دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

آزمونک چهارم | نظریه‌ی گراف‌ها | زمان: ۲۰ دقیقه

مسئله‌ی ۱. دور همیلتنی

یک گراف ساده‌ی $2n+1$ رأسی داریم. به ازای هر n رأس از این گراف، رأسی خارج از این مجموعه وجود دارد که به تمام رأس‌های مجموعه یال دارد. همچنین می‌دانیم که درجه‌ی هیچ رأسی برابر با n نیست. ثابت کنید این گراف همیلتنی است.

حل.

ثابت می‌کنیم کم‌ترین درجه‌ی رأس‌ها در این گراف حداقل $n+1$ است. فرض کنید راس با کم‌ترین درجه u باشد. اگر درجه‌ی این راس کم‌تر از n باشد، راس u و تمام همسایه‌هایش را در نظر می‌گیریم. چون تعداد آن‌ها حداکثر n است، باید راسی در خارج از این مجموعه وجود داشته باشد که به همه‌ی آن‌ها یال داشته باشد. ولی چون تمام همسایه‌های راس u در این مجموعه هستند به تناقض می‌رسیم. همچنین می‌دانیم طبق صورت سوال، درجه‌ی هیچ راسی نمی‌تواند n باشد. در نتیجه درجه‌ی هر راس حداقل $n+1$ است. طبق قضیه‌ی دیراک، اگر در گرافی کم‌ترین درجه حداقل اندازه‌ی نصف تعداد راس‌ها باشد، آنگاه گراف مورد نظر همیلتنی است. ▷

مسئله‌ی ۲. یال برشی

فرض کنید یالی از یک گراف در تمام زیردرخت‌های فراگیر آن آمده باشد، ثابت کنید این یال برشی است.

حل.

فرض کنید یال e از گراف G خاصیت گفته شده را داشته باشد. اگر e برشی نباشد، $G-e$ همبند است و بنابراین یک زیردرخت فراگیر مانند T دارد. T زیردرخت فراگیر G نیز هست اما e در T نیامده است که با فرض سوال در تناقض است. بنابراین فرض برشی نبودن e غلط است و e برشی است. ▷