(1)

باید دستگاه مربعی $\underbrace{A^TA}_{B}X^*=\underbrace{A^Tb}_{C}$ را برای X^* حل کنیم :

$$B=A^TA=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}\qquad C=A^Tb=\begin{bmatrix}14\\4\\10\end{bmatrix}\qquad BX^*=C$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&1&0&3\\1&0&1&8\\1&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&1&8\\1&1&0&3\\1&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{R_3=R_3-R_1\\R_4=R_4-R_1}]{R_2=R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&7\\0&0&0&2\\0&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_2=-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&-1&-7\\0&-1&1&1\\0&0&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{R_1=R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&8\\0&1&-1&-7\\0&0&0&-6\\0&0&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[R_4=R_4-2R_3]{R_3=-\frac{R_3}{6}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&8\\0&1&-1&-7\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2+7R_3]{R_1=R_1-8R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\qquad \text{Rank}(A)=2\neq\text{Rank}([A|b])=3$$

پس طبق قضایایی که داشتیم A رتبه ناقص است و بی‌نهایت جواب کمترین مربعات داریم

و به حل دستگاهی که بالاتر به آن رسیدیم می‌پردازیم :

ماتریس افزوده دستگاه $BX^*=C$ را تشکیل می‌دهیم :

$$[B|C]=\left[\begin{array}{ccc|c}4&2&2&14\\2&2&0&4\\2&0&2&10\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{R_2=R_2-2R_1\\R_3=R_3-2R_1}]{R_1=\frac{R_1}{4}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1/2&1/2&7/2\\0&1&-1&-3\\0&-1&1&+3\end{array}\right]$$

B منفرد است : $\det(B)=0$

$$\xrightarrow[R_1=R_1-\frac{R_2}{2}]{R_3=R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&5\\0&1&-1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

اگر $X^*=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ آنگاه :

$$\begin{cases}a+c=5 & : a=5-c\\ b-c=-3 & : b=c-3\end{cases}$$

پس اگر $c=t\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد آنگاه :

$$X^*=\begin{bmatrix}5-t\\t-3\\t\end{bmatrix}$$

$$r^*=b-AX^*=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}_{4\times3}\begin{bmatrix}5-t\\t-3\\t\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\2\\5\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{bmatrix}$$

② حل دستگاه فرامعین به روش افراز به دستگاه فرامعین زمانی قابل اجراست که شرط $Rank(A)=Rank([A|b])=n$ برقرار باشد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \\ ۸ \\ -۴ \end{bmatrix}}_{b} \xrightarrow[\text{سطری پلکانی تحویل یافته}]{\text{تبدیل به حالت}} [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ۷۰/۱۹ \\ 0 & 1 & 0 & -۶/۱۹ \\ 0 & 0 & 1 & -۴۱/۱۹ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین شرط $Rank(A)=Rank([A|b])=3=n$ برقرار است و داریم:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ \hline ۲ & -۵ & ۶ \end{array}\right] \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} ۴ \\ -۵ \\ ۸ \\ \hline -۴ \end{array}\right] \Rightarrow A_1 X^* = b_1 \Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} ۳,۶۸۴۲ \\ -۰,۳۱۵۷ \\ -۲,۱۵۷۸ \end{bmatrix}$$

که X^* همان یکتا جواب دستگاه اصلی معین $AX=b$ است که از فرم سطری پلکانی تحویل یافته که در بالا نوشته ام نیز به همین نتیجه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_1 = ۷۰/۱۹ \simeq ۳,۶۸۴۲ \\ x_2 = -۶/۱۹ \simeq -۰,۳۱۵۷ \\ x_3 = -۴۱/۱۹ \simeq -۲,۱۵۷۸ \end{cases}$$

---

③ برای ماتریس رتبه کامل $A_{m\times n}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^m$ می‌دانیم که یک جواب یکتا برای دستگاه $AX=b$ داریم.

($\Leftarrow$) اگر x را جواب کمترین مربعات دستگاه درنظر بگیریم x باید در معادلات نرمال صدق کند: $A^TAX^*=A^Tb$

اگر قرار دهیم $r=b-Ax$ داریم:

$$A^TAx = A^Tb \Rightarrow A^T(b-Ax)=0$$

تغییراتی در معادلات بدست آمده ای دهیم تا بصورت معادلات حاصل از یک دستگاه خطی در بیایند:

$$\begin{cases} r = b - Ax \\ A^T r = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ir + Ax = b \\ A^T r + 0x = 0 \end{cases}$$

می‌توان این معادلات را به شکل ماتریس مقابل نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_{m\times m} & A \\ A^T & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{m\times 1} \\ x_{n\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m\times 1} \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}$$

($\Rightarrow$) حال اگر روابط قبلی برقرار باشند و دستگاه مقابل را داشته باشیم در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Ir + Ax = b \\ A^T r + 0x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r + Ax = b \\ A^T r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = b - Ax \\ A^T r = 0 \end{cases}$$

قضیه: بردار x جواب مسئله کمترین مربعات دستگاه $AX=b$ است اگر و تنها اگر $r = b - Ax$ بر $R(A)$ عمود باشد.

می‌دانیم ۲ بردار برهم عمودند هرگاه $Y^T X = X^T Y = 0$. بنابراین r بر A عمود است و می‌دانیم که $R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = AX,\ X \in \mathbb{R}^n$ به ازای برداری مانند$\}$. حال باید نشان دهیم r بر $R(A)$ عمود است.

فرض کنیم $p \in R(A)$ در نتیجه $p = AX$ به ازای $X \in \mathbb{R}^n$. حال با محاسبه $p^T r$ داریم:

$$p^T r = (AX)^T r = X^T \underbrace{A^T r} = 0 \longrightarrow$$

در نتیجه r و p برهم عمودند و بنابراین r بر $R(A)$ عمود است و x جواب مسئله کمترین مربعات دستگاه $AX=b$ می‌باشد.

