۹۹۲۶۰۷۴

۱) اگر بردارها مستقل خطی نباشند باعث می‌شود در مرحله‌ای q_i ای تولید شده بردار صفر شود که اندازه آن نیز صفر است و تقسیم بر صفر رخ می‌دهد $\left(\hat{q}_i = \frac{q_i}{\|q_i\|_2}\right)$ و الگوریتم متوقف می‌شود.

در واقع با توجه به این که این الگوریتم هر یک از بردارهای ورودی را به ترتیب نسبت به بردارهای قبلی متعامد می‌کند و این کار با جابجایی آن بردار و عمود ساختن آن بر span بردارهای قبلی انجام می‌شود، حال چون $v_3 \in Span\{v_1, v_2\}$ بنابراین این بردارها مستقل خطی نیستند و v_3 در span بردارهای قبل از خود قرار می‌گیرد و بردار صفر تولید می‌شود و الگوریتم متوقف می‌شود (Runtime Error).

۲) الف) با توجه به این که ماتریس متعامد خاصیت $\boxed{QQ^T = Q^TQ = I}$ را دارد بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $Q^T \underbrace{(Q^T)^T}_{Q} = \underbrace{(Q^T)^T}_{Q} Q^T = I$ در نتیجه ترانهاده یک ماتریس متعامد نیز خاصیت ایزومتری را دارد و متعامد خواهد بود. [درست]

ب) شرط پایه بودن این است که این سطرهای ماتریس $n \times n$ مولد $\mathbb{R}^n$ باشند و همچنین مستقل خطی باشند. اگر این ۲ شرط را داشته باشد می‌توان با استفاده از الگوریتم گرام-اشمیت این سطرها را متعامد و یکه کرد. در نتیجه لزوماً این گزاره برقرار نیست و نیاز است شرط‌های بالا برقرار باشند [نادرست]

ج) با توجه به این که ماتریس متعامد دو خاصیت I $\boxed{QQ^T = Q^TQ = I}$ و II $\boxed{Q^{-1} = Q^T}$ را دارد و از گزاره الف این سؤال می‌دانیم که ترانهاده یک ماتریس متعامد، متعامد است در نتیجه با استفاده از II نتیجه می‌گیریم که وارون یک ماتریس متعامد نیز متعامد خواهد بود [درست]

3)

Input: $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی

(1) $q_1 = v_1 \quad , \quad \hat{q}_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|_2} \longrightarrow q_1 = [0, 1, 1]^T$

$\|q_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(2) $q_2 = v_2 - proj_{q_1}(v_2) \quad , \quad \hat{q}_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|_2}$

$\hat{q}_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|_2} = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$

(3) $q_3 = v_3 - proj_{q_1}(v_3) - proj_{q_2}(v_3) \quad , \quad \hat{q}_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|_2}$

$proj_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|_2^2} \cdot u$

CamScanner

۹۹۲۶۰۷۳

$$\text{proj}_{q_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, q_1\rangle}{\|q_1\|_2^2} q_1 = \frac{\langle [1,0,1]^T, [0,1,1]^T\rangle}{0^2+1^2+1^2} [0,1,1]^T = \frac{1}{2}[0,1,1]^T$$

$$q_2 = v_2 - \text{proj}_{q_1}(v_2) = [1,0,1]^T - [0,1/2,1/2]^T = [1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$$

$$\hat{q}_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|_2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,[1, -1/2, 1/2]^T \qquad \|q_2\|_2 = \sqrt{1 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$q_3 = v_3 - \text{proj}_{q_1}(v_3) - \text{proj}_{q_2}(v_3)\ ,\quad \hat{q}_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|_2}$$

$$\text{proj}_{q_1}(v_3) = \frac{\langle v_3, q_1\rangle}{\|q_1\|_2^2} \cdot q_1 = \frac{\langle [2,1,0]^T, [0,1,1]^T\rangle}{0^2+1^2+1^2} \cdot [0,1,1]^T = \frac{1}{2}[0,1,1]^T$$

$$\text{proj}_{q_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, q_2\rangle}{\|q_2\|_2^2} \cdot q_2 = \frac{\overbrace{\langle [2,1,0]^T, [1,-1/2,1/2]^T\rangle}^{\to\, 3/2}}{3/2} \cdot [1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^T = [1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^T$$

$$q_3 = [2,1,0]^T - [0,1/2,1/2]^T - [1,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]^T = [1, 1, -1]^T \qquad \|q_3\|_2 = \sqrt{3}$$

$$\hat{q}_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|_2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right]^T$$

---

۴) الف)

$\forall i,\ a_i \neq 0 \qquad A_{n\times n} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ (با فرض استقلال $\{a_i\}$)

می‌دانیم با استفاده از تجزیه QR می‌توانیم ماتریس A را به شکل زیر دربیاوریم:

$$A = \underbrace{\hat{Q} D^{-1}}_{Q \text{ متعامد}} \underbrace{D\hat{R}}_{R \text{ بالامثلثی}}$$

ادعا می‌کنیم برای هر ماتریس متعامد Q، همواره $|\det(Q)| = 1$.

