ریاضیات مهندسی — جلسه ۳

اگر f یک تابع حقیقی متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 2L$ باشد، بسط فوریه‌ی f عبارت است از :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

این سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد .

درحالت کلی نیز می‌نویسیم :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

چند نکته درمورد سری فوریه :

اتحاد پارسوال :

اگر f یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 2l$ در بازه‌ی $(-l, l)$ قطعه‌قطعه پیوسته باشد، آنگاه ضرایب فوریه‌ی f، a_n, b_n در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx$$

مثال: فرض کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & 0<x<2\pi\\ 1 & x=2\pi\end{cases}\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

در این صورت ضرایب بسط فوریه را بدست آورید.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)=0$$

$$\forall n\geq 1:\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}$$

استفاده از اتحاد پارسوال:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n\geq1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}(\pi-x)\right)^2dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

تمرین: نشان دهید بسط فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=x^4$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$

$-\pi \leq x \leq \pi$ عبارت است از:

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos n\pi x$$

و به کمک آن ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

راهنمایی: مقدار سری فوریه را در $x=\pi$ محاسبه کنید.

بسط فوریه‌ی توابع فرد و زوج:

یادآوری:

f فرد است $\Leftarrow$ $\forall x: f(-x) = -f(x)$

f زوج است $\Leftarrow$ $\forall x: f(-x) = f(x)$

حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

حاصل ضرب تابع زوج و فرد، تابعی فرد است.

حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

برای تابع فرد: $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$

برای تابع زوج: $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$

درنتیجه برای توابع زوج و فرد، بسط فوریه شکل ساده‌تری پیدا می‌کند.

اگر f تابع متناوب زوجی با دوره‌ی تناوب $T = 2L$ باشد، آنگاه:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

و درنتیجه سری فوریه‌ی f به شکل زیر است:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

با بحث مشابه برای تابع فرد f و مشخصات مشابه داریم:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

مثال: برای $f(x) = x$ ، $-\pi < x < \pi$ ، $f(x+2\pi) = f(x)$

$$T = 2\pi \longrightarrow L = \pi$$

داریم:

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

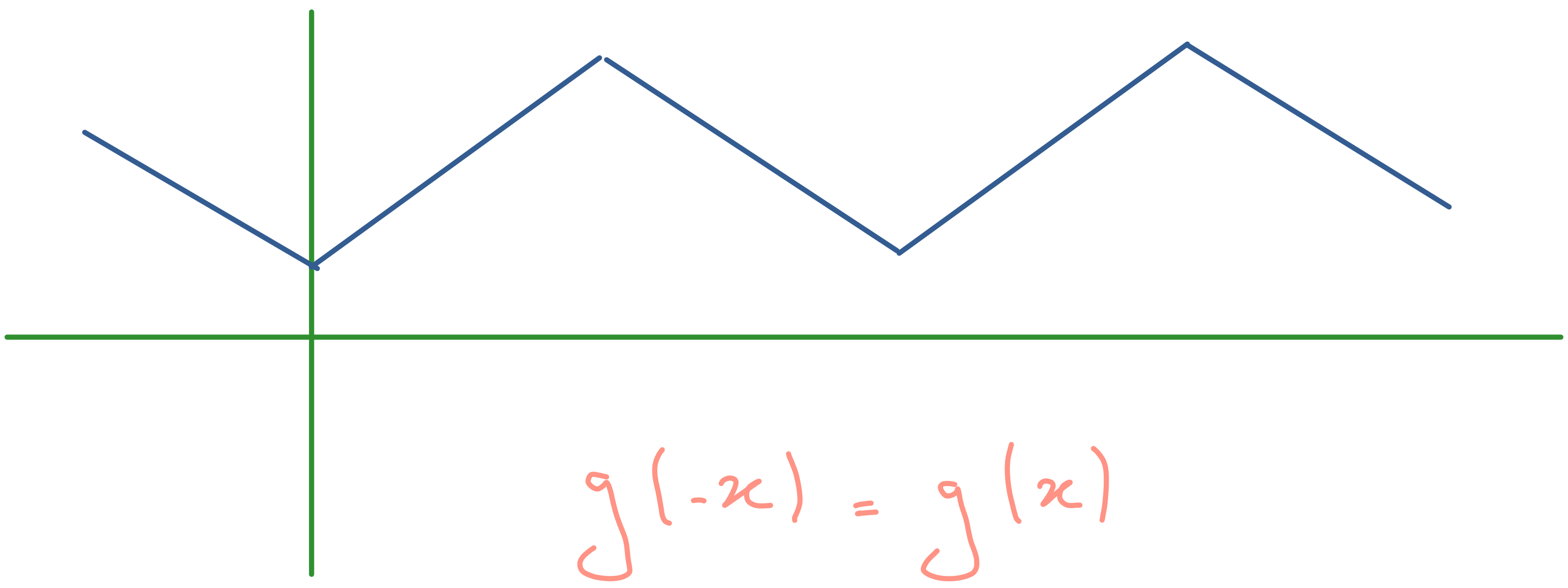
$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

