

ریاضیات مهندسی

جلسه ۱

منابع درس:

۱) ریاضیات مهندسی تألیف دکتر پورتلی، دکتر هماک و دکتر فتحی استشارات علمی دانشگاه شریف و استشارات فاصلی

۲) ریاضیات مهندس پیشرفته تألیف Erwin Kreyszig ترجمه دکتر زینه ود - جهان دیده یا ترجمه دکتر عالمزاده

ارزیابی درس:

میان ترم: پنج شنبه ۲۹ آذر ۹۸ ساعت ۱۳ از بعثت اول درس٪۰۵ نزد

پایان ترم: ۲۲، ۲۳، ۹۸ ساعت ۱۰:۳۰ از بعثت دوم درس٪۰۵ نزد

سفرفصل درس:

بحث ۱:

سری فوریه - سری فوریه تعابع فردوزوج - ترسیم تناوبی (سطح نیم بر)

شکل مختلف سری فوریه - مشتق کردن و انتگرال کردن از سری فوریه

سری فوریه تعمیم یافته - تبدیل فوریه - معادله ایستورم - پیویل

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای - حل معادله ای موج ولایلیس به روش جیساخانی

متغیرها

بحث ۲:

پادآوری ریثک های اعداد مختلط - تابع تحلیلی - روابط کش - ریمان

تابع بنای مثلثاتی، هندولویی، (گارینی و توان - نگاشت نقاطی

تحت تابع ناصل - انتقال روی خم - قضیی انتقال کشی سی

تعان - سی تیلور - سی لوران - نقاط تکین و قطب - مانده - حسابی

برخ از انتقال های ناسه به کمل قضیی مانده ها

سرک فوریه:

پریه های مختلف در طبیعت به وسیله توابع متداول مدل می شوند

این توابع ممکن است حتی پیوسته هم نباشند و در نتیجه برای آنها

بسط تیلور وجود ندارد. می خواهیم به جای بسط تیلور از تکنیک تبدیل

موسم به بسط فوریه برای توابع متداول استفاده کنیم.

پیش از مطرح کردن سرک فوریه به یاد آوری چند روشی که توابع متداول

می پردازم:

در این بخش تابع مورد نظر تحقیق (مقدار) داشتنی آنها DCIR

می تواند هر زیر مجموعی \mathbb{R} باشد که برای سایر بیشتر مباحثه در مورد توابع

بیانی شود که داشتنی آنها \mathbb{R} است.

تابع متداول: کوچک نهاداری دوری تناوب $\neq P$ است، هرگاه

$$\forall x: f(x+P) = f(x) \quad (*)$$

۱- کوچک نهاداری P که در $(*)$ صدق می کند (در صورت وجود آن دوری تناوب

اصلی نامیده می شود.

[مثال]

با درجی تناوب اصلی است: $P = \tau\pi$ ، $f(x) = \sin x$

" " " " " " " " ، $f(x) = \cos x$

" " " " " " " " ، $P = \frac{\tau\pi}{n}$ ، $f(x) = \sin nx$

" " " " " " " " ، $f(x) = \cos nx$

۱- اگر f دو تابع متناوب با دوری تناوب P باشد، $\int \lambda f + g$ نیز

متناوب است با دوری تناوب P .

۲- اگر f متناوب با دوره تناوب P باشد، $P, 2P, 3P, \dots$ نیز یک دوره

تناوب f است.

۳- اگر دری یک دوری تناوب P مثلاً $[\alpha, \tau]$ باشد آنگاه:

$$\int_{\alpha}^{\tau} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} f(x) dx$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

فوریده مطالعی مسئلی انتقال حرارت، ادعا کرد که هر تابع متناوب

که در مسائل فنی و صنعتی ظاهر می شود به شکل زیر قابل نمایش است:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نیام تابع در مجموعی $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ دارای دوره

تاریخی مئلناش
تاریخی مجموعی مئلناش

در گام نخست - همچوین فوریه‌ی خواهیم باز هم باز درست این ادعا

مقادیر a_0, a_n, b_n را بدست آوریم.

برای این منظمه، فرض کنید

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

در این صورت، تحقیق شاید که بعد از مطرح می‌شود داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

نماش سی فوریہ :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

می خواهیم رابطہ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ کا با $f(x)$ بستے آوریم.

اگر تابع متناوب f در یک دورہ تابع (2π) باسی فوریہ ① برابر باشد، داریم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (*)$$

با انٹرال کیسی از دو طرف در بازہ $(-\pi, \pi)$ و با پذیرش اینکہ \int با

جا به جا سعد نتیجہ می شو :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right\} = \\ &= \pi a_0 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

با ضرب دو طرف رابطہ $(*)$ در $\cos mx$ (لئے) اور انٹرال کیں

روی $(-\pi, \pi)$ و با پذیرش تمام شرایط قسمت قبل داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \left[a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \right] dx =$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx)$$

یاد آوری :

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

به شکل مشابه داریم:

$$\forall n, m : \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

باین ترتیب داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

با بحث مشابه و با احتساب دو طرف (*) در $\sin mx$ خواهیم داشت:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

بنابراین به جای $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ باید مناسخ

سری فوریه از شکل زیر استفاده کنند:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

هزینه: پلیارچیشن شکل a_m و a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

در علوم فنی و مهندسی دوره تناسب تابع لزوماً 2π نسبت

بای سادگی فرض کنیم f تابع با دوره تناسب $T = 2\pi$ است.

یاد آوری: اگر اردی بازی $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته کوییم هرگاه حد اکثر

در تعداد متناهی نقطه از این بازه ناپیوسته باشند و در نقاط ناپیوستگی حدیچ

در این صورت f وجود داشته (متناهی) باشد.

قضیه (دیریلله)

فرض کنیم f تابی متناوب با دوری تناوب $T=2\pi$ باشد در این صورت

اگر f در یک دوری تناوب قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه سری فوريه ای

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

باشد

$$n = 0, 1, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

در نقطه x که f پیوسته است، $f(x)$ و در نقطه x ناپیوسته $f(x_0^+) + f(x_0^-)$ باشند.

همچنان است.

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

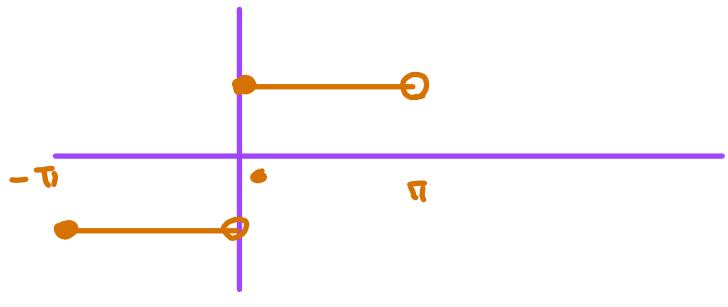
$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$f(x_0 + \pi) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

مثال: مثال خواهیم بسط فوريه تابع

DONE



• مبرهنات

$$T = \tau_{\pi} = \tau L \rightarrow L = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -1 \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin x \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin x \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos nx \right] + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \right] = \\ &= \frac{\tau}{n\pi} - \frac{\tau \cos n\pi}{n\pi} = \frac{\tau}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \frac{\tau}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{\tau}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{\tau}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\tau}{\pi} \sin x + \frac{\tau}{n\pi} \sin nx + \frac{\tau}{\omega\pi} \sin \omega x + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{\Delta} \sin \Delta x + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)} \sin (\pi n) x$$

$$1 = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\Delta} - \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} + \dots$$

مثال: می خواهیم بسط فوریئی تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < L \\ 0 & -L < x < 0 \end{cases}$ را حساب کنیم. DONE

مثال: می خواهیم بسط فوریئی تابع $f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi \leq x < 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases}$ را حساب کنیم. DONE

حل مثال ۱:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^{0} x dx + \int_{0}^{L} x dx \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^{0} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx + \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\int x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$\frac{x}{u} \cos \frac{n\pi}{L} x dx$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x - \int \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x dx =$$

$$= \frac{xL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} x + C$$

$$u = x \quad dv = \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 \cos \frac{n\pi}{L} x dx + \int_0^L x \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \begin{cases} 0 & \text{even} \\ \frac{-L^2}{n^2\pi^2} & \text{odd} \end{cases}$$

$$b_n = - \frac{(-1)^n L}{n\pi}$$

اگر $f(x)$ تابع حقیقی متناوب با دوری $T=2L$ باشد، بسط فوریہی

f عبارت است از :

$$\frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

این سکی مکن است ھمدا یا وکرا باشد.

در حالت کلی نتیجہ لفیضم :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

چند نکته در مورد سکی فوریہ :

اتحاد پارسول:

اگر $f(x)$ تابع متناوب با دوری $T=2L$ در بازی $(-L, L)$

قطعه قطعه پیوستہ باشد، آنکے ضرایب فوریہی a_n, b_n در اتحاد زیر

محققی کن:

$$\frac{1}{\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

مثال: فرض كنتم:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ 1 & x = \pi \end{cases} \quad f(x + \pi) = f(x)$$

داین صورت خوب بسط فوريه را بدست آوردی.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\pi - x) dx = 0$$

$$\forall n \geq 1 : a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\pi - x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(\pi - x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi}$$

(ستفاده از ادحاد پارسوال:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx \\ 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}(\pi - x)\right)^2 dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

لَمِنْ: نشان دهنده بسط فوریه تابع هستارب $f(x + 2\pi) = f(x)$, $f(x) = x^3$

$\pi \leq x \leq 0$ - عبارت است از:

$$x^3 = \frac{\pi^3}{6} + 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi^{2n-1} - 1)}{n^3} \cos n\pi x$$

و به کمال آن ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{90}$$

راهنمایی: مقدار سری فوریه را در $x = \pi$ محاسبه کنید.

بسط فوریه تابع فرد و زوج:

یادآوری:

$$\forall x: f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ فرد است}$$

$$\forall x: f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f \text{ زوج است}$$

حاصل ضرب دو تابع زوج، تابع زوج است.

حاصل ضرب تابع زوج فرد، تابع فرد است.

حاصل ضرب دو تابع فرد، تابع زوج است.

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0 : \text{ برای تابع فرد}$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx : \text{ برای تابع زوج}$$

در نتیجه برای تابع زوج و فرد، بسط فوریه شکل ساده‌تری پیدا کن.

اگر f تابع متناوب زوجی با دوری $T = 2L$ باشد، آنگاه:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

و در نتیجه سی فوریه ای از شکل زیر است و

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

با بدحث متسابه برای تابع فرد f و مشخصات متسابه داریم:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

DONE

مثال: برای $f(x) = x$

$$T = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

داریم:

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{\tau}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= \frac{\tau (-1)^{n+1}}{n}$$

$$x = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

بسط تناوبی زوج و فرد :

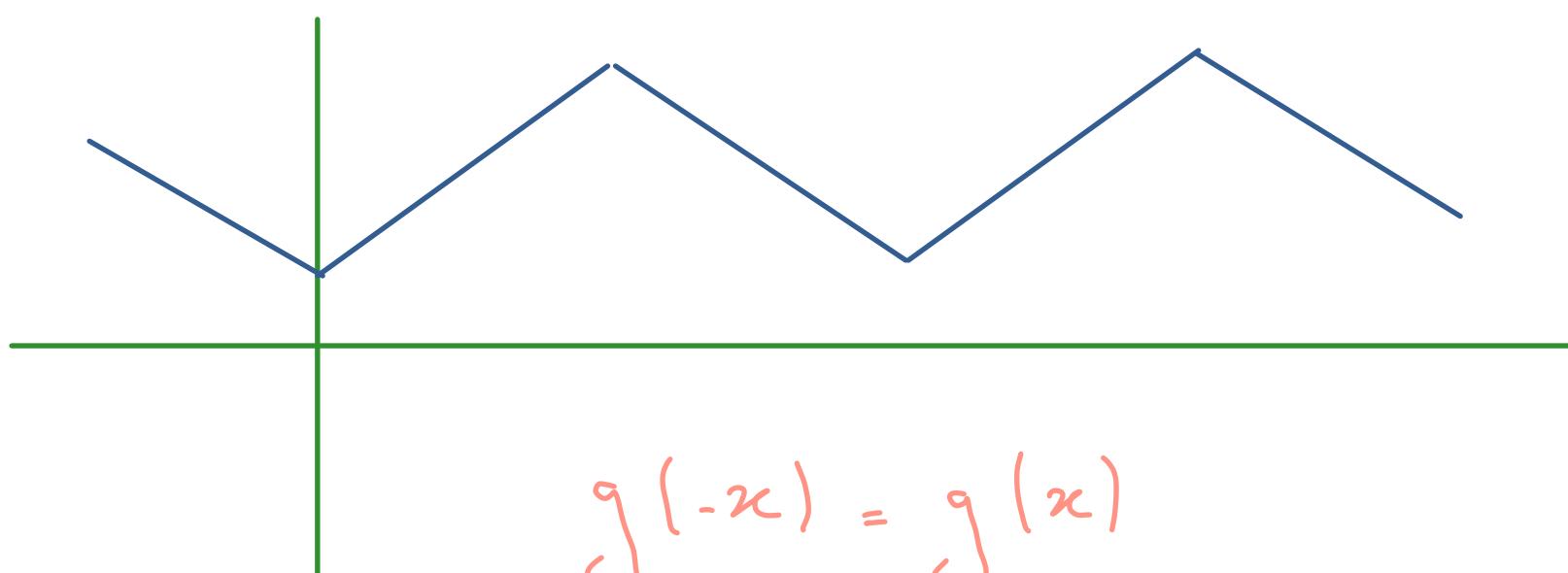
فرض کنیم f تابع باشد که لزوماً متناوب نیست. از روی ضابطی f در

