۱. نشان دهید اگر G ناهمبند باشد، $\overline{G}$ همبند است.

۲. نشان دهید هر گراف که $m > \binom{n-1}{2}$ باشد، همبند است.

۳. نشان دهید اگر گراف ساده‌ای با دنباله‌ی درجات $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ وجود داشته باشد که $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_n$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوج است و به ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$$

جالب است بدانید که عکس این گزاره نیز برقرار است.

۴. نشان دهید گراف ساده‌ای با دنباله‌ی درجات $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ وجود دارد که $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_n$، اگر و تنها اگر گراف ساده‌ای با دنباله‌ی درجات $\mathbf{d}' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ وجود داشته باشد.

۵. نشان دهید به ازای هر گراف G، زیرگراف دوبخشی پوشای H از G وجود دارد که در آن درجه‌ی هر رأس حداقل نصف درجه‌ش در G باشد.

۶. نشان دهید هر گراف را می‌توان طوری جهت‌دهی کرد که درجه‌ی خروجی هر رأس v حداقل $\left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$ باشد.

۷. گراف دل‌خواه G را در نظر بگیرید. یک زیرگراف (نه لزوماً القایی) یک‌ریخت با C_4 از آن را انتخاب کرده و یک یال دل‌خواه آن زیرگراف را حذف می‌کنیم.

(آ) نشان دهید همبندی و دوبخشی‌بودن یک گراف تحت این عمل تغییر نمی‌کند.

(ب) با شروع از K_n، این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم که زیرگرافی یک‌ریخت با C_4 باقی نماند. کم‌ترین تعداد یال باقی مانده‌ی ممکن چند است؟

۸. یال‌های K_n را که $n \geqslant 3$، با دو رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید دوری همیلتونی وجود دارد که یا تک‌رنگ است و یا از دو مسیر تک‌رنگ تشکیل شده است.

۹. روی تمامی یال‌های گراف کامل n رأسی، $n \geqslant 3$، اعداد صحیح می‌گذاریم. ثابت کنید مجموع اعداد یال‌های هر دور زوج است، اگر و تنها اگر مجموع اعداد یال‌های هر مثلث زوج باشد.

۱۰. یک گراف را زوج می‌گوییم هرگاه درجه‌ی همه‌ی رئوس‌ش زوج باشند. روی تمامی یال‌های گراف کامل n رأسی، $n \geqslant 3$، اعداد صحیح می‌گذاریم. ثابت کنید مجموع اعداد یال‌های هر زیرگراف زوج، زوج است، اگر و تنها اگر مجموع اعداد یال‌های هر دور زوج، زوج باشد.

۱۱. نشان دهید در گراف دوبخشی kـ منتظم $G[X, Y]$ داریم $|X| = |Y|$.

۱۲. گراف دوبخشی $G[X, Y]$ را در نظر بگیرید که راس منزوی ندارد و به ازای هر یال $xy \in E$ که $x \in X$ و $y \in Y$ داریم $d(y) \leqslant d(x)$. نشان دهید $|X| \leqslant |Y|$.

۱۳. اتاقی مستطیل شکل را با کاشی‌هایی مستطیلی (نه لزوماً مشابه) فرش کرده‌ایم. یعنی تمام اتاق را با این کاشی‌ها پوشانده‌ایم و هیچ دو کاشی‌ای روی هم نیافتاده‌اند. ثابت کنید اگر هر کاشی ضلعی به طول صحیح داشته باشد، اتاق نیز ضلعی به طول صحیح دارد.

۱۴. نشان دهید هر گراف که در آن داشته باشیم $\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2} > \binom{n}{2}$، شامل یک C_4 است.

۱۵. نشان دهید هر گراف ساده با بیش از $\frac{n}{4}(\sqrt{4n-3}+1)$ یال شامل یک C_4 است.

۱۶. نشان دهید هر گراف ساده با حداقل دو رأس، دو رأس با درجه‌ی برابر دارد.

۱۷. نشان دهید هر گراف ساده‌ی G یک مسیر به طول $\delta(G)$ دارد.

۱۸. نشان دهید هر گراف ساده‌ی G که $\delta(G) > 2$، دوری به طول حداقل $\delta(G)+1$ دارد.

