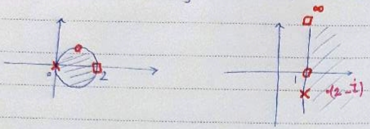
TA ، رفیعی

سری ۹

۸-

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z-1|<1\} \xrightarrow{w} \{w \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(w)>1\}$$



z	w
0	$1-i$
$1+i$	1
2	∞

روش اول $\quad w = \dfrac{az+b}{cz+d}$

روش دوم

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \sim$$

• برای اینکه بفهمیم کدوم ور رو به ما میده ،

$$w = \frac{-z}{z-2} + 1 - i = \frac{2+i(z-2)}{2-z}$$

مبدأ

$(1,0) \Rightarrow \dfrac{-1}{1-2} + 1 - i = 2 - i$

درسته!

اگر درست نبود سعی می‌کنیم باید تبدیل به نقطه ای در سمت دلخواه تبدیل می‌کنیم .

و به جای z از رابطه نگاشت جدید استفاده می‌کنیم .

سری ۱۰

$$\int_{C:\ |z|=1} z^m \bar{z}^n \, dz$$

$z = e^{i\theta} \qquad \bar{z} = e^{-i\theta}$

$dz = i e^{i\theta} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(m-n+1)\theta} d\theta$$

$m-n+1=0 \qquad 2\pi i$

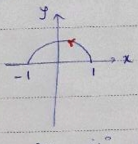
$m-n+1 \neq 0 \qquad 0$

۲-

$\sqrt{z}$ در مبدأ مختصات و قسمت حقیقی منفی محور غیر تحلیلی است .

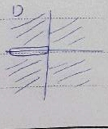
$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x \leq 0 \end{matrix}$

$\sqrt{z}$ تابعی چند مقداری است . باید شاخه را طوری انتخاب کنیم که شاخه مسیر را قطع نکند .



$\sqrt{z}$

$$I = \int_{+1}^{-1} \sqrt{z}\, dz$$



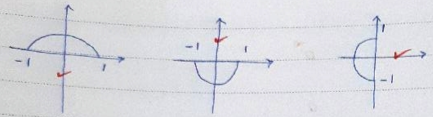
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ شاخه

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{z}$ روی مسیر تحلیلی است .

$$I = \int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3}(1+i)$$

مثال ۱۱ ص ۴۲ کتاب



-۴

$$\oint_C \left(\frac{z}{\bar z} + \frac{|z|}{z} \right) dz \qquad C: \; |z|=1$$

دایره‌ی یکه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

روش ۱) $z\bar z = |z|^2 = r^2 \longrightarrow z = \frac{r^2}{\bar z} \xrightarrow{r=1} z = \frac{1}{\bar z}$

$$\oint_{|z|=1} \left(z^2 + \frac{1}{z}\right) dz = \oint z^2\, dz + \oint \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

$$\int_{|z|=1} z^n\, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

روش ۲) $\displaystyle \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + |z|\bar z}{\underbrace{z\bar z}_{|z|^2}} = \int_{|z|=1} (z^2 + \bar z)\, dz = \int_{|z|=1} (e^{2i\theta} + e^{-i\theta})\, i e^{i\theta} d\theta$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = i \times \frac{1}{3i} e^{3i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

-۵

$$\oint_C (z - \operatorname{Re} z)\, dz = ? \qquad C: \; |z|=2$$

روش اول) $\displaystyle \operatorname{Re} = \frac{z+\bar z}{2} = \frac{z + \frac{4}{z}}{2} = \frac{z}{2} + \frac{2}{z}$

$$\oint_C z - \left(\frac{z}{2} + \frac{2}{z}\right) dz = \int \left(\frac{z}{2} + \frac{2}{z}\right) dz = \frac{1}{2}\int z\, dz + 2\int \frac{1}{z} dz$$

$$= 0 - 2 \times (2\pi i) = -4\pi i$$

روش دوم)

$z = x + iy \rightarrow z - \operatorname{Re} z = iy$

$z = re^{i\theta} = 2e^{i\theta}\,,\; dz = 2ie^{i\theta} \longrightarrow (z - \operatorname{Re} z)dz = iy\, 2ie^{i\theta} = -2ye^{i\theta}$