بسط تناوبی زوج و فرد :

فرض کنیم f تابعی باشد که لزوماً متناوب نیست. از روی ضابطه‌ی f در $(0, l)$ می‌توانیم یک تابع متناوب زوج یا فرد روی $(-l, l)$ به شکل زیر داشته باشیم :

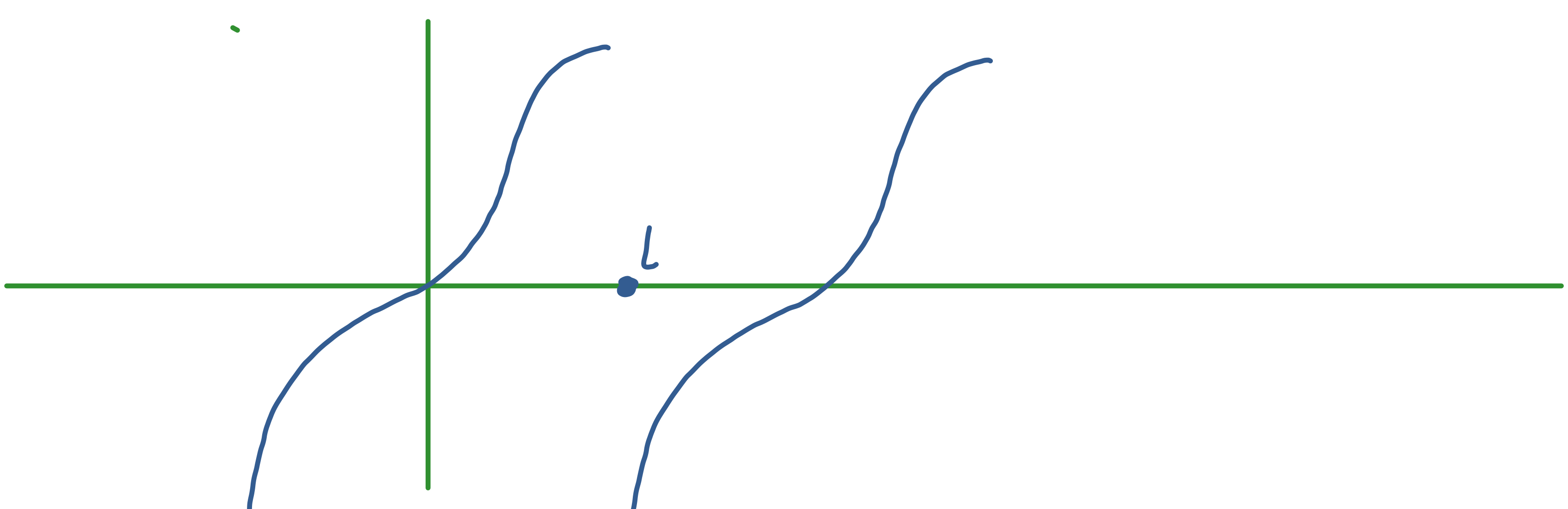
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < l \\ f(-x) & -l < x < 0 \end{cases} \qquad g_1(x+2l) = g(x)$$



$$g(-x) = g(x)$$

به شکل مشابه :

