



ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

نمونه سؤالات

منطق

سری دوم

۱. سه کارت قرمز و سیاه به پشت روی میز قرار دارند. دقیقاً یکی از این سه کارت آس است و حداکثر یکی از سه کارت قرمز است. پشت هر کارت یک جمله نوشته شده است که اگر کارت قرمز باشد جمله درست است و اگر سیاه باشد جمله غلط است. این جملها به این شرح‌اند:

- کارت اول: این کارت آس نیست.
- کارت دوم: این کارت آس است.
- کارت سوم: کارت اول آس نیست.

کدام یک از کارت‌ها آس هستند و آیا آس قرمز است یا سیاه؟

۲. سه کارت روی میز به پشت قرار گرفته‌اند. یکی از کارت‌ها قرمز، یکی سیاه و دیگری جوکر است. جمله‌ی پشت کارت قرمز درست است و جمله‌ی پشت کارت سیاه غلط است. جمله‌ی پشت کارت جوکر می‌تواند درست یا غلط باشد. این جملها به این شرح‌اند:

- کارت اول: کارت سوم جوکر است.
- کارت دوم: کارت اول سیاه است.
- کارت سوم: این کارت جوکر است.

کدام کارت جوکر است و دو کارت دیگر هر کدام چه رنگ هستند؟

۳. چهار خواهر به نام‌های دریا، درنا، راضیه و راحله هستند. دریا و درنا همیشه دروغ می‌گویند و راضیه و راحله همیشه راست می‌گویند. شما قبلاً این چهار خواهر را ندیده‌اید. یک روز یکی از آن‌ها را در خیابان می‌بینید ولی نمی‌دانید کدام یک از این چهار خواهر است.

او یک جمله به شما می‌گوید و شما نتیجه می‌گیرید که او راضیه است. این جمله چه جمله‌ای می‌تواند باشد؟

۴. در سوال؟؟ او چه جمله‌ای می‌تواند به شما بگوید که نتیجه بگیرید که او دریا است؟

۵. در سوال؟؟ او چه جمله‌ای می‌تواند به شما بگوید که نتیجه بگیرید که او یکی از دریا یا راضیه است، ولی نتوانید نتیجه بگیرید دقیقاً کدام است؟

۶. در سوال؟؟ او چه جمله‌ای می‌تواند به شما بگوید که نتیجه بگیرید که یکی از دریا، درنا یا راضیه است، ولی نتوانید نتیجه بگیرید دقیقاً کدام است؟

۷. در سوال؟؟، آیا می‌توانید با پرسیدن یک سوال با جواب بله یا خیر، تشخیص دهید که او کدام خواهر است؟

۸. هر یک از میلاد، علی و سامان یا همواره دروغ می‌گویند، یا همواره راست می‌گویند. می‌دانیم مدرک کارشناسی یکی از میلاد، علی یا سامان جعلی است. نمی‌دانیم که کسی که مدرک جعلی دارد راست‌گو است یا دروغ‌گو. این سه نفر گزاره‌های زیر را اظهار کرده‌اند:

- میلاد: مدرک سامان جعلی است.

• علی: مدرک من جعلی نیست.

• سامان: حداکثر یکی از ما سه نفر راست‌گو است.

اگر بخواهید یکی از این سه نفر را استخدام کنید، کدام یک را استخدام می‌کنید تا مطمئن باشید که مدرک او جعلی نیست؟ همچنین، آیا کسی که مدرک جعلی دارد راست‌گو است یا دروغ‌گو؟

۹. در روایت دیگری از داستان سوال؟؟، این سه نفر گزاره‌های زیر را اظهار کرده‌اند:

• میلاد: مدرک من جعلی است.

• علی: مدرک من جعلی است.

• سامان: حداقل دو تا از ما سه نفر دروغ‌گو هستند.

مدرک کدام یک از این سه نفر جعلی است؟ آیا او راست‌گو است یا دروغ‌گو؟

۱۰. آقای زمداپوس اهل کشور همسایه است. در این کشور یکی از کلمات «جا» و «کی» به معنی بله و دیگری به معنی نه است. ولی شما نمی‌دانید کدام یک به کدام معنی است. برای همین از آقای زمداپوس می‌پرسید که آیا «کی» به معنی نه است. او به درستی به شما جواب می‌دهد، ولی چون حواسش جای دیگر است به زبان کشور خودش جواب می‌دهد. جواب آقای زمداپوس «جا» است یا «کی»؟