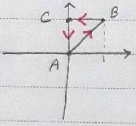
$$\oint_C -2ye^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} -2(\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\, d\theta = -4\pi i$$

$f(z) = (y-x) + i(-3x^2)$ -۶

$A = 0 + 0i$

$B = 1 + i$ $\oint_{ABCA} f(z)\,dz$

$C = 0 + i$



$= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$

پارامتریزه $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ $I_{AB} = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 -3it^2(1+i)\,dt$

AB $\gamma(t) = t + it$

$\gamma'(t) = (1+i)\,dt$ $= -i(1+i) = -i + 1$

BC $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$

$y(t) = 1$ $I_{BC} = \int_{BC} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(\gamma_2)\,\gamma_2'\,dt$

$\gamma(t) = t + i$, $\gamma'(t) = dt$

$= \int_1^0 (1-t) + i(-3t^2)\,dt = t - \frac{t^2}{2} - it^3 \Big|_1^0 =$

$0 - (1 - \frac{1}{2} - i) = -(\frac{1}{2} - i) = i - \frac{1}{2}$

CA $\gamma(t) = 0 + it \longrightarrow \gamma'(t) = i\,dt$

$I_3 = \int_1^0 (t - 0)\, i\,dt = i\frac{t^2}{2} = \frac{-i}{2}$

$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}(1-i)$

-۷ $\int_C \underbrace{e^{-2z}}_{f(z)}\,dz$ ، C خط واصل بین $(1-i\pi)$ ، $(2+i3\pi)$

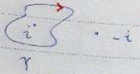
$f(z)$ روی خط واصل این دو نقطه تحلیلی است پس

از روش عادی انتگرال گیری حل می کنیم.

$= \frac{-1}{2} e^{-2z}\,dz \Big|_{1-i\pi}^{2+3i\pi} = \frac{1}{2} e^{-2}(1 - e^{-2})$

Date

۸- $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{1+z^2}\, dz$ در جهت عقربه‌های ساعت



* درفرمول کوشی-گورسا به جای $2\pi i$ می‌گذاریم $-2\pi i$
* نقاط i و $-i$ غیرتحلیلی هستند بنابراین انتگرال را فقط برای $z_0 = i$ حساب می‌کنیم که داخل ناحیه است، با استفاده از قضیه کوشی-گورسا داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$= \int \frac{\overbrace{\sin z \qquad}^{f(z)}}{(z-i)(z+i)} = -2\pi i \frac{\sin(i)}{i+i} = -\pi \sin(i) = -\pi \sinh 1$$

۹- طبق قضیه کوشی

$$\oint_{C:|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n+1}}\, dz = ?$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z)$$

$z_0 = 0$

$$= \frac{2\pi i}{(2n)!} \cos^{(2n)}(z)\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(2n)!}(-1)^n \cos z_0 = \frac{(-1)^n 2\pi i}{(2n)!}$$

$\cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos$

سری 11

۱. الف)

$n\in \mathbb{Z}$ $\quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\,dz$

$n=0$: $\oint_{|z|=1} e^z\,dz = 0$ تحلیلی

$n<0$: $\oint_{|z|=1} z^{-n}e^z = 0$ تحلیلی

$n>0$: $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n} = ? \longrightarrow z=0$ قطب ساده مرتبه n

کوشی گورسا $\longrightarrow \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$

ب)

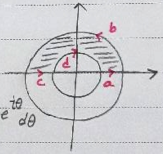
$\int_{|z|=2}\frac{3z+1}{z^3-z} = ?$ $\quad z^3-z=0 \longrightarrow z=0$ قطب ساده داخل ناحیه, $z=\pm 1$

$z=0$ $\quad \int \frac{3z+1}{z(z^2-1)} = \frac{2\pi i}{1}\,\frac{(3z+1)}{z^2-1}\Big|_{z=0} = -2\pi i$

$z=1 \Rightarrow 4\pi i$ $\qquad \Rightarrow I = I_1+I_2+I_3 = 0$

$z=-1 \Rightarrow -2\pi i$

۲.



