



مسئله ۱*. نقیض عبارت منطقی

نقیض عبارت منطقی زیر را به دست آورید:

$$\exists x \forall y (P(x, y) \wedge \exists x (P(x, y) \rightarrow Q(x)))$$

مسئله ۲*. سه تفنگدار

شخصی در منزل خود به قتل رسیده است و پلیس ۵ نفر به نام های سروش، سبجان، سالار، سینا و سپهر را به عنوان مظنون دستگیر کرده است و در بازجویی از آنها هر یک، دو نفر را به عنوان قاتل معرفی کرده است. می دانیم دقیقاً سه نفر از این پنج نفر در قتل مشارکت داشته اند و چنانچه فرد قاتل باشد؛ نام یک قاتل و یک بی گناه و چنانچه فرد بی گناه باشد؛ نام دو قاتل را بر زبان آورده است. با توجه به اظهارات این افراد، پلیس چند قاتل را می تواند با قطعیت تشخیص دهد؟

- سروش: سبجان و سالار قاتل هستند.
- سبجان: سروش و سالار قاتل هستند.
- سالار: سبجان و سپهر قاتل هستند.
- سینا: سالار و سپهر قاتل هستند.
- سپهر: سبجان و سینا قاتل هستند.

مسئله ۳*. استنتاج منطقی

به کمک قواعد استنتاج نشان دهید اگر داشته باشیم:

$$\forall x (\neg Q(x) \vee S(x)) \quad (۱)$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \quad (۲)$$

$$\forall x (R(x) \rightarrow \neg S(x)) \quad (۳)$$

$$\exists x \neg P(x) \quad (۴)$$

آنگاه داریم:

$$\exists x \neg R(x).$$

مسئله‌ی ۴. گزاره‌های نامعلوم

فرض کنید p, q, s و t گزاره و $P(x)$ و $Q(x)$ گزاره‌نما باشند. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. در صورت درستی گزاره آن را به کمک قواعد استنتاج اثبات کنید و در صورت نادرستی مثال نقضی برای آن ارائه دهید.

$$(f) \quad (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow (s \vee t)$$

$$(b) \quad \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x P(x, x)$$

$$(g) \quad \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$$

مسئله‌ی ۵. دستگاه منطق

دستگاهی از منطق داریم که در آن به ازای گزاره‌های دلخواه ϕ و ψ و θ اصول و قضایای زیر همواره صحیح است.

(الف)	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
(ب)	$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
(ج)	$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$
(د)	$(\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
(ه)	$(\psi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \theta) \Rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$
(و)	$\psi \rightarrow \psi$

تنها قانون نتیجه‌گیری در این دستگاه وضع مقدم است. (از صحیح بودن $a \rightarrow b$ و a می‌توان صحت b را نتیجه گرفت.)

(الف) تنها با استفاده از اصول و قضایای بالا ثابت کنید در این دستگاه، عبارات $a \rightarrow \neg(\neg a)$ و $\neg(\neg a) \rightarrow a$ راستگو هستند.

(ب) با استفاده از اصول و قضایای بالا و قسمت (الف) ثابت کنید در این دستگاه، عبارت زیر راستگو است.

$$(\neg a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow a)$$

مسئله‌ی ۶. گزاره‌های معادل

فرض کنید $P(x, y)$ ، $Q(x, y)$ و $R(x)$ گزاره‌نما باشند. معادل بودن عبارت‌های منطقی زیر را نشان دهید.

$$\neg \forall x ((\exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \vee R(x)) \equiv \exists x (\neg R(x) \wedge \forall y (\neg Q(x, y) \wedge P(x, y)))$$

مسئله‌ی ۷. گزاره‌ی عظیم

با استفاده از برهان خلف گزاره زیر را ثابت کنید.

$$\forall x (r(x) \rightarrow \exists y (r(y) \wedge p(x, y))) \equiv \forall x \exists y (r(x) \rightarrow (r(y) \wedge p(x, y)))$$