معادلات دیفرانسیل با مقدار مرزی اشتورم - لیوویل منظم:

$$\begin{cases} \left(p(x)y'\right)' + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)y = 0 & \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 & |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 & |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0 \end{cases}$$

$y = y(x)$ تابع جواب در $[a,b]$

مقادیری از λ که این معادله جواب غیربدیهی را $y \neq 0$ دارد، مقادیر ویژه‌ی معادله و توابع غیربدیهی جواب، توابع ویژه‌ی معادله نامیده می‌شوند.

قضیه: برای یک معادله‌ی دیفرانسیل با مقدار مرزی اشتورم-لیوویل مقادیر ویژه یک دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{\lambda_n\}$ و اگرا به بی‌نهایت تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم y_n تابع ویژه‌ی نظیر λ_n و در فضای ضرب داخلی $(PC([a,b], \mathbb{R})$ با ضرب داخلی $\langle , \rangle_r$ توابع $v_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$، تشکیل یک مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد $\{v_1, \dots, v_n\} = O$ می‌دهند. برای تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته‌ی f بر $[a,b]$ که f' نیز برای بازه پیوسته باشد، بسط فوریه‌ی f نسبت به O در

نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگراست.

مثال: معادله‌ی اشتورم - لیوویل منظم

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

و $r(x) = \frac{1}{x}$ و $a=1$, $b=e$

را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی نظیر. سپس به کمک آن‌ها بسط فوریه‌ی $f(x)=x$ را نسبت به مجموعه‌ی یکه‌ی متعامد حاصل بدست آورید.

حالت ۱: $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} (xy')' = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow xy' = C_1 \to y' = \frac{C_1}{x}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \ln x + C_2$$

$$\left.\begin{cases} y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y(e) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \end{cases}\right\} \to C_1 = C_2 = 0$$

در این حالت جواب غیربدیهی در این معادله وجود ندارد.

حالت ۲: $\lambda < 0$:

می‌توان فرض کرد $\lambda = -\alpha^2$ ، $\alpha > 0$

$$(xy')' - \frac{\alpha^2}{x}y = 0$$

$$y' + xy'' - \frac{\alpha^2}{x}y = 0$$

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - \alpha^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

$$y = x^m \longrightarrow y' = mx^{m-1} \longrightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$m(m-1) + m - \alpha^2 = 0 \longrightarrow m^2 - m + m - \alpha^2 = 0$$

$$m = \pm\alpha$$

$$\Rightarrow y = C_1 x^{\alpha} + C_2 x^{-\alpha}$$

$$y' = \alpha C_1 x^{\alpha - 1} - \alpha C_2 x^{-\alpha - 1}$$

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} \alpha C_1 - \alpha C_2 = 0 \\ C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \end{cases}\right\} \longrightarrow C_1 = C_2 = 0$$

پس در این حالت هم جواب غیر بدیهی وجود ندارد.

حالت ۳: $\lambda > 0$:

می‌توان فرض کرد $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + \alpha^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

معادله‌ی اویلر

$$y = C_1 \cos(\alpha \ln x) + C_2 \sin(\alpha \ln x)$$

$$y' = -\frac{\alpha C_1}{x} \sin(\alpha \ln x) + \frac{C_2 \alpha}{x} \cos(\alpha \ln x)$$

می‌توان $C_1 = 1$ را درنظر گرفت

$$\left.\begin{aligned} & y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 \alpha = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ & y(e) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

پس در این حالت

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

مقادیر ویژه عبارتند از:

$$y_n = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \ln x\right) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\|y_n\| = \langle y_n, y_n \rangle_r = \int_1^e \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_1^e \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{(2n-1)\pi}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \cos^2 u\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \frac{1+\cos u}{2}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\frac{1}{4}(2n-1)\pi + \frac{1}{4}\sin\left((2n-1)\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \implies \|y_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$O = \{v_n : n = 1, 2, \dots\} \qquad v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)$$

$$f(x) = x \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

$$c_n = \langle f, v_n \rangle_r = \int_1^e x\sqrt{2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_1^e \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x\right)dx$$

$$\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x = u \Rightarrow \frac{(2n-1)\pi}{2x}\,dx = du$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2x}{(2n-1)\pi}\,du \Rightarrow \ln x = \frac{2u}{(2n-1)\pi} \Rightarrow x = e^{\frac{2u}{(2n-1)\pi}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} e^{\frac{2}{(2n-1)\pi}u}\cos u\,du$$

انتگرال و تبدیل فوریه:

دیدیم که برای تابع متناوب و قطعه قطعه پیوسته‌ی f روی $[-l, l]$ سری فوریه‌ی $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ بدست می‌آید که در آن

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\ ,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

اکنون می‌خواهیم برای تابع غیرمتناوب f جایگزین مناسبی برای سری فوریه بدست آوریم.

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt\right)\cos\frac{n\pi x}{l}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}(t-x)\right)dt$$