۱۹. نشان دهید هر گراف ساده‌ی G شامل رأسی مانند v و $\left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$ دور است که دوبه‌دوی این دورها، در رأس v و فقط در رأس v اشتراک دارند.

۲۰. گراف بدون مثلث G را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید برای هر $uv \in E(G)$ داریم $d(u)+d(v) \leqslant n$.

ب) نشان دهید $\sum_{v\in V(G)} d(v)^2 \leqslant mn$.

ج) نتیجه بگیرید هر گراف بدون مثلث حداکثر $\frac{n^2}{4}$ تا یال دارد.

۲۱. در گراف بدون مثلث G داریم $\delta(G) > \frac{2n}{5}$. نشان دهید این گراف دوبخشی است.

۲۲. گرافی را که بتوان رئوس آن را به k مجموعه‌ی مستقل افراز کرد، گراف kـ بخشی می‌گوییم. گراف kـ بخشی‌ای را که هر دو رأس از دو بخش مختلف به هم متصل باشند، گراف kـ بخشی کامل می‌گویند. نشان دهید بین همه‌ی گراف‌های kـ بخشی، گراف kـ بخشی کاملی که تعداد رئوس هر بخش آن $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ یا $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ باشد، بیش‌ترین تعداد یال را دارد. بیش‌ترین تعداد یال ممکن برای یک گراف kـ رنگ‌پذیر nـ رأسی را به دست آورید.

۲۳. در گراف G داریم $|V(G)| = kp$ و $\delta(G) \geqslant kq$. نشان دهید زیرگراف F در G وجود دارد که $v[F] = p$ و $\delta(G[F]) \geqslant q$.

۲۴. نشان دهید هر گراف ساده‌ی G با میانگین درجه‌ی $2k$ که $k \geqslant 1$، زیرگرافی مانند F دارد که $\delta(F) \geqslant k+1$.

۲۵. نشان دهید در هر تورنمنت رأسی وجود دارد که به هر رأس دیگری مسیری به طول حداکثر ۲ دارد.

۲۶. در تورنمنتی فقط یک رأس وجود دارد که به هر رأس دیگر مسیری به طول حداکثر دو داشته باشد. نشان دهید درجه‌ی خروجی این رأس $n-1$ است.

۲۷. نشان دهید هر تورنمنت، یک مسیر همیلتونی جهت‌دار دارد.

۲۸. نشان دهید هر تورنمنت قویاً همبند با حداقل ۳ رأس، شامل یک دور همیلتونی جهت‌دار است.

۲۹. نشان دهید هر تورنمنت همیلتونی n رأسی، به ازای هر $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$ شامل یک دور جهت‌دار به طول k است.

۳۰. نشان دهید هر گراف جهت‌داری که شامل یک گشت بسته به طول فرد باشد، شامل یک دور جهت‌دار به طول فرد است.

۳۱. گراف G را خودمکمل می‌گوییم هرگاه با $\overline{G}$ یک‌ریخت باشد.

الف) فرض کنید G یک گراف خودمکمل باشد. نشان دهید گراف G' که از گراف $G \cup P_۴$ با متصل کردن رئوس اول و سوم $P_۴$ به تمام رئوس G به دست می‌آید، یک گراف خودمکمل است. $P_۴$ مسیر ۴ رأسی است.

ب) نشان دهید گراف خودمکمل n رأسی وجود دارد، اگر و تنها اگر n به پیمانه‌ی ۴ برابر صفر یا یک باشد.

۳۲. نشان دهید هر دو طولانی‌ترین مسیر یک گراف، یک رأس مشترک دارند.

۳۳. نشان دهید هر گراف ساده با $n + ۴$ رأس شامل دو دور مجزای یالی است.

۳۴. نشان دهید هر ترسیمی از یک گراف مسطح روی صفحه، تعداد نواحی یکسانی دارد.

۳۵. نشان دهید هر گراف مسطح، رأسی از درجه‌ی حداکثر ۵ دارد.

۳۶. نشان دهید هر گراف مسطح ۵ـ رنگ‌پذیر است.