(۱،۰) توانیم یک تابع متناوب زوج یا فرد را $(f-L)$ به شکل زیر داشته

باشیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$g(x + 2L) = g(x)$$

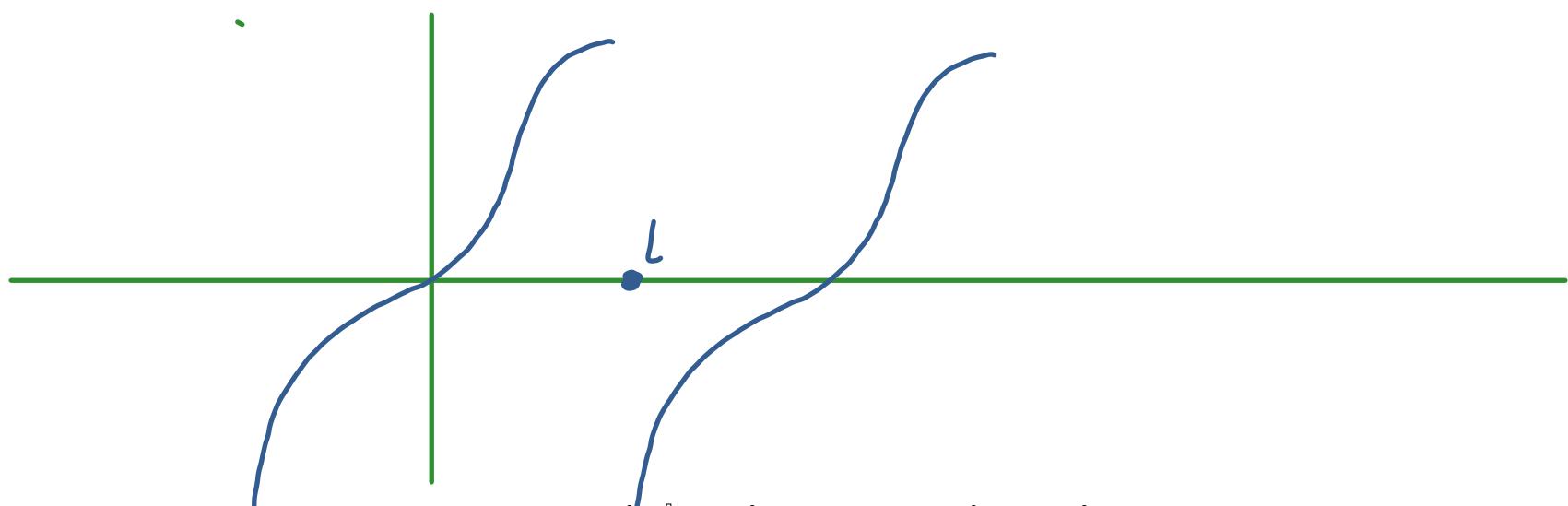


$$g(-x) = g(x)$$

به شکل متسابه :

$$\text{فرموده: } g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$g(x + 2L) = g(x)$$

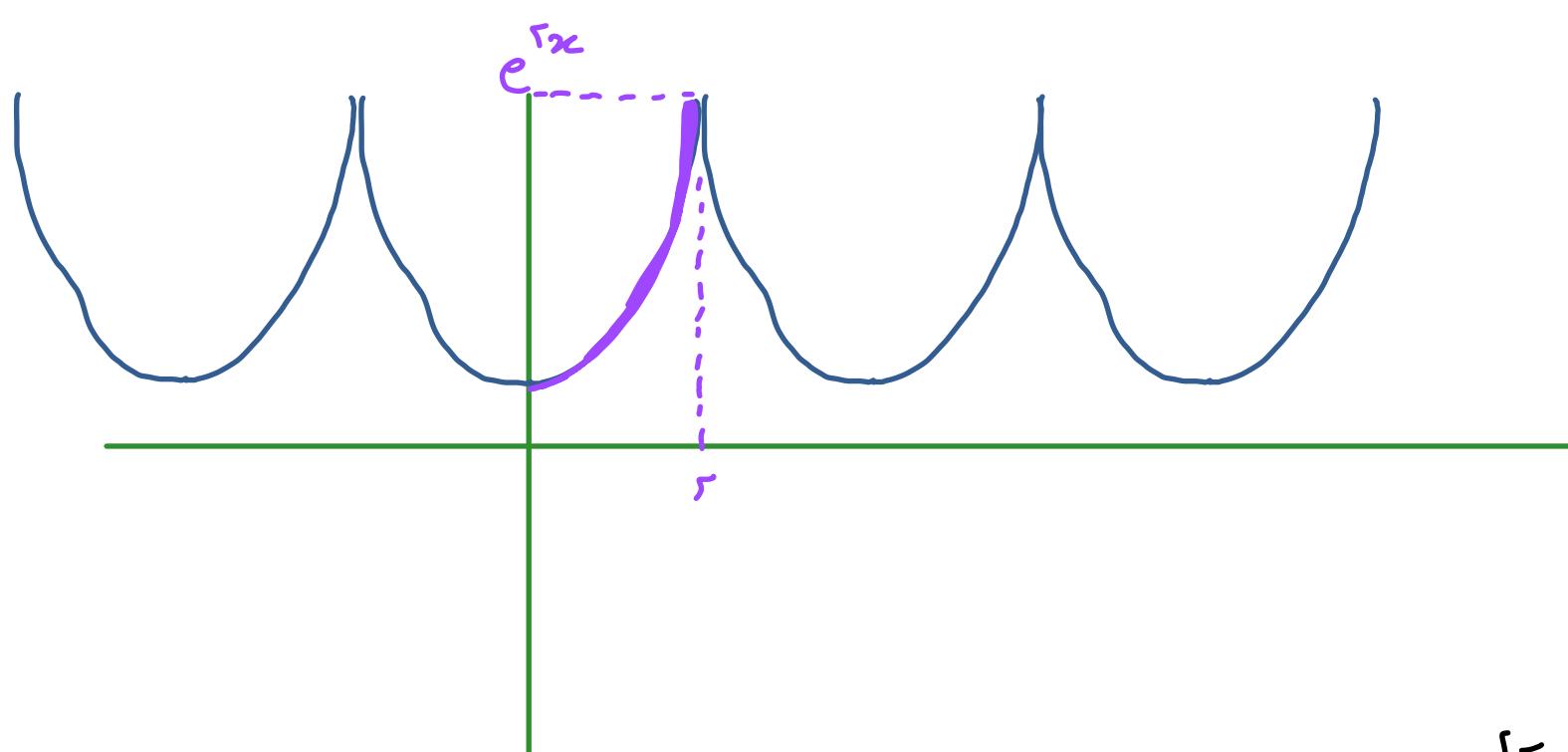


و راکستش صنایع زوج و راکستش صنایع زوج گوییم.

مثال: کستش اف به تابع زوج عبارت

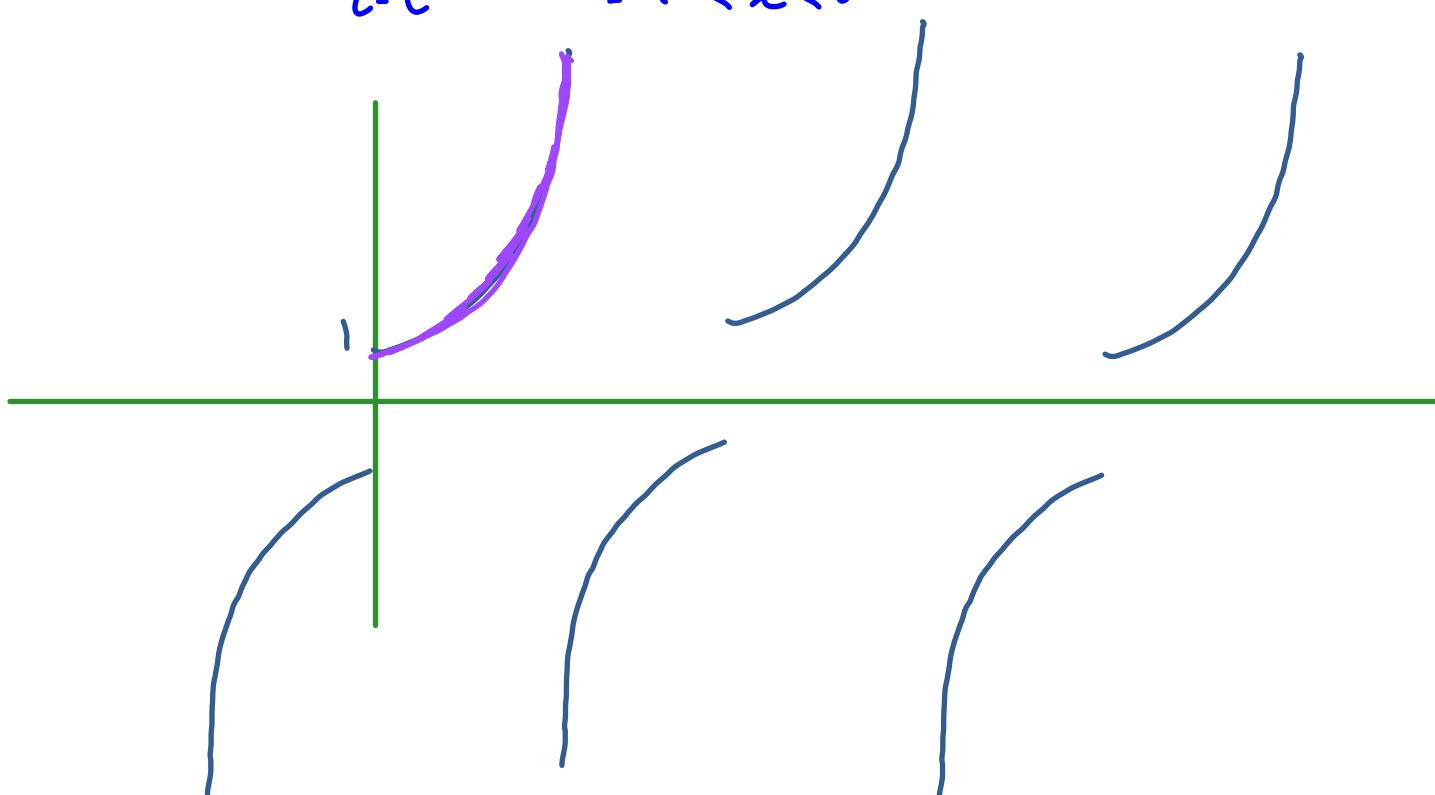
$$g_1(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < \tau \\ e^{-x} & -\tau < x < 0 \end{cases}$$

$$g_1(x+\tau) = g_1(x)$$



کستش اف به تابع فرد:

$$g_\tau(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < \tau \\ -e^{-x} & -\tau < x < 0 \end{cases}$$



لئین: سی فوریی کسینس را بدست آورید

نمايش مختلط بسط فوريه:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (*)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

باي ترتيب آن داشته باشيم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

با كمل فرمول (*) داريم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{\frac{i n \pi x}{L}} + \beta_n e^{-\frac{i n \pi x}{L}} \right)$$

$$\alpha_n = \frac{a_n - i b_n}{\tau} \quad \beta_n = \frac{a_n + i b_n}{\tau}$$

با يك قرارداد ساده به فرمول ساده تر زيرى رسم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{\tau L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{L}} dx$$

تمرين: فرض $f(x)$ زراسب دنلطا $f(x + \pi) = f(x)$ ، $f(x) = \cosh x$ $-\pi \leq x \leq \pi$

سطورين f را محاسبه کنيد.

ریاضیات مهندسی

حلمس

مثال: تابع متذوب f با درزی تاریب π در بازوی $[-\pi, \pi]$ با انتگرالی

مفروض است. می خواهیم نمایش

مختلط سی فوریئر آن را بست آوریم.

$$T = \pi L$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{inx}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{inx}{L}} dx$$

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad L = \pi$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos hx e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-1}{1+in} e^{-(1+in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i \sin(-n\pi) = (-1)^n$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau\pi} \left[\frac{1}{1-in} \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\tau} \right) (-1)^n + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{1+in} \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\tau} \right) (-1)^n \right] = \\ & = \frac{(-1)^n \sin h\pi}{\tau\pi} \left[\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right] = \\ & = \frac{(-1)^n \sin h\pi}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

$$\cosh hx = \frac{\sinh h\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{inx}$$

قضیہ: فرض کیم تابع پیوستہ و متناوب ہے اور دو ہی تناوب اور فاصلہ

پیوستہ باشد۔ درجیں صداقت سے فوریہی ہے ازسری فوریہی ہے بامشتق

کیم جملہ ہے جلبدتی ہے آئی۔

اگر f در $(-L, L)$ پیوستہ باشد، سری فوریہی $f'(x)$ ہے $f(x) = f(-L) + \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ ہے کہاں است و

$\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ در نقاط ناپیوستی ہے۔

مثال: سری فوریهٔ ابلاط $(-\pi, \pi)$ در $f(x+\pi) = f(x)$, $f(x) = x^r$

$$x^r = \frac{\pi^r}{r} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^r} \cos nx \quad \text{است-از}$$

نمای دیشکی همی لازم قضیه را دارد. $f(x) = x^r$

$$\pi x = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$x = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

قضیه: فرض کنیم f تابع حقیقی متناوب L و در $(-L, L)$ قطعه قطعی

$$f(t) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos n\pi t}{L} + b_n \frac{\sin n\pi t}{L} \right) \quad \text{پیوسته باشد و}$$

در این صورت برای هر $(-L, L)$ داریم:

$$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^t \frac{a}{\pi} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) dt$$

$$\cos ht = \frac{\sin h\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{int} \quad \text{مثال:}$$

$$\sin hx = \int_0^x \cos ht dt = \frac{\sin h\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \int_0^x e^{int} dt$$

$$\int_0^x e^{int} dt = \frac{1}{int} e^{int} \Big|_0^x = \frac{1}{int} (e^{inx} - 1) =$$

$$= -\frac{i}{n} e^{inx} + \frac{i}{n}$$

$$= \frac{\sin h\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \left(-ie^{\frac{inx}{\pi}} - \frac{i}{n} \right) =$$

$$= \frac{\sin h\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} i}{n^2 + 1} e^{inx} + \cancel{\int_0^\infty}$$

