به نام خدا

ریاضی مهندسی

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

۱. بسط لوران توابع زیر را حول مبدأ مختصات روی حلقه باز $\rho_1 < |z| < \rho_2$ به ازای ρ_1 و ρ_2 مناسب به دست آورید.

الف:

$$f(z) = z^4 \sin^2 \frac{1}{z^2}$$

ب:

$$f(z) = \frac{4z - 1}{z^2 - z}$$

ج:

$$f(z) = \frac{e^z}{z - 1}$$

۲. نوع هر یک از نقاط تکین منفرد هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف:

$$f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$$

ب:

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z - 2}$$

ج:

$$f(z) = \frac{\sin z^4}{z^5}$$

۳. مانده های هر یک از توابع زیر را در هر یک از نقاط تکین منفرد آن به دست آورید.

الف:

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z - i)(z + 2)^2}$$

ب:

$$f(z) = \frac{(1 - z^4)e^{2z}}{z^3}$$

ج:

$$f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$$

۴. با استفاده از

$$\int_{|z|=1} z^{-1} e^{az} dz = 2\pi i$$

به طوریکه a عددی حقیقی است، ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos t} \cos(a \sin t) dt = \pi.$$

۵. مقدار انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف:

$$\int_{|z-1|=1} (z + 1)^{20} dz$$

ب:

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+1)^{20}}{z^2} dz$$

۶. اگر $\frac{\pi Lna}{2a} = \int_0^\infty \frac{Lnx}{x^2+a^2}dx$، آنگاه مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{x^2+a^2}dx$ را حساب کنید.

۷. حاصل $P.V. \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$ را حساب کنید.

۸. حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx$ را حساب کنید.

۹. حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2(1+x^2)}dx$ را حساب کنید.

۱۰. حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ را حساب کنید.