اثبات این ادعا به شکل مقابل است. می‌دانیم:

خاصیت‌های ماتریس متعامد:

$$\boxed{QQ^T = Q^TQ = I} \longrightarrow \det(Q).\det(Q^T) = \det(I)$$

$$\boxed{Q^{-1} = Q^T}$$

و همچنین می‌دانیم $\Rightarrow$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

$$\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(Q).\det(Q^T) = \det(I) \\ \det(Q) = \det(Q^T) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\det(Q))^2 = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \det(Q) = \pm 1 \Rightarrow |\det(Q)| = 1$$

۹۹۲۶۰۷۳

بنابراین دیدیم که برای هر ماتریس متعامد Q ، همواره $|\det(Q)| = 1$.

$$A = \underbrace{\hat{Q}}_{\text{متعامد}} D^{-1} \underbrace{D\hat{R}}_{\text{بالامثلثی}} \longrightarrow \det(A) = \det(Q)\det(D)\det(\hat{R})$$

$Q \qquad R$

می‌دانیم که دترمینان ماتریس بالامثلثی یا قطری برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس است. بنابراین چون $\det(Q) = \pm 1$ و $\hat{R}$ بالامثلثی قطر واحد است بنابراین $\det(\hat{R}) = 1$ ، درنهایت داریم:

$$\det(A) = \pm \det(D)$$

$$D = \mathrm{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn})$$

و می‌دانیم که تجزیه QR درحالت کلی به شکل مقابل است:

$$q_1 = a_1 \quad , \quad r_{11} = \|q_1\|_2$$

$$q_2 = a_2 - r_{12} q_1 \quad , \quad r_{12} = \frac{q_1^T a_2}{\|q_1\|_2^2} \quad , \quad r_{22} = \|q_2\|_2$$

$$\vdots$$

$$q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i \quad , \quad r_{ij} = \frac{q_i^T a_j}{\|q_i\|_2^2} \quad , \quad r_{jj} = \|q_j\|_2$$

و در هر مرحله برای جابجایی و تغییر a_j با الگوریتم گرام اشمیت a_j را روی q_i های قبلی که بدست آورده‌ایم تصویر می‌کنیم و این مقدار تصویرشده که جزئی از a_j اصلی است را از a_j کم می‌کنیم و به این ترتیب اندازه a_j کوچکتر می‌شود و به q_i های قبلی عمود می‌شود. درنتیجه به طور کلی اندازه q_j از a_j کمتر مساوی است:

$$\|q_j\|_2 \leq \|a_j\|_2$$

با توجه به این که داشتیم $\det(A) = \pm \det(D)$ و می‌دانیم $\det(D) = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{nn}$ ، $r_{jj} = \|q_j\|_2$

بنابراین:

$$\det(A) = \pm \det(D) = \pm \prod_{i=1}^{n} \|q_i\|_2 \leq \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_2 \Rightarrow \boxed{\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_2}$$

ب) اگر ستون‌های A یعنی a_j ها متعامد باشند به این معناست که اگر طبق الگوریتم گرام اشمیت پیش برویم تصویر a_j روی q_i های قبلی صفر می‌شود زیرا این بردارها طبق فرض بر هم عمودند و می‌دانیم برای ۲ بردار عمود $Y^T X = X^T Y = 0$ درنتیجه $q_i^T a_j = 0$ و بنابراین تمامی r_{ij} ها صفر می‌شوند و درنتیجه:

$$q_1 = a_1 \ , \ q_2 = a_2 \ , \ \dots \ , \ q_n = a_n \ , \quad r_{11} = \|a_1\|_2 \ , \ \dots \ , \ r_{nn} = \|a_n\|_2$$

درنتیجه داریم:

$$\det(A) = \pm \det(D) = \pm \prod_{i=1}^{n} \|q_i\|_2 = \pm \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_2 \Rightarrow \boxed{\det(A) = \pm \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|_2}$$

حال اگر بدانیم که $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\|a_i\|_2$ آنگاه می‌توانیم A را یک ماتریس قطری در نظر بگیریم که عناصر روی قطر اصلی آن $\|a_i\|_2$ هستند. می‌دانیم که شرط تعامد مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_n\}$ این است که $v_i^T v_j = 0$ $(i\neq j \,,\, i , j = 1,2,3,\dots,n)$ و ماتریس A به شکل زیر در می‌آید:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \|a_1\|_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \|a_2\|_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_n\|_2\end{bmatrix}\\ \begin{matrix} \underbrace{\qquad}_{v_1} & \underbrace{\qquad}_{v_2} & \cdots & \underbrace{\qquad}_{v_n}\end{matrix}\end{array}$$

واضح است به ازای هر i و j ای بین 1 تا n (مخالف هم) $v_i^T v_j = 0$ در نتیجه ماتریس A متعامد است.

