{-10} = -2^{-11}(1+i\sqrt{3})$ .

۶. ثابت کنید همه ریشه های معادله  $z^5 + (z+1)^5 = 0$  روی خط  $x = -\frac{1}{2}$  واقع اند.

۷. فرض کنید  $z_1$  و  $z_2$  دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که  $\frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|z_1 + \bar{z}_2|} = 1$ ، آنگاه  $\operatorname{Re}(z_1 z_2)$  را به دست آورید.

۸. اگر  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ ، آنگاه حاصل  $z^n + \frac{1}{z^n}$  را به دست آورید.

۹. ریشه های سوم عدد  $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$  را به دست آورید.