بسم الله الرحمن الرحیم

سری تیلور، سری لوران و مانده ها

اسلاید ۱۲

سید روح الله کاظمی

ریاضی پیشرفته (تبدیل انرژی)

سری تیلور

قضیه ۱-۱۲(قضیه تیلور):

فرض کنید $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی و همچنین $z=z_0$ نقطه دلخواهی واقع در D باشد. آنگاه تنها یک سری توانی به مرکز z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نمایش میدهد. این سری به صورت (۱-۱۲) میباشد.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad (۱۲-۱)$$

این نمایش در بزرگترین قرص بازی که مرکز آن z_0 است و در D واقع میباشد معتبر است. $R_0(z)$ باقیمانده (۱-۱۲)، را میتوان به صورت (۲-۱۲) نشان داد.

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} dz^* \qquad (۱۲-۲)$$

ضرایب (۱-۱۲) در نامساوی (۳-۱۲) صدق میکند که در آن M ماکزیمم $|f(z)|$ روی دایره $|z-z_0|=r$ است.

$$|a_n| \leqq \frac{M}{r^n} \qquad (۱۲-۳)$$

سری تیلور برخی توابع مهم

سری (۱-۱۲) را **سری تیلور** $f(z)$ با مرکز z_0 مینامند. حالت خاصی از (۱-۱۲) با مرکز $z_0=0$ به **سری مکلورن** مشهور است.

سری هندسی: با در نظر گرفتن تابع مقابل ($f(z)$)، خواهیم داشت:

$$f(z) = 1/(1-z).$$

$$f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1} \quad \rightarrow \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

و در نتیجه بسط مکلورن تابع بالا، یک سری هندسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1). \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

$z=1$ یک نقطه تکین برای تابع مد نظر است و این نقطه روی دایره ای به شعاع واحد قرار دارد.

تابع نمایی: با استفاده از سری مکلورن تابع نمایی عبارت است از (محدوده D؟):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

(رابطه اویلر را با استفاده از ۵-۱۲به دست آورید)

سری تیلور برخی توابع مهم

توابع مثلثاتی و هذلولوی

با استفاده از بسط تابع نمایی (۵-۱۲) داریم:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots \qquad (۱۲\text{-}۶)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad (۱۲\text{-}۸)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots \qquad (۱۲\text{-}۹)$$

سری تیلور برخی توابع مهم

توابع لگاریتمی

از (۱-۱۲) نتیجه میشود:

$$\mathrm{Ln}\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1) \qquad (۱۲\text{-}۱۰)$$

با قرار دادن به جای و ضرب کردن نتیجه در ۱- داریم:

$$-\mathrm{Ln}\,(1-z) = \mathrm{Ln}\,\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1). \qquad (۱۲\text{-}۱۱)$$

با جمع کردن دو سری داریم:

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1). \qquad (۱۲\text{-}۱۲)$$

در بیشتر موارد، محاسبه ضرایب بسط تیلور به کمک فرمول قضیه تیلور، پیچیده و وقت گیر است. روشهای بهتری برای این کار در مثالهای بعد مطرح شده است.

سری تیلور برخی توابع مهم

مثال: بسط مکلورن تابع مقابل را تعیین کنید. $f(z) = 1/(1+z^2).$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \quad (|z| < 1).$$

مثال: بسط مکلورن تابع مقابل را تعیین کنید. $f(z) = \arctan z.$

داریم: $f'(z) = 1/(1+z^2).$

حال با انتگرالگیری از بسط مثال قبل و با توجه به اینکه $f(0)=0$ خواهیم داشت:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \qquad (|z| < 1);$$

سری لوران

قضیه ۲-۱۲(قضیه لوران): اگر $f(z)$ روی دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را میتوان با سری لوران

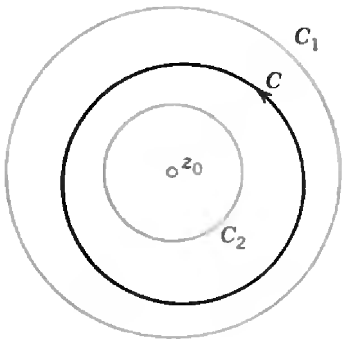
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

(۱۲-۱۳)

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

نمایش داد. ضریب سری لوران فوق به صورت زیر است و هریک از این انتگرالها روی مسیر بسته ساده دلخواهی مانند C، که در طوق قرار دارد و دایره داخلی را در میان میگیرد، در جهت عکس عقربه های ساعت گرفته میشود.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\,dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^*-z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*; \qquad (۱۲-۱۴)$$



سری لوران

واضح است که سری لوران را به شکل زیر نیز میتوان نشان داد:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (۱۲\text{-}۱۵)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\, dz^* \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (۱۲\text{-}۱۶)$$

- سری لوران تابع تحلیلی داده شده $f(z)$، در طوق همگرایی خود منحصر به فرد است.