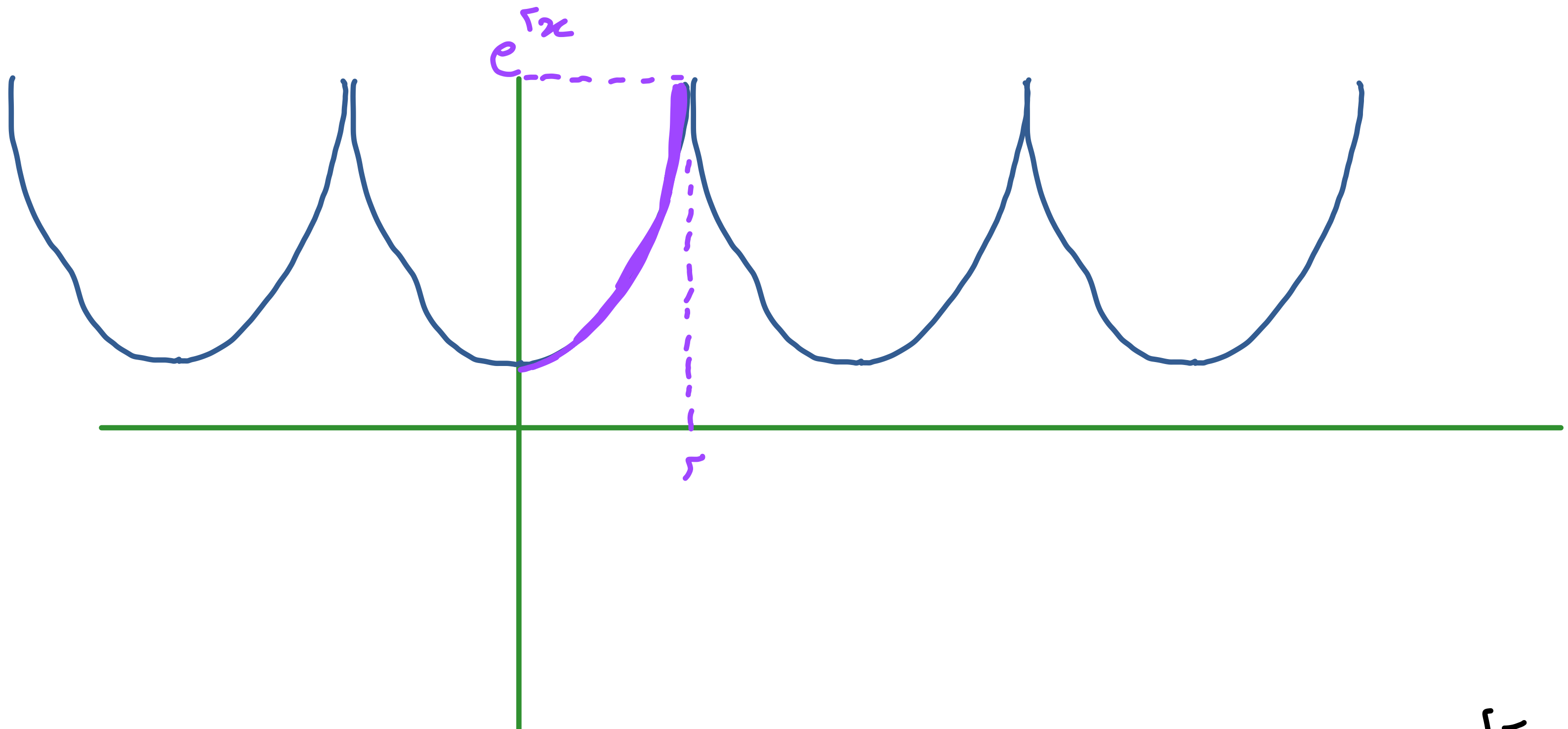
$$\text{فرد}\ g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < l \\ -f(-x) & -l < x < 0 \end{cases} \qquad g_2(x+2l) = g(x)$$



g_1 را گسترش متناوب زوج و g_2 را گسترش متناوب زوج گوییم.

