دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل هفتم: تجزیه مقادیر تکین

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ تجزیه مقادیر تکین (منفرد) ماتریس ها

توجه: برای مطالعه هرچه بهتر این فصل، مرور الگوریتم گرام_اشمیت از فصل اول و محاسبه ی جفت ویژه های یک ماتریس از فصل پنجم ضروری است.

در فصل‌های قبل با ماتریس‌های قطری شدنی آشنا شدیم. ماتریس A را قطری شدنی گویند هرگاه ماتریس نامنفرد P موجود باشد که

$$A = PDP^{-1} \tag{1}$$

که در این صورت گوییم A با یک ماتریس قطری D متشابه است. وقتی ماتریس A را بتوان به صورت (۱) تجزیه نمود آنگاه می‌توان از فواید این تجزیه بهره برد. برای مثال می‌دانیم که $\lambda(A) = \lambda(D)$ و عناصر قطری D همان مقادیر ویژه‌ی A خواهند بود.

یا مثلا توان k- ام ماتریس A به راحتی از رابطهٔ

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

به دست می‌آید. توجه کنید که توان k- ام ماتریس قطری

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

به راحتی از

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

محاسبه می‌شود. اکنون ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

با محاسبه‌ی جفت ویژه‌های A داریم.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad X_1 = X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون A دارای دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی نیست پس قطری شدنی نیست. بنابراین وجود تجزیه‌ای به صورت $A = PDP^{-1}$ ممکن نیست و لذا محدودیت‌هایی در کار کردن با ماتریس A (در این مثال) می‌تواند به وجود آید (برای جزییات بیشتر به فصل اول مراجعه نمایید).
با توجه به اینکه در عمل ممکن است با ماتریس‌هایی سروکار داشته باشیم که قطری شدنی نباشند یعنی دارای تجزیه‌ای به شکل $A = PDP^{-1}$ نباشند پس معقول است که به دنبال یک تجزیه‌ی جایگزین برای A باشیم که احتمالا از خواص خوبی مانند آنچه در تجزیه‌ی قطری شدنی وجود دارد، برخوردار باشد. به علاوه چنین تجزیه‌ی جایگزینی می‌بایست برای هر ماتریس دلخواه موجود باشد و از محدودیت‌های تجزیه قطری شدنی برخوردار نباشد.

عموما چنین تجزیه‌ای جایگزینی برای A وجود دارد که به صورت

$$A = U\Sigma V^T \tag{2}$$

بیان می‌شود که در آن U, V ماتریس‌هایی متعامدند یعنی

$$UU^T = U^TU = I, \qquad VV^T = V^TV = I$$

و Σ ماتریسی قطری است. مثلا برای ماتریس همین مثال داریم

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} = U\Sigma V^T \\ &= \begin{bmatrix} -۰/۵۲۵۷ & ۰/۸۵۰۷ \\ ۰/۸۵۰۷ & ۰/۵۲۵۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴/۲۳۶۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۲۳۶۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۵۲۵۷ & -۰/۸۵۰۷ \\ -۰/۸۵۰۷ & ۰/۵۲۵۷ \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

به علاوه چون V متعامد است پس $V^T = V^{-۱}$ و لذا رابطه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A = U\Sigma V^{-۱}, \ (\text{ماتریس قطری است}\ \Sigma)$$

که شباهت فراونی با رابطه‌ی قطری شدنی $A = PDP^{-۱}$ دارد.

به تجزیه‌ی (۲) تجزیه‌ی مقادیر تکین (منفرد) (Singular Value Decomposition) یا به اختصار تجزیه SVD ماتریس A می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

با محاسبه‌ی جفت ویژه‌های A داریم.

$$\lambda_۱ = ۱, \ \ \lambda_۲ = ۲, \ \ \lambda_۳ = ۲, \ \ X_۱ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \ \ X_۲ = X_۳ = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

چون A دارای سه بردار ویژه‌ی مستقل خطی نیست پس قطری شدنی نیست. بعلاوه می توان دید که

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -۰/۷۹۸۴ & ۰/۴۴۰۰ & ۰/۴۱۱۰ \\ -۰/۵۵۴۵ & -۰/۸۰۳۳ & -۰/۲۱۷۲ \\ ۰/۲۳۴۶ & -۰/۴۰۱۳ & ۰/۸۸۵۴ \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} ۵/۱۰۹۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲۱۵۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۶۴۴۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۰/۶۲۳۲ & ۰/۷۵۵۴ & ۰/۲۰۲۳ \\ -۰/۵۷۵۵ & -۰/۲۶۷۸ & -۰/۷۷۲۷ \\ -۰/۵۲۹۶ & -۰/۵۹۸۰ & ۰/۶۰۱۶ \end{bmatrix}^T$$

قضیه ی زیر که معمولا از آن با نام قضیه تجزیه مقادیر تکین (منفرد) یا قضیه SVD یاد می شود تضمین می کند هر ماتریس دلخواه دارای تجزیه SVD است.