چون تابع زدست

لَمْكِنْ: بَلْ $f(x+\pi) = \frac{x}{\pi}$ و $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

قُصْبَرَابِكَارِيَّهِ وَسَرِيَّهِ فَرِيَّهِ اَخَارِيَّهِ مَحَاسِبَكَيْنِ.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n - 1)}{\pi n - 1} t$$

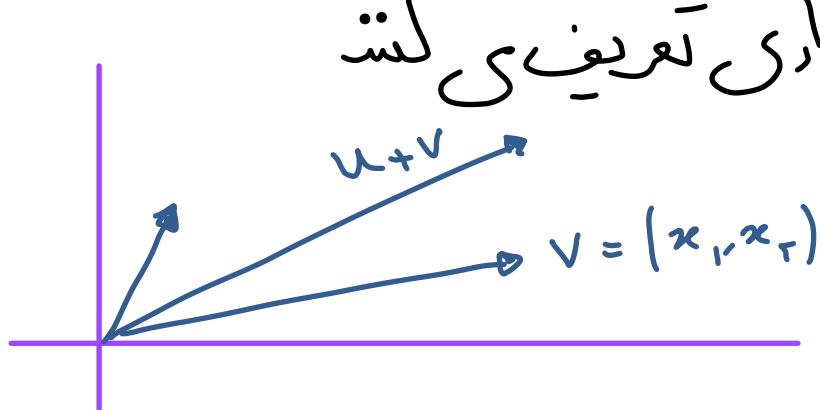
$$\begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases} = \int_0^x f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum \int_0^x \frac{\sin(\pi n - 1)t}{\pi n - 1} dt$$

لَهِيمْ سَرِيَّهِ فَرِيَّهِ دَفَاعِيَّهِ مَعَادِيَّهِ

فضاء أَقْلِيَّس \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^m تَعْصِيَّط جَمْع بَدَارِي وَضَرب اسْكَالِي يَكِي سَاحِتَار

بِسْيَارِ رِيَاضِي مَوْسَم بِفَضَائِي بَدَارِي تَعْرِيفِي كَتَتْ



$$u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^r$$

برای

$$v = (x_r, y_r) \in \mathbb{R}^r$$

$$v + u = (x_1 + x_r, y_1 + y_r)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

متوجه شوکه

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad u + v = v + u$$

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^r \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$\exists o \in \mathbb{R}^r \quad \forall u \in \mathbb{R}^r \quad o + u = u + o = u$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^r \quad \exists (-u) \in \mathbb{R}^r \quad u + (-u) = (-u) + u = o$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^r \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R}^r \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^r \quad 1u = u$$

مثال: تابع قطعه به قطعه پیوسته دوی $[a, b]$ باشد $(P([a, b], \mathbb{R})$

نماین داده کن سعن بایح بدلی و ضرب اسکالر زیر و ریزک های

هفت گانه حق را دارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

به طور کلی مجموعی که در آن می‌جمع برداری و ضرب اسکالری

تعريف شده باشد و دو ترکیبی های $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ را داشته باشد فضای برداری (یعنی ا

نامیده شود.

در یک فضای برداری \mathbb{V} باید بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n بردار

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

را یک ترکیب خطی v_1, v_2, \dots, v_n نایم.

مثال: در \mathbb{R}^3 $v = (1, 2, 3) = (1, -1, 5) + (0, 3, 1) + (-1, 0, 2)$

بردارهای v_1, v_2, \dots, v_n را مستقل خطی کوئی هر گاه ترکیب خطی از آنها

که صفری شود ترکیب خطی بینی باشد:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \text{اگر}$$

مثال: $(1, 0, 0) = j$ در \mathbb{R}^3 مستقل خطی نیست

ریاضیات مهندسی

جلسه ۵

بردارهای v_1, \dots, v_n در فضای برداری \mathbb{R}^n مستقل کوئیم هرگاه:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

مثال: اول در \mathbb{R}^2 مستقل.

کوئیم بردارهای v_1, \dots, v_n فضای برداری \mathbb{R}^n مستقل هستند هرگاه برای هر

اسکالارهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود داشته باشند که:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطا که فضای \mathbb{R}^n را تولید کنند، پایه فضای محدوده

می‌شوند.

مثال: $\{(1, 0), (0, 1)\}$ پایه‌ای بای \mathbb{R}^2 است.

لذک: پایه بینکن نسبت.

لذک: بین پایه‌های مختلف بین فضای محدوده و

پوشش وجود دارد (اصطلاحاً هم عددند)

در حالت خاص اگر که پایه متناهی برای فضای \mathbb{R}^n داشته باشیم تمام

پایه‌های آمتناهی و تعداد یکسانی عضو دارند. به این تعداد معنادل پایه، بعد

فضای معرفی شده باشد. اگر $\{v_1, \dots, v_n\} = \beta$ باشد، می‌نویسیم:

$$\dim V = n$$

تذکر: با این تعریف از پایه، هر بردار فضایی تعلق به شکل

یکنایی بحسب معرفه‌های پایه $v = v_1, \dots, v_n = \beta$ نمایش دارد.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

چنانی $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ مختصات v در پایه β نامید.

مثال: در \mathbb{R}^2 .

$$v = 3i + 4j \rightarrow i = (1, 0), j = (0, 1)$$

فضای برداری نمایم قطعه به قطعه پیوسته‌روی $[a, b]$ یعنی

فضای برداری $PC([a, b], \mathbb{R})$ یک فضای برداری با بعد نامتناهی است.

ضرب داخلی:

در فضای \mathbb{R}^n این $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ضرب داخلی عبارت

است از:

$$u \cdot v = x_1 x_r + y_1 y_r$$

نمادگاری های دلخواه

$$\langle u, v \rangle, \quad \langle u | v \rangle$$

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = u \cdot v$$

برای ضرب داخلی از این:

$$\forall v \in \mathbb{R}^r : \langle v, v \rangle \geq 0 \quad (1)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^r \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (2)$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^r : \quad (3)$$

$$\langle \lambda v_1 + \mu v_2, u \rangle = \lambda \langle v_1, u \rangle + \mu \langle v_2, u \rangle$$

$$\langle , \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{فضای بداری } \mathcal{V} \text{ همراه با یک نگاشت} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

کوئی دلخواه اندیشیدنی برقرار است - یک فضای ضرب داخلی

می ناصم.

مثال معمم: فضای $PC([-L, L], \mathbb{R})$ را در نظری کنیم. دلیلی شود

(نمیں) که نگاشت زیر، یک ضرب داخلي است.

$$\langle , \rangle : PC([-L, L], \mathbb{R}) \times PC([-L, L], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_{-L}^L f(x) g(x) r(x) dx$$

اتابی مثبت دلیل مسأله است.

در حالت خاص $r = 1$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) g(x) dx$$

به عنوان مثال خاص تر:

$$V = PC([-L, L], \mathbb{R})$$

$$f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad g(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

از این پس بعد $r = 1$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) g(x) dx = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

باید بردار $v \in V$ که لازمه باشد $\langle v, v \rangle > 0$ است

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

نم $\|\cdot\|$ عبارت است از

مثال: در \mathbb{R}^2 ، ضرب داخلی استاندارد

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

بای $\Gamma \in \mathbb{V}$ و $u, v \in \mathbb{V}$ عبارت است از:

$$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$$

$\|u\| = 1$ بردار مارکه کوئیم هرگاه

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{در } \mathbb{R}^2$$

لذکر: اگر $u \neq 0$ ، دلخواه باشد $\frac{u}{\|u\|}$ برداری بله است.

دو بردار u و v را در فضای ضرب داخلی Γ متعامد کوئیم، هرگاه $\langle u, v \rangle = 0$

مثال: در مجموعی زیر هر دو بردار متعامد باشند و بله.

$$O = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \frac{m\pi x}{L}}{\sqrt{L}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sin \frac{n\pi x}{L} \right\| &= \sqrt{\langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle} = \sqrt{\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx} = \\ &= \sqrt{L} \end{aligned}$$

النحو فرض کنیم \forall یکی از اعضای ضرب داخلی باشد $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعی

یکی از متعامدنسی با جمع جزئی

$$c_k \in \mathbb{R} , \quad s_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$$

را نهاده کویم. هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n - v\| = 0$$

بسیار سری فوریه نظری کویم. می خواهیم هر اینها را محاسبه کنیم.

$$\langle s_n, v_m \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n c_k v_k, v_m \right\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle v_k, v_m \rangle = c_m$$

$$\langle v, v_m \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n, v_m \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle s_n, v_m \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_m = c_m$$

باین ترتیب اگر \forall رابطه بجهوت یک سری فوریه بر حسب اعضای O

ضریب فوریه (c_n) عبارتنداز:

$$c_m = \langle v, v_m \rangle$$

مثال: بسادکی تحقیقی شود اگر:

$$O = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \frac{m\pi x}{L}}{\sqrt{L}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

برتابع $f \in PC([-L, L], \mathbb{R})$ دهانه‌ی سی فوریه‌ی ایست بـ

فوریه‌ی ایست کـ پیش از این مطرح شد.

$$f = v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

$$c_n = \langle v, v_n \rangle = \int_{-L}^L f(x) v_n dx$$

معادلات دیفرانسیل با مقدار مزدوج استروم - لیورول منظم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (P(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0 \end{array} \right.$$

$y = y(x)$ تابع جواب در $[a, b]$

مقادیر از که این معادله جواب غیربدبیخ ندارد، مقادیر ویژه معادله و تابع غیربدبیخ جواب رفع اعم ویژه معادله نامده می شوند.

قضیه: برای یک معادله دیفرانسیل با مقدار مزدوج استروم - لیورول مقادیر ویژه

ویژه یک دنباله اکیداً صعودی $\{\lambda_n\}$ و آگرا بهی نهایت تسلیلی دهند.

فرض کنیم v_n تابع ویژه نظری و در فضای ضرب داخلی $(\mathbb{R}[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و $\langle \cdot, v_n \rangle$ تسلیل یک مجموعی یکی

متقارن $\{v_1, \dots, v_n\} = O$ می دهند. برای تابع قطعه بقطعه پیوستی ابر

که f نیز برای بازه پیوسته باشد، بسط فوریه ای فرم بی دهند

نقاط پیوستگی به (x) در نقاط ناپیوستگی $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ هم راست.

مثال: معادله اشتقرم-لیول منظم

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r(x) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=e \end{matrix}$$

را در نظر گیریم. مطلوب است معادله و دلایل ویژه نظری. سپس

بکمال آن هابسط فوریه $f(x) = x$ را نسبت به مجموعی یکی معادل

حاصل بسته آوریم.

حالت ۱: $\lambda = 0$

$$\begin{cases} (xy')' = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow xy' = C_1 \rightarrow y' = \frac{C_1}{x} \Rightarrow y = C_1 \ln x + C_2$$

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y(e) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

در این حالت جواب غیربدیم در این معادله وجود ندارد.

حالت ۲: $\lambda < 0$

ی توان فرض کرد $\lambda < 0$, $\lambda = -\alpha^2$

$$(xy')' - \frac{\alpha^r}{x}y = 0$$

$$y' + xy'' - \frac{\alpha^r}{x}y = 0$$

$$\begin{cases} x^r y'' + xy' - \alpha^r y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

$$y = x^m \rightarrow y' = m x^{m-1} \rightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$m(m-1) + m - \alpha^r = 0 \rightarrow m^2 - m + m - \alpha^r = 0$$

$$m = \pm \alpha$$

$$\Rightarrow y = C_1 x^\alpha + C_r x^{-\alpha}$$

$$y' = \alpha C_1 x^{\alpha-1} - \alpha C_r x^{-\alpha-1}$$

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha C_1 - \alpha C_r = 0 \\ C_1 e^\alpha + C_r e^{-\alpha} = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = C_r = 0$$

پس در این حالت هم جواب غیر بیخی و بودن ندارد.

