دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری پنجم — روابط بازگشتی و توابع مولد — زمان تحویل: ۱۶ اردی‌بهشت

مسئله‌ی ۱*. حل رابطه‌های بازگشتی

روابط بازگشتی زیر را به کمک معادله‌ی مشخصه حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} a_n = ۶a_{n-۱} - ۹a_{n-۲} \\ a_۰ = ۲, a_۱ = ۳ \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} a_n = ۳a_{n-۱} + ۱۰a_{n-۲} + ۷ \times ۵^n \\ a_۰ = ۴, a_۱ = ۳ \end{cases}$$

حل.

الف) معادله مشخصه به‌شکل $r^۲ - ۶r + ۹ = ۰ \Rightarrow (r-۳)^۲ = ۰$ است. که ریشه‌ی مضاعف $r = ۳$ دارد. بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود.

$$a_n = c_۱ ۳^n + c_۲ n ۳^n$$

با جای‌گذاری و حل معادله‌ها برای شروط اولیه، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$a_n = ۲ \times ۳^n - n۳^n \Rightarrow a_n = (۲-n)۳^n$$

ب) معادله مشخصه معادله‌ی همگن متناظر به‌شکل $r^۲ - ۳r - ۱۰ = ۰$ خواهد بود. که ریشه‌های آن $r_۱ = ۵$ و $r_۲ = -۲$ هستند.

از طرفی چون در بخش ناهمگن ۵^n داریم، با توجه به این‌که تعداد تکرار ریشه‌ی ۵ در معادله مشخصه ۱ بار است، جواب خصوصی به‌فرم $a_n = cn۵^n$ خواهد بود. که با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$cn۵^n = ۳c(n-۱)۵^{n-۱} + ۱۰c(n-۲)۵^{n-۲} + ۷ \times ۵^n \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow a_n = n۵^{n+۱}$$

بنابراین جواب عمومی برابر است با: $a_n = c_۱۵^n + c_۲(-۲)^n + n۵^{n+۱}$

که با جای‌گذاری و حل معادله‌ها برای شروط اولیه، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$a_n = (-۲)۵^n + ۶(-۲)^n + n۵^{n+۱}$$

▷

مسئله‌ی ۲*. توابع مولد

رابطه‌های بازگشتی زیر را به کمک توابع مولد حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} a_n = ۶a_{n-۱} - ۹a_{n-۲} \\ a_۰ = ۱, a_۱ = ۹ \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} a_n = a_{n-۲} + ۴n \\ a_۰ = ۳, a_۱ = ۲ \end{cases}$$

حل.

الف) تابع مولد a_n به‌صورت $G(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{aligned} a_n = ۶a_{n-۱} - ۹a_{n-۲} &\Rightarrow a_n x^n = ۶x^n a_{n-۱} - ۹x^n a_{n-۲} \\ &\Rightarrow \sum_{n=۲}^{\infty} a_n x^n = ۶x \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۱} x^{n-۱} - ۹x^۲ \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۲} x^{n-۲} \\ &\Rightarrow G(x) - a_۰ - a_۱ x = ۶x(G(x) - a_۰) - ۹x^۲ G(x) \\ &\Rightarrow G(x) = \frac{۱ + ۳x}{(۱ - ۳x)^۲} = \frac{-۱}{۱ - ۳x} + \frac{۲}{(۱ - ۳x)^۲} \\ &\Rightarrow G(x) = -\sum_{n=۰}^{\infty} ۳^n x^n + ۲\sum_{n=۰}^{\infty} (n + ۱)۳^n x^n \\ &\Rightarrow a_n = -۳^n + ۲(n + ۱)۳^n = (۲n + ۱)۳^n \end{aligned}$$

بنابراین ضریب x^n در $G(x)$ برابر است با:

$$a_n = (۲n + ۱)۳^n$$

ب) تابع مولد a_n به‌صورت $G(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-۲} + ۴n &\Rightarrow a_n x^n = a_{n-۲} x^n + ۴n x^n \\ &\Rightarrow \sum_{n=۲}^{\infty} a_n x^n = x^۲ \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۲} x^{n-۲} + ۴ \sum_{n=۲}^{\infty} n x^n \\ &\Rightarrow G(x) - a_۰ - a_۱ x = x^۲ G(x) + ۴\Big(\frac{x}{(۱ - x)^۲} - x\Big) \\ &\Rightarrow G(x)(۱ - x^۲) = \frac{۴x}{(۱ - x)^۲} + ۳ - ۲x \\ &\Rightarrow G(x) = \frac{۴x}{(۱ - x)^۳(۱ + x)} + \frac{۳ - ۲x}{(۱ - x)(۱ + x)} \\ &\Rightarrow G(x) = \frac{۲}{۱ + x} + \frac{-۱}{(۱ - x)^۲} + \frac{۱}{(۱ - x)^۳} \end{aligned}$$