۱۱. دو جزیره A و B در نزدیکی یک‌دیگر قرار دارند. اهالی این دو جزیره، طبق یک رسم کهن، هرگاه در جزیره‌ی خودشان باشند همواره راست می‌گویند و هرگاه در جزیره‌ی همسایه باشند همواره دروغ می‌گویند. فرض کنید شما وارد یکی از این دو جزیره می‌شوید و یک نفر را می‌بینید. او اهل یکی از این دو جزیره است، ولی شما نمی‌دانید اهل کدام جزیره است. آیا می‌توانید با پرسیدن یک سوال با جواب بله یا خیر، متوجه شوید در کدام جزیره هستید؟

۱۲. در سوال؟؟، فرض کنید می‌خواهید بفهمید که فردی که با او صحبت می‌کنید اهل کدام جزیره است. آیا با یک سوال با جواب بله یا خیر می‌توانید متوجه شوید که او اهل کدام جزیره است؟

۱۳. در سوال؟؟، فرض کنید می‌خواهید بفهمید که فردی که با او صحبت می‌کنید اهل همان جزیره‌ای است که به آن وارد شده‌اید یا خیر. آیا با یک سوال با جواب بله یا خیر می‌توانید جواب این سوال را پیدا کنید؟

۱۴. در سوال؟؟، با چه سوالی می‌توانید او را مجبور کنید جواب بله بدهد؟

۱۵. در سوال؟؟، فرض کنید یک نفر به شما می‌گوید: «وقتی در جزیره‌ی A هستم، می‌توانم بگویم در جزیره‌ی B هستم». شما در کدام جزیره قرار دارید؟

۱۶. در سوال؟؟، فرض کنید یک نفر به شما می‌گوید که از اهالی جزیره‌ی A است. وی همچنین اظهار می‌کند: «وقتی در جزیره‌ی A هستم، می‌توانم بگویم اهل جزیره‌ی B هستم». شما در کدام جزیره قرار دارید و مخاطب شما اهل کدام جزیره است؟

۱۷. یک منطق‌دان وارد یکی از جزیره‌های سوال؟؟ می‌شود. او دو نفر را می‌بیند و از آن‌ها می‌پرسد که آیا اهل یک جزیره هستند یا خیر. یکی از آن‌ها پاسخ می‌دهد که آن‌ها اهل یک جزیره نیستند. سپس منطق‌دان می‌پرسد که الان در کدام یک از دو جزیره است و باز هم یکی از دو نفر پاسخ می‌دهد که در جزیره‌ی A هستند. منطق‌دان بلافاصله فهمید که در کدام جزیره قرار دارد. آیا هر دو سوال منطق‌دان را یک نفر جواب داده است یا دو نفر مختلف سوال‌های او را جواب دادند؟ او در کدام جزیره قرار دارد؟

۱۸. فرض کنید وارد یکی از جزیره‌های سوال؟؟ می‌شوید و با آقای x و y ملاقات می‌کنید که هر کدام اهل یکی از این دو جزیره هستند. شما نمی‌دانید هر کدام از این دو نفر اهل کدام جزیره هستند. آقای x می‌گوید که حداقل یکی از این دو نفر اهل جزیره‌ی A هستند و آقای y می‌گوید که آقای x اهل جزیره‌ی B است. شما در کدام جزیره قرار دارید و هر کدام از آقایان x و y اهل کدام جزیره هستند؟

۱۹. در شهری نصف اهالی شهر عقل‌شان را از دست داده‌اند. به همین سبب همه‌ی باورهای آن‌ها غلط است. همه‌ی اهالی این شهر همواره حرفی را می‌زنند که به نظرشان درست است. با توجه به وخامت اوضاع روحی اهالی این شهر، روان‌پزشکان زیادی در این شهر هستند، ولی متأسفانه عده‌ای از آن‌ها نیز عقل خود را از دست داده‌اند.