حالت ۳: $\lambda > 0$

می توان فرض کرد $\omega > 0$, $\lambda = \omega^2$

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \alpha^2 y = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

معادله اولیه

$$y = C_1 \cos(\alpha \ln x) + C_2 \sin(\alpha \ln x)$$

$$y' = -\frac{\alpha C_1}{x} \sin(\alpha \ln x) + \frac{C_2 \alpha}{x} \cos(\alpha \ln x)$$

می توان $C_2 = 0$ را در نظر گرفت

$$y'(1) = 0 \Rightarrow C_2 \alpha = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 \cos \alpha = 0$$

$$y(e) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n = (\tau n - 1) \frac{\pi}{\tau}$$

بس دراین حالت

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = (\tau n - 1)^2 \frac{\pi^2}{\tau^2}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

مقادیر ویژه عبارت ساز:

$$y_n = \cos \left(\frac{(\tau n - 1)\pi}{\tau} \ln x \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
\|y_n\| &= \langle y_n, y_n \rangle_r = \int_1^e \cos^r \left(\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x \right) \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{\tau}{\pi(rn-1)} \int_1^e \cos^r \left(\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x \right) \frac{(rn-1)\pi}{\tau x} dx = \\
&= \frac{\tau}{\pi(rn-1)} \int_0^{\frac{(rn-1)\pi}{\tau}} \cos^r u du = \\
&= \frac{\tau}{\pi(rn-1)} \int_0^{\frac{(rn-1)\pi}{\tau}} \frac{1 + \cos u}{r} du = \\
&= \frac{\tau}{\pi(rn-1)} \left[\frac{1}{r} u + \frac{1}{r} \sin ru \right]_0^{\frac{(rn-1)\pi}{\tau}} = \\
&= \frac{\tau}{\pi(rn-1)} \left[\frac{1}{r} (rn-1)\pi + \frac{1}{r} \sin ((rn-1)\pi) \right] = \\
&= \frac{1}{r} \Rightarrow \|y_n\| = \frac{1}{\sqrt{r}}
\end{aligned}$$

$$O = \left\{ v_n : n = 1, 2, \dots \right\} \quad v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \sqrt{r} \cos \left(\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x \right)$$

$$f(x) = x \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \langle f, v_n \rangle_r = \int_1^e x \sqrt{r} \cos \left(\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x \right) \frac{1}{x} dx = \\
&= \sqrt{r} \int_1^e \cos \left(\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x \right) dx
\end{aligned}$$

$$\frac{(rn-1)\pi}{\tau} \ln x = u \Rightarrow \frac{(rn-1)\pi}{\tau x} dx = du$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\tau x}{(rn-1)\pi} du \Rightarrow \ln x = \frac{\tau u}{(rn-1)\pi} \Rightarrow x = e^{\frac{\tau u}{(rn-1)\pi}}$$

$$\Rightarrow \int \left\{ e^{\frac{\tau}{(rn-1)\pi} u} \cos u du \right\}$$

انکارل و تبدیل فوری:

دیدیم که بایی تابع متناوب و قطعه پیوستی دارد $[L, L]$ سی

$$\text{فوری} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

اکنون $f(x)$ خواهیم بایی تابع غیر متناوب \neq جایگزین مناسب بایی سی

форی بسـ آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{\tau L} \int_{-L}^L f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \right] \cos \frac{n\pi x}{L} +$$

$$+ \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) \sin \frac{n\pi x}{L}] =$$

$$= \frac{1}{\tau L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{L} (t-x) \right) dt \right\}$$

ریاضیات مهندسی

≤ نکته

$$f(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]$$

$$+ \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) \sin \frac{n\pi x}{L}] =$$

$$= \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left[\cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\sin n\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (t-x) dt$$

فرض کنیم $\rightarrow +\infty$ در این صورت وقوعی

$$\frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(t) dt \rightarrow 0$$

$$0 \leq \left| \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L f(t) dt \right| \leq \frac{1}{\pi L} \int_{-L}^L |f(t)| dt$$

بنابراین اگر $L \rightarrow +\infty$ باشد نوشت

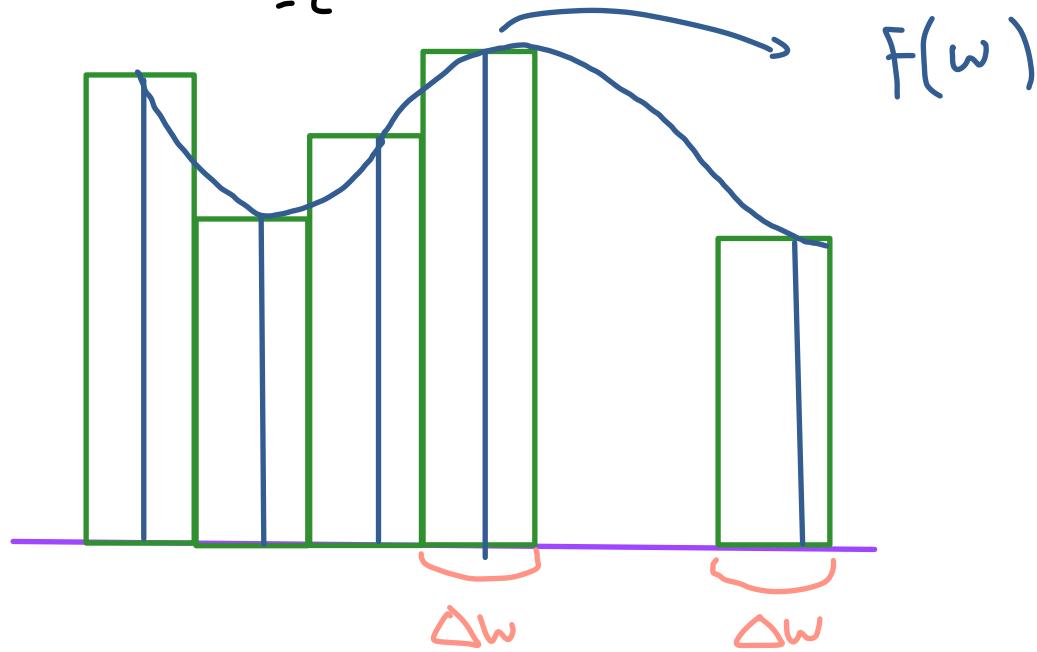
$$f(x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (t-x) dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (t-x) dt \right) \frac{\pi}{L}$$

$\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$, $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ فرمی دهم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega_n) \Delta\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-L}^L f(t) \cos \omega (t-x) dt$$



پس می توان کفت و قمی $L \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\omega_n) \Delta\omega \rightarrow \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega$$

و درنتیجه:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t-x) dt \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x \right] dt dw \right\}$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x \right\} dw$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (1)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (2)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) dw$$

اتکال $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را که $\int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) dw$

توسط روابط (1) و (2) تعریف می شوند، اتکال فوری نباشد.

قضیه: اگر f در هر بازه x متناهی قطعه به قطاعه پیوسته باشد و

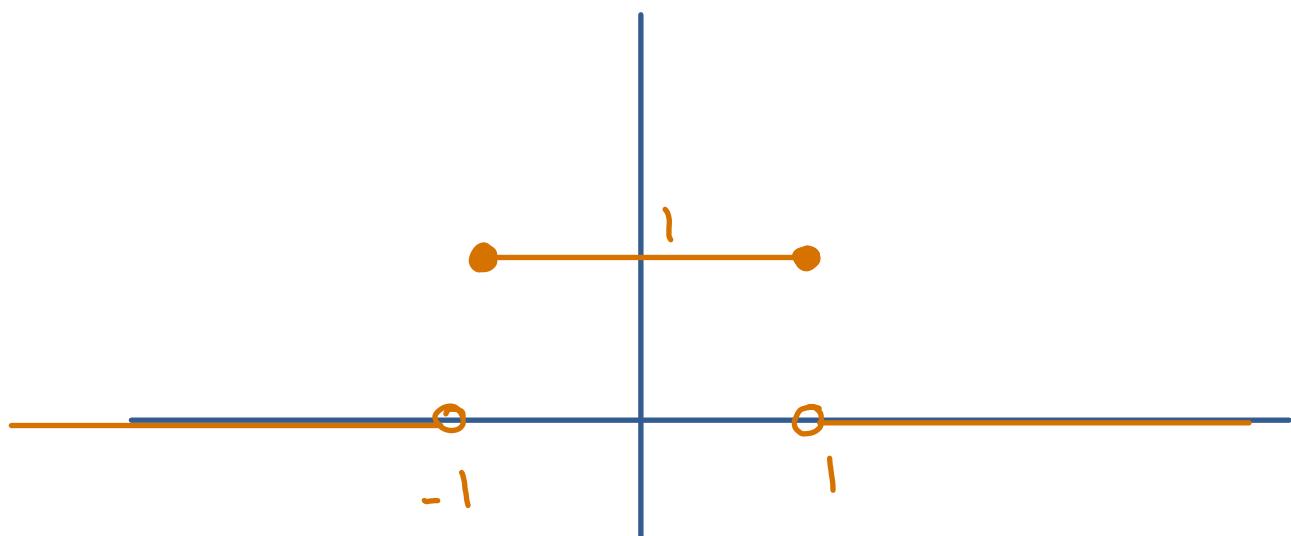
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ و مسئلتاً لی طرفی چپ دراست وجود دست باشند

آنکه اتکال فوری در قطاعات پیوستگی $f(x)$ در نقاط ناپیوستگی ب

$$\text{همز} \cdot \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مثال:



شرط قضيٰي همکاری انتگرال فردی برقرار نه (چرا؟)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi \omega} \sin \omega t \Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{\tau \sin \omega}{\pi \omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin \omega t dt = 0$$

$$\int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega$$

بنابر قضيٰي همکاری:

$$\frac{\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{\tau} & x = \pm 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin w \cos \omega x}{\omega} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{\tau} & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{\tau} & x = \pm 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

: $\kappa = 0$ برای

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{\omega} dw = \frac{\pi}{\tau}$$

$$S_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\sin w}{\omega} dw$$

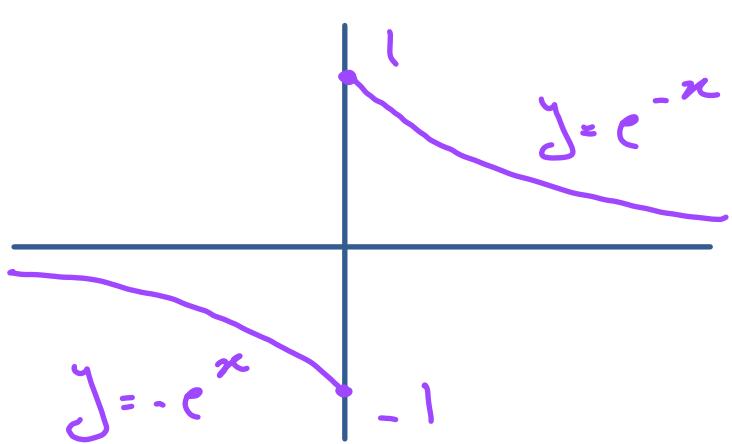
لذکر: برای تابع زوج $\beta(w)$ و انتگال فوریه به شکل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cos \omega x dw$$

و برای تابع فرد $A(w)$ و انتگال فوریه به شکل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(w) \sin \omega x dw$$

است.



$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ -e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

مثال: فرض کنیم

شـارـيـطـ فـضـيـ بـرـقـارـهـ (جـراـبـ)

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin w t dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-e^t \sin w t \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-t}}{w}}_{dv} \underbrace{\sin w t dt}_u = \\ &= \frac{\tau w}{\pi(1+w^2)} = \int_0^{\infty} B(w) \sin w x dw = \end{aligned}$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin w x}{1+w^2} dw$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos w x + w \sin w x}{1+w^2} dw =$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \\ \frac{1}{\tau} & x = 0 \end{cases}$$

تمكـ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ \frac{1}{\tau} & x \leq 0 \end{cases}$$

لـبـدـيلـ فـورـيـ :

بـايـ تـابـعـ يـعـسـعـ كـشـارـيـطـ فـضـيـ هـمـلـايـ رـادـارـ دـارـمـ :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos w(t-x) dt \right) dw$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\cos \omega(t-x) = \frac{1}{2} \left(e^{\omega(t-x)i} + e^{-\omega(t-x)i} \right)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{i\omega t} e^{-iwt} + f(t) e^{-i\omega t} e^{iwt} \right) dt dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} f(t) e^{-i\omega t} e^{-iwt} dt + \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} e^{iwt} dt \right) dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} dw$$

تبدیل فوریه:

مشاهد کردیم که اگر $f(x)$ بازه های متناهی قطعه به قطعه پیوسته باشد و نویسیم $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ (از این پس اگر $f(x)$ بازه های متناهی قطعه به قطعه پیوسته باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dw < \infty$)

مطلق انتگرال پذیر است. و مشتقات مک طرفی $f'(x)$ با وجود داشته باشد، در نقاط که f پیوست است، داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos w(t-x) dt \right) dw \right.$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{\pi} (e^{iw(t-x)} + e^{-iw(t-x)}) dt \right] dw \right) \right.$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{iw(t-x)} dt \right) dw +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iw(t-x)} dt \right) dw \right)$$

در انتگرال دوم از عبارت فوق با تبدیل $w = -\omega$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iw(t-x)} dt \right) dw \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iw(t-x)} dt \right) dw \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(t-x)} dt \right) dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega x} dw$$

قراری دهم:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

درنتیجه (در پنهانی) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} dw$$

تابع F را تبدیل فوری f می نامند و می نویسند:

$$\tilde{F}(f) = F$$

$$\tilde{F}(f)(\omega) = F(\omega)$$

پس:

در بسیاری از مراجع با یک سرایجی نویسند:

$$\tilde{F}(f(x)) = F(\omega)$$

قضیه: اگر f پیوسته به طور مطلق انتگرال پذیر و مستقایت یک طرفی f

با وجود داشته باشد، آنگاه برای $F = \tilde{F}(f)$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

$y = f(x)$ بُرْجِي تَابع (قَصْبِي تَعَارُف)

نتیجہ:

$$\tilde{F}(f)(\omega) = f(-\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

مثال (حُمَّم): بُرْجِي حُمَّم $f(x) = e^{-|x|}$ (بُدْسَت) $F = \tilde{F}(f)$

آور حُمَّم.

