



مسئله‌ی ۱. تقسیم توپ‌ها

می‌خواهیم ده توپ زرد یکسان، یک توپ قرمز و یک توپ سبز را میان پنج نفر تقسیم کنیم به گونه‌ای که به هر نفر دست‌کم یک توپ داده شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟

حل. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

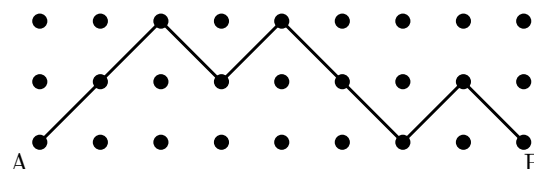
۱. توپ‌های قرمز و سبز به یک نفر داده شوند: یک نفر را به ۵ حالت انتخاب کرده و توپ‌های قرمز و سبز را به او می‌دهیم. سپس ۱۰ توپ زرد را میان ۵ نفر تقسیم می‌کنیم، با این شرط که به همه‌ی افراد به جز فردی که توپ‌های قرمز و سبز به او داده شده‌اند، باید دست‌کم یک توپ داده شود. تعداد راه‌های انجام این کار برابر با تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ با شرط‌های $x_1 \geq 0$ و $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح است که برابر است با $\binom{10}{4}$. پس در کل تعداد روش‌های تقسیم توپ‌ها میان افراد در این حالت برابر با $5 \times \binom{10}{4}$ است.

۲. توپ‌های قرمز و سبز به دو فرد متفاوت داده شوند: یک نفر را انتخاب می‌کنیم و توپ قرمز را به او می‌دهیم (۵ حالت). سپس از میان افراد باقی‌مانده، یک نفر دیگر را انتخاب کرده و توپ سبز را به او می‌دهیم (۴ حالت). ۱۰ توپ زرد را میان ۵ نفر به گونه‌ای تقسیم می‌کنیم که به هر نفر دست‌کم یک توپ برسد (به جز دو نفری که قبلاً توپ‌های قرمز و سبز را دریافت کرده‌اند). تعداد راه‌های انجام این کار برابر با تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ با شرط‌های $x_1, x_2 \geq 0$ و $x_3, x_4, x_5 \geq 1$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح است که برابر است با $\binom{11}{4}$. پس تعداد روش‌های تقسیم توپ‌ها میان افراد در این حالت برابر با $5 \times 4 \times \binom{11}{4}$ است.

بنابر اصل جمع، جواب این مساله برابر است با $5 \cdot \binom{10}{4} + 20 \cdot \binom{11}{4}$.

مسئله‌ی ۲. حرکت اریب

در شکل زیر چند مسیر مختلف برای رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود دارد، اگر فقط حرکت‌هایی به صورت \nearrow و \searrow مجاز باشند؟ یکی از مسیرهای ممکن در شکل زیر نمایش داده شده است:



[راهنمایی: تعداد حرکت‌های ممکن برای عبور یک مسیر اریب مجاز از هر یک از ستون‌های زوج و ستون‌های فرد شکل را به دست آورید.]

حل. نکته‌ای که برای حل این سوال باید به آن توجه کرد، این است که هر مسیر مجاز از A تا B، در ستون‌های زوج (ستون‌های دوم، چهارم، ششم و هشتم از سمت چپ) از نقطه‌ی وسط آن ستون، و در ستون‌های فرد از یکی از

