

به نام خدا

تمرین سری اول درس نظریه زبان ها و ماشین ها

استاد: جناب آقای دکتر موقر

کمک تدریس: علیرضا ملک محمدی alireza.malek.lnch@gmail.com

مهلت تحویل تمرین، چهارشنبه ۲۸ ام اسفند است.

سوال (۱) قضیه جرج کانتور را اثبات کنید

بیان قضیه: در نظریه ابتدایی مجموعه ها، قضیه کانتور بیان می دارد که مجموعه توانی (مجموعه تمام زیرمجموعه ها) مجموعه A ، کاردینالیته ای بزرگتری از خود مجموعه A دارد. قضیه کانتور برای مجموعه های متناهی و نامتناهی نیز صادق است.

For any set A , finite or infinite, $|A| < |\text{Powerset}(A)|$

سوال (۲) در یک سیستم استنتاج قواعد استنتاج به صورت زیر تعریف میشود:

$$\frac{p, p \rightarrow q}{q} \quad \bullet \text{قاعده ۱}$$

$$\frac{\neg q, p \rightarrow q}{\neg p} \quad \bullet \text{قاعده ۲}$$

$$\frac{p, q}{p \wedge q} \quad \bullet \text{قاعده ۳}$$

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \bullet \text{قاعده ۴}$$

$$\frac{p \wedge q}{q} \quad \bullet \text{قاعده ۵}$$

$$\frac{\neg \neg p}{p} \quad \bullet \text{قاعده ۶}$$

$$\frac{p}{\neg \neg p} \quad \bullet \text{قاعده ۷}$$

ثابت کنید:

(1) $p, \neg \neg (q \wedge r) \vdash \neg \neg p \wedge r$ (یعنی با استفاده از فرض های p و $\neg \neg (q \wedge r)$ میتوان $\neg \neg p \wedge r$ را نتیجه گرفت.)

(2) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(3) $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

سوال ۳) فرض کنید A و B مجموعه هایی به ترتیب با n و m عضو هستند

الف) مجموعه $P(A \times B)$ داری چند عضو است ؟

ب) چه تعداد از این اعضا رابطه هستند ؟

ج) چه تعداد از این اعضا رابطه جزیی هستند ؟

د) چه تعداد از این اعضا تابع کامل هستند ؟

ه) چه تعداد از این اعضا تناظر یک به یک هستند ؟

سوال ۴) فرض کنید $N = \{1, 2, \dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. یک عدد کسری به صورت n/m است به قسمی که $n \in N, m \in N$

نشان دهید مجموعه اعداد کسری شماراست .

سوال امتیازی:

در کلاس با اعداد کاردینال آشنا شدیم و دیدیم در ریاضیات عدد اصلی یا عدد کاردینال (Cardinal number) مفهوم و معیاری است که برای نشان دادن اندازه مجموعه ها، و به ویژه، برای مقایسه بزرگی آنها در کنار یکدیگر به کار می رود..

۱) نشان دهید بزرگترین عدد کاردینال وجود ندارد .

۲) آیا مجموعه ای پیدا میشود که کاردینالیتی آن از اعداد حقیقی کمتر و از اعداد طبیعی بیشتر باشد ؟ پاسخ را کاملاً شرح دهید

۳) آیا لزوماً کاردینالیتی دو مجموعه نامتناهی باهم قابل مقایسه است ؟

با ارزی موفقیت

ملک محمدی