قضیه ۷.۱

فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد، آنگاه ماتریس‌های متعامد U و V وجود دارند به قسمی که

$$A = U\Sigma V^T,$$

و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

که در آن Σ_1 یک ماتریس قطری نامنفرد است و عناصر قطری Σ_1 همگی مثبت هستند.

اثبات: ماتریس A^TA را در نظر بگیرید. این ماتریس یک ماتریس $n\times n$ نیمه معین مثبت متقارن است؛ بنابراین مقادیر ویژه‌ی آن نامنفی هستند. مقادیر ویژه A^TA را به صورت $\lambda_1 = \sigma_1^2$، $\lambda_2 = \sigma_2^2$، ...، $\lambda_n = \sigma_n^2$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید که $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$ و

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$$

قبلا دیده‌ایم که یک ماتریس متقارن دارای یک مجموعه بردارهای ویژه متعامد (و در نتیجه یکامتعامد) است مجموعه بردارها ویژه یکا متعامد A^TA متناظر با λ_1 تا λ_n را با $v_1,\dots,v_n$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی v_1 تا v_n یکامتعامد هستند و طبق تعریف مقدار ویژه و بردار ویژه در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$A^TAv_i = \sigma_i^2 v_i, \qquad i = 1,\dots,n$$

پس

$$v_i^TA^TAv_i = \sigma_i^2 v_i^Tv_i = \sigma_i^2 \neq 0, \quad i = 1,\dots,r, \tag{3}$$

$$v_i^TA^TAv_j = \sigma_i^2 v_i^Tv_j = 0, \quad i = 1,\dots,r;\ j\neq i. \tag{4}$$

می‌نویسیم

$$V_1 = [v_1,\dots,v_r],\ V_2 = [v_{r+1},\dots,v_n] \tag{5}$$

که در آن v_1 تا v_r بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه مخالف صفر λ_1 تا λ_r و v_{r+1}، ...، v_n بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه صفر λ_{r+1} تا λ_n هستند. پس

$$A^TAv_{r+1} = \lambda_{r+1}v_{r+1} = 0\times v_{r+1} = 0,$$
$$A^TAv_{r+2} = \lambda_{r+2}v_{r+1} = 0\times v_{r+2} = 0,$$
$$\vdots$$
$$A^TAv_n = \lambda_n v_n = 0\times v_n = 0.$$

حال می توان نوشت:

$$V_2^TA^TAV_2 = V_2^TA^TA\left[v_{r+1},v_{r+2},\dots,v_n\right]$$
$$= V_2^T\left[A^TAv_{r+1},A^TAv_{r+2},\dots,A^TAv_n\right] = V_2^T(0,0,\dots,0) = 0$$

این ایجاب می‌کند که $\|AV_2\|_2^2 = (AV_2)^T(AV_2) = V_2^TA^TAV_2 = 0$ یا $\|AV_2\|_2 = 0$ پس $AV_2 = 0$ یا

$$A\left[v_{r+1},v_{r+2},\dots,v_n\right] = \left[Av_{r+1},Av_{r+2},\dots,Av_n\right] = 0.$$

لذا

$$Av_k = 0, \qquad k = r+1,r+2,\dots,n \tag{6}$$

اکنون یک مجموعه بردارهای مخالف صفر $\{u_i\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i, \qquad i = 1,\dots,r \tag{7}$$