می‌دانیم دومین جمله، تابع مولد برای دنباله‌ی $(n + ۱)-$ است چرا که:

$$\frac{۱}{(۱ - x)^۲} = (\frac{۱}{۱ - x})' = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots$$

و سومین جمله تابع مولد برای دنباله‌ی $(n+1)(n+2)$ است. چرا که:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = (\frac{1}{(1-x)^2})' = 1 \times 2 + 2 \times 3x + 3 \times 4x^2 + \cdots$$

بنابراین ضریب x^n در $G(x)$ برابر است با:

$$a_n = 2(-1)^n - (n+1) + (n+1)(n+2) = 2(-1)^n + (n+1)^2$$

▷

مسئله‌ی ۳*. مردان آهنین

فرامرز می‌خواهد یک مسابقه‌ی سنگین برای مردان آهنین طراحی کند. برای این منظور او می‌خواهد k وزنه را روی هم قرار دهد تا یک وزنه بسیار سنگین ساخته شود. وزنه‌ها به ترتیب ۱ تا k تن هستند. او برای قرار دادن این وزنه‌ها روی یک دیگر از دو قانون زیر تبعیت می‌کند:

الف) هر وزنه می‌تواند پایین‌ترین وزنه باشد.

ب) وزنه‌ای که دقیقاً روی وزنه‌ی دیگری قرار می‌گیرد وزنش حداکثر ۲ تن بیش‌تر از وزنه‌ی زیرین باشد.

اگر a_n تعداد راه‌های مختلف فرامرز برای تهیه‌ی این وزنه باشد، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n یافته و آن را به‌روش دلخواه حل کنید.

حل.
فرض کنید a_n تعداد چینش‌های مطلوب n وزنه باشد. می‌خواهیم a_{n+1} را برحسب a_n بیابیم. فرض کنید یک چینش مطلوب از n وزنه‌ی اول داریم و می‌خواهیم وزنه‌ی $n+1$ ام را به آن بیفزاییم. طبق فرض‌های سوال اگر n بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، وزنه‌ی $n+1$ تنی را دقیقاً در ۳ جا می‌توان قرار داد: پایین‌ترین وزنه، روی وزنه‌ی n تنی و روی وزنه‌ی $n-1$ تنی. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = a_n \times 3 \quad n \geqslant 2$$

از طرفی می دانیم $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ بنابراین با حل رابطه با روش جای‌گذاری و حل به راحتی می‌توان به‌دست آورد:

$$\begin{cases} a_n = 2 \times 3^n - 2 & n \geqslant 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

▷

مسئله‌ی ۴. دفاع اتوبوسی

ژوزه مورینیو برای فینال جام حذفی می‌خواهد ۱۰ بازیکن را به همراه دروازه‌بان درون دروازه قرار دهد. او با خرج‌های زیاد خود در تیمش به تعداد نامحدود بازیکن دارد که تمامی آن‌ها را در پست مدافع به‌کار می‌گیرد که برخی از آن‌ها سرعتی و بقیه قدرتی هستند. مورینیو می‌داند که برای کسب نتیجه‌ی دلخواه یعنی ۰-۰ باید این ۱۰ مدافع را به گونه‌ای بچیند که بلوک‌های مدافعان قدرتی همواره زوج‌تایی و بلوک‌های مدافعان سرعتی همواره فردتایی باشد.

بلوک به مجموعه ماکزیمالی از بازیکنان گفته می‌شود که پشت سرهم قرار گرفته‌اند و از یک نوع هستند. مثلا در (قدرتی، قدرتی، قدرتی، سرعتی، قدرتی، سرعتی، سرعتی، سرعتی، قدرتی) سه بلوک بازیکنان قدرتی و دو بلوک بازیکنان سرعتی داریم. به‌کمک روابط بازگشتی به مورینیو بگویید که به چند طریق می‌تواند این ۱۰ مدافع را از نظر سرعتی و قدرتی بودن انتخاب کند تا به نتیجه‌ی دلخواه ۰-۰ دست یابد.

حل.

p_n را تعداد چینش‌های مطلوبی بگیرید که با یک مدافع قدرتی پایان می‌یابد و s_n را تعداد چینش‌های مطلوبی بگیرید که با یک مدافع سرعتی پایان می‌یابد.