- $f(z)$ ممکن است در دو طوق متحدالمرکز متمایز، سریهای لوران متمایز داشته باشد.

مثال: بسط لوران تابع $z^{-5} \sin z$ به مرکز صفر را تعیین کنید.

حل: در اینجا طوق همگرایی سراسر صفحه مختلط بدون مبدا است. با توجه به ۷-۱۲ داریم:

$$z^{-5} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} z^2 + - \cdots \qquad (|z| > 0).$$

سری لوران

مثال: بسط لوران تابع $z^2 e^{1/z}$ به مرکز صفر را تعیین کنید.

حل: باز هم طوق همگرایی سراسر صفحه مختلط بدون مبدا است. با توجه به ۵-۱۲، با قرار دادن $1/z$به جای z داریم:

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$

مثال:

الف) عبارت $1/(1-z)$را برحسب توانهای نامنفی z بسط دهید. ب) همین تابع را برحسب توانهای منفی z بسط دهید.

الف)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{(valid if } |z| < 1\text{)}.$$

ب)

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \quad \text{(valid if } |z| > 1\text{)}$$

سری لوران

مثال: سریهای تیلور و لوران تابع مقابل، به مرکز صفر را تعیین کنید.

$$f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$$

حل: ابتدا عبارت تابع را تفکیک میکنیم:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

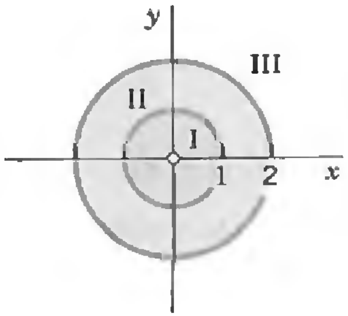
برای کسر اول از نتایج مثال قبل استفاده میشود، برای کسر دوم داریم:

حالت ج:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}z\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \qquad (|z| < 2).$$

حالت د:

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z| > 2).$$



سری لوران

از حالت الف (مثال قبل) و حالت ج، برای محدوده $|z|<1$ داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}z+\frac{9}{8}z^2+\cdots$$

از حالت ب (مثال قبل) و حالت ج، برای محدوده $1<|z|<2$ داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

از حالت ب (مثال قبل) و حالت د، برای محدوده $|z|>2$ داریم:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\frac{1}{z^{n+1}}=-\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}-\cdots$$

ملاحظه میشود که اگر $f(z)$ در قضیه لوران، در داخل C_2 تحلیلی باشد، سری لوران به سری تیلور تبدیل میشود (چرا؟).

نقاط تکین

نقطه تکین تابعی چون $f(z)$ نقطه ای است که $f(z)$ در آنجا تحلیلی نیست ولی در هر همسایگی آن، نقاطی وجود دارند که $f(z)$ در آنها تحلیلی است.

اگر $z=z_0$ یک نقطه تکین تابع $f(z)$ باشد و همچنین همسایگیی از z_0 وجود داشته باشد که در آن، $f(z)$ نقطه تکین دیگری نداشته باشد، آنگاه $z=z_0$ را **نقطه تکین منفرد** (**تنها**) مینامند.

اگر $z=z_0$ یک نقطه تکین منفرد $f(z)$ باشد، آنگاه $f(z)$ بسط لورانی حول $z=z_0$ دارد که معرف $f(z)$ در داخل یک طوق است.

شعاع خارجی این طوق برابر فاصله بین z_0 و نزدیکترین نقطه تکین دیگر $f(z)$ است و شعاع داخلی طوق را میتوان به اندازه دلخواه کوچک گرفت.

اگر بسط لوران $f(z)$ در همسایگی نقطه تکین منفردی چون $z=z_0$ فقط شامل تعدادی متناهی از توانهای منفی $z-z_0$ باشد، $z=z_0$ را **قطب** $f(z)$ مینامند.

قطبها و صفرها

اگر $(z-z_0)^{-m}$ بزرگترین توان منفی در این بسط باشد، میگویند **قطب از مرتبه m** است. به قطبهای مرتبه اول **قطب ساده** نیز گفته میشود. مجموع همه جملات شامل توان منفی (عبارت مقابل) را **قسمت اصلی** $f(z)$ در $z=z_0$ میگویند.

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

اگر بسط لوران $f(z)$ در همسایگی یک نقطه تکین منفرد $z=z_0$ شامل بینهایت توان منفی $z-z_0$ باشد، آنگاه $z=z_0$ را یک **نقطه تکین اساسی تنهای** $f(z)$ مینامند.

مثال: تابع مقابل دارای قطب ساده در $z=0$ و قطب مرتبه پنجم در $z=2$ است.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^5}+\frac{3}{(z-2)^2}$$

تابع زیر نیز دارای تکینی اساسی تنها در $z=0$ است.

