

**مسئله‌ی ۱. سؤالات کوتاه [۲۴ نمره]**

درستی یا نادرستی عبارات زیر را در برگه‌ی پاسخ‌نامه مشخص کنید.

۱. تعداد گراف‌های همبند n رأسی بیش‌تر از تعداد گراف‌های ناهمبند n رأسی است.
۲. در درخت T دورترین رأس از یک رأس دل‌خواه r حتماً دو سر یک مسیر ماکزیمم در T است.
۳. درختی که درجه‌ی تمام رئوس آن فرد است، دارای یالی است که حذف آن یک مولفه‌ی همبند زوج‌رأسی ایجاد می‌کند.
۴. مجموعه‌ی تمام رشته‌های دودویی متقارن، یک زبان منظم را تشکیل می‌دهد.
۵. اگر زبان A نامنظم باشد، آنگاه زبان A^* نیز نامنظم است.
۶. اشتراک هر دو زبان تشخیص‌پذیر (با ماشین تورینگ)، لزوماً تشخیص‌پذیر است.
۷. یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر مکمل آن متقارن باشد.
۸. می‌گوییم دو عدد طبیعی n و m رابطه‌ی R دارند، اگر $m + n$ زوج باشد. (\mathbb{N}, R) یک مجموعه با ترتیب جزئی است.

مسئله‌ی ۲. گراف کامل [۲۰ نمره]

یک «زیرگراف القایی» از G گرافی است که با حذف تعدادی از رأس‌ها و تمام یال‌های واقع بر آن‌ها از G به دست می‌آید. ثابت کنید گرافی که رأس با درجه‌ی صفر ندارد و هیچ زیرگراف القایی آن شامل دقیقاً دو یال نیست، کامل است.

مسئله‌ی ۳. درخت پوشا [۲۰ نمره]

وزن سنگین‌ترین یال در یک درخت وزن‌دار را استحکام آن درخت می‌نامیم. فرض کنید G یک گراف بی‌جهت وزن‌دار و T یک درخت پوشای کمینه از G باشد. ثابت کنید در بین تمام درخت‌های پوشای G ، درخت T کم‌ترین استحکام را دارد.

مسئله‌ی ۴. شبکه [۲۰ نمره]

مجموعه‌ی n عضوی A را در نظر بگیرید. به ازای دو افراز X و Y از A ، می‌گوییم رابطه‌ی $X \leq Y$ برقرار است، اگر هر مجموعه‌ی درون X زیرمجموعه‌ی یکی از مجموعه‌های درون Y باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی تمام افرازهای A به همراه رابطه‌ی فوق تشکیل یک شبکه می‌دهد.

مسئله‌ی ۵. مدل‌سازی [۲۰ نمره]

فرض کنید زبان L شامل تمام رشته‌های دودویی ناتهی است که زیررشته‌ی ۱۰ حداکثر یک‌بار در آن‌ها ظاهر شده است. یک ماشین حالت‌متناهی قطعی برای تشخیص L طراحی کنید.