اگر مدافع آخر قدرتی باشد، چون بلوک قدرتی‌ها زوج‌تایی خواهد بود، مدافع یکی‌به‌آخر نیز قطعاً قدرتی بوده و به‌طور یکتا تعیین می‌شود و بقیه $n-۲$ مدافع باقی‌مانده، خود یک آرایش مطلوب را تشکیل خواهند داد که می‌توانند با یک قدرتی یا یک سرعتی پایان یابند. بنابراین خواهیم داشت:

$$p_n = p_{n-۲} + s_{n-۲}$$

همچنین اگر مدافع آخر سرعتی باشد، برای مدافع بعد دو حالت داریم. یا قدرتی است که معادل با حالتی است که $n-۱$ مدافع اول را با یک آرایش مطلوب مختوم به قدرتی بچینیم و یا سرعتی است که مدافع $n-۱$ و $n-۲$ نیز سرعتی خواهند بود و و معادل با حالتی است که $n-۲$ مدافع اول را با یک آرایش مختوم به سرعتی بچینیم. بنابراین داریم:

$$s_n = p_{n-۱} + s_{n-۲}$$

از طرفی به راحتی می توان به دست آورد :

$$p_۱ = ۰, p_۲ = ۱, s_۱ = ۱, s_۲ = ۰$$

حال با چندین مرحله جای‌گذاری در رابطه‌های به‌دست‌آمده می‌توان به‌دست آورد: $p_{۱۰} = ۱۶$ و $s_{۱۰} = ۲۱$ و لذا تعداد کل آرایش‌های مطلوب ۳۷ مورد خواهد بود.

▷

مسئله‌ی ۵. قهرمانی شطرنج جهان

فابیانو می‌خواهد برای آماده‌شدن جهت رویارویی دوجانبه‌ی قهرمانی شطرنج جهان یک برنامه‌ی فشرده‌ی n روزه برای خود ترتیب دهد. وی هرروز خود را به مطالعه‌ی یکی از مباحث شروع بازی، وسط بازی و یا آخر بازی اختصاص می‌دهد و از آن‌جایی که فاصله‌ی مراحل شروع و آخر بازی زیاد است، وی هیچ دو روز متوالی را به مطالعه‌ی شروع بازی و آخر بازی (یا بالعکس) اختصاص نمی‌دهد. اگر a_n تعداد برنامه‌ریزی های مطلوب فابیانو را نشان دهد، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n یافته و به‌کمک آن تعداد برنامه‌های ۹روزه‌ی مطلوبی که فابیانو می‌تواند برای خود ترتیب دهد را محاسبه کنید.

حل.

فرض کنید m_n تعداد برنامه‌ریزی‌های مطلوب n روزه باشد که با وسط بازی شروع شود و e_n و s_n را به ترتیب تعداد برنامه‌های مطلوب شروع‌شونده با آخربازی و شروع بازی در نظر بگیرید. با استفاده از محدودیت‌های سوال می‌توان به سه رابطه‌ی زیر دست پیدا کرد:

$$\begin{cases} s_n = s_{n-۱} + m_{n-۱} \\ e_n = e_{n-۱} + m_{n-۱} \\ m_n = s_{n-۱} + e_{n-۱} + m_{n-۱} \end{cases}$$

از طرفی می دانیم $a_n = m_n + e_n + s_n$. پس خواهیم داشت :

$$a_n = ۲(s_{n-۱} + m_{n-۱} + e_{n-۱}) + m_{n-۱} = ۲a_{n-۱} + m_{n-۱} = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

حال می دانیم $a_۱ = ۲, a_۲ = ۷$ و اگر چند مرحله جلو برویم $a_۹ = ۳۱۹۴$ به‌دست می‌آید. ▷

مسئله‌ی ۶. دوازده صندوق نامه

یک پست‌چی وظیفه‌ی رساندن نامه‌های ۱۲خانه را در یک روستای دورافتاده برعهده دارد. می‌دانیم هیچ دوخانه‌ی مجاوری وجود ندارند که در یک روز هردو نامه دریافت کنند و هیچ سه‌خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که در یک روز هیچ‌یک نامه دریافت نکنند. به کمک روابط بازگشتی تعداد حالات ممکن در یک روز را از نظر نامه داشتن یا نداشتن این ۱۲ خانه پیدا کنید.

حل. تعداد حالات ممکن نامه داشتن یا نداشتن خانه‌ها را به‌راحتی می‌توان با رشته‌های دودویی مدل کرد به گونه‌ای که اگر یک خانه نامه داشت به‌جای آن رقم ۱ و در غیر این صورت رقم صفر قرار می‌دهیم. حال، طبق فرض می‌دانیم که دو ۱ مجاور و سه ۰ مجاور نخواهیم داشت. پس ۲ رقم پایانی این رشته دودویی nبیتی تنها سه حالت زیر را خواهد داشت:

الف) مختوم به ۰۰ که تعداد آن ها را با a_n نشان می‌دهیم.