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$$

قطبها و صفرها

گویند تابع $f(z)$، که در دامنه D تحلیلی است، یک صفر در نقطه $z=z_0$ واقع در D دارد، اگر $f(z_0)=0$ و نیز گوییم که $f(z)$ صفری از مرتبه n در نقطه $z=z_0$ دارد اگر $z=z_0$ نه فقط صفر f بلکه صفر f'، f''، . . . ، $f^{(n)}$ نیز باشد و $f^{(n)}(z_0)\neq 0$.
صفر مرتبه اول را صفر ساده نیز مینامند.

تحلیلی بودن یا تکینی در بینهایت:

هرگاه بخواهیم تابع f را به ازای $|z|$ های بزرگ بررسی کنیم، میتوانیم قرار دهیم $z=1/w$ و $f(z)=f(1/w)=g(w)$ را در یک همسایگی $w=0$ مطالعه کنیم. گفته میشود $f(z)$ تحلیلی یا تکین در بینهایت است اگر $g(w)$ در $w=0$ به ترتیب تحلیلی یا تکین باشد. همچنین تعریف میشود که

$$g(0)=\lim_{w\to 0} g(w)$$

در صورتی که این حد موجود باشد. به علاوه، گفته میشود که $f(z)$ دارای صفر مرتبه n در بینهایت است اگر $f(1/w)$ چنین صفری در $w=0$ داشته باشد. وضعیت مشابهی برای قطبها و نقاط تکین اساسی نیز وجود دارد.

انتگرالگیری به روش مانده ها

انتگرال مقابل را در نظر بگیرید. اگر $f(z)$ همه جا بر C و درون C تحلیلی باشد،
آنگاه چنین انتگرالی با توجه به قضیه کوشی برایر صفر است.

$$\oint_C f(z)\, dz$$

اگر $f(z)$ دارای یک نقطه تکین در $z=z_0$ باشد و در سایر نقاط واقع بر C و داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ دارای سری لورانی به صورت مقابل است

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

که به ازای تمام نقاط نزدیک به $z=z_0$ (به جز خود $z=z_0$)، در دامنه ای به صورت $0<|z-z_0|<R$ همگراست. ضریب b_1 طبق فرمول ارایه شده در قضیه لوران (برای $n=1$) برابر است با:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

حال با تعیین سری لوران با روشهایی دیگر غیر از استفاده از فرمول انتگرالی، میتوان به شکل زیر انتگرال مورد نظر را محاسبه نمود:

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1 \qquad (۱۲-۱۷)$$

محاسبه مانده ها

انتگرالگیری در آن در جهت CCW روی مسیر بسته ساده C که نقطه $z=z_0$ یک نقطه داخلی آن است صورت میگیرد.

ضریب b_1 به **مانده** $f(z)$ در $z=z_0$ موسوم است و آن را با نماد مقابل نشان میدهند:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \qquad (۱۲-۱۸)$$

محاسبه مانده در قطبهای ساده:

همانگونه که ملاحظه شد، برای محاسبه انتگرال، به دست آوردن مقدار مانده لازم است. ولی همیشه لازم نیست برای تعیین مقدار مانده، کل سری را به دست آورد. در حالتی که با قطب مواجه باشیم، راههای مناسب تری وجود دارد.

فرض کنید $f(z)$ دارای یک قطب ساده در $z=z_0$ باشد. در نتیجه سری لوران عبارت است از:

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (0 < |z - z_0| < R).$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $z-z_0$، داریم:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = b_1 + \lim_{z \to z_0} (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots] = b_1$$

محاسبه مانده ها

و در نتیجه مقدار مانده به شکل زیر به دست می آید: (۱۹-۱۲)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z)$$

مثال: تابع مقابل یک قطب ساده در $z=i$ دارد و مانده تابع در این نقطه به صورت زیر به دست می آید:

$$f(z) = (9z + i)/(z^3 + z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)} = \left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

حال فرمول دیگری برای محاسبه مانده در قطبهای ساده که در بسیاری اوقات مناسبتر است معرفی میشود.

اگر تابعی به شکل مقابل داشته باشیم که در آن صورت مخالف $f(z) = p(z)/q(z),$

صفر بوده و مخرج دارای یک صفر ساده در $z=z_0$ باشد، آنگاه

مقدار مانده تابع در این نقطه عبارت است از: (۲۰-۱۲)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال: به عنوان مثال داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i$$

محاسبه مانده ها

محاسبه مانده در قطبهای مرتبه بالا:

برای محاسبه مانده در قطبهای مرتبه بالاتر از رابطه ۲۱-۱۲ استفاده میشود:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right\} \qquad (۱۲\text{-}۲۱)$$

<u>**مثال:**</u> مقدار مانده تابع مقابل را در $z=1$ تعیین کنید.

$$f(z) = 50z/(z^3 + 2z^2 - 7z + 4)$$

حل: مخرج تابع مذکور برابر است با:

$$(z+4)(z-1)^2$$

بنابراینتابع دارای یک قطب مرتبه دوم در $z=1$ است. در نتیجه:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{50z}{z+4}\right) = \frac{200}{5^2} = 8.$$