$\{z\in \mathbb{C}\ ;\ 1<|z|<2\ ,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$

$\int_c \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_1^2 \frac{x}{x}\,dx + \int_0^\pi \frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}}\,2ie^{i\theta}\,d\theta + \int_{-2}^{-1}\frac{-x}{-x}\,dx + \int_\pi^0 \frac{1e^{+i\theta}}{1e^{-i\theta}}\left(+ie^{+i\theta}\right)d\theta = 1 - \frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3}$

۳.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,z^n$

$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ فرمول آدامار (آزمون ریشه)

$\lim_{n\to\infty}\left((an)!\right)^{1/n} = \left(\frac{an}{e}\right)^a$ هم ارزی استرلینگ

$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2} = 4 \longrightarrow \rho = \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} n^{2/n}$$

$$n^{2/n} = m \rightarrow \ln m = \frac{2}{n} \ln n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \ln m = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$$

$$\rightarrow m = \exp(0) = 1 \longrightarrow n^{2/n} = 1$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\rho = 2}$$

• مکلارن

۱- استفاده از تعریف (بسط تیلور) $z_0 = 0$

۲- تصاعد هندسی ۳- مشتق یا انتگرال گیری ۴- ساده کردن

• $$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \underbrace{1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots}_{g(z)}$$

توان ۲

مشتق گیری $\dfrac{-2z}{(1+z^2)^2} = g'(z)$

$$\rightarrow \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{g'(z)}{-2z} = \frac{-2z + 4z^3 - \cdots}{-2z} = 1 - 2z^2 + \cdots$$

• $f(z) = e^{z^2 - z}$

روش ۱

$$\frac{e^{z^2}}{e^{z}} = \frac{1 + z^2 + \frac{z^4}{4!} + \cdots}{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots}$$

روش ۲

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

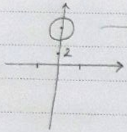
$$e^{z^2 - z} = e^{(z-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = e^{\frac{-1}{4}} \cdot e^{(z-\frac{1}{2})^2} = e^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\frac{1}{2})^{2n}}{n!}$$

• $f(z) = \cos^2 z$

$$= \frac{1 + \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z = \cdots$$

Subject:
Date

$C: |z-8j| = 1 \qquad \oint \frac{z}{\sin z\,(z-2j)}\,dz = ?\ 0 \qquad z = k\pi \quad z = 2j$ قطب ها



قطب ها درون ناحیه نیستند.

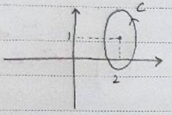
$4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

در جهت مثلثاتی

$f(z) = \oint_C \frac{e^z}{z(z-z_0)}\,dz = ? \longrightarrow z = 0,\ z = z_0$ قطب ها

$(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \qquad f'(2) = ? \qquad f(z_0) = ?$

فرض می کنیم z_0 درون ناحیه باشد.



قضیه کوشی

$f(z_0) = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z_0} = 2\pi i \frac{e^{z_0}}{z_0}$

$f'(z) = (2\pi i)\times \frac{e^z \cdot z - e^z}{z^2} = (2\pi i)\times \frac{2e^2 - e^2}{4} = \frac{\pi i e^2}{2}$

$C_R = |z| = R > 1 \qquad \left| \oint_{C_R} \frac{\log z}{z^2}\,dz \right| \leq M$

$|\log z| = |\log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z| \leq |\log|z|| + |i\,\mathrm{Arg}\,z| \leq |\log|z|| + \pi$

$f(z) = \frac{\log z}{z^2}, \quad |z| = R \Rightarrow |f(z)| = \frac{|\log z|}{|z^2|} \leq \frac{\log R + \pi}{R^2}$

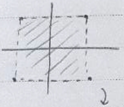
$\left| \int_{C_R} \frac{\log z}{z^2}\,dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{\log z}{z^2} \right| dz \leq \int_{C_R} \frac{\log R + \pi}{R^2} R\,d\theta$

$= \frac{\log R + \pi}{R^2} \cdot 2\pi R$

$\max |z^2 - z| \ @ \ |z| \leq 1$

$|z^2 - z| = \underbrace{|z|}_{1} \cdot |z-1| = |z-1| \leq |z| + |-1| = 1 + 1 = 2$

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow \max(|\sin z|^2)$$



نقاط گوشه

$$z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\sin z|^2 = (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2$$

$$= \sin^2 x \underbrace{\cosh^2 y}_{1+\sinh^2 y} + \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x + \sinh^2 y = \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \longrightarrow \max = ?$$

روی گوشه‌ها اتفاق می‌افتد.