به طور کلی تر می‌توان گفت با توجه به این که $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\|a_i\|_2$ بنابراین ماتریس A یا قطری است یا بالا مثلثی است یا پایین مثلثی و در همه این حالات عناصر روی قطر اصلی این ماتریس $\|a_i\|_2$ ها هستند که در همه این حالت ها شرط متعامد بودن یعنی $A^TA = AA^T = I_n$ برقرار خواهد بود (البته بعد از یکه کردن ماتریس A)

۵) الف) تجزیه QR ۹۹۳۲۶۰۷۳

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad q_۱ = a_۱ = [۲, ۱, ۰]^T, \quad r_{۱۱} = \|q_۱\|_۲ = \sqrt{۵}$$

$$r_{۱۲} = \frac{q_۱^T a_۲}{\|q_۱\|_۲^۲} = \frac{۳}{۵}$$

$$q_۲ = a_۲ - r_{۱۲} q_۱ \qquad q_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۵}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰٫۲ \\ ۰٫۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$r_{۲۲} = \|q_۲\|_۲ = \sqrt{(\tfrac{۱}{۵})^۲ + (\tfrac{۲}{۵})^۲ + ۲^۲} = \frac{\sqrt{۱۰۵}}{۵} \simeq ۲٫۰۴۹$$

$$q_۳ = a_۳ - r_{۱۳} q_۱ - r_{۲۳} q_۲ \qquad r_{۱۳} = \frac{q_۱^T a_۳}{\|q_۱\|_۲^۲} = \frac{-۲}{۵} \qquad r_{۲۳} = \frac{q_۲^T a_۳}{\|q_۲\|_۲^۲} = \frac{۵۵}{۱۰۵}$$

$$q_۳ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} - (\frac{-۲}{۵})\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} - \frac{۵۵}{۱۰۵}\begin{bmatrix} -۰٫۲ \\ ۰٫۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \left[\frac{-۲}{۲۱}, \frac{۴}{۲۱}, \frac{-۱}{۲۱}\right]^T = [-۰٫۰۹۵, ۰٫۱۹۰, -۰٫۰۴۷]^T$$

$$r_{۳۳} = \|q_۳\|_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲۱}} \simeq ۰٫۲۱۸۲$$

$$D = diag(r_{۱۱}, r_{۲۲}, r_{۳۳}) \qquad \hat{R} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳/۵ & -۲/۵ \\ ۰ & ۱ & ۵۵/۱۰۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad R = D\hat{R}$$

$$R = \begin{bmatrix} ۲٫۲۳۶ & ۱٫۳۴۱ & -۰٫۸۹۴ \\ ۰ & ۲٫۰۴۹ & ۱٫۰۷۳ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۲۱۸ \end{bmatrix} \qquad Q = \hat{Q} D^{-۱} \qquad \hat{Q} = [q_۱, q_۲, q_۳]$$

$$Q = \begin{bmatrix} ۰٫۸۹۴ & -۰٫۰۹۷ & -۰٫۴۳۶ \\ ۰٫۴۴۷ & ۰٫۱۹۵ & ۰٫۸۷۲ \\ ۰ & ۰٫۹۷۵ & -۰٫۲۱۸ \end{bmatrix}$$

$$QR = A$$

$$QQ^T = Q^TQ = I_۳$$

ایران سیدی

۹۹۲۶۰۷۳

۵) ب) با توجه به تابع QR_decomposition مرحله به مرحله پیچیدگی محاسباتی و میزان محاسبات را بدست می‌آوریم:

① محاسبه دترمینان ماتریس برای اطمینان از مستقل خطی بودن ستون‌ها: بهترین حالت استفاده از الگوریتم استراسن با $O(n^{2.37})$ است. البته در کل می‌توان از این قسمت صرف‌نظر کرد.

② تشکیل ماتریس‌های کمکی: $O(mn)$

③ حلقه تو در تو:

$$O\left[\sum_{j}^{n}\left(m+\sum_{i}^{n}\left(\underbrace{((2m+2m+1)+2m)}+1+(2m+1)\right)\right)\right]=$$

$$O\left[n\left(m+\underbrace{\underbrace{n(6m+\cancel{1})}_{6mn}+1+2m+1}_{6mn+3m+2}\right)\right]=O\left[6mn^2+3mn+2n\right]=O(mn^2)$$

④ ضرب ماتریسی برای بدست آوردن Q و R: باز هم می‌توان از استراسن استفاده کرد و $O(n^{2.37})$.

در نهایت پیچیدگی محاسباتی تجزیه QR برابر است با: $O(mn^2)+O(n^{2.37})$

و اگر $m \geq n^{0.37}$ برقرار باشد برابر است با: $O(mn^2)$

۶) الف) داخل notebook است

ب) " " "

ج) " " "

د) با توجه به این که پیچیدگی زمانی الگوریتم گرام اشمیت و تجزیه QR هر دو از $O(mn^2)$ هستند بنابراین اگر ابعاد ماتریس خیلی بزرگ شوند زمان بسیار زیادی طول می‌کشد تا الگوریتم پایان یابد.

اگر فرض کنیم یک کامپیوتر قادر به اجرای 10^5 عملیات در ثانیه باشد و ابعاد ماتریس ورودی $m=n=10^5$ باشد آنگاه $(10^5)^3/10^5 = 10^{10}_{(s)}$ ثانیه طول می‌کشد تا به جواب برسیم که عدد بسیار بزرگی است و اصلاً مطلوب نیست.