ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷–۹۸

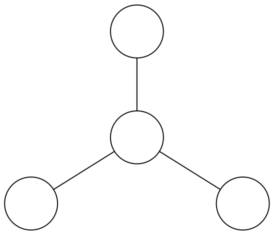
مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | شمارش | زمان تحویل: ۵ اسفند

مسئله‌ی ۱. رنگ‌آمیزی

اگر هر یک از گوی‌های شکل زیر را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سفید رنگ کنیم به چند رنگ‌آمیزی متفاوت می‌توان رسید؟ دو رنگ‌آمیزی از شکل متفاوت‌اند اگر نتوان آن‌ها را با چرخاندن روی صفحه به یکدیگر تبدیل کرد.



مسئله‌ی ۲*. جدول دودویی

به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول $n \times ۲$ را با یکی از اعداد ۰ و ۱ پر کرد طوری که اگر خانه‌ای در سطر پایینی وجود داشته باشد که در آن عدد ۱ و در خانه‌ی بالایی آن عدد ۰ نوشته شده باشد، تمام خانه‌های سطر پایینی که در سمت چپ این خانه قرار دارند ۱ باشند.

مسئله‌ی ۳*. انتخاب زیرمجموعه

حداکثر چند زیرمجموعه‌ی ناتهی از یک مجموعه‌ی ۲۰ عضوی می‌توان انتخاب کرد طوری که هر دوتایی از آن‌ها حداکثر دو عضو مشترک داشته باشند؟

مسئله‌ی ۴*. دوگانه شماری

برابری‌های زیر را با استفاده از روش دوگانه شماری ثابت کنید.

۱.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 i(n-i) = n^2 \binom{2n-2}{n-2}$$

۲.

$$\binom{2n+1}{n} = \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}$$

مسئله‌ی ۵. زیرمجموعه‌های پراکنده

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را بیابید که هیچ دو عضوی از آن متوالی نباشند.

مسئله‌ی ۶. برنده‌ی مطلق

ده تیم در یک تورنمنت شرکت کرده‌اند. در این تورنمت هر دو تیم یک بار با یکدیگر مسابقه می‌دهند و دقیقا یکی از آن‌ها در هر مسابقه پیروز می‌شود. احتمال پیروزی هر یک از دو تیم شرکت‌کننده در یک مسابقه برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. در صورتی که یک تیم در تمامی مسابقات خود برنده شود، به آن تیم «برنده‌ی مطلق» گفته می‌شود. احتمال این که پس از پایان تورنمت برنده‌ی مطلق وجود نداشته باشد چقدر است؟

مسئله‌ی ۷. جدول لیگ

n تیم فوتبال در یک دوره مسابقه شرکت کرده‌اند. هر دو تیم دقیقا یک بار با هم مسابقه می‌دهند. در هر بازی به برنده دو امتیاز، به بازنده صفر امتیاز و در صورت تساوی به هر تیم یک امتیاز داده می‌شود. ثابت کنید در پایان مسابقات اختلاف امتیاز هر دو تیم متوالی در جدول امتیازات حداکثر n است.