ب) مختوم به ۰۱ که تعداد آن ها را با b_n نمایش می‌دهیم.

ج) مختوم به ۱۰ که تعداد آن ها را با c_n نمایش می‌دهیم.

اگر رشته n تایی مختوم به ۰۰ باشد طبق فرض رقم بعدی از آخر صفر نخواهد بود. بنابراین اگر $n - ۱$ رقم ابتدایی را درنظر بگیریم، مختوم به ۱۰ خواهد بود و لذا:

$$a_n = c_{n-۱}$$

اگر این رشته مختوم به ۰۱ باشد برای رقم بعدی از آخر هر دو حالت ممکن است. بنابراین اگر $n - ۱$ رقم ابتدایی را درنظر بگیریم، مختوم به ۱۰ یا ۰۰ خواهد بود و لذا:

$$b_n = a_{n-۱} + c_{n-۱}$$

و در نهایت اگر این رشته مختوم به ۱۰ باشد برای رقم بعدی طبق فرض فقط می‌توان رقم ۰ را قرار داد. بنابراین اگر $n - ۱$ رقم ابتدایی را در نظر بگیریم، مختوم به ۰۱ خواهد بود و لذا:

$$c_n = b_{n-۱}$$

و از طرفی می‌دانیم: $a_۱ = b_۱ = c_۱ = ۱$

بنابراین با چند مرحله جلو رفتن می‌توان به‌دست آورد:

$$a_{۱۲} = ۱۲, b_{۱۲} = ۲۱, c_{۱۲} = ۱۶$$

بنابراین تعداد کل حالات ممکن برابر است با ۴۹ حالت.

▷

مسئله‌ی ۷. شمارش

می‌خواهیم با حروف a، b، c و d کلماتی به‌طول بین ۴ تا ۱۲ بسازیم. به‌طوری که کلمات ساخته‌شده، حداقل یکی از هر حرف داشته باشند و جایگاه حروف در کلمات اهمیتی نداشته‌باشد؛ یعنی بین ۴ تا ۱۲ حرف از این حروف

انتخاب می‌کنیم.به‌عنوان مثال کلمات $abcdcb$ و $abbccd$ معادل‌اند و یک‌بار شمرده می‌شوند. همچنین مهم نیست کدام حرف‌ها تکرار شده‌اند و برای هر کلمه تنها تعداد دفعات تکرار مهم است، به‌عنوان مثال کلمات $aabcd$ و $abbcd$ نیز معادل‌اند و یک‌بار شمرده می‌شوند. با استفاده از تابع مولد، تعداد کلمات به‌دست‌آمده طبق این شروط را برای طول‌های بین ۴ تا ۱۲ به‌دست آورید.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید اگر تابع مولد تعداد راه‌های نوشتن یک عدد صحیح به صورت جمع حداکثر k عدد صحیح را با $P^{(\leqslant k)}(z)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P^{(\leqslant k)}(z) = \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{1 - z^m}$$

حل. ابتدا لم ذکر شده در صورت سوال را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم تابع مولد مربوط به تعداد راه‌های نوشتن یک عدد صحیح به صورت جمع دقیقا k عدد صحیح عبارت است از:

$$\frac{1}{1 - z^k}$$

از طرف دیگر تعداد راه‌های نوشتن یک عدد صحیح به صورت جمع حداکثر k عدد صحیح برابر جمع تعداد راه‌های نوشتن به صورت اعداد ۱ تا k است؛ بنابراین تابع مولد آن عبارت خواهد بود از:

$$\prod_{m=1}^{k} \frac{1}{1 - z^m}$$

اکنون از این لم در حل سوال بهره می‌بریم؛ خواهیم داشت:

$$P^{(=4)}(z) = P^{(\leqslant 4)}(z) - P^{(\leqslant 3)}(z) = \prod_{m=1}^{4} \frac{1}{1 - z^m} - \prod_{m=1}^{3} \frac{1}{1 - z^m} = z^4 \prod_{m=1}^{4} \frac{1}{1 - z^m}$$

با باز کردن این عبارت داریم:

$$P^{(=4)}(z) = z^4 + z^5 + 2z^6 + 3z^7 + 5z^8 + 6z^9 + 9z^{10} + 11z^{11} + 15z^{12} + \cdots$$

بنابراین جواب نهایی برابر با ضریب z^{12} یا ۱۵ خواهد بود. ▷