یکی از اهالی این شهر ادعا می‌کند که این‌طور نیست که او و روان‌پزشکش هر دو عاقل باشند. آیا می‌توانید بگویید او و روان‌پزشکش هرکدام عاقل هستند یا دیوانه؟

۲۰. یکی دیگر از اهالی شهر مسئله‌ی؟؟ ادعا می‌کند که او و روان‌پزشکش هر دو دیوانه‌اند. راجع به سلامت عقلی او و روان‌پزشکش چه می‌توانید بگویید؟

۲۱. یکی از اهالی این شهر مسئله‌ی؟؟ می‌گوید: «من یک روان‌پزشک عاقل نیستم». آیا او عاقل است؟ آیا او روان‌پزشک است؟

۲۲. آیا یکی از اهالی شهر مسئله‌ی؟؟ ممکن است بگوید که یک روان‌پزشک دیوانه است؟

۲۳. یکی از اهالی شهر مسئله‌ی؟؟ به روان‌پزشک خود می‌گوید: «تو فکر می‌کنی من دیوانه‌ام». راجع به سلامت روانی روان‌پزشک او چه می‌توانید بگویید؟

۲۴. در سوال قبل، روان‌پزشک پاسخ می‌دهد: «من هیچ‌وقت باور نداشتم که تو دیوانه‌ای». راجع به سلامت روانی بیمار چه می‌توانید بگویید؟

۲۵. جرج بول باغچه‌ای دارد که در آن تعدادی گل کاشته است. این گل‌ها به رنگ‌های آبی یا قرمز هستند. ولی رنگ این گل‌ها در روزهای مختلف عوض می‌شود. با این وجود یک گل در تمام یک روز رنگش عوض نمی‌شود. در باغچه‌ی جرج به ازای هر دو گل A و B (نه لزوماً متمایز) گلی مانند C وجود دارد که دقیقاً در روزهایی به رنگ قرمز است که هر دو A و B به رنگ آبی باشد. همچنین هیچ دو گلی در باغچه‌ی او وجود ندارند که در تمام روزها هم‌رنگ باشند. اگر این باغچه بین ۲۰۰ تا ۵۰۰ گل داشته باشد، چند گل در این باغچه وجود دارند؟

۲۶. به مجموعه‌ای از توابع منطقی که با استفاده از آن بتوان هر تابع منطقی دیگری را ساخت، یک منطق کامل می‌گوییم. نشان دهید $\{\neg, \wedge\}$ یک منطق کامل است.

۲۷. نشان دهید $\{\downarrow\}$ یک منطق کامل است. (گزاره‌ی $a \downarrow b$ تنها زمانی غلط است که a و b هر دو صحیح باشند).

۲۸. نشان دهید $\{\oplus, \neg\}$ یک منطق کامل نیست. (گزاره‌ی $a \oplus b$ تنها زمانی غلط است که یکی از a و b صحیح و یکی غلط باشد).

۲۹. نشان دهید $\{\wedge, \vee\}$ منطق کامل نیست.

گزاره‌های زیر را با استفاده از قواعد استنتاج اثبات کنید.

$$(p \leftrightarrow q \wedge q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r) \quad ۳۰$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (q \vee r)) \quad ۳۱$$

$$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \quad ۳۲$$

$$p \rightarrow p \quad ۳۳$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \quad ۳۴$$

$$\neg(p \leftrightarrow \neg p) \quad ۳۵$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad .\text{۳۶}$$

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) \quad .\text{۳۷}$$

$$(p \wedge \neg p) \rightarrow q \quad .\text{۳۸}$$

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \quad .\text{۳۹}$$

$$p \vee (p \rightarrow q) \quad .\text{۴۰}$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x)) \quad .\text{۴۱}$$

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \quad .\text{۴۲}$$

$$(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x)) \quad .\text{۴۳}$$

$$(\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg P(a)) \rightarrow Q(a) \quad .\text{۴۴}$$

$$\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x P(x, x) \quad .\text{۴۵}$$

$$(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists P(x)) \rightarrow \exists Q(x) \quad .\text{۴۶}$$

$$\text{۴۷. ایراد استدلال زیر برای اثبات } \forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y) \text{ چیست؟}$$

$$\frac{\forall x \exists y P(x, y)}{\exists y P(a, y)} \text{ (حذف سور عمومی)}$$

$$\frac{\exists y P(a, y)}{P(a, b)} \text{ (حذف سور وجودی)}$$

$$\frac{P(a, b)}{\forall x P(x, b)} \text{ (معرفی سور عمومی)}$$

$$\frac{\forall x P(x, b)}{\exists y \forall x P(x, y)} \text{ (معرفی سور وجودی)}$$

$$\text{۴۸. ایراد استدلال زیر برای اثبات } (\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)) \Rightarrow Q(a) \text{ چیست؟}$$

$$\frac{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)}{P(a)} \text{ (ساده سازی)}$$

$$\frac{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))}{P(a) \rightarrow Q(a)} \text{ (حذف سور وجودی)}$$

$$\frac{P(a) \rightarrow Q(a)}{Q(a)} \text{ (وضع مقدم)}$$