۳۷. نشان دهید گراف G را هرطور روی صفحه رسم کنیم، حداقل $m - n + ۶$ جفت یال یک‌دیگر را قطع خواهند کرد.

۳۸. طول کوچک‌ترین دور یک گراف را کمر آن گراف نامیده و با $g(G)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید در هر گراف مسطح $|E(G)| \leqslant \frac{g(G)}{g(G)-۲}(|V(G)| - ۲)$.

۳۹. نشان دهید مکمل هر گراف مسطح با حداقل ۱۱ رأس نامسطح است.

۴۰. کم‌ترین تعداد گراف مسطحی را که اجتماع آن‌ها برابر گراف G باشد، ضخامت گراف G می‌نامیم و با $\theta(G)$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید $\theta(G) \geqslant \left\lceil \frac{|E(G)|}{۳|V(G)|-۶} \right\rceil$.

۴۱. نشان دهید در گراف دوبخشی G، $\theta(G) \geqslant \left\lceil \frac{|E(G)|}{۲|V(G)|-۴} \right\rceil$.

۴۲. عدد رنگی یک گراف جهت‌دار را برابر عدد رنگی گراف زمینه‌ی آن تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید در هر گراف جهت‌دار D، طول بلندترین مسیر جهت‌دار حداقل به اندازه‌ی $\chi(D)$ است.

ب) نشان دهید برای هر گراف G، جهت‌دهی‌ای وجود دارد که طول بلندترین مسیر جهت‌دار آن $\chi(G)$ باشد.

ج) نتیجه بگیرید عدد رنگی گراف، برابر با کم‌ترین طول بلندترین مسیر بین همه‌ی جهت‌دهی‌های بدون دور آن گراف است. یعنی اگر طول بلندترین مسیر گراف جهت‌دار D را با $L(D)$ نمایش دهیم، عدد رنگی گراف G برابر کم‌ترین مقدار $L(D)$ بین همه‌ی گراف‌های جهت‌دار D است که گراف زمینه‌ی آن‌ها G باشد.

۴۳. نشان دهید در هر رنگ‌آمیزی معتبر از گراف G با $\chi(G)$ رنگ، به ازای هر رنگ c، رأسی به رنگ c وجود دارد که در هم‌سایگی آن هر رنگ دیگری ظاهر شده است.

۴۴. نشان دهید در هر گراف G، حداقل $\chi(G)$ رأس از درجه‌ی حداقل $\chi(G) - ۱$ وجود دارد.

۴۵. گراف $G = G_۱ \cup G_۲$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $\chi(G) \leqslant \chi(G_۱)\chi(G_۲)$.

۴۶. نشان دهید اگر هر دو دور یک گراف G اشتراک رأسی داشته باشند، آنگاه $\chi(G) \leqslant ۵$.

۴۷. گرافی با دنباله‌ی درجات نزولی $\mathbf{d} = (d_۱, d_۲, \dots, d_n)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\chi \leqslant \max_{۱\leqslant i\leqslant n} \{min\{d_i + ۱, i\}\}$$

نتیجه بگیرید $\chi \leqslant \lceil \sqrt{۲m} \rceil$.

۴۸. نشان دهید $۲\sqrt{n} \leqslant \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + ۱$.

۴۹. تعداد رنگ‌آمیزی‌های گراف G با k رنگ را با $c(G,k)$ نمایش می‌دهیم. اگر e یال دل‌خواهی از G باشد، منظور از $G\backslash e$، گراف حاصل از حذف یال e از گراف G است و منظور از G/e، گراف حاصل از یکی کردن دو سر یال e و ایجاد یک ابررأس از دو رأس مجاور یال e است. همسایه‌های این ابررأس، اجتماع همسایه‌های دو رأس قبلی خواهد بود. نشان دهید $c(G,k) = c(G\backslash e, k) - c(G/e, k)$.

۵۰. یک رنگ‌آمیزی از یال‌های گراف G را سره می‌گوییم هرگاه هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نباشند. به کم‌ترین تعداد رنگی که گراف G رنگ‌آمیزی یالی سره داشته باشد، عدد رنگی یالی گراف G می‌گوییم و آن را با $\chi'(G)$ نشان می‌دهیم. عدد رنگی یالی دورها را مشخص کنید.

