مسئله‌ی ۱*. سه‌تایی سراسر بخش‌پذیر

تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۵۰ را بیابید طوری که $a + b + c$ هم بر a، هم بر b و هم بر c بخش‌پذیر باشد.

مسئله‌ی ۲*. فرمای کوچک و بزرگ

الف) تمام اعداد اول p را بیابید طوری که $p \mid 13^{p-1} + 5$.

ب) اگر p عددی اول و a یک عدد صحیح دل‌خواه باشد، عدد $a^p + a(p-1)!$ در تقسیم بر p چند باقی‌مانده‌ی مختلف می‌تواند داشته باشد؟

مسئله‌ی ۳*. شمارا تا شمارا

الف) نشان دهید اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ب) عدد طبیعی n مفروض است. نشان دهید مجموعه‌ی تمام ریشه‌های تمام چندجمله‌ای‌های درجه n با ضرایب گویا، یک مجموعه‌ی شمارا است.

ج) به اعدادی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای دل‌خواه با ضرایب گویا باشند، «اعداد جبری» می‌گویند. با استفاده از نتیجه‌های قسمت (الف) و (ب) نشان دهید مجموعه‌ی اعداد جبری شمارا هستند.

مسئله‌ی ۴. فاکتوریل تعمیم یافته

اگر N عددی فرد باشد $N!!$ را برابر با:

$$N(N-2)(N-4)... \times 5 \times 3 \times 1$$

و اگر N عددی زوج باشد، $N!!$ را برابر با :

$$N(N-2)(N-4)... \times 6 \times 4 \times 2$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید:

$$1987 \mid 1986!! + 1985!!$$

مسئله‌ی ۵. جمع مربعات

فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد طوری که $np + ۱$ یک مربع کامل است. ثابت کنید $n + ۱$ را می‌توان به صورت مجموع p عدد مربع کامل نوشت.

مسئله‌ی ۶. دبیر نامرد

مدارس آناکوندا و بابامایا با یک‌دیگر رقابت شدیدی دارند و به این منظور قرار است یک مسابقه‌ی نظریه‌ی اعداد بین خود ترتیب دهند. مدرسه آناکوندا بهترین و مشهورترین دبیر نظریه‌ی اعداد کشور، آقای تمساحوفسکی را در نظر گرفته است تا دانش‌آموزان خود را برای این رقابت آماده کند. غافل از این که این دبیر، خود در دوران کودکی در مدرسه بابامایا درس خوانده است و روی این مدرسه تعصب بسیاری دارد. به همین دلیل تمساحوفسکی می‌خواهد مطالب درسی را به طور اشتباه به دانش‌آموزان یاد دهد. در مبحث قضیه‌ی کوچک فرما وی تصمیم گرفته است که به دانش‌آموزان بگوید هم‌نهشتی $a^{n+۱} \overset{n}{\equiv} a$ در صورتی که n عددی اول باشد، همواره و به‌ازای هر a برقرار خواهد بود. وی برای متقاعد کردن دانش‌آموزان، می‌خواهد یک n مناسب مثال بزند که این گزاره برای آن در واقعیت نیز درست باشد. تمامی nهایی را بیابید که رابطه فوق به‌ازای هر a برای آن‌ها برقرار باشد.

مسئله‌ی ۷. صحیح و غلط

درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض و برای گزاره‌های درست، اثبات ارائه کنید.

الف) اگر A و B دو مجموعه‌ی ناشمارا باشند، آنگاه $A - B$ یا ناشمارا است و یا متناهی.

ب) فرض کنید C مجموعه‌ای ناتهی باشد. اگر $A \times C = B \times C$، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت: $A = B$.

ج) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$.