* شرط قصبة بُرْجِي (جِرَاجِي)

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^t e^{i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(1+i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(-1+i\omega)t} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left[\frac{1}{1+i\omega} e^{(1+i\omega)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{1}{-1+i\omega} e^{(-1+i\omega)t} \right]_0^{+\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{-1+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-2}{-w^2 - 1} \right) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(e^{-k|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{k^2 + \omega^2} \right)$$

جذب و نیک مجموع تبدیل فوری

$$c \in \mathbb{R} : \widetilde{\mathcal{F}}(cf + g) = c \widetilde{\mathcal{F}}(f) + \widetilde{\mathcal{F}}(g)$$

$$c \in \mathbb{R} : \widetilde{\mathcal{F}}(f(x-c)) = e^{i\omega c} \widetilde{\mathcal{F}}(f)$$

$$c \neq 0 : \widetilde{\mathcal{F}}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad F = \widetilde{\mathcal{F}}(f)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \widetilde{\mathcal{F}}(f) = -i\omega \widetilde{\mathcal{F}}(f)$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(f(x)) = F(\omega)$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(F(x)) = f(-\omega)$$

$$\widetilde{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^r}$$

: مثال

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad F(x) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \left(\frac{1}{1+x^r} \right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{F}\left(\sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+x^r}\right) = e^{-|-w|} = e^{-|w|}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \widetilde{F}\left(\frac{1}{1+x^r}\right) = e^{-|w|}$$

$$\Rightarrow \widetilde{F}\left(\frac{1}{1+x^r}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma}} e^{-|w|}$$

$$\widetilde{F}(e^{-|x+\Delta|}) = ?$$

: مثال

$$\widetilde{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^r}$$

$$\widetilde{F}(e^{-|x+\Delta|}) = e^{-\Delta i w} \widetilde{F}(e^{-|x|}) = e^{-\Delta i w} \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^r}$$

$$\widetilde{F}(e^{-|rx|}) = ?$$

: مثال

$$\widetilde{F}(e^{-|x|}) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^r}$$

$$\widetilde{F}(e^{-|rx|}) = \frac{1}{r} \widetilde{F}\left(\frac{\omega}{r}\right) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{1+(\frac{\omega}{r})^r} =$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{\frac{q}{q+\omega^r}} = r \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \frac{1}{\frac{q}{q+\omega^r}}$$

$$\tilde{F}(t g^{-1} \omega) = ? \quad : \text{سؤال}$$

$$(t g^{-1} \omega)' = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

$$f(\omega) = t g^{-1} \omega$$

$$\tilde{F}(f^{-1}) = -i\omega \tilde{F}(f)$$

$$\tilde{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = -i\omega \tilde{F}(t g^{-1} \omega) \Rightarrow \tilde{F}(t g^{-1} \omega) =$$

$$= \frac{1}{-i\omega} \tilde{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-|\omega|}$$

$$\tilde{F}\left(\frac{\tau}{t + \tau t + \Delta}\right) = ?$$

لمرجع:

$$\tilde{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = ?$$

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \bar{z}) g(\bar{z}) d\bar{z}$$

$$\tilde{F}(f) \tilde{F}(g) = \tilde{F}(f * g)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \omega t + i \sin \omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right)$$

$F_C(\omega)$

$F_S(\omega)$

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای:

موضوع مورد بحث مادری بخش، تابع حقیقی چند متغیره است.

بای سادگی بگذاریم تابع دو و سه متغیره است.

$$u: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \quad u = u(x, y)$$

$$u: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \quad u = u(x, y, z)$$

در برخی مدل‌ها، متغیر زمان ظاهری شود که آن را با تابعی داشتم

منظور از یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای معادله‌ای به شکل زیر است که

در آن u یک تابع حقیقی چند متغیره است (مشتق جزئی نسبت به دو متغیر جداً قابل وجود دارد).

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots)$$

متغیرها
مشتقان
مرتبه‌ی

چند مثال:

$$u: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} : u_{xx} + x^2 u_{yy} + \sin(x+y) u_{xy} - u - x^2 y = 0$$

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad L_n(u_{xx} + x^5 \sin(u) - xy) + x - 1 = 0$$

$$u = u(t, x) \quad u_{tt} = f u_{xx}$$

$$u_{xyzt} + xyzt u_x + u_y = 0$$

به بالاتر مرتبی مشتقات جزئی در این معادله، مرتبی معادل گفته شود.

در حالت خاص اگر f مکرر ترکیب خطی از u و مشتقات جزئی آن باشد به

قسم که ضرایب تابع حقیقی باشند، معادله را خطی نامند.

مثال: یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبی در حالت کلی به شکل زیر

است:

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A(x, y)u_{xx} + \beta(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y +$$

$$+ F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

در صورتی که $G(x, y) = 0$ ، معادله را همکنی نامند.

فرض کنیم ناحیه D ، مکرر ناجیهی بازو و همیز باشد. در این صورت

D را یک دامنه (صیدان) نامیم. در این بحث، جواب‌های از

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مورد نظر هستند و لکه دامنه تعریف شده است.

در مورد وجود دیگری ای جواب‌های معادلات پاره‌ای نمی‌توان اظطرار نظر کلی کرد و ترتیب شرایط خاصی توان وجود دیگری ای جواب را ثابت کرد.

این شرایط را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد.

۱- شرایط اولیه: مقدار تابع و مشتقهای آن در نقاطی از دامنه جواب مشخص هستند.

۲- شرایط مرزی: مقدار تابع و مشتقهای آن روی مرز ناحیه‌ی جواب پانفراطی از آن مشخص است.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{مثال:}$$

$$u(0,t) = u(\rho, t) = 0 \quad \text{شرط مرزی}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \text{شرط اولیه}$$

$$u(x,t) = ?$$

دسته بندی معادلات خطی مرتبه ۳:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + \dots = 0$$

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y)$$

$$\Delta(x_0, y_0) > 0$$

معادله در (x_0, y_0) دغذولعی است.

$$\Delta(x_0, y_0) = 0$$

معادله در (x_0, y_0) سهعی است.

$$\Delta(x_0, y_0) < 0$$

معادله در (x_0, y_0) بیضوی است.

اگر در تمام نقاط دامنه D ، معادله دغذولعی یا سهعی یا بیضوی باشد

کویم معادله روی D دغذولعی، سهعی یا بیضوی است.

مثال: معادله پارabolی زیر را در نظری کنیم:

$$(x-1)u_{xx} + r(y+1)u_{xy} - (x+1)u_{yy} = 0$$

$$\Delta(x, y) = r(y+1)^2 + r(x-1)(x+1)$$

$$\Delta = 0 \iff r(y+1)^2 + r(x-1)(x+1) = 0 \iff (y+1)^2 + x^2 = 1$$

معادله درون دایره $(y+1)^2 + x^2 = 1$ بیضوی و تارج دایره هدقولعی است

در ادامی بحث‌ی نو اهم با تغیر متغیر مناسب، معادلی پاره‌ای خطي
مرتبی آرایه معادلی دیفرانسیل عادی تبدیل و آن را به روش **دالامبر**

حل کنیم

شکل کافنیک معادلی خطي مرتبی ۲:

به معادلی دیفرانسیل عادی

$$A(x,y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + B(x,y) \left(\frac{dy}{dx} \right) + C(x,y) = 0$$

معادلی مشخصه و به جواب های آن مدنظر های مشخصه می‌گویند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2)$$

اگر $\Delta > 0$ ، جواب معادله (1) صورت $\varphi(x,y) = C_1$ و جواب (2) به

صورت $\psi(x,y) = C_2$ قابل تعیین است. با تغیر متغیر $(y - \bar{\psi})$

متاثرا کرد که معادلی دیفرانسیل

پارهای نظری پیشودت اصطلاحاً کافنیک زیرقابل بیان است *

$$u_{\bar{x}\bar{y}} = H(\bar{z}, \bar{y}, u, u_{\bar{z}}, u_y)$$

به ویژه اگر درست راست \bar{z} داشت $u_{\bar{z}}$ و u_y وجود نداشت باشند

معادل کافنیک به سادگی تبدیل به یک معادله عادی می شود

مثال معمولی: معادلی معوجه یک بعدی

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{array} \right.$$

$-\infty < x < +\infty$

$t \geq 0$

$u = u(x, t)$

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, -\infty < x < +\infty\}$$

$$A(x, t) = -c^2, \quad B(x, t) = 0, \quad C(x, t) = 1$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0 \Rightarrow \text{معادله همogeneous است}$$

$$A\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dt}{dx}\right) + C = 0$$

$$-c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c^2$$

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \varphi(x, t) = x - ct = C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow \psi(x, t) = x + ct = C_2$$

$$\bar{x} = x - ct \quad \eta = x + ct$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$u_x = u_{\bar{x}} \bar{x}_x + u_{\eta} \eta_x = u_{\bar{x}} + u_{\eta}$$

$$u_t = u_{\bar{x}} \bar{x}_t + u_{\eta} \eta_t = C u_{\bar{x}} + C u_{\eta}$$

حل معادلہ موج کے بعد برداشت دالا میں:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$A(x,t) = -c^2, \quad B(x,t) = 0, \quad C(x,t) = 1$$

معادلہ ہذلولی

$$A(x,t) \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - B(x,t) \left(\frac{dt}{dx} \right) + C(x,t) = 0$$

$$-c^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm c$$

$$x + ct = C_1$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x - ct \end{cases}$$

$$x - ct = C_2$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + ct \end{cases}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

$$u_x = u_{\bar{x}} + u_{\bar{x}}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{\bar{x}} + u_{\bar{x}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} u_3 + \frac{\partial}{\partial x} u_7$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_3) &= \frac{\partial u_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= u_{3z} + u_{3\eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (u_7)}{\partial x} = u_{7z} + u_{7\eta}$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -cu_3 + cu_7$$

$$u_{tt} = -c^2 u_{zz} + c^2 c^2 u_{z\eta} + c^2 u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow -c^2 c^2 u_{z\eta} = 0 \Rightarrow u_{z\eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (u_3) = 0 \Rightarrow u_3 = \varphi_1(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (u) = \varphi_1(z) \Rightarrow u = \varphi_1(z) + \psi(\eta)$$

$$u = \varphi(z) + \psi(\eta)$$

$$u(3,7) = \varphi(3) + \psi(7) \quad \text{و باید حین و متن پذیرن}$$

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct) \quad \text{(1)}$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \quad \text{(2)}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{(3)}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow u_t(x,t) = -c \varphi'(x-ct) + c \psi'(x+ct)$$

$$\textcircled{1} \rightarrow -c \varphi'(x) + c \psi'(x) = g(x) \quad \text{(4)}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \rightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ -c \varphi(x) + c \psi(x) = \int_0^x g(s) ds + A \end{cases}$$

$$-c \varphi(x) = -c f(x) + \int_0^x g(s) ds + A$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\tau} f(x) - \frac{1}{\tau c} \int_0^x g(s) ds - \frac{A}{\tau c}$$

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{\tau} f(x) + \frac{1}{\tau c} \int_0^x g(s) ds +$$

$$+ \frac{A}{\tau c}$$

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct) =$$

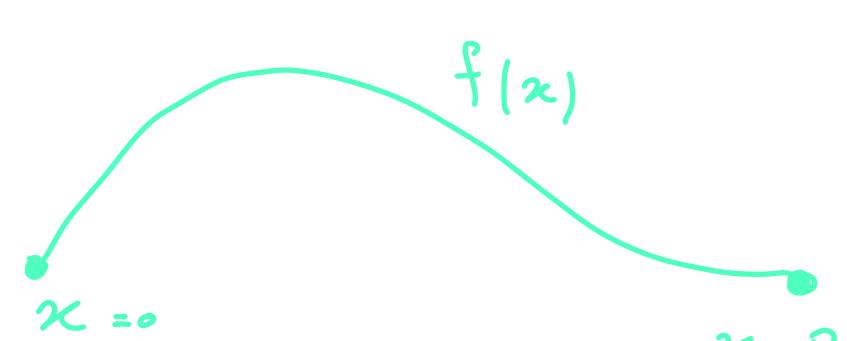
$$= \frac{1}{\tau} f(x-ct) - \frac{1}{\tau c} \int_0^{x-ct} g(s) ds - \frac{A}{\tau c} +$$

$$+ \frac{1}{\tau} f(x + ct) + \frac{1}{\tau c} \left\{ \int_0^{x+ct} g(s) ds + \frac{A}{\tau c} \right. =$$

$$= \frac{1}{\tau} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{\tau c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

این روش موسوم به روش دالامبر
لست

حل معادله موج یک بعدی به کم سری فوریه:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(., t) = 0 \quad u(p, t) = 0 \\ u(x, .) = f(x) \quad u_t(x, .) = g(x) \end{cases}$$


در بازه $[0, p]$ بای هر t عاری توان تابع پیوسته در نظر گرفت

پس بای هر t سری فوریه ای بای $u(x, t)$ وجود دارد.

$$\forall t: u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{p} \quad T = \tau p$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t) \sin \frac{n\pi x}{p} \quad u_x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \frac{n\pi}{p} \cos \frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{p} \quad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(t) \frac{n^2\pi^2}{p^2} \sin \frac{n\pi x}{p}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{P^2} A_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{P} x = 0$$

$$\forall n \geq 1: A_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{P^2} A_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow A_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{P} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{P} t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{P} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{P} t \right) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{P} = f(x)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \sin \frac{n\pi x}{P} dx$$

