



ساختارهای گسسته

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

نمونه سؤالات

مدل‌سازی محاسبات

سری دهم

۱. نشان دهید زبان‌های زیر منظم هستند.

(الف) رشته‌های دودویی که به ۰۱ ختم شوند.

(ب) رشته‌های دودویی که شامل ۱۰۱ نباشند.

(ج) رشته‌هایی از اعداد در مبنای ده که بر ۵ بخش‌پذیر باشند.

(د) رشته‌هایی از اعداد در مبنای ده که بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

(ه) زبان رشته‌هایی روی الفبای $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ که در آن‌ها عدد دودویی سطر بالا، سه برابر عدد دودویی سطر پایین است.(و) زبان رشته‌هایی روی الفبای $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ که در آن‌ها عدد دودویی سطر پایین، مجموع عدد دودویی دو سطر دیگر است.

۲. برای زبان‌های زیر یک ماشین حالت متناهی قطعی رسم کنید.

(الف) زبان رشته‌های دودویی که شامل ۰۱۰ هستند ولی شامل ۰۱۱ و ۱۰۱۰ نیستند.

(ب) زبان رشته‌های دودویی که در آن‌ها تعداد صفرها مضرب ۳ است و تعداد یک‌ها مضرب ۲ نیست.

(ج) زبان اعدادی در مبنای دو که بر ۵ بخش‌پذیر هستند.

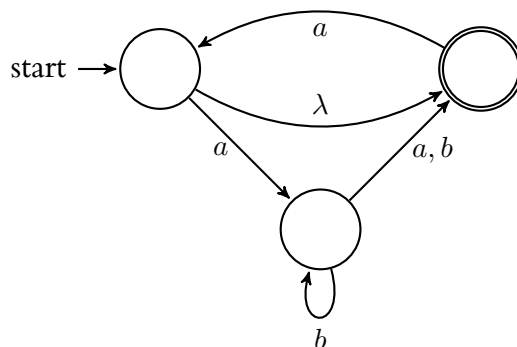
(د) زبان رشته‌های دودویی که هر زیررشته‌ی چهارحرفی متوالی آن شامل یک ۰۱ باشد.

۳. روشی ارائه دهید که به ازای هر عدد طبیعی n ، یک ماشین حالت متناهی برای زبان رشته‌های دودویی مضرب n ایجاد کند.

۴. ثابت کنید هر زبان متناهی منظم است.

۵. ثابت کنید تفاضل متقارن هر دو زبان منظم A و B که به صورت $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$ تعریف می‌شود، منظم است.۶. برای زبان‌های زیر، NFA با تعداد حالت‌های مشخص شده طراحی نمایید. در همه‌ی قسمت‌ها الفبا را $\Sigma = \{0, 1\}$ در نظر بگیرید.(الف) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ends with } 00\}$ با سه حالت.(ب) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contains the substring } 0101\}$ با پنج حالت.(ج) $0^*1^*0^*$ با سه حالت.۷. (الف) با یک مثال نشان دهید اگر N یک NFA باشد که زبان L را تشخیص می‌دهد. از تغییر دادن حالت‌های پذیرش ماشین N به حالت‌های غیرپذیرش و برعکس، لزوماً یک NFA حاصل نمی‌شود که \bar{L} را تشخیص دهد.

ب) آیا مجموعه‌ی زبان‌هایی که NFA ها آن‌ها را تشخیص می‌دهند، نسبت به عمل مکمل‌گیری بسته است؟
 ۸. یک ماشین حالت متناهی قطعی رسم کنید که همان زبان ماشین حالت متناهی غیرقطعی زیر را داشته باشد.



۹. برای هر یک از زبان‌های زیر یک عبارت منظم بیان کنید که آن را توصیف کند. در همه‌ی قسمت‌ها الفبا $\Sigma = \{a, b\}$ است.

الف) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ has an odd number of } a\text{'s}\}$

ب) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contains at least two } a\text{'s, or exactly two } b\text{'s}\}$

ج) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ends in two similar letters}\}$

د) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contains exactly one double letter}\}$

۱۰. نشان دهید زبان $L = \{a^n b^m \mid m \neq n\}$ نامنظم است.

۱۱. ثابت کنید زبان‌های زیر نامنظم‌اند. الفبا $\Sigma = \{a, b\}$ است؛ یعنی تعداد a ها در w و $\#b(w)$ یعنی تعداد b ها در w .

