



مسئله‌ی ۱*. آشنای کل!

جمعی شامل $2n + 1$ نفر در یک اتاق حضور دارند. برای هر مجموعه‌ی S از این افراد که حداکثر n عضو دارد، یک نفر خارج از این مجموعه وجود دارد که با همه‌ی آن‌ها دوست است. می‌دانیم دوستی یک رابطه‌ی دوطرفه است. ثابت کنید حداقل یک نفر وجود دارد که با همه‌ی افراد دوست است.

مسئله‌ی ۲*. مسیر تک‌رنگ

یال‌های یک تورنمنت با دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده‌اند. ثابت کنید رأسی مانند v در این گراف وجود دارد که از آن به هر رأس دیگر در این تورنمنت مسیر جهت‌داری متشکل از یال‌های تک‌رنگ وجود دارد.

مسئله‌ی ۳*. برخورد گرافی

ثابت کنید اگر گرافی با n رأس و m یال را روی صفحه رسم کنیم، حداقل $6 - 3n + m$ برخورد بین یال‌ها به وجود می‌آید.

مسئله‌ی ۴. گراف مکمل

فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید می‌توان روی هر رأس G یک عدد طبیعی نوشت، طوری که دو رأس u و v مجاور باشند اگر و فقط اگر اعداد طبیعی نوشته‌شده روی u و v نسبت به هم اول باشند.

مسئله‌ی ۵. شمارش گراف

تعداد گراف‌های ساده‌ی n رأسی که درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج است را به دست آورید.

مسئله‌ی ۶. زیرگراف زوج

فرض کنید G یک گراف ساده‌ی همبند با تعداد زوجی رأس باشد. ثابت کنید می‌توان زیرگرافی از G را انتخاب کرد که درجه‌ی همه‌ی رأس‌ها در آن زیرگراف فرد باشد.

مسئله‌ی ۷. دسته‌ی برگ‌دار

تعداد درخت‌های n رأسی ($n \geq 2$) را به دست آورید که می‌توان رأس‌های آن را به گونه‌ای به دو دسته تقسیم کرد که شرایط زیر برقرار باشند:

- دو سر هر یال در دسته‌های متفاوتی باشند.
- اگر اندازه‌ی دو دسته برابر است، در هر دسته حداقل یک برگ وجود داشته باشد. اگر اندازه‌ی دو دسته برابر نیست، در دسته‌ی بزرگ‌تر حداقل یک برگ وجود داشته باشد.