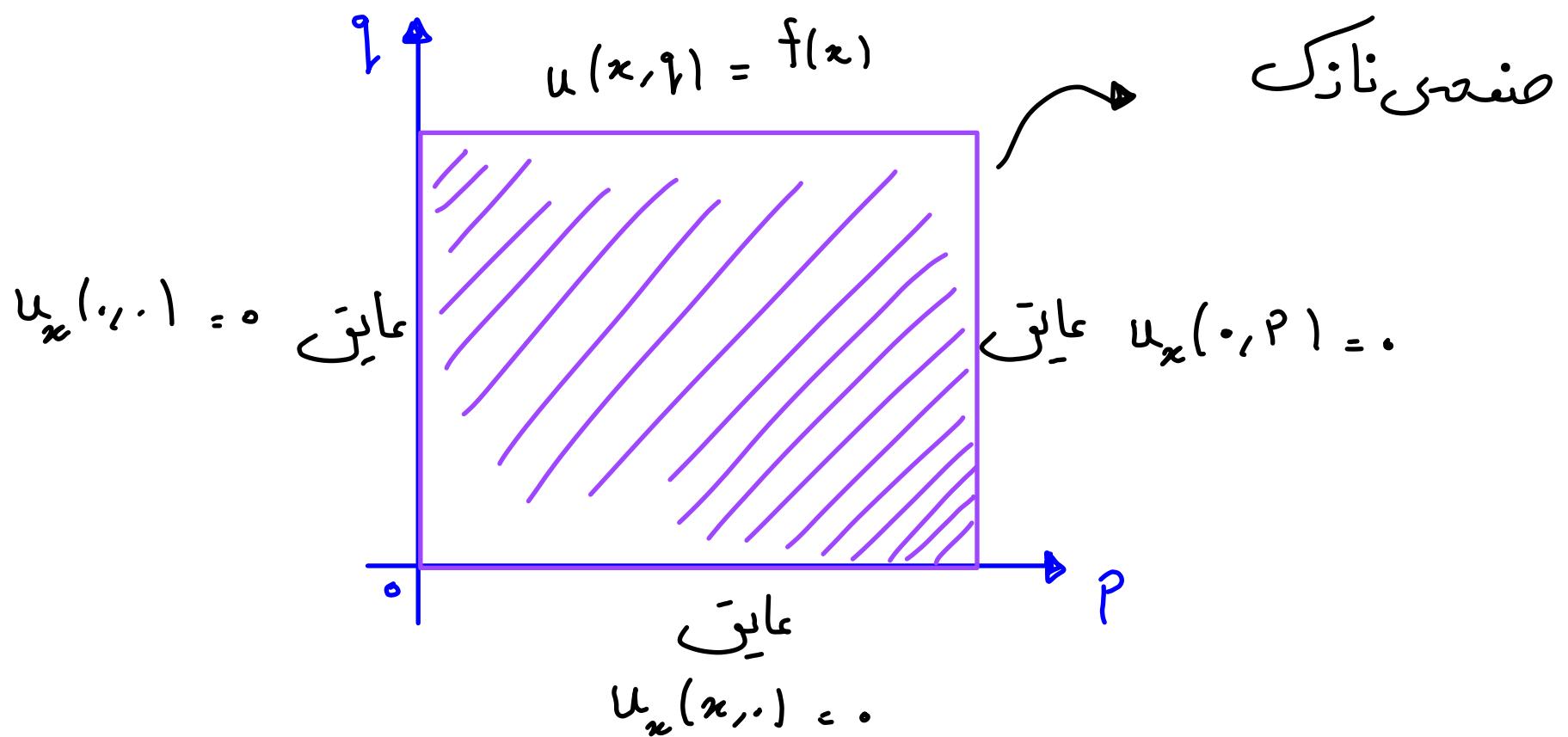
$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{P} \left(a_n \sin \frac{n\pi c}{P} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{P} t \right) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{P} b_n \sin \frac{n\pi x}{P} = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi c}{P} b_n = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) \sin \frac{n\pi x}{P} dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{n\pi c} \int_0^P g(x) \sin \frac{n\pi x}{P} dx$$

معادله لابلاس:



$$u = u(x, y)$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < P, 0 < y < q \\ u_x(0, y) = 0 = u_x(0, p) \\ u(x, 0) = 0, u(x, q) = f(x) \end{cases}$$

شرط مرزی نیمین
شرط مرزی دیریکلیه
شرط مرزی روین

هدف ما یافتن جواب پیوستهی $u(x, y)$ است که در ناحیه

پیوسته و دوبار مشتقهای جزئی پیوسته $D = \{(x, y) | 0 < x < P, 0 < y < q\}$

دارد.

برای مایهٔ مختلف تابع دو متغیره در هر چهل دلغاه و ثابت تابع پذیر صفتگیر

در حسب x است که این برای آن یک توسعهٔ متساوی و درنتیجه

یک بسط فوریه نوشته شد. با توجه به سرتاسری مرزی رویین بسط فوریهٔ کسینوسی

با شرایط مرزی سازگار است.

$$\forall y : u(x, y) = \frac{A_0(y)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \cos \frac{n\pi x}{P} \quad 0 < x < P$$

$$u_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(y) \frac{n\pi}{P} \sin \frac{n\pi x}{P}$$

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(y) \frac{n^2 \pi^2}{P^2} \cos \frac{n\pi x}{P}$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{A''_0(y)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A''_n(y) \cos \frac{n\pi x}{P}$$

با جایگزایی در معادله داریم:

$$\frac{A''_0(y)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A''_n(y) - \frac{n^2 \pi^2}{P^2} A_n(y) \right) \cos \frac{n\pi x}{P} = 0$$

ضرایب بسط فوریهٔ تابع صفر، همی صفرند، پس:

$$\begin{cases} A''_0(y) = 0 \\ A''_n(y) - \frac{n^2 \pi^2}{P^2} A_n(y) = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

در نتیجه:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(y) = C_0 + D_0 y \\ \end{array} \right.$$

$$A_n(y) = C_n \cosh \frac{n\pi}{P} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{P} y$$

$$u(x, y) = \frac{C_0}{r} (C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh \frac{n\pi}{P} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{P} y \right) \cos \frac{n\pi}{P} x$$

با توجه به ساده مزدوج داریم:

$$0 = u(x, 0) = \frac{C_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{P} x \Rightarrow \forall n \quad C_n = 0$$

$$f(x) = u(x, y) = \frac{C_0}{r} (C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh \frac{n\pi y}{P} + D_n \sinh \frac{n\pi y}{P} \right) \cos \frac{n\pi}{P} x$$

$$f(x) = \frac{D_0 y}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi y}{P} \cos \frac{n\pi x}{P}$$

$$D_0 y = \frac{r}{P} \int_0^P f(x) dx \rightarrow D_0 = \frac{r}{Py} \int_0^P f(x) dx$$

$$D_n \sinh \frac{n\pi y}{P} = \frac{r}{P} \int_0^P f(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx \rightarrow$$

$$\rightarrow D_n = \frac{r}{P \sinh \frac{n\pi y}{P}} \int_0^P f(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx$$

$$u = \frac{D_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi y}{P} \cos \frac{n\pi}{P} x$$

معادلی تیرم رعنی:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 \quad 0 < x < P \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(P, t) \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(P, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{array} \right.$$

برای هر t تابع u به کفالت تابعی از x تابی پیوسته است که دست کم چنین

بارمشتگ پیوسته دارد. با توجه به شرط مرزی، بسط فوریه سینوسی فرازنده

می‌کنیم.

$$\forall t : u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(t) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \frac{c^2 n^4 \pi^4}{P^4} \sin \frac{n\pi}{P} x$$

با جایگزینی در معادلی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(t) + \frac{c^2 n^4 \pi^4}{P^4} A_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{P} x = 0$$

اما ضریب بسط فردی لسینوس صفر، همچنانچه:

$$A_n''(t) + \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} A_n(t) = 0$$

$$A_n(t) = a_n \cos \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} t + b_n \sin \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} t + b_n \sin \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} t \right) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{P} x \Rightarrow a_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} \right) \sin \frac{n\pi}{P} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n \frac{C_n^r \pi^r}{P^r} = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

$$b_n = \frac{1}{C_n^r \pi^r} \int_0^P g(x) \sin \frac{n\pi}{P} x$$

تعمیم روش‌های به کار گرفته شده توسط فردی، منجر به تکنیک موسوم به:

روش جداسازی متغیرهاست که برای ردی وسیع از معادلات دیفرانسیل

پاره‌ای به ویژه خطي و مرتبه‌ی ۲ قابل استفاده است. این روش را

با حل چند مسئله توضیحی دهیم.

مثال: ابتداً میله‌ای فلزی به طول P با صریب انتقال حرارت

که در کنار دو پایه داری دارد و در چگالی ρ ، درجه حرارت T_0 صفر است. دمای مرید طرف

است و انتقال صلیق عایق بینی نشود و با محیط تبادل حرارت دارد.

اگر تعزیز دمای اولیه میله $f(x)$ باشد، دمای میله در زمان t که

با $u(x, t)$ نمایش داده شود. توسط معادله زیر مدل می‌شود:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < P \\ u(P, t) + k u_t(P, t) = 0 & \text{تابع} \end{cases}$$

جواب این مسئله پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

در این صورت باید داشته باشیم:

$$u_t(x, t) = X(x) T'(t)$$

$$u_{xx}(x, t) = X''(x) T(t)$$

با جایگزینی در معادلہ داریم:

$$X(x) T'(t) = C^T X''(x) T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{C^T T(t)} = -\sigma$$

* سمت چپ بحسب x و سمت راست فقط بحسب t است،

پس باید دو مقدار نابیجایی باقی بیش از طرزی باشد:

معادلات دیفرانسیل استurm-Liouville زیری رسم:

$$T'(t) = -\sigma C^T T$$

$$\begin{cases} X''(x) + \sigma X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(P) + k X'(P) = 0 \end{cases}$$

مثال ۵ ص ۲۳۸ کتاب

روش جداسازی :

می خواهیم مسائلی انتقال حرارت (که بعد) زیرا به روشن جداسازی متغیرها

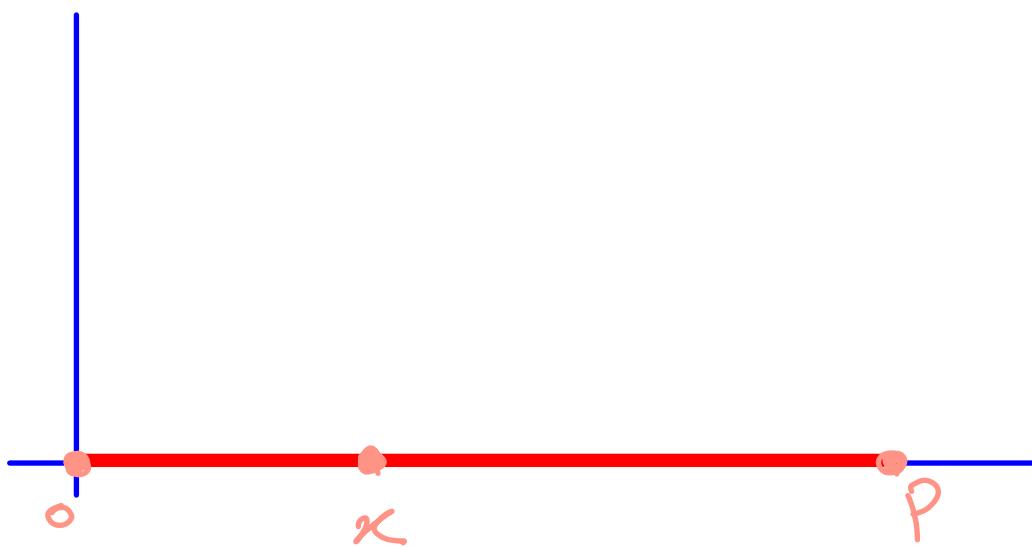
حل کنیم :

$$u_t = C^r u_{xx} \quad 0 < x < P$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u_x(P, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$



برای حل این مسئله فرض کنیم جوابی به شکل زیر برای مسئله داشته باشیم :

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

$$u_t(x, t) = X(x) T'(t)$$

$$u_x(x, t) = X'(x) T(t)$$

$$u_{xx}(x, t) = X''(x) T(t)$$

با جایگزین در معادلی $u_t = C^r u_{xx}$ داریم :

$$X(x) T'(t) = C^r X''(x) T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = C^r \frac{X''(x)}{X(x)}$$

سمت چپ رابطه فوک فقط بحسب t و سمت راست فقط بحسب x

است. بنابراین به ازای تابع مانند x داریم:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = C^r \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} C^r X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

$$\forall t \quad 0 = u(0, t) = X(0) T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\forall t \quad 0 = u_x(0, t) = X'(0) T(t) \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$\begin{cases} C^r X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(0) = 0 \end{cases}$$

مسئلہ استقرم۔ لیوول منظم

چند جملے میں معادلے $C^r X''(x) + \lambda X(x) = 0$ عبارت است از:

$$P(r) = C^r r^2 + \lambda$$

$$\lambda = -C^T \alpha^T \zeta_0 \quad (1)$$

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow C^T Y^T - C^T \alpha^T = 0 \Leftrightarrow r_0 \pm \alpha$$

$$X(x) = C_1 \cosh \alpha x + C_r \sinh \alpha x$$

$$x_0 = X(0) = C_1$$

$$x'_0 = X'(0) = C_r \alpha \cosh \alpha P \Rightarrow C_r = 0$$

جی اسٹو مکار ورثہ مکار نہ اسٹ.

$$\lambda = 0 \quad (5)$$

$$X''(x) = 0$$

$$X(x) = C_1 x + C_r$$

$$x_0 = X(0) = C_1$$

$$\lambda = C^T \beta^T \cdot 0 \quad (6)$$

$$P(r) = C^T Y^T + C^T \beta^T$$

$$X(x) = C_1 \cos \beta x + C_r \sin \beta x$$

$$x_0 = X(0) = C_1 \quad x'_0 = X'(0) = \beta C_r \cos \beta P$$

$$C_r = 1 \quad : \text{مکانیم فراز دیم}$$

$$\cos \beta P = 0 \Rightarrow \beta_n P = n\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\beta_n = \left(n + \frac{1}{r}\right) \frac{\pi}{P}$$

$$\lambda_n = C^r \beta^r = \left(n + \frac{1}{r}\right)^r \frac{\pi^r C^r}{P^r}$$

$$X_n(x) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{r}\right) \frac{\pi x}{P} \right)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

پس برای $T(t)$ نیز جواب‌های زیر را داریم:

$$T'(t) + \left(n + \frac{1}{r}\right)^r \frac{\pi^r C^r}{P^r} T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \frac{\pi^r C^r}{P^r} t}$$

پس برای $n = 1, 2, \dots$ جواب‌های به شکل زیر داریم:

$$U_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

طبق معادله دیفرانسیل داریم:

$$U_n(x, t) = e^{-\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \frac{\pi^r C^r}{P^r} t} \sin \left(\left(n + \frac{1}{r}\right) \frac{\pi x}{P} \right)$$

پس بنابر قضايیه:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{1}{r}) \frac{\pi r c^r}{\rho^r} t} \sin((n+\frac{1}{r}) \frac{\pi x}{\rho})$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin((n+\frac{1}{r}) \frac{\pi x}{\rho}) \quad (*)$$

برای آنکه در آن $O = \left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_r}{\|x_r\|}, \dots \right\}$ یاد آوری کنم که مجموعی $x_n = \sin((n+\frac{1}{r}) \frac{\pi x}{\rho})$

برای $f(x)$ نسبت بین پایه یک سطح $P \subset ([0, P], \mathbb{R})$ است.

$$\text{فورمولا اصلی: } f = \sum a_n \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

