ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۶-۹۷

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری ششم — نظریه‌ی گراف‌ها — زمان تحویل: ۳۰ اردی‌بهشت

مسئله‌ی ۱*. آشنای کل!

جمعی شامل $2n+1$ نفر در یک اتاق حضور دارند. برای هر مجموعه‌ی S از این افراد که حداکثر n عضو دارد، یک نفر خارج از این مجموعه وجود دارد که با همه‌ی آن‌ها دوست است. می‌دانیم دوستی یک رابطه‌ی دوطرفه است. ثابت کنید حداقل یک نفر وجود دارد که با همه‌ی افراد دوست است.

حل. روابط دوستی بین این افراد مانند یک گراف بدون جهت ساده است. فرض کنید گراف روابط دوستی G نامیده شود. ثابت می‌کنیم که گراف G دارای یک خوشه به اندازه $n+1$ است.

مجموعه T را در ابتدا تهی در نظر بگیرید. این مجموعه نشان‌دهنده‌ی یک خوشه در گراف است. در ابتدا یک راس از گراف G را به صورت تصادفی در این مجموعه قرار می‌دهیم. تا وقتی که اندازه مجموعه T حداکثر n است، راسی در خارج از مجموعه T وجود دارد که به همه‌ی اعضای آن یال دارد. در نتیجه در هر مرحله، راسی که به همه‌ی اعضای T یال دارد را وارد T می‌کنیم و اندازه‌ی خوشه یکی بزرگ‌تر می‌شود تا به $n+1$ برسد. درنتیجه یک خوشه به اندازه‌ی $n+1$ داریم.

حال تمام راس‌هایی که در مجموعه‌ی T عضو نیستند را در نظر بگیرید. تعداد این راس‌ها برابر با n است. در نتیجه راسی مانند v در خارج از آن‌ها وجود دارد که به همه‌ی آن‌ها یال دارد. راس v عضو مجموعه‌ی T است. در نتیجه چون T یک خوشه در گراف G بود، پس v به تمام راس‌های T نیز یال دارد. در نتیجه v به تمام راس‌های G یال دارد و حکم مسئله ثابت می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۲*. مسیر تک‌رنگ

یال‌های یک تورنمنت با دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده‌اند. ثابت کنید رأسی مانند v در این گراف وجود دارد که از آن به هر رأس دیگر در این تورنمنت مسیر جهت‌داری متشکل از یال‌های تک‌رنگ وجود دارد.

حل. برای اثبات از استقرا بر روی n استفاده می‌کنیم.

برای حالت پایه $n=1$ را در نظر می‌گیریم. تنها یک راس داریم درنتیجه حکم مسئله برقرار است.

حال فرض کنید حکم برای تمامی مقادیر کوچک‌تر از n برقرار است. می‌خواهیم حکم را برای n نیز ثابت کنیم. یک راس دلخواه u را از تورنمنت کنار می‌گذاریم. تعداد راس‌های باقی مانده برابر $n-1$ است در نتیجه طبق فرض استقرا راسی مانند v در میان آن‌ها وجود دارد که به بقیه‌ی راس‌ها مسیر تشکیل شده از یک رنگ دارد. فرض کنید v به مجموعه‌ی B مسیر به رنگ آبی دارد و به مجموعه‌ی R مسیر به رنگ قرمز دارد.

اگر جهت یال بین راس های u و v از v به u باشد که حکم مسئله اثبات می‌شود. زیرا v مسیر تک رنگ به u نیز خواهد داشت و خود راس v راس با ویژگی خواسته شده است. حال فرض کنید یال از u به سمت v باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنید این یال به رنگ قرمز باشد. اگر حداقل یکی از یال‌های مجموعه‌ی B به u به رنگ آبی باشد آنگاه v به u مسیر یک رنگ خواهد داشت و حکم برقرار می‌شود زیرا v به تمام راس‌های مجموعه‌ی B مسیر یک رنگ آبی دارد. حال فرض کنید همه‌ی یال‌هایی که از مجموعه‌ی B به سمت u است به رنگ قرمز باشد. حال مجموعه‌ی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = B \cup \{u\}$$