ص ۱۲۱
قضیه مقدار میانگین

$|z - z_0| \leq r$ تابع f روی ناحیه گفته شده تحلیلی باشد:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(e^{i\theta})\, d\theta$$

$\cos^2 z$ روی کل صفحه مختلط تحلیلی است.

$$\Rightarrow f(z) = \cos^2 z \qquad I = \cos^2 0 = 1$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

اگر f تابع تام باشد و مجموعه‌ی مقادیر $f(z)$ در خارج دایره‌ی واحد باشد ثابت کنید f تابع ثابت است.

تام: روی کل صفحه مختلط تحلیلی است.

چون f خارج دایره قرار دارد پس $f(z) \neq 0$ تابع $g(z) = 1/f(z)$ را در نظر می‌گیریم

$|f(z)| \geq 1 \rightarrow |g(z)| \leq 1$ تابع $g(z)$ تحلیلی است و چون

$|g(z)| \leq 1$ و کران‌دار است طبق قضیه کتاب هر تابع تام تحلیلی ثابت است.

Subject:
Date

سری 12

۱. الف)

$f(z) = z^4 \sin^2 \frac{1}{z^2}$ $\qquad \sin^2 \frac{1}{z^2} = \frac{1-\cos\frac{2}{z^2}}{2}$

$0<|z|<1$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$

$\cos \frac{2}{z^2} = 1 - \frac{\left(\frac{2}{z^2}\right)^2}{2!}$

$z^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{z^2}\right) = \frac{z^4}{2} - \frac{z^4}{2}\left(1 - \frac{2}{z^4}\right) = 1 - \frac{1}{3z^4}$

توان منفی فقط در بسط لوران ایجاد می شود.

ب)

$f(z) = \frac{4z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z-1} = \frac{1}{z} - \frac{3}{z-1} = \frac{1}{z} - 3\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$0<|z|<1$

۲- تکین منفرد

الف) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ $\leftarrow$ $z=0$ تکین منفرد $\qquad \sqrt{z}$ به ازای $z<0$: نقاط تکین غیرمنفرد

ب) $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z-2}$

$z-2=t \Rightarrow z=t+2$

$f(t) = (t+2)^3 \cos\frac{1}{t} = (t+2)^3\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4!t^4} + \cdots\right)$

$= (t^3+8+6t^2+12t)\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4!t^4} + \cdots + \frac{1}{t^\infty}\right) = \cdots t^{-\infty}$

تعداد زیادی توان منفی داریم. از نوع اساسی است.

الف) $1-e^{2z} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!} = 1 - (1+2z+2z^2+\cdots) = -2z-2z^2+\cdots$

$\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{-2z-2z^2+\cdots}{z^4} = -\frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{}{z}$ $\qquad$ قطب مرتبه ۳

پ) $f(z) =$

Date

۳- الف)

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-i)(z+2)^2}$$

ماندہ ؟

$z = i \qquad z = -2 \qquad \operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{\sin z}{(z-i)(z+2)^2} = \frac{\sin i}{(i+2)^2}$