معادله $(*)$ به شکل زیرهم بیان می شود:

$$f(x) = \sum a_n \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \|x_n\| = \langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|} \rangle = \frac{1}{\|x_n\|} \langle f, x_n \rangle$$

$$a_n = \frac{\langle f, x_n \rangle}{\|x_n\|^r}$$

$$a_n = \frac{\int_0^P f(x) \sin \left((n + \frac{1}{r}) \frac{\pi x}{P} \right) dx}{\int_0^P \sin^r \left((n + \frac{1}{r}) \frac{\pi x}{P} \right) dx}$$

$$a_n = \frac{r}{P} \int_0^P f(x) \sin \left((n + \frac{1}{r}) \frac{\pi x}{P} \right) dx$$

مثال: معادلہ دیفرانسیل پارہ ای زیرا حل کنید۔

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 & 0 \leq x \leq r \\ u(0, t) = 0 = u(r, t) & 0 \leq t \\ u(x, 0) = \sin \left(\frac{\pi}{r} x \right) \\ u_t(x, 0) = -\sin \left(\pi x \right) \end{cases}$$

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad u_x = X'(x) T(t)$$

$$u_t = X(x) T'(t) \quad u_{xx} = X''(x) T(t)$$

$$X(x) T''(t) + X(x) T'(t) + X''(x) T(t) = 0$$

$$\frac{T''(t) + T'(t)}{T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$0 = u(0, t) = X(0) T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = u(r, t) = X(r) T(t) \Rightarrow X(r) = 0$$

$$\begin{cases} x''(x) + \lambda x(x) = 0 & P(r) = r^r + \lambda \\ x_0 = 0 = x(r) \end{cases}$$

بـل مقدار ویژه ناگایم (جای)

$\alpha > 0$, $\lambda = \alpha^r > 0$ بـل

$$x(x) = C_1 \cos \alpha x + C_r \sin \alpha x$$

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$x_0 = x(r) = C_r \sin \tau \alpha \stackrel{C_r = 1}{\Rightarrow} \tau \alpha = n\pi$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{r} \Rightarrow \lambda(n) = \frac{n^r \pi^r}{r} \quad \left. \begin{array}{l} \\ x_{(n)}(x) = \sin \frac{n\pi x}{r} \end{array} \right\}$$

$$T''(t) + T'(t) + \frac{n^r \pi^r}{r} T(t) = 0$$

$$P(r) = r^r + \gamma + \frac{n^r \pi^r}{r}$$

$$\gamma = -\frac{1 \pm \sqrt{1 - n^r \pi^r}}{r} = -\frac{1}{r} + i \frac{\sqrt{n^r \pi^r - 1}}{r}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{r}t} \left(a_n \cos \left(\frac{\sqrt{n^r \pi^r - 1}}{r} t \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{n^r \pi^r - 1}}{r} t \right) \right)$$

$$u_n(x, t) = x_n(x) T_n(t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x) T_n(t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\zeta}{\tau}t} \left(a_n \cos \left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}}{\tau} t \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}}{\tau} t \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{\tau}$$

$$\sin \left(\frac{n\pi}{\tau} x \right) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\tau}$$

$$a_1 = 1, \quad a_n = 0$$

$$-\sin \frac{\tau \pi x}{\tau} = -\sin \tau \pi x = u_t(x, 0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{\tau} + \sqrt{n^2\pi^2 - 1} \frac{b_n}{\tau} \right) \sin \frac{n\pi x}{\tau}$$

$$a_f = 0 \rightarrow -\frac{0}{\tau} + \sqrt{19\pi^2 - 1} \frac{b_f}{\tau} = -1$$

$$n=1 \rightarrow -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\pi^2 - 1} \frac{b_1}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ b_f = \frac{-1}{\sqrt{19\pi^2 - 1}}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 1}} \right.$$

حل معادلات پارهای غیرهمogenous

بای سادگی پر کمک مدل مثال نشان می دهم که چگونه می توان این نوع مسائل را حل کرد.

مثال: $u_t - u_{xx} = x + 1 \quad , \quad u(x_0) = x_0 \quad , \quad 1 \leq x \leq 0$

$$u(0, t) = t \quad , \quad u(1+t) = 1 = u(x_0) = x_0 \quad , \quad 1 \leq x \leq 0$$

در این مسئله ابتدا شرایط مرزی را با یک ترفند ساده همکن می کنیم برای

این منظور تابع $\hat{u}(x, t)$ را به قسمی می بایسیم که

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) - \hat{u}_0$$

در معادلی دیفرانسیل با شرایط همکن صدق کند.

در صورتی که شرایط مرزی از نوع دیریکله یا نیومن باشد، \hat{u} متناسب

با شکل زیر است.

$$\hat{u}(x, t) = b(t)x + c(t)$$

توابع بحسب t آنکه تعیین می شود.

در صورتی که شرط منی از نوع رو بن باشد، یعنی شرایط منی بر حسب

مشتقات جزئی باشند، \hat{u} مناسب به شکل زیر است:

$$\hat{u}(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

در این مثال $\hat{u}(x,t) = b(t)x + c(t)$ مناسب است.

باید آن که روی مرز $x=0$ باشد باید $u = \hat{u}$ باشد.

$$t = u(0,t) = \hat{u}(0,t) = b(t)(0) + c(t) = c(t)$$

$$l = u_x(1,t) = \hat{u}_x(1,t) = b(t)$$

$$c(t) = t, \quad b(t) = l$$

$$\hat{u}(x,t) = x + t$$

$$v(x,t) = u(x,t) - (x+t)$$

در این صورت واضح است:

$$v(0,t) = 0, \quad v_x(0,t) = 0$$

$$v(x,t) = u(x,t) - (x+t)$$

$$v_t = u_{t-1} \Rightarrow \begin{cases} u_t = v_t + 1 \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases}$$

$$U_t - U_{xx} = x + 1 \Rightarrow V_t + 1 - V_{xx} = x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_t - V_{xx} = x$$

$$V(x,0) = U(x,0) - x = x - x = 0$$

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} V_t - V_{xx} = x \\ V(0,t) = 0 \quad V_x(1,t) = 0 \\ V(x,0) = 0 \end{array} \right.$$

بای حل معادلی (T) ابتدا معادله دیفرانسیل و تابع دیشی نظری معادلی

نه کن نظری را بسته می آوریم.

$$V_t - V_{xx} = 0 \quad V_t = X(x) T'(t)$$

$$V = X(x) T(t) \quad V_{xx} = X''(x) T(t)$$

$$X(x) T'(t) - X''(x) T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\begin{aligned} V(0,t) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 & \left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 = X'(1) \end{array} \right. \\ V_x(1,t) = 0 &\Rightarrow X'(1) = 0 \end{aligned}$$

به سادگی مشاهده می شود که:

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau} \pi^{\tau} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$X_n = \sin \left((n + \frac{1}{\tau}) \pi x \right)$$

$$\|X_n\| = \sqrt{\langle X_n, X_n \rangle} = \sqrt{\int_0^1 X_n^2(x) dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \left((n + \frac{1}{\tau}) \pi x \right) dx} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad \text{جواب معادله (۲)}$$

برای هر مقدار دلخواه t تابع $\psi(x, t)$ بجهت x نسبت به مجموعی

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sqrt{\tau} X_n \quad \text{یک متعامد}$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sqrt{\tau} X_n$$

درین صورت دریم:

$$\psi_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t) \sqrt{\tau} X_n$$

$$\psi_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} -\sqrt{\tau} a_n \left(n + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau} \pi^{\tau} X_n$$

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\tau} X_n$$

$$c_n = \langle X, \sqrt{\tau} X_n \rangle = \int_0^1 X \sqrt{\tau} \sin \left((n + \frac{1}{\tau}) \pi x \right) dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} (-1)^n}{\pi^r (\xi_n^r + \xi_{n+1})}$$

با جایزین در معادلی

$$\sum a_n'(t) \sqrt{\pi} X_n - \sum -\sqrt{\pi} a_n(t) \left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r X_n =$$

$$= \sum \frac{\sqrt{\pi} (-1)^n X_n}{\pi^r (\xi_n^r + \xi_{n+1})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n'(t) + \left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r a_n \right) X_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} (-1)^n}{\pi^r (\xi_n^r + \xi_{n+1})} X_n$$

$$a_n'(t) + \left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r a_n(t) = \frac{\sqrt{\pi} (-1)^n}{\pi^r (\xi_n^r + \xi_{n+1})}$$

$$0 = V(x, \circ) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\circ) \sqrt{\pi} X_n \Rightarrow a_n(\circ) = 0$$

با درج

$$\begin{cases} y' + P(x)y = q(x) \\ y(\circ) = y_0 \end{cases}$$

$$y = y_0 e^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \left\{ q(x) e^{\int P(x) dx} \right\} dx$$

$$a_n(t) = C e^{-\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r t} + e^{-\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r t} \left(\frac{\sqrt[r]{r} (-1)^n}{\pi^r (r_n^r + r_{n+1})} \right).$$

$$\cdot e^{\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r t} dt = C e^{-\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r t} +$$

$$+ \frac{\sqrt[r]{r} (-1)^n}{\pi^r \left(n + \frac{1}{r}\right)^r (r_n^r + r_{n+1})}$$

$$0 = a_n(0) \Rightarrow C = \frac{-\sqrt[r]{r} (-1)^n}{\pi^r \left(n + \frac{1}{r}\right)^r (r_n^r + r_{n+1})}$$

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{\pi^r \left(n + \frac{1}{r}\right)^r (r_n^r + r_{n+1})} \left(-e^{\left(n + \frac{1}{r}\right)^r \pi^r t^r} + 1 \right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{r}\right) \pi x \right)$$

معادلی لاپلاس در دستگاه مختصات قطبی:

در دستگاه دکارتی:

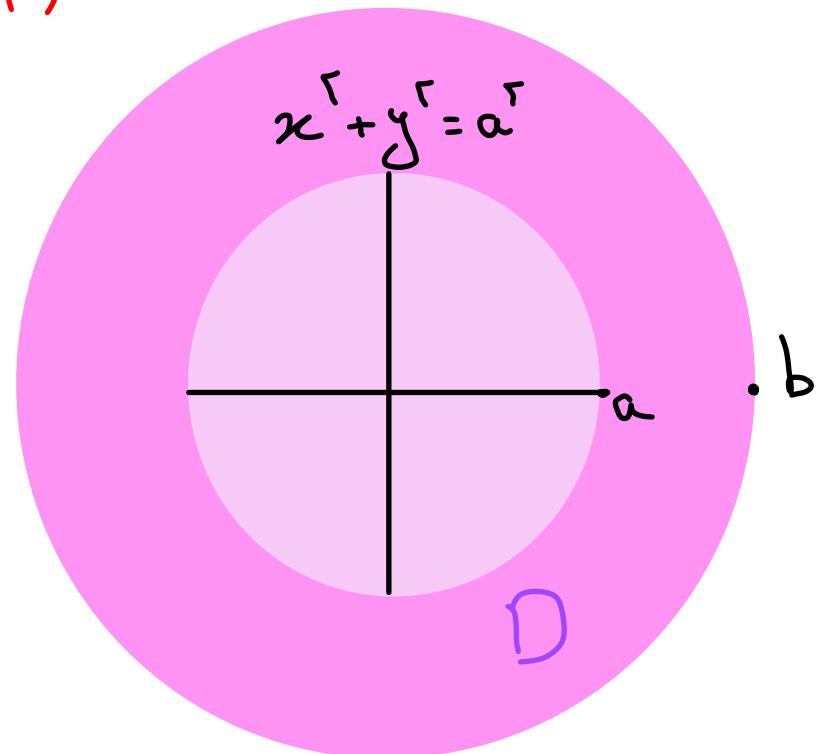
$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

$$r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0$$

زمان که ناحیه داده شده در دستگاه دکارتی مستطیلی بناست و که بالتعییر

متغیر قطبی، مستطیل شود.