توجه کنید رابطه کسری فوق معنادار است زیرا مخرج کسر ناصفر است. بردارهای u_i، $i=1,\dots,r$ یک مجموعه متعامد تشکیل می‌دهند، زیرا

$$\begin{aligned}
u_i^T u_j &= \frac{1}{\sigma_i}(Av_i)^T\frac{1}{\sigma_j}(Av_j)\\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left(v_i^TA^TAv_j\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left(v_i^T\lambda_j v_j\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left(v_i^T\sigma_j^2 v_j\right)\\
&= \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i\sigma_j}\left(v_i^T v_j\right)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i\neq j\\ 1 & \text{اگر } i=j\end{cases}
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم $U_1=(u_1,\dots,u_r)$ و $U_2=(u_{r+1},\dots,u_m)$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $U=(U_1,U_2)$ متعامد باشد (در مثال های صفحات بعد نشان می دهیم با استفاده از الگوریتم گرام_اشمیت چنین کاری شدنی است). سپس برای هر $k>r$ و با استفاده از $Av_i=\sigma_i u_i$ (که از (۷) به دست می آید) داریم:

$$u_k^TAv_i = u_k^T(\sigma_i u_i)=\sigma_i u_k^Tu_i=\sigma_i\times 0=0,\ \ i=1,\dots,r, \tag{8}$$

زیرا بردار های u_i متعامد هستند. حال از (۶) داریم

$$u_k^TAv_i = u_k^T\times 0=0,\qquad i=r+1,\dots,n. \tag{9}$$

همچنین

$$u_k^TAv_k=\sigma_k u_k^Tu_k=\sigma_k,\ \ k=1,\dots,r. \tag{10}$$

قرار می‌دهیم $V=[V_1,V_2]$ که V_1 و V_2 در (۵) تعریف شده اند. آنگاه

$$\begin{aligned}
U^TAV &= U^TA[V_1,V_2]=U^T[AV_1,AV_2]=U^T[AV_1,0]=U^T[Av_1,Av_2,\dots,Av_r,0,\dots,0]\\
&= \begin{bmatrix} u_1^T\\ u_2^T\\ \vdots\\ u_r^T\\ \vdots\\ u_m^T\end{bmatrix}[Av_1,Av_2,\dots,Av_r,0,\dots,0]\\
&= \begin{bmatrix}
u_1^TAv_1 & u_1^TAv_2 & \dots & u_1^TAv_r & 0 & \dots & 0\\
u_2^TAv_1 & u_2^TAv_2 & \dots & u_2^TAv_r & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
u_r^TAv_1 & u_r^TAv_2 & \dots & u_r^TAv_r & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
u_m^TAv_1 & u_m^TAv_2 & \dots & u_m^TAv_r & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

یعنی

$$U^TAV = \begin{bmatrix} u_1^TAv_1 & u_1^TAv_2 & \dots & u_1^TAv_r & 0 & \dots & 0 \\ u_2^TAv_1 & u_2^TAv_2 & \dots & u_2^TAv_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_r^TAv_1 & u_r^TAv_2 & \dots & u_r^TAv_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ u_m^TAv_1 & u_m^TAv_2 & \dots & u_m^TAv_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

اکنون از روابط (۸)—(۱۰) و رابطه (۱۱) داریم

$$U^TAV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma$$

که درآن $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. حال از $U^TAV = \Sigma$ داریم

$$UU^TAVV^T = U\Sigma V^T \Longrightarrow A = U\Sigma V^T$$

و این اثبات را کامل می کند.

نکته ۷.۱

برای ماتریس های وارون پذیر $B,\ C$ و ماتریس دلخواه A داریم

$$Rank(BAC) = Rank(A)$$

به عبارتی اگر ماتریس های وارون پذیر از سمت چپ و راست در یک ماتریس ضرب شوند تاثیری در رتبه ی آن ندارند.

نکته ۷.۲

رتبه ماتریس A برابر با r است زیرا ماتریس های U و V در تجزیه مقدار تکین A وارون پذیرند پس طبق نکته ی قبل داریم

$$Rank(A) = Rank(U\Sigma V^T) = Rank(\Sigma) = r$$

.

تعریف ۷.۱

عناصر قطری ماتریس Σ مقادیر تکین ماتریس A نامیده می‌شوند. اعداد $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ مقادیر تکین مثبت A هستند.

تعریف ۷.۲

ستون‌های U بردارهای تکین چپ و ستون‌های V بردارهای تکین راست نامیده می‌شوند.