مجموعه‌ی S حداکثر $n - ۱$ عضو دارد در نتیجه طبق فرض استقرا راسی در آن وجود دارد که به همه‌ی راس‌های دیگر مسیری تشکیل شده از یک رنگ دارد. اگر این راس، راس u باشد حکم برقرار خواهد شد زیرا به راس v و راس‌های مجموعه‌ی R مسیر قرمز دارد و به راس‌های مجموعه‌ی B طبق فرض استقرا مسیر یک رنگ دارد. در نتیجه راس u ویژگی خواسته شده را دارد. حال فرض کنید راسی که در مجموعه‌ی S طبق فرض استقرا به بقیه مسیر یک رنگ دارد، راس w از مجموعه‌ی B باشد. این راس به تمام راس‌های مجموعه‌ی S طبق فرض استقرا مسیر یک رنگ دارد. همچنین یال‌های مجموعه‌ی B به سمت u به رنگ قرمز است و در نتیجه این راس به راس u مسیر به رنگ قرمز دارد. در نتیجه با طی کردن همان مسیر و استفاده از مسیرهای قرمز که از u به v و تمام راس‌های مجموعه‌ی R می‌رسد، می‌تواند به تمام راس‌های مجموعه R نیز با مسیر یک رنگ برسد. در نتیجه حکم مسئله ثابت می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۳*. برخورد گرافی

ثابت کنید اگر گرافی با n رأس و m یال را روی صفحه رسم کنیم، حداقل $m - ۳n + ۶$ برخورد بین یال‌ها به وجود می‌آید.

حل. برای اثبات به ازای یک n ثابت از استقرا بر روی m استفاده می‌کنیم. برای حالت پایه، اگر گراف $۳n - ۵$ یال داشته باشد آن‌گاه چون مسطح نیست در نتیجه حداقل یک برخورد دارد. حال فرض کنید $m \geqslant ۳n - ۴$. چون گراف مسطح نیست در نتیجه حداقل یک برخورد دارد. یالی که دارای یک برخورد است را حذف می‌کنیم. طبق فرض استقرا در گراف باقی‌مانده $(m - ۱) - ۳n + ۶$ برخورد داریم. حال با اضافه شدن این یال، $m - ۳n + ۶$ برخورد داریم. درنتیجه، حکم ثابت می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۴. گراف مکمل

فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید می‌توان روی هر رأس G یک عدد طبیعی نوشت، طوری که دو رأس u و v مجاور باشند اگر و فقط اگر اعداد طبیعی نوشته‌شده روی u و v نسبت به هم اول باشند.

حل. بر روی یال‌های گراف $\overline{G}$ اعداد اول متمایز می‌نویسیم. حال بر روی هر راس حاصل ضرب اعداد روی یال‌هایش در $\overline{G}$ قرار می‌دهیم. حال ثابت می‌کنیم این شماره‌گذاری، ویژگی خواسته شده را دارد. دو راس نامجاور در G را درنظر بگیرید. این دو راس در $\overline{G}$ مجاور بوده‌اند، در نتیجه عدد اولی که بر روی یال بین آن‌ها بوده است، عامل اول مشترک بین این دو راس است و این دو عداد نسبت به هم اول نخواهند بود. حال دو راس که در G مجاورند را در نظر بگیرید. این دو راس در $\overline{G}$ مجاور نیستند، در نتیجه تعداد یال مشترکی ندارند و تمام عوامل اول آن‌ها با هم متفاوتند، در نتیجه نسبت به یکدیگر اول هستند. بنابراین حکم مسئله اثبات می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۵. شمارش گراف

تعداد گراف‌های ساده‌ی n رأسی که درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج است را به دست آورید.

حل. ثابت می‌کنیم این مقدار برابر است با $۲^{\binom{n-۱}{۲}}$.

برای این کار یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی گراف‌های n راسی با درجه‌ی زوج و تمام گراف‌های $n - ۱$ راسی برقرار می‌کنیم. فرض کنید یک گراف $n - ۱$ راسی داریم. راس n را به این صورت به گراف اضافه می‌کنیم

که این راس به هر راسی که درجه‌اش فرد است یال داشته باشد و چون مجموعه‌ی درجه‌های یک گراف زوج است در نتیجه درجه‌ی خود راس n نیز زوج می‌شود. تمام گراف‌های به دست آمده متفاوت هستند زیرا یال‌های آن‌ها در $n-1$ راس اول متفاوت است. درنتیجه به هر گراف $n-1$ راسی، یک گراف n راسی با درجه‌ی زوج متناظر کردیم.

