ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم | *نظریه‌ی گراف‌ها* | زمان تحویل: ۲۹ اردی‌بهشت

مسئله‌ی ۱ *. گراف جهت‌دار

ثابت کنید به‌ازای هر گراف دلخواه G می‌توان یال‌های آن را طوری جهت‌دار کرد که به ازای هر رأس در این گراف، اختلاف درجه‌ی ورودی و خروجی آن حداکثر ۱ باشد.

حل. می‌دانیم که تعداد رأس‌های درجه فرد در هر گراف زوج است. حال رأس‌های درجه فرد را دو به دو باهم جفت کرده و بین آن‌ها یک یال اضافه می‌کنیم. در این حالت درجه همه‌ی رأس‌ها زوج است. می‌دانیم که در این گراف یک تور بسته اویلری وجود دارد. حال، طبق تور اویلری از یک رأس شروع می‌کنیم و یال‌ها را در جهت پیمایش تور جهت دار می‌کنیم. در نهایت به‌ازای هر رأس درجه ورودی و درجه خروجی آن برابر است. یال‌های اضافه شده را حذف می‌کنیم. از آن‌جایی که به هر رأس حداکثر یک یال اضافه شده بود، درجه ورودی یا خروجی آن حداکثر یک واحد تغییر می‌کند. بنابراین این اختلاف برای هر رأس حداکثر ۱ است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۲ *. گراف دوبخشی

ثابت کنید یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دو رأس مجاوری موجود نباشند که فاصله‌شان از هر رأس دیگری برابر باشد.

حل. فرض کنید G گرافی دوبخشی باشد. دو رأس مجاور $x, y \in G$ را در نظر بگیرید. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم G همبند است. چرا که یک گراف ناهمبند دوبخشی است اگر و تنها اگر هر یک از مولفه‌های آن دوبخشی باشد. پس می‌توان فرض کرد G شامل دو بخش X و Y است به‌طوری که $x \in X$ و $y \in Y$. فرض کنید فاصله‌ی بین دو رأس u و v در گراف را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم. حال به ازای هر رأس دلخواه از این دو بخش ثابت می‌کنیم زوجیت فاصله‌ی بین رأس مورد نظر از این دو رأس یکی نیست.

دو رأس دلخواه $z_x \in X$ و $z_y \in Y$ را در نظر گیرید $d(x, z_x)$ و $d(y, z_y)$ اعدادی زوج و $d(y, z_x)$ و $d(x, z_y)$ اعدادی فرد خواهند بود. پس هیچ کدام از رأس‌های z_x و z_y فاصله‌ی یکسانی از این دو رأس ندارند.

فرض کنید G دوبخشی نباشد. در این صورت طبق قضیه‌ی اثبات‌شده در کلاس شامل حداقل یک دور فرد است. فرض کنید کوتاه‌ترین دور فرد این گراف، C باشد. پس خواهیم داشت: $d_C(u, v) = d_G(u, v)$ (در غیر این صورت، می‌توان دور فرد کوچکتری ساخت و C کوتاه‌ترین دور نخواهد بود.) فرض کنید $C = v_0 v_1 \ldots v_{2k+1} v_0$. حال قرار دهید $x = v_0$ و $y = v_{2k+1}$ و $z = v_k$. پس در این‌صورت خواهیم داشت:

$$d_C(x, y) = 1, d_C(x, z) = d_C(y, x) = k$$

و چون مسیر در C کوتاه‌ترین مسیر است داریم: $d_G(x, z) = d_G(y, x) = k$ و با فرض در تناقض است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۳ *. یال برشی

نشان دهید گرافی که درجه‌ی تمام رأس‌های آن زوج است، یال برشی ندارد.

حل. فرض کنید G گرافی باشد که شامل یال برشی xy است. بنابراین گراف $G - xy$ شامل دو مولفه‌ی X و Y خواهد بود به‌طوری که $x \in V(X), y \in V(Y)$. پس با حذف xy، همه‌ی رأس‌های مولفه‌ی X به‌جز رأس x از درجه‌ی زوج هستند. پس تعداد رأس‌های با درجه‌ی فرد در این گراف فرد است که تناقض است. $\triangleright$

مسئله‌ی ۴. دورها

G گرافی ساده با m یال و n رأس است. ثابت کنید G تعداد حداقل $m - n + ۱$ دور دارد.

حل. حکم را با استفاده از استقرا روی یال‌ها ثابت می‌کنیم. می‌دانیم برای $m \leqslant n - ۱$ حکم بدیهی‌است. فرض کنید G گرافی باشد به‌طوری که داشته باشیم: $m > n - ۱$. بنابراین طبق لم ثابت‌شده در کلاس، G نمی‌تواند درخت یا جنگل باشد. پس دوری مانند C دارد. فرض کنید e یال دلخواهی از C باشد. طبق فرض استقرا، $G - e$ حداقل به‌تعداد $(m - ۱) + n - ۱$ دور دارد و C را شامل نمی‌شود. بنابراین حداقل تعداد دورهای G یکی بیشتر از این تعداد و برابر با $m + n - ۱$ خواهد بود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۵. آشنایی

فرض کنید در گروهی از افراد، تعدادی از آن‌ها هم‌دیگر را می‌شناسند. می‌دانیم هر شب یکی از افراد این جمع، تمام آشنایان خود را به مهمانی دعوت می‌کند و آن‌ها را به یک‌دیگر معرفی می‌کند. فرض کنید پس از یک‌بار مهمانی دادن تمام افراد این جمع، دو نفر وجود دارند که یک‌دیگر را نمی‌شناسند. ثابت کنید این دو در مهمانی بعدی هم باهم آشنا نخواهند شد.