ب)

$$f(z) = \frac{(1-z^4) \cdot e^{2z}}{z^3}$$

$$e^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \cdots \qquad \frac{(1-z^4)(1+2z+2z^2+\cdots)}{z^3}$$

$$= \frac{(\ 2z^2 + \cdots)}{z^3} = 2z^{-1} \longrightarrow a_{-1} = 2$$

$z = 0 \Rightarrow$

پ)

$$e^{z} \cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + 2\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{(2 \times \frac{1}{z})^2}{2!} + \cdots\right) \qquad f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$$

$$= \left(1 + 2z + 2z^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{2}{z} + 2\frac{1}{z^2} + \cdots\right) =$$

$$a_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

۴-

$$\int_{|z|=1} z^{-1} e^{az}\, dz = 2\pi i \xrightarrow{\text{ثابت کنید}} \int_0^{\pi} \underbrace{e^{a\cos t} \cos(a \sin t)}_{\operatorname{Re}\{e^{az}\}}\, dt = \pi$$

$$|z| = 1 \longrightarrow z = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos(a \sin t) = \operatorname{Re}\left(e^{ia\sin t}\right)$$

$$e^{a\cos t} \operatorname{Re}\left(e^{ia\sin t}\right) = \operatorname{Re}\left\{e^{a\cos t} e^{ia \sin t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{a(\cos t + i \sin t)}\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{e^{az}\right\}$$

$$z = e^{it} \longrightarrow dz = i e^{it}\, dt \longrightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Re}\{e^{az}\} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\{e^{az}\} \frac{dz}{iz}$$

Subject:
Date

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{az} z^{-1} \frac{dz}{iz}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\int_{|z|=1} \frac{1}{2i} e^{az} z^{-1} dz\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2i} 2\pi i\right\} = \pi$$

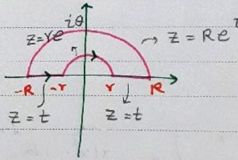
$$\int_{|z|=1} \frac{(z+1)^{20}}{z^2} dz = ? \qquad f(z) = \frac{(z+1)^{20}}{z^2}$$

$$\mathrm{res}(f,0) = \frac{d}{dz}\lim_{z\to 0} (z)^2 \frac{(z+1)^{20}}{z^2} = \lim_{z\to 0} 20(z+1) = 20$$

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z_0) = 2\pi i \times 20 = 40\pi i$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2} dx = ?$$

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{z^2+a^2} dz$$



$$z^2+a^2=0 \longrightarrow \begin{matrix} z=ai \ \checkmark \\ z=-ai \end{matrix}$$ در ناحیه است.

$$= a_{-1} = \mathrm{Res}(f,ai) = \lim_{z\to ai} \cancel{(z-ai)} \frac{(\ln z)^2}{\cancel{(z-ai)}(z+ai)} = \frac{(\ln ai)^2}{2ai}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{(\ln ai)^2}{2ai}\right) = \frac{\pi}{a}(\ln ai)^2$$

محاسبه انتگرال بالا با روش اصلی

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{-r} \frac{(\ln(-x))^2}{x^2+a^2} + \underbrace{\int_\pi^0 \frac{\ln(re^{i\theta})}{r^2 e^{2i\theta}+a^2} rie^{i\theta} d\theta}_{2} + \int_r^R \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2} dx$$

$$+ \underbrace{\int_0^\pi \frac{\ln^2(Re^{i\theta})}{R^2 e^{2i\theta}+a^2} iRe^{i\theta} d\theta}_{1}$$

Subject:
Date

① $< \int_0^\pi \frac{(\ln R)^2 + 2\pi i \ln R - \pi^2}{R^2-a^2} R\, d\theta = 0$

$R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{(\ln(-x))^2}{x^2+a^2}dx + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}dx = -\int_\infty^0 \frac{\ln^2(-x)}{x^2+a^2} + 〃 =$$

$$\boxed{\ln(-x) = \ln x + i\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2(-x)}{x^2+a^2}dx + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}dx = \int_0^\infty \frac{(\ln x + i\pi)^2}{x^2+a^2}dx + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}dx$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}dx + 2\pi i \underbrace{\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx}_{\frac{\pi \ln a}{2a}} - \pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}dx$$

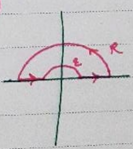
$$= \underbrace{\frac{\pi}{a}\left(\ln(ai)\right)^2} \longrightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi^3}{8a} + \frac{\pi}{2a}(\ln a)^2}$$

جواب قسمت قبل

-V

$$I = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$$

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = i\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\right)$$



$$I = \pi\left(1 - e^{-1}\right)$$