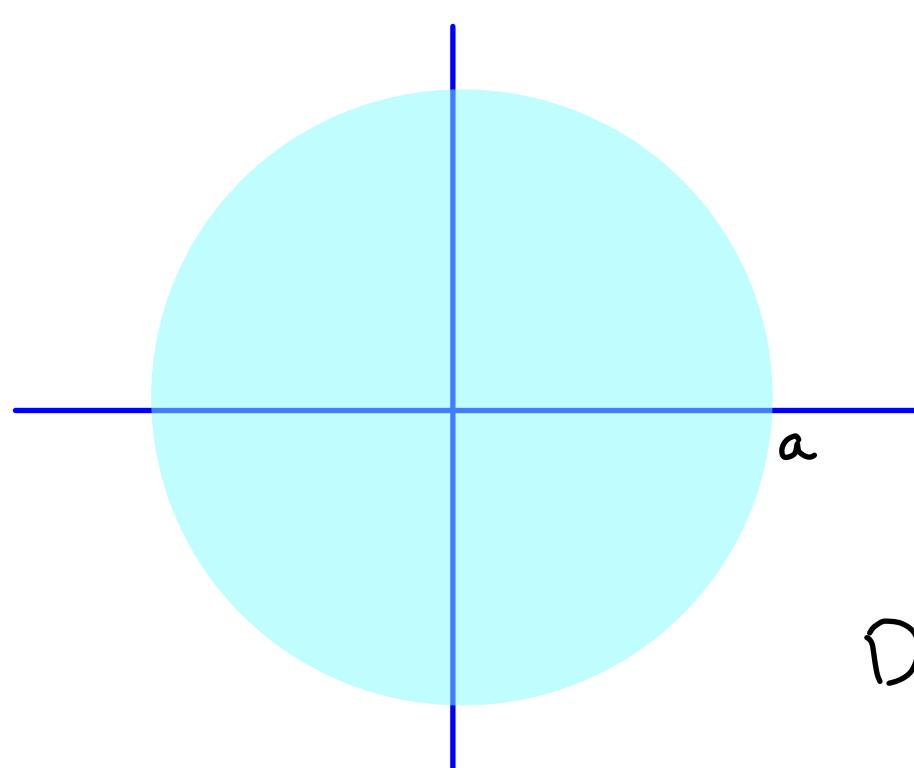
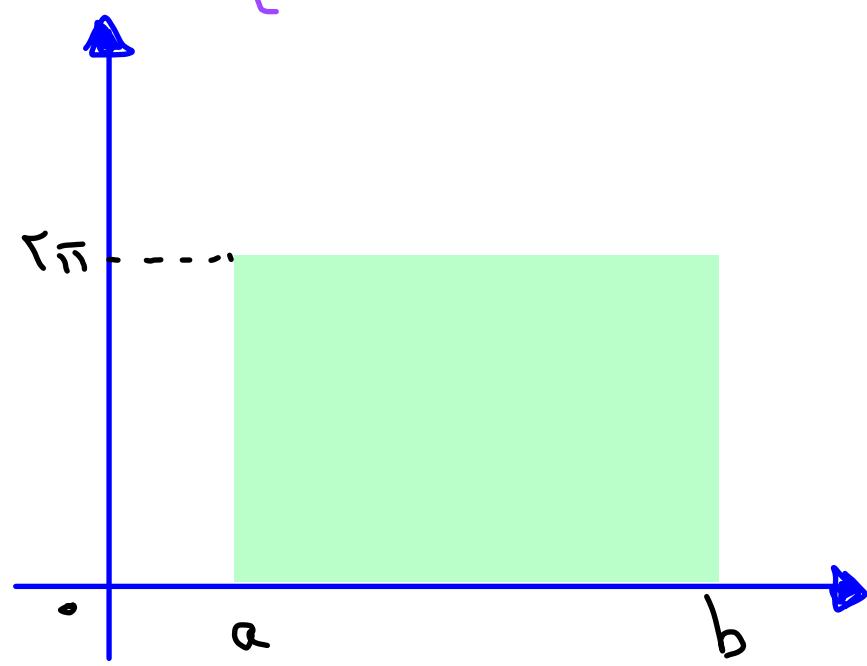
(1)



$$u|_{r=a} = f(\theta)$$

$$u|_{r=b} = g(\theta)$$

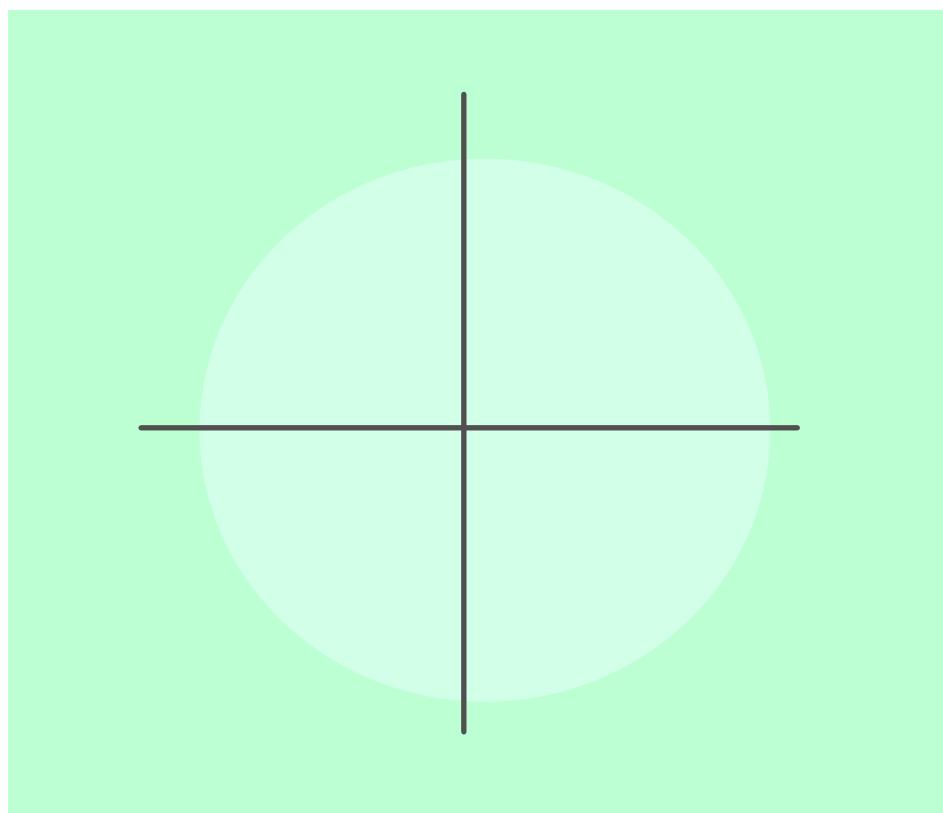
$$D = \{ (r, \theta) : 0 \leq \theta < \pi, a < r < b \}$$



$$u|_{r=a} = f(\theta)$$

$$r \rightarrow \infty^+ \rightarrow \text{asymptotic value}$$

$$D = \{ (r, \theta) : 0 \leq r < a, 0 \leq \theta < \pi \}$$



$$D = \{(r, \theta) : a < r, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r, 0) = u(r, \pi) \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) \\ u(a, \theta) = f(\theta) \\ u(b, \theta) = g(\theta) \end{cases}$$

محل:

$$U(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$r^2 R''(r) \Theta(\theta) + r R'(r) \Theta'(\theta) + R(r) \Theta''(\theta) = 0$$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) \end{cases}$$

$$\cos n\theta + \sin n\theta = e^{in\theta}$$

$$\Theta_n(\theta) = e^{in\theta} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r^k R''(r) + r R' - n^2 R = 0$$

$$R(r) = r^k \quad R'(r) = k r^{k-1} \quad R''(r) = k(k-1)r^{k-2}$$

$$r^k (k(k-1) + k - n^2) = 0$$

$$r^k (k^2 - n^2) = 0 \Rightarrow k = \pm n$$

$$R(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

$$f(\theta) = u(a, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n a^n + b_n a^{-n}) e^{in\theta}$$

$$g(\theta) = u(b, \theta) = \sum (a_n b^n + b_n b^{-n}) e^{in\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n a^n + b_n a^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ a_n b^n + b_n b^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n a^n + b_n a^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ a_n b^n + b_n b^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \end{array} \right.$$

—
—

$$= \int_0^{\pi} \cos -n\theta b_n + a_n$$

$$D = \{(r, \theta) : a < r < b, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

مطلوب حل معادلہ معنی:

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} & 0 < x, t \\ U(x, 0) = 0 & t > 0 \\ U(x, 0) = e^{-tx} & 0 < x \\ U_t(x, 0) = e^{-tx} & 0 < x \end{cases}$$

لکرانڈر

$$U(x, t) = X(x) T(t)$$

$$U_{tt} = X(x) T''(t)$$

$$U_{xx} = X''(x) T(t)$$

$$U_{tt} = U_{xx} \Rightarrow X(x) T''(t) = X''(x) T(t)$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

بھی جواب $\lambda < 0$ از لفظ معنی است کہ با کرانڈر بون

سازگاریت سے $X \rightarrow \infty$ وقوع $U(x, 0)$

$$\therefore \omega > 0, \lambda = \omega^2 > 0$$

$$X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \Rightarrow C_1 = 0$$

$$x_{\omega}(x) = \sin \omega x$$

$$\omega > 0 \\ T^* + \omega^* T = 0$$

$$T_{\omega}(t) = \sin \omega t, \cos \omega t$$

$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) \sin \omega x d\omega$$

$$e^{-rx} = u(x, 0) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega x d\omega$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^\infty e^{-rx} \sin \omega x dx = \frac{r}{\pi} \frac{\omega}{\omega^r + y}$$

$$e^{-rx} = u_t(x, 0) = \int_0^\infty \omega B(\omega) \sin \omega x d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega B(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^\infty e^{-rx} \sin \omega x dx = \frac{r}{\pi} \frac{\omega}{\omega^r (1 + \omega^r)}$$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{r}{\pi (1 + \omega^r)}$$

یاد آوری:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

$$\widetilde{F}(f(x)) = F(\omega)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} dw$$

: معکوس

$$f(x) = \tilde{F}^{-1}(F(\omega))$$

نتيجة:

$$\tilde{F}(f(x)) = F(\omega) \Rightarrow \tilde{F}(F(x)) = f(-\omega)$$

$$\tilde{F}(cf + g) = c\tilde{F}(f) + \tilde{F}(g) \quad (1)$$

$$\tilde{F}(f(x)) = F(\omega) \Rightarrow \tilde{F}(f(x-\alpha)) = e^{i\alpha\omega} F(\omega) \quad (2)$$

$$\tilde{F}(f(x)) = F(\omega) \Rightarrow \tilde{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (3)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \tilde{F}(f'(x)) = -i\omega \tilde{F}(f(x)) \quad (4)$$

$$\tilde{F}(f^{(k)}(x)) = (-i\omega)^k \tilde{F}(f(x)) \quad \text{نتيجة الف}$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow \tilde{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt\right) = -\frac{1}{i\omega} \tilde{F}(f(x)) \quad \text{نتيجة بـ}$$

$$\tilde{F}(f * g) = \tilde{F}(f(x)) \tilde{F}(g(x)) \quad (5)$$

بـ كل تبديل فوري ، معادل معج (حل عين)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \end{cases}$$

فرض کنیم $u(x, t)$ از نسبت به متغیر x بولی

دلخواه باشد t

$$u(\omega, t) = \mathcal{F}(u(x, t)) \quad \text{نسبت به } \omega$$

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = (-i\omega)^r \mathcal{F}(u) = -\omega^r u(\omega, t)$$

$$u_{tt}(\omega, t) = \frac{d}{dt^r} u(\omega, t) = \frac{d}{dt^r} \mathcal{F}(u(x, t)) =$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt^r} u(x, t)\right) = \mathcal{F}(u_{tt}(x, t))$$

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = u_{tt}$$

$$u_{tt} = a^r u_{xx} \Rightarrow \mathcal{F}(u_{tt}) = a^r \mathcal{F}(u_{xx}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{tt}(\omega, t) = -a^r \omega^r u(\omega, t)$$

$$\mathcal{F}(u(x, t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} u(x, t) e^{i\omega x} dx$$

$$U_t(\omega, \sigma) = G(\omega)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{tt}(w, t) + a^2 \omega^2 U(w, t) = 0 \\ U(w, 0) = \tilde{F}(w) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t(w, \sigma) = G(\omega) \\ U(w, 0) = \tilde{F}(w) \end{array} \right.$$

معادل مرتبت
t بحسب

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} U(w, t) = C_1 \cos awt + C_2 \sin awt \\ U(w, 0) = \tilde{F}(w) \end{array} \right. \right\} \Rightarrow C_1 = F(w)$$

$$U(w, 0) = F(w)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t(w, t) = -aw C_1 \sin awt + aw C_2 \cos awt \\ U_t(w, 0) = G(\omega) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow aw C_2 = G(\omega) \Rightarrow C_2 = \frac{G(\omega)}{aw}$$

$$U(w, t) = F(w) \cos awt + \frac{G(\omega)}{aw} \sin awt$$

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \bar{z}) g(\bar{z}) dz$$

$$f * g = g * f$$

$$U(w, t) = F(w) \left(\frac{e^{iawt} + e^{-iawt}}{2} \right) + \frac{G(\omega)}{aw} \left(\frac{e^{iawt} - e^{-iawt}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{iawt} F(w) + \frac{1}{2} e^{iawt} F(w) + \frac{1}{2ia} \frac{1}{iw} e^{iawt} G(w) - \frac{1}{2ia} \frac{1}{iw} e^{iawt} G(w)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\tau} f(x-at) + \frac{1}{\tau} f(x+at) -$$

$$- \frac{1}{\tau a} \int_{-\infty}^{x-at} g(s) ds + \frac{1}{\tau a} \int_{-\infty}^{x+at} g(s) dt =$$

$$= \frac{1}{\tau} (f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{\tau a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

مسئلہ دیکھو:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ U(x,0) = f(x) \\ \text{لا کردار} \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} U(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

فرض کیم $U(x,y)$ اور $U(\omega,y)$ بحسب خواستہ،
 (بایو دلخواہ ثابت)

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \Rightarrow F(U_{xx}) + F(U_{yy}) = 0$$

$$-\omega^2 U(\omega, y) + U_{yy}(\omega, y) = 0$$

$$U(\omega, 0) = F(\omega)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{yy}(\omega, y) - \omega^2 U(\omega, y) = 0 \\ U(\omega, 0) = F(\omega) \end{array} \right.$$

معادلے عادی مرتبہ
برجستہ

$$U(\omega, y) = B(\omega) e^{-\omega y} + A(\omega) e^{\omega y} \quad \omega > 0$$

با توجه به که از این ریومن ممکن است داشته باشیم $A(\omega) = 0$ و بدین معنی داشته باشیم ω دلخواه.

$$U(\omega, y) = B(\omega) e^{-\omega y} \Rightarrow B(\omega) = F(\omega)$$

$$U(\omega, 0) = F(\omega)$$

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-\omega y}$$

$$u(x, y) = \tilde{F}^{-1}(e^{-\omega y} F(\omega))$$

$$\tilde{F}(e^{-k|x|}) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \frac{k}{k^r + \omega^r}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \frac{k}{k^r + \omega^r}\right) = e^{-k|w|}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}^{-1}(e^{-k|w|}) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \frac{k}{k^r + \omega^r}$$

$$u(x, y) = F(\omega) e^{-\omega y} \Rightarrow u(x, y) = \tilde{F}^{-1}(e^{-\omega y} F(\omega)) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \frac{y}{y^r + \omega^r} * f \right)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \frac{y}{y^r + (y - \bar{z})^r} f(\bar{z}) d\bar{z} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\bar{z})}{y^r + (x - \bar{z})^r} d\bar{z}$$