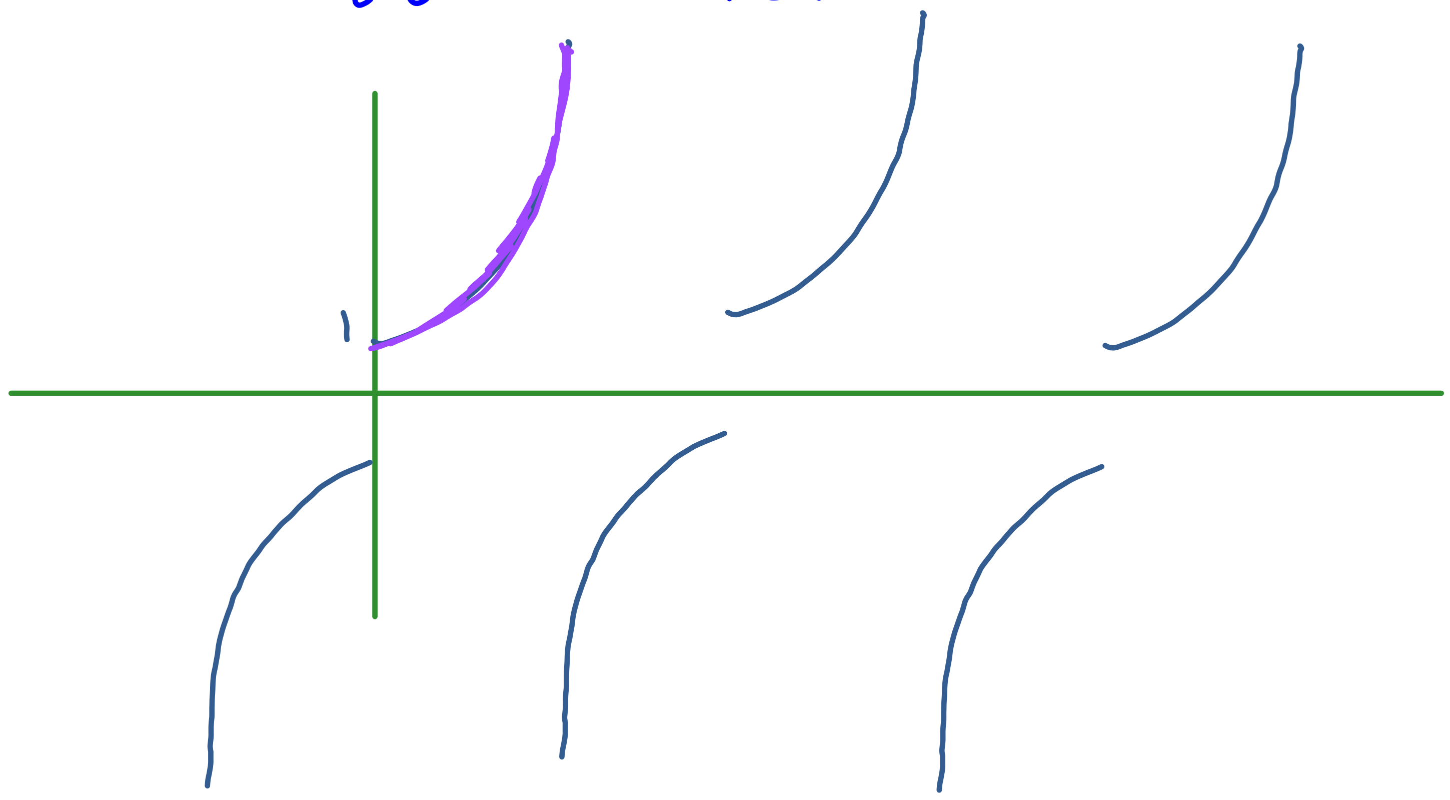
مثال: $f(x)=e^x$ ، $0<x<2$ ، گسترش f به تابع زوج عبارت است از:

$$g_1(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<2 \\ e^{-x} & -2<x<2 \end{cases} \qquad g_1(x+4)=g_1(x)$$



گسترش f به تابع فرد:

$$g_2(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<2 \\ -e^{-x} & -2<x<0 \end{cases}$$



تمرین: سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=e^x$ ، $0<x<2$ را بدست آورید

نمایش مختلط بسط فوریه:

یادآوری:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (*) \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

بدین ترتیب اگر داشته باشیم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

با کمک فرمول (*) داریم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + \beta_n e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \qquad \beta_n = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

با یک قرارداد ساده به فرمول ساده‌تر زیر می‌رسیم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx$$

تمرین: فرض کنیم $f(x)=\cosh x$ ، $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$ ضرایب مختلط بسط فوریه‌ی f را محاسبه کنید.