۱.۱ منحصر به فرد بودن تجزیه مقدار تکین

طبق قضیه ی قبل به تعداد $k = \min\{m, n\}$ مقدار تکین (که می توانند صفر یا مثبت باشند) برای ماتریس A وجود دارد. فرض کنید رتبه A برابر r باشد. پس r مقدار تکین مثبت وجود دارد. این‌ها ریشه‌های دوم مثبت مقادیر ویژه مخالف صفر AA^T یا A^TA هستند. بقیه $(k-r)$ مقدار تکین، اگر $r < k$ صفر هستند. بنابراین مقادیر تکین منحصر به فرد هستند ولیکن بردارهای تکین منحصر به فرد نیستند. توجه کنید برای ماتریس های رتبه کامل داریم $r = \min\{m, n\}$ که در این حالت از $k = \min\{m, n\}$ نتیجه می شود $r = k$.

مثال ۷.۱

مقادیر تکین ماتریس داده شده را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -۵ & ۱ \\ ۸ & ۰ \\ ۴ & -۷ \end{bmatrix}, \qquad m = ۳, \ \ n = ۲$$

حل: طبق تعریف مقادیر تکین A ریشه‌های مقادیر ویژه‌ی AA^T یا A^TA هستند پس ابتدا مقادیر ویژه‌ی AA^T یا A^TA را باید بیابیم. داریم

$$AA^T = \begin{bmatrix} ۲۶ & -۴۰ & -۲۷ \\ -۴۰ & ۶۴ & ۳۲ \\ -۲۷ & ۳۲ & ۶۵ \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۱۰۵ & -۳۳ \\ -۳۳ & ۵۰ \end{bmatrix}$$

اما مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس AA^T و A^TA یکی هستند و تنها در مقادیر ویژه‌ی صفر تفاوت دارند. لذا منطقی است که مقادیر ویژه‌ی ماتریس A^TA که از لحاظ ابعاد از AA^T کوچکتر است را محاسبه کنیم.

هر چند در این مثال مقادیر ویژه‌ی هر دو ماتریس را به دست می‌آوریم اما در مثال‌های بعد از بین دو ماتریس A^TA و AA^T به محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن که اندازه‌ی کوچکتری دارد می‌پردازیم.

چندجمله‌ای ویژه AA^T برابر است با

$$\lambda^۳ - ۱۵۵\lambda^۲ + ۴۱۶۱\lambda$$

که دارای ریشه‌های زیر است

$$\lambda_۱ = ۱۲۰/۴۵۶۴, \quad \lambda_۲ = ۳۴/۵۴۳۶, \quad \lambda_۳ = ۰$$

به علاوه چندجمله‌ای ویژه A^TA برابر است با

$$\lambda^۲ - ۱۵۵\lambda + ۴۱۶۱$$

که دارای ریشه‌های زیر است

$$\lambda_۱ = ۱۲۰/۴۵۶۴, \quad \lambda_۲ = ۳۴/۵۴۳۶$$

همانطور که می‌بینید ریشه‌های این دو چند جمله‌ای یکی‌اند و تنها اولی یک ریشه‌ی صفر دیگر دارد (چون ابعادش یک واحد بیشتر است). بنابراین مقادیر تکین A برابرند با

$$\sigma_۱ = \sqrt{\lambda_۱} = \sqrt{۱۲۰/۴۵۶۴} = ۱۰/۹۷۵۳$$
$$\sigma_۲ = \sqrt{\lambda_۲} = \sqrt{۳۴/۵۴۳۶} = ۵/۸۷۷۴$$

توجه کنید که $k = \min\{m, n\} = \min\{۳, ۲\} = ۲$ مقدار تکین مثبت وجود دارد.
به علاوه مطابق قضیه تعداد مقادیر تکین مثبت برابر رتبه A است پس در اینجا رتبه A برابر ۲ خواهد بود.

مثال ۷.۲

مقادیر تکین ماتریس داده شده را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad m = ۲,\ \ n = ۳$$

حل: چون A^TA ماتریسی ۳×۳ و AA^T ماتریسی ۲×۲ است پس منطقی است که جذر مقادیر ویژه‌ی ماتریس AA^T را بیابیم.

$$AA^T = \begin{bmatrix} ۹ & ۵ \\ ۵ & ۱۴ \end{bmatrix} \rightarrow P(\lambda) = \lambda^۲ - ۲۳\lambda + ۱۰۱$$

ریشه‌های چندجمله‌ای فوق به صورت

$$\lambda_۱ = ۱۷/۰۹۰۲, \quad \lambda_۲ = ۵/۹۰۹۸$$

هستند و از آنجا

$$\sigma_۱ = \sqrt{\lambda_۱} = \sqrt{۱۷/۰۹۰۲} = ۴/۱۳۴۰$$
$$\sigma_۲ = \sqrt{\lambda_۲} = \sqrt{۵/۹۰۹۸} = ۲/۴۳۱۰$$

مقادیر تکین A هستند. توجه کنید مطابق قضیه تعداد مقادیر تکین مثبت برابر رتبه A است پس در اینجا رتبه A برابر ۲ خواهد بود.