الف) $\{w \in \Sigma^* \mid \#a(w) = \#b(w) + 2\}$

ب) $\{w \in \Sigma^* \mid \#a(w) = 2 \times \#b(w)\}$

۱۲. یک DFA و یک NFA طراحی کنید که زبان L را بپذیرند که در آن، تمام رشته‌ها در جایگاه سه تا مانده به آخر، ۱ داشته باشند. برای این زبان عبارت منظم نیز بنویسید. برای مثال، رشته‌ی ۰۰۱۰۱ در این زبان قرار دارد و ۰۱ در این زبان نیست. الفبای L ، $\Sigma = \{0, 1\}$ است.

۱۳. ثابت کنید می‌توان هر NFA را به یک NFA معادل تبدیل کرد که در آن فقط یک حالت پایانی وجود داشته باشد.

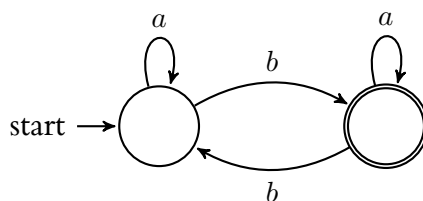
۱۴. برای زبان L ، L^+ معادل با $\bigcup_{k=1}^{\infty} L^k$ تعریف می‌شود. اگر B یک زبان منظم روی الفبای Σ باشد، ثابت کنید $B = B^+$ اگر و تنها اگر $BB \subseteq B$.

۱۵. ثابت کنید اگر زبان یک DFA با q حالت، برابر با Σ^* نباشد، آنگاه رشته‌ای به طول l وجود دارد که در زبان آن DFA وجود ندارد و $l < q$ است.

۱۶. یک DFA با ۵ حالت و یک عبارت منظم برای زبان زیر طراحی کنید. الفبا را $\Sigma = \{a, b\}$ در نظر بگیرید.

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \#a(w) \text{ is even and } \#b(w) \text{ is odd and } w \text{ doesn't have } ab\}$

۱۷. زبان ماشین حالت متناهی قطعی زیر را با عبارات منظم توصیف کنید.



۱۸. برای عبارات منظم زیر، ماشین حالت متناهی قطعی یا غیرقطعی طراحی کنید.

الف) $a(abb)^* \cup b$

ب) $a^+ \cup (ab)^+$

ج) $(a \cup b^+)a^+b^+$

۱۹. به ازای هر زبان A روی الفبای Σ ، زبان A_{\neq} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{xz \mid \exists y \in \Sigma^* : |x| = |y| = |z| \wedge xyz \in A\}$$

نشان دهید اگر A منظم باشد، A_{\neq} نیز منظم است.

۲۰. برای زبان‌های A و B با الفبای یکسان، تعریف می‌کنیم:

$$\text{PerfectShuffle}(A, B) = \{w \mid w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k \wedge a_1 \cdots a_k \in A \\ \wedge b_1 \cdots b_k \in B \wedge (\forall i : a_i, b_i \in \Sigma)\}$$

ثابت کنید مجموعه زبان‌های منظم نسبت به PerfectShuffle بسته است.

۲۱. اگر زبان A منظم باشد، نشان دهید زبان رشته‌های معکوس رشته‌های A نیز منظم است. منظور از معکوس یک رشته، رشته‌ای است که از خواندن رشته از آخر به اول به دست می‌آید. مثلاً معکوس رشته‌ی ۱۰۰، رشته‌ی ۰۰۱ است.

۲۲. برای زبان‌های A و B با الفبای یکسان، تعریف می‌کنیم:

$$\text{Shuffle}(A, B) = \{w \mid w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k \wedge a_1 \cdots a_k \in A \\ \wedge b_1 \cdots b_k \in B \wedge (\forall i : a_i, b_i \in \Sigma^*)\}$$

ثابت کنید مجموعه‌ی زبان‌های منظم نسبت به Shuffle بسته است.

۲۳. فرض کنید C_n زبانی است که رشته‌های آن، اعداد دودویی بخش‌پذیر بر n هستند. نشان دهید که برای هر $n \geq 1$ زبان C_n منظم است.

۲۴. الف) ثابت کنید زبان $\{1^{f_n} \mid n \geq 0\}$ نامنظم است (f_n عدد n ام در دنباله‌ی فیبوناچی است).

ب) دنباله‌های a و b را در نظر بگیرید. اگر $a_1 \geq 0$ ، $b_n = a_{n+1} - a_n$ ، $b_1 \geq 0$ باشد و بدانیم b اکیداً صعودی است، ثابت کنید زبان $\{1^{a_n} \mid n \geq 1\}$ منظم نیست.

۲۵. ثابت کنید اگر L_1 زبانی نامنظم و L_2 زبانی متناهی باشد، $L_1 \setminus L_2$ نامنظم است.

۲۶. گزاره‌های زیر را اثبات کرده یا با آوردن مثال نقض رد کنید:

الف) اگر L زبانی منظم باشد، L^* نیز منظم است.