۵۱. ثابت کنید اگر n فرد باشد $\chi'(K_n) = n$ و اگر n زوج باشد $\chi'(K_n) = n - ۱$.

۵۲. الف) نشان دهید هر گراف دوبخشی مانند G که $\Delta(G) = k$، با یک زیرگراف القایی یک گراف دوبخشی kـ منتظم یک‌ریخت است.

ب) نشان دهید عدد رنگی یالی هر گراف دوبخشی G برابر $\Delta(G)$ است.

۵۳. نشان دهید درختی با دنباله‌ی درجات $\mathbf{d} = (d_۱, \dots, d_n)$ که d_iها اعداد صحیح مثبت هستند، وجود دارد اگر و تنها اگر $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲$.

۵۴. مرکز گراف به رأسی می‌گوییم که بیش‌ترین فاصله‌اش تا رئوس دیگر کمینه باشد. نشان دهید هر درخت یک مرکز یا دو مرکز مجاور دارد.

۵۵. درخت ریشه‌دار T و گراف ساده‌ی G داده شده است، طوری که $\delta(G) = |V(T)| - ۱$.

الف) نشان دهید برای هر رأس دل‌خواه $v \in V(G)$، زیرگرافی از G وجود دارد که با T یک‌ریخت است و v رأس متناظر با ریشه‌ی T است.

ب) نتیجه بگیرید T با یک زیرگراف G یک‌ریخت است.

۵۶. نشان دهید هر گراف ساده با میانگین درجات حداقل $۲(k - ۱)$، که $k - ۱$ عددی صحیح و مثبت است، به ازای هر درخت $k + ۱$ رأسی زیرگرافی یک‌ریخت با آن درخت دارد.

۵۷. می‌خواهیم تعداد درخت‌های متفاوت روی n رأس نام‌گذاری شده را بشماریم. این عملیات را برای ساختن یک درخت ریشه‌دار در نظر بگیرید: در هر مرحله، یک جنگل ریشه‌دار داریم. یک رأس دل‌خواه و یک درخت دل‌خواه به‌جز درختی که شامل رأس مورد نظر است، انتخاب می‌کنیم و ریشه‌ی درخت مذکور را فرزند آن رأس قرار می‌دهیم. این کار را $n - ۱$ بار تکرار می‌کنیم.

الف) نشان دهید خروجی این عملیات یک درخت ریشه‌دار است.

ب) به چند طریق می‌توان عملیات فوق را انجام داد؟

ج) هر درخت ریشه‌دار به چند طریق توسط عملیات فوق ساخته می‌شود؟

د) تعداد درخت‌های ریشه‌دار روی n رأس متمایز را بشمارید.

ه) تعداد درخت‌های روی n رأس متمایز را بشمارید.

۵۸. تعداد درخت‌های پوشای گراف همبند G را با $t(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر e یال دل‌خواهی از G باشد، منظور از $G\backslash e$، گراف حاصل از حذف یال e از گراف G است و منظور از G/e، گراف حاصل از یکی کردن دو سر یال e و ایجاد یک ابررأس از دو رأس مجاور یال e است. همسایه‌های این ابررأس، اجتماع همسایه‌های دو رأس قبلی خواهد بود. نشان دهید $t(G) = t(G/e) + t(G\backslash e)$.

۵۹. درخت دل‌خواه T با k برگ را در نظر بگیرید. نشان دهید T اجتماع $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ مسیر است که دوبه‌دو اشتراک رأسی دارند.

۶۰. درخت پوشای T از گراف وزن‌دار همبند G را به این صورت می‌سازیم: در هر مرحله، سنگین‌ترین یال باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و اگر حذف آن باعث ناهمبندی گراف نمی‌شد، آن را حذف می‌کنیم. نشان دهید درخت T، درخت پوشای کمینه‌ی گراف G است.

۶۱. درخت گلوگاهی گراف وزن‌دار همبند G به زیرگرافی پوشا از G می‌گویند که درخت است و وزن سنگین‌ترین یال آن، بین همه‌ی درخت‌های پوشای G کمینه است. نشان دهید هر درخت پوشای کمینه‌ی G یک درخت گلوگاهی G نیز هست.