مثال ۷.۳

با محاسبه‌ی تعداد مقادیر تکین مثبت A رتبه‌ی آن را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۵ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۶ & ۱ \\ -۲ & -۲ & ۷ & -۱ \end{bmatrix}, \qquad m = ۳,\ \ n = ۴$$

حل: به تعداد $۳ = \min\{m, n\} = \min\{۳, ۴\} = k$ مقدار تکین داریم. مانند استدلال مثال‌های قبلی ماتریس AA^T را در نظر می‌گیریم.

$$AA^T = \begin{bmatrix} ۲۷ & ۳۶ & ۳۱ \\ ۳۶ & ۵۵ & ۲۹ \\ ۳۱ & ۲۹ & ۵۸ \end{bmatrix}$$

چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس چنین است:

$$P(\lambda) = \lambda^۳ - ۱۴۰\lambda^۲ + ۳۱۴۳\lambda - ۱۲۸$$

واضح است که صفر ریشه‌ی این چندجمله‌ای نیست زیرا $P(\text{۰}) = \text{۰}$ نمی‌تواند برقرار باشد پس چندجمله‌ای فوق سه ریشه‌ی ناصفر دارد پس رتبه‌ی A برابر ۳ است. این را می‌توان با محاسبه‌ی ریشه‌ها نیز بررسی نمود (اگرچه در اینجا نیازی نمی‌باشد)

$$\lambda_{\text{۱}} = \text{۱۱۱/۹۳۰۲}, \quad \lambda_{\text{۲}} = \text{۲۸/۰۲۹۰}, \quad \lambda_{\text{۳}} = \text{۰/۰۴۰۸}$$

و از آن داریم:

$$\sigma_{\text{۱}} = \sqrt{\lambda_{\text{۱}}} = \text{۱۰/۵۷۹۷}, \quad \sigma_{\text{۲}} = \sqrt{\lambda_{\text{۲}}} = \text{۵/۲۹۴۲}, \quad \sigma_{\text{۳}} = \sqrt{\lambda_{\text{۳}}} = \text{۰/۲۰۲۰}$$

لذا سه مقدار تکین مثبت داریم پس رتبه A برابر ۳ است.

۲ محاسبه‌ی تجزیه مقادیر منفرد

قضیه‌ی قبل علاوه بر اثبات وجود تجزیه SVD نحوه‌ی محاسبه‌ی آن را نیز بیان می کند که به صورت زیر می‌باشد (r برابر با تعداد مقادیر تکین مثبت است)

گام ۱ : ماتریس A^TA را تشکیل دهید و جذر مقادیر ویژه‌ی آن را با σ_i ها نمایش دهید:

$$\sigma_{\text{۱}} = \sqrt{\lambda_{\text{۱}}}, \quad \ldots, \quad \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}, \quad \sigma_{r+\text{۱}} = \cdots = \sigma_n = \text{۰}$$

قرار می دهیم (مقادیر تکین به صورت نزولی در ماتریس Σ قرار گرفته اند)

$$\Sigma_{\text{۱}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{۱}} & & & \\ & \sigma_{\text{۲}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}_{r\times r}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{\text{۱}} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

گام ۲ : بردارهای ویژه <u>یکه شده‌ی</u> A^TA را با $v_{\text{۱}}, v_{\text{۲}}, \ldots v_n$ نمایش داده و ماتریس V را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$V = [v_{\text{۱}}, v_{\text{۲}}, \ldots v_n]$$

گام ۳ : برای $i = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, r$ بردارهای u_i را به صورت زیر می‌سازیم :

$$u_i = \frac{\text{۱}}{\sigma_i} A v_i$$

گام ۴ : بردارهای $u_{r+\text{۱}}, u_{r+\text{۲}}, \ldots u_m$ را طوری به دست می‌آوریم که ماتریس

$$U = [u_{\text{۱}}, u_{\text{۲}}, \ldots, u_r, u_{r+\text{۱}}, u_{r+\text{۲}}, \ldots, u_m]$$

متعامد باشد (توجه شود که در این گام می‌توان از الگوریتم گرام اشمیت بهره برد که در مثال ها با نحوه ی بکارگیری آن آشنا می شوید).