ب) اگر L زبانی نامنظم باشد، L^* نیز نامنظم است.

ج) اجتماع تعدادی شمارا زبان متناهی، منظم است.

۲۷. ثابت کنید زبان «رشته‌هایی که پراوتزگذاری صحیح دارند» روی الفبای $\{(), \{\}, \Sigma\}$ نامنظم است. مثلاً رشته‌ی $(((((\{\})))((\{\})))$ عضوی از این زبان است.

۲۸. الف) زبان L_1 روی الفبای $\{0, 1\}$ به صورت «مجموعه‌ی رشته‌هایی که تعداد رخ دادن زیررشته‌ی 010 در آن‌ها، بزرگ‌تر از یا مساوی با تعداد رخ دادن زیررشته‌های برابر با 101 است» تعریف شده است (رخ دادن‌ها می‌توانند اشتراک داشته باشند، مثلاً رشته‌ی 1010 یک عدد از هر کدام از زیررشته‌های مذکور دارد). ثابت کنید L_1 نامنظم است.

ب) L_2 روی الفبای $\{0, 1\}$ به صورت «مجموعه‌ی رشته‌هایی که 11 در آن‌ها وجود ندارد» تعریف شده است. اگر $L_3 = L_1 \cap L_2$ باشد، ثابت کنید L_3 منظم است.

۲۹. ثابت کنید تعداد زبان‌های دارای الفبای $\{0, 1\}$ که توسط ماشین‌های تورینگ تشخیص داده می‌شوند شماراست.

۳۰. ماشین تورینگی رسم کنید که زبان‌های زیر را تشخیص دهد. l, m و n اعداد صحیح نامنفی هستند.

$$L_1 = \{a^l b^m c^n \mid l = m = n\} \quad \text{الف)}$$

$$L_2 = \{a^l b^m c^n \mid l + m = n\} \quad \text{ب)}$$

$$L_3 = \{a^l b^m c^n \mid l \times m = n\} \quad \text{ج)}$$

۳۱. ماشین تورینگی رسم کنید که زبان $\{w \# w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ را تصمیم بگیرد، سپس محتویات بخش استفاده شده از نوار ماشین به ازای ورودی $100 \# 101$ را مرحله به مرحله بنویسد.

۳۲. در ماشین‌های تورینگ «عادی»، هد نوار می‌تواند به چپ یا راست حرکت کند. به طور دقیق‌تر، اگر Q مجموعه‌ی حالت‌های ماشین، Σ الفبای نوار و f تابع انتقال باشد:

$$f : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{R, L\}$$

در ماشین‌های تورینگ «بازگردانی شونده»، هد نوار می‌تواند به راست حرکت کند یا به ابتدای نوار جهش کند، یعنی:

$$f : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{R, \text{RESET}\}$$

در هر دو نوع ماشین تورینگ، نوار از سمت چپ محدود و از سمت راست نامحدود است.

زبان دلخواه L و ماشین تورینگ «عادی» M که آن را تشخیص می‌دهد را در نظر بگیرید. توضیح دهید چگونه می‌توان ماشین تورینگ «بازگردانی شونده» M' را ساخت که L را تشخیص دهد.

۳۳. ماشین تورینگی رسم کنید که اگر رشته‌ی w متشکل از 0 و 1 روی نوار از خانه‌ای که هد در ابتدا رویش قرار دارد نوشته شود و در همه‌ی خانه‌های دیگر نشانه‌ی \sqcup قرار بگیرد، در همه‌ی خانه‌های حاوی 1 به جز سمت چپ‌ترین 1 ، بنویسد و سپس در حالت پذیرش متوقف شود.

۳۴. ماشین تورینگی رسم کنید که اگر رشته‌ی $w = 1^n$ روی نوار از خانه‌ای که هد در ابتدا رویش قرار دارد نوشته شود و در همه‌ی خانه‌های دیگر نشانه‌ی \sqcup قرار بگیرد، روی نوار باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر عدد 3 را بنویسد و سپس در حالت پذیرش متوقف شود.

۳۵. زبان L و ماشین تورینگ M که آن را تشخیص می‌دهد در نظر بگیرید. توضیح دهید چه تغییراتی باید در M بدهیم تا اولاً همچنان زبان L را تشخیص دهد و ثانیاً وقتی متوقف می‌شود، روی نوارش فقط نشانه‌های \sqcup نوشته شده باشد. فرض کنید در ابتدا روی نوار از خانه‌ای که هد رویش قرار دارد رشته‌ی ورودی نوشته شده و بقیه‌ی خانه‌ها \sqcup هستند.