ریاضیات مهندسی جلسه ۴

مثال: تابع متناوب f با دوره‌ی تناوب ۲π در بازه‌ی [π ، π-] با ضابطه‌ی $f(x) = \cosh x$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ مفروض است. می‌خواهیم نمایش مختلط سری فوریه‌ی f را بدست آوریم.

$$T = 2L$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad L = \pi$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x \, e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \right) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-1}{1+in} e^{-(1+in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi) = (-1)^n$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)(-1)^n + \frac{1}{1+in}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n \sinh\pi}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n \sinh x}{\pi(1+n^2)}$$

$$\cosh x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{inx}$$

قضیه: فرض کنیم تابع پیوسته و متناوب f با دوره‌ی تناوب $2L$ در فاصله‌ی $[-L, L]$ به قسمی باشد که $f(-L) = f(L)$ و f' و f'' در $(-L, L)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد. در این صورت سری فوریه‌ی f' از سری فوریه‌ی f با مشتق‌گیری جمله به جمله بدست می‌آید.

اگر f' در $x \in (-L, L)$ پیوسته باشد، سری فوریه‌ی f' به $f'(x)$ همگرا است و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ همگرا است.

مثال: سری فوریه‌ی $f(x)=x^2$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ در $(-\pi,\pi)$ عبارت است از

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

$f(x)=x^2$ تمام ویژگی‌های لازم قضیه را دارد.

$$2x=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

قضیه: فرض کنیم f تابع حقیقی متناوب $2l$ و در $(-l,l)$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد و

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\cos n\pi t}{l}+b_n\frac{\sin n\pi t}{l}\right)$$

در این صورت برای هر a و $x\in(-l,l)$ داریم:

$$\int_a^x f(t)\,dt\sim\int_a^t\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$

مثال:

$$\cosh t=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{int}$$

$$\sinh x=\int_0^x\cosh t\,dt=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\int_0^x e^{int}dt$$

$$\int_0^x e^{int}dt=\frac{1}{in}e^{int}\Big|_0^x=\frac{1}{in}\left(e^{inx}-1\right)=$$

$$=-\frac{i}{n}e^{inx}+\frac{i}{n}$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \left(\frac{-i e^{inx}}{n} - \frac{i}{n} \right) =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{n^2+1} e^{inx} + \cancel{c}^{\,0}$$

چون تابع فرد است

تمرین: برای $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ و $f(x+2\pi) = 2\pi$

قضیه را به کار برید و سری فوریه‌ی $|x|$ را محاسبه کنید.

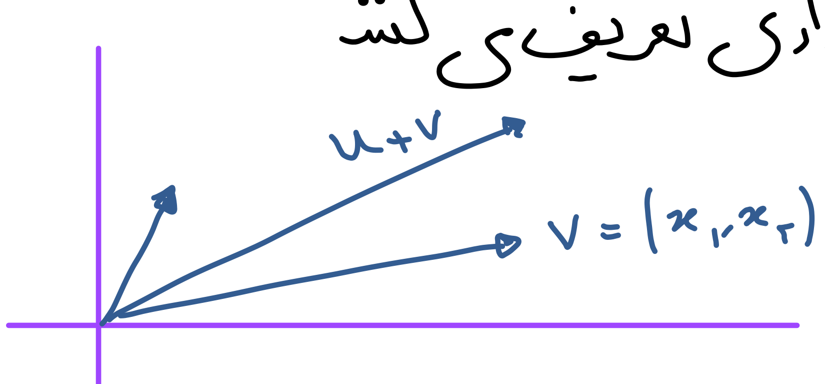
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} t$$

$$\begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 < x \leq 0 \end{cases} = \int_0^x f(t)\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum \int_0^x \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} dt$$

تعمیم سری فوریه به توابع متعامد یکه

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ توسط جمع برداری و ضرب اسکالری یک ساختار بسیار مهم ریاضی موسوم به فضای برداری تعریف می‌کنند



برای

$$u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$$

$$v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$v+u=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad \lambda u=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$$

مشاهده می‌شود که:

$$\forall u,v\in\mathbb{R}\qquad u+v=v+u$$

$$\forall u,v,w\in\mathbb{R}^2\qquad u+(v+w)=(u+v)+w$$

$$\exists\, 0\in\mathbb{R}^2\quad \forall u\in\mathbb{R}^2\qquad 0+u=u+0=u$$

$$\forall u\in\mathbb{R}^2\quad \exists(-u)\in\mathbb{R}^2\qquad u+(-u)=(-u)+u=0$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^2\qquad \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$$

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \forall u\in\mathbb{R}^2\qquad (\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$$

$$\forall u\in\mathbb{R}^2\qquad 1u=u$$

مثال: توابع قطعه به قطعه پیوسته روی $[a,b]$ که با نماد $PC([a,b],\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شوند با جمع برداری و ضرب اسکالری زیر ویژگی‌های

هفت گانه‌ی فوق را دارد.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

به طور کلی مجموعه‌ی V که روی آن یک جمع برداری و ضرب اسکالری تعریف شده باشد و ویژگی‌های ۱ تا ۷ را داشته باشد، فضای برداری (حقیقی) نامیده می‌شود.

در یک فضای برداری V برای بردارهای $v_1, \dots, v_n$ بردار

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

را یک ترکیب خطی $v_1, \dots, v_n$ می‌نامیم.

مثال: در $\mathbb{R}^2$: $v = 2(1,3) + 4(1,-1) + 5(3,-1) = (21,7)$

بردارهای v_1 و ... , v_n را مستقل خطی گوییم هرگاه تنها ترکیب خطی از آن‌ها که صفر می‌شود، ترکیب خطی بدیهی باشد:

اگر $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$، آنگاه $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

مثال: $i = (1,0)$ و $j = (0,1)$ در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی هستند.