حال یک گراف n راسی با درجه‌های زوج را در نظر بگیرید. از این گراف، گراف $n-1$ راسی را به این صورت به دست می‌آوریم که راس n را حذف می‌کنیم. حال ثابت می‌کنیم گراف‌های به دست آمده متفاوت هستند. دو گراف با درجات زوج را در نظر بگیرید. اگر یال‌هایی که به راس n وصل است در دو گراف یکسان باشد، آنگاه این دو گراف در $n-1$ راس دیگر با هم متفاوت بودند زیرا این دو گراف حداقل در یک یال متفاوت هستند و حکم برقرار است. اگر یال‌هایی که به راس n وصل است متفاوت باشند در نتیجه زوجیت درجه‌های این دو گراف در $n-1$ راس باقی مانده متفاوت است، در نتیجه دو گراف به دست آمده متفاوت است و تناظر ما برقرار است. چون تعداد گراف‌های $n-1$ راسی برابر با $2^{\binom{n-1}{2}}$ است، پس تعداد گراف‌های n راسی با درجات زوج برابر است با همین مقدار و حکم ثابت می‌شود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۶. زیرگراف زوج

فرض کنید G یک گراف ساده‌ی همبند با تعداد زوجی رأس باشد. ثابت کنید می‌توان زیرگرافی از G را انتخاب کرد که درجه‌ی همه‌ی رأس‌ها در آن زیرگراف فرد باشد.

حل. برای اثبات از استقرا بر روی n استفاده می‌کنیم. برای حالت پایه، حالت $n = 2$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت، تنها یک یال داریم و اگر آن را انتخاب کنیم حکم برقرار است. حال فرض کنید برای تمامی مقادیر زوج کوچک‌تر از n حکم برقرار باشد. می‌خواهیم حکم را برای n نیز ثابت کنیم. چون گراف همبند است پس یک درخت پوشا دارد و این درخت پوشا حداقل دو برگ دارد. این دو راس را u و v می‌نامیم. با حذف این دو راس، بقیه راس‌های از طریق یال‌های درخت به هم مسیر دارند و بنابراین گراف ما همبند می‌ماند و طبق فرض استقرا یک زیرگراف دارد که درجه تمام راس‌ها در آن فرد است. حال مسیری بین دو راس u و v را در نظر بگیرید. یال‌هایی در مسیر که در زیرگراف انتخاب شده‌اند را از زیر گراف حذف می‌کنیم و یال‌هایی که انتخاب نشده‌اند را اضافه می‌کنیم. تنها زوجیت دو سر مسیر که همان u و v هستند تغییر کرده است. در نتیجه درجه تمام راس‌ها فرد می‌شود و حکم مسئله اثبات می‌شود. $\triangleright$

مسئله‌ی ۷. دسته‌ی برگ‌دار

تعداد درخت‌های n رأسی ($n \geqslant 2$) را به دست آورید که می‌توان رأس‌های آن را به گونه‌ای به دو دسته تقسیم کرد که شرایط زیر برقرار باشند:

- دو سر هر یال در دسته‌های متفاوتی باشند.
- اگر اندازه‌ی دو دسته برابر است، در هر دسته حداقل یک برگ وجود داشته باشد. اگر اندازه‌ی دو دسته برابر نیست، در دسته‌ی بزرگ‌تر حداقل یک برگ وجود داشته باشد.

حل. می‌دانیم درخت دو بخشی است بنابراین می‌توان رئوس آن را به دو دسته تقسیم کرد طوری که دو سر هیچ یالی در یک دسته نباشند. حال ثابت می‌کنیم در هر دسته‌بندی رئوس درخت که خاصیت اول را دارد، خاصیت دوم نیز برقرار است و به این ترتیب پاسخ تعداد درخت‌های n راسی است که برابر n^{n-2} است.

یک دسته‌بندی با خاصیت اول در نظر بگیرید. اگر در هر دو دسته یک راس برگ وجود داشته باشد خاصیت دوم نیز برقرار است. بنابراین فرض کنید در یکی از دسته‌ها برگ نباشد. رئوس دسته‌ای که برگی در آن نیست را رئوس سیاه و سایر رئوس را سفید می‌نامیم. توجه کنید که با مشخص شدن رنگ یک راس رنگ سایر رئوس به صورت یکتا تعیین

می‌شود. حال درخت را از یک راس سیاه مثل u آویزان کنید. به این ترتیب هر راس سیاه از آن‌جا که برگ نیست، حداقل یک بچه‌ی سفید دارد. از طرفی u حداقل دو بچه‌ی سفید دارد. بنابراین تعداد رئوس سفید اکیدا از تعداد رئوس سیاه بیشتر است. بنابراین این دسته حتما اندازه‌اش کوچک‌تر است و بنابراین خاصیت دوم برقرار است. $\triangleright$