(4) ماتریس $A_{m \times n}$ (رتبه کامل) و $b \in \mathbb{R}^m$

الف) اگر b در فضای ستونی A باشد وقتی ماتریس افزوده یعنی $[A|b]$ را به صورت سطری پلکانی تحویل یافته در بیاوریم به $Rank(A) = Rank([A|b]) = n$ می‌رسیم پس جواب دستگاه یکتاست و بنابراین هر جواب $AX=b$ که در واقع فقط همان یک جواب یکتا است یک جواب کمترین مربعات نیز می‌باشد. درست

ب) مسئله کمترین مربعات $AX=b$ بصورت $\min\limits_{X \in \mathbb{R}^n} \|b - AX\|$ است. از فصل صفر می‌دانیم که فضای ستونی A را بردارهای ستونی A که به شکل $c_1, c_2, \dots, c_n$ هستند گسترش می‌دهند و زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ است.

در نتیجه این گزاره که جواب کمترین مربعات $AX=b$ نزدیکترین نقطه‌ی فضای ستونی A به b است با توجه به این که AX برابر است با:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

که یک ترکیب خطی از ستون‌های A است و در نتیجه عضو فضای ستونی A است درست است.

پ) با توجه به این که مسئله کمترین مربعات دستگاه $AX=b$، تبدیل به مسئله دستگاه معادلات نرمال شد $A^T A X^* = A^T b$ درنتیجه اگر $\hat{X}$ یک جواب مسئله کمترین مربعات باشد آنگاه $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$ و A رتبه کامل است و مسئله دارای جواب یکتاست.

درست

۳) ب) زیرا A^TA لزوماً ممکن است Sparse نباشد

ولی

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$$

بوضوح Sparse است و استفاده از این روش باعث کاهش پیچیدگی محاسباتی و استفاده از حافظه کمتر برای حل این مسئله با استفاده از دستگاه ذکر شده می‌شود.

(5) $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\hat{x}$ یک جواب برای کمترین مربعات $Ax=b$ یعنی داریم: $A^TA\hat{x}-A^Tb=0$

($\Leftarrow$) حال فرض کنیم بردار $y\in\mathbb{R}^n$ نیز یک جواب برای این مسئله باشد (در این صورت y باید در معادله نرمال صدق کند) باید نشان دهیم $y=\hat{x}+z$ و $z\in N(A)$.

با توجه به این که می‌دانیم y جواب معادله نرمال است پس آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$A^TA(\hat{x}+z)-A^Tb=\underbrace{A^TA\hat{x}-A^Tb}_{0}+A^TAz=0\Rightarrow A^TAz=0$$

با توجه به این که $N(A)=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}$ بنابراین $z\in N(A^TA)$ و چون $N(A)=N(A^TA)$ در نتیجه $z\in N(A)$ و حکم اثبات شد.

($\Rightarrow$) حال اگر فرض کنیم $y=\hat{x}+z$ و $z\in N(A)$ باید نشان دهیم که y جواب مسئله کمترین مربعات $Ax=b$ است (یعنی در $A^TAx-A^Tb=0$ صدق می‌کند). اگر y را در معادله جایگذاری کنیم:

$$A^TA(\hat{x}+z)-A^Tb=(\underbrace{A^TA\hat{x}-A^Tb}_{\text{می‌دانیم که مقدار این عبارت صفر است}})+A^TAz=0 \xrightarrow[z\in N(A^TA) \text{ در نتیجه } N(A)=N(A^TA)]{\text{با توجه به این که } z\in N(A) \text{ و}}$$

و بنابراین طبق تعریف $A^TAz=0$

در نهایت مقدار عبارت پس از جایگذاری y صفر شد بنابراین y در معادله نرمال صدق می‌کند و یک جواب برای این مسئله است.

(6)

$$P=ae^{bx}$$

$$\underbrace{\ln(P)}_{Y_i}=\underbrace{\ln(a)}_{A}+bx$$

$$Y_i=A+bx_i$$

در برازش کمترین مربعات به دنبال کمینه کردن مجموع مربعات اختلاف‌های مقادیر پیش‌بینی شده با مقادیر واقعی هستیم:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(bx_i+A)\right)^2$$

برای پیدا کردن بهترین مقادیر A و b باید مشتق S نسبت به A و b را محاسبه کنیم و برابر با صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial A}=\sum_{i=1}^{n}2(bx_i+A-y_i)=0\rightarrow b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i+nA=0$$

$$\rightarrow A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\boxed{\bar{y}-b\bar{x}=A}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2x_i(bx_i+A-y_i)=0\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(-2x_iy_i+2Ax_i+2bx_i^2\right)=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری } A \text{ در این عبارت}}$$

$$\longrightarrow -\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)+(\bar{y}-b\bar{x})\sum(x_i)+b\sum(x_i^2)=0\longrightarrow\boxed{b=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}$$

یک روش دیگر حل این مسئله این است که به این شکل عمل کنیم:

$$P = a e^{bx}$$

$$\underbrace{\ln(P)}_{Y} = \underbrace{\ln(a)}_{A} + bx$$

$$Y_i = A + b x_i$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} \end{bmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{10} \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$WX = Y$$

معادله نرمال

$$W^T W X = W^T Y$$

این دستگاه را با دستورات آماده python حل می‌کنیم و $X = \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}$ را بدست می‌آوریم.

$$a = e^A$$

و سپس نمودارهای خواسته شده را رسم می‌کنیم.