حل. گزاره‌ی قوی‌تری را ثابت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم پس از یک‌بار مهمانی دادن تمام افراد جمع، تمام مولفه‌های همبندی تبدیل به خوشه‌هایی شده‌اند. برای اثبات تنها کافی است نشان دهیم اگر گراف اولیه همبند باشد، گراف حاصل پس از این عملیات، کامل خواهد بود.

می‌دانیم بین هر دو فرد در گراف همبند مسیری به‌طول حداکثر n وجود دارد. واضح است پس از هربار مهمانی هر فرد روی مسیر (شامل دوسر آن)، طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو سر آن یکی کمتر می‌شود. بنابراین پس از n بار مهمانی، هر دو فردی در این گراف با یک‌دیگر آشنا خواهند بود.

پس دو فردی که پس از این پروسه باهم آشنا نشده باشند، در مولفه‌های همبندی متفاوتی قرار دارند و در مهمانی بعدی باهم آشنا نخواهند شد. $\triangleright$

مسئله‌ی ۶. گراف جذاب

با در نظر گرفتن دو عدد طبیعی p و k، گرافی با $\binom{p}{k}$ رأس داریم. فرض کنید هر رأس از این گراف متناظر با یک زیرمجموعه‌ی k تایی از $\{۱, \ldots, p\}$ است. یال (u, v) بین رأس‌های u و v وجود دارد اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های متناظر با این دو رأس مجزا باشند.

الف) نشان دهید اندازه‌ی بزرگترین خوشه در این گراف حداکثر $\left\lfloor \frac{p}{k} \right\rfloor$ است.

ب) رأس‌های گراف را با p رنگ، رنگ‌آمیزی کنید.

ج) نشان دهید رأس‌های این گراف $p - ۲k + ۲$ رنگ‌پذیر است.

حل.

الف) در یک خوشه، تمام مجموعه رئوس متناظر باید دو به دو مجزا باشند. چون هریک از این مجموعه‌ها اندازه k دارد، نمی‌توانیم بیش از $\lfloor \frac{p}{k} \rfloor$ از این مجموعه‌ها داشته باشیم.

ب) برای یک مجموعه S، آن را با کوچکترین عضو درون S رنگ کنید. این یک رنگ‌آمیزی معتبر است زیرا اگر یک یال بین دو مجموعه باشد، این دو مجموعه مجزا خواهند بود و بنابراین کوچکترین عنصر درون این دو مجموعه، متفاوت خواهد بود.

ج) مجموعه‌هایی که تماما درون $\{۱, \ldots, ۲k - ۱\}$ قرار دارند را در نظر بگیرید. این مجموعه‌ها باید تشکیل یک مجموعه مستقل بدهند زیرا هیچ دو مجموعه‌ای از این مجموعه‌ها نمی‌توانند مجزا باشند. بنابراین، از یک رنگ برای رنگ کردن همه این مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. برای مجموعه‌های باقی‌مانده (که حداقل یک عنصر بزرگتر یا مساوی $۲k$ دارند)، به هر مجموعه S رنگ کوچکترین عنصر بزرگتر یا مساوی $۲k$ که درون آن وجود دارد را بدهید. توجه کنید که با این کار یک رنگ‌آمیزی معتبر خواهیم داشت و تعداد رنگ‌های استفاده شده برابر است با: $۱ + (p - ۲k + ۱) = p - ۲k + ۲$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷. دورهای همیلتنی

فرض کنید e یالی از گراف ساده‌ی G باشد که u و v دو سر آن هستند. اگر هر رأس دیگری به‌جز u و v در G درجه‌ای فرد داشته‌باشد، ثابت کنید تعداد زوجی دور همیلتنی از e می‌گذرد.

حل. گراف کمکی G' را می‌سازیم. مجموعه رئوس این گراف، تمام مسیرهای همیلتنی شروع شونده با یال uv هستند. دو رأس در G' به هم متصلند، اگر یکی از آن‌ها بتواند از روی دیگری با اضافه کردن یک یال به انتها یا حذف یک یال مجزا ایجاد شود. به عبارت دیگر، $H_۱ = uv \ldots wx \ldots y$ و $H_۲$ متصل‌اند اگر $H_۲ = uv \ldots wy \ldots x$.
فرض کنید $P = uv \ldots w$ یک مسیر همیلتنی باشد، آن گاه

$$deg(P) = \begin{cases} deg(w) - ۲ & uv \in E(G) \text{ اگر } \\ deg(w) - ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱)$$

بنابراین P درجه فرد دارد اگر و تنها اگر $wu \in E(G)$.

مجموعه دورهای همیلتنی دارای uv دقیقا مجموعه مسیرهای همیلتنی دارای درجه‌ی فرد در G' خواهد بود. $\triangleright$