گام ۵ : ماتریس‌های U, Σ, V تشکیل شده‌اند لذا تجزیه SVD ماتریس A به صورت زیر خواهد بود.

$$A = U\Sigma V^T$$

مثال ۷.۴

تجزیه SVD ماتریس داده شده را بیابید(محاسبات با ۴ رقم بعد از اعشار انجام شود).

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۲\\ ۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix} \qquad m=۲\ ,\ \ n=۳$$

حل: گام ۱ :

$$A^TA=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & -۴\\ ۲ & ۴ & -۴\\ -۴ & -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\lambda_۱=۱۲/۳۸۵۲\ ,\ \ \lambda_۲=۱/۶۱۴۸\ ,\ \ \lambda_۳=۰$$

پس $r=۲$ لذا

$$\sigma_۱=\sqrt{\lambda_۱}=۳/۵۱۹۳\, ,\ \sigma_۲=\sqrt{\lambda_۲}=۱/۲۷۰۸\, ,\ \sigma_۳=\sqrt{\lambda_۳}=۰$$

ماتریس ۲ × ۲ ، $\Sigma_۱$ را تشکیل می‌دهیم :

$$\Sigma_۱=\begin{bmatrix}\sigma_۱ & ۰\\ ۰ & \sigma_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳/۵۱۹۳ & ۰\\ ۰ & ۱/۲۷۰۸\end{bmatrix}$$

حال ماتریس ۳ × ۲ ، Σ را تشکیل می‌دهیم :

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳/۵۱۹۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱/۲۷۰۸ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

گام ۲ : بردارهای ویژه متناظر با λ_i ها را می‌یابیم (با توجه به اینکه در فصل‌های قبل با نحوه‌ی محاسبه بردارهای ویژه آشنا شده‌اید در اینجا از محاسبات مربوط به بردارهای ویژه صرف نظر شده است.)

$$\lambda_۱=۱۲/۳۸۵۲\longrightarrow v_۱=\begin{bmatrix}-۰/۳۹۴۶\\ -۰/۴۷۰۶\\ ۰/۷۸۹۲\end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲=۱/۶۱۴۸\longrightarrow\ \ v_۲=\begin{bmatrix}-۰/۲۱۰۵\\ ۰/۸۸۲۴\\ ۰/۴۲۰۹\end{bmatrix}$$

$$\lambda_۳=۰\longrightarrow\qquad v_۳=\begin{bmatrix}-۰/۸۹۴۴\\ ۰\\ -۰/۴۴۷۲\end{bmatrix}$$

توجه کنید که بردارهای ویژه متناظر با λ_i ها یکه شده‌اند (یعنی بر نرم ۲ خود تقسیم شده‌اند)
حال ماتریس V را به صورت زیر می‌سازیم :

$$V=[v_۱,v_۲,v_۳]=\begin{bmatrix}-۰/۳۹۴۶ & -۰/۲۱۰۵ & -۰/۸۹۴۴\\ -۰/۴۷۰۶ & ۰/۸۸۲۴ & ۰\\ ۰/۷۸۹۲ & ۰/۴۲۰۹ & -۰/۴۴۷۲\end{bmatrix}$$

گام ۳ : برای $i = ۱,۲$ بردارهای $u_۱, u_۲$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

$$u_۱ = \frac{۱}{\sigma_۱} A v_۱ = \frac{۱}{۳/۵۱۹۳} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۳۹۴۶ \\ -۰/۴۷۰۶ \\ ۰/۷۸۹۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵۶۰۶ \\ -۰/۸۲۸۱ \end{bmatrix}$$

$$u_۲ = \frac{۱}{\sigma_۲} A v_۲ = \frac{۱}{۱/۲۷۰۸} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۲۱۰۵ \\ ۰/۸۸۲۴ \\ ۰/۴۲۰۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸۲۸۱ \\ ۰/۵۶۰۶ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که مطابق اثبات قضیه بردارهای $u_۱, u_۲$ یکه‌اند. همچنین U ماتریسی $m \times m = ۲ \times ۲$ می‌باشد که در اینجا دو ستون U ساخته شده‌اند لذا نیازی به اضافه کردن بردار به ماتریس U با کمک الگوریتم گرام‌ـاشمیت نداریم، یعنی عملاً نیازی به گام چهارم نیست. پس :

$$U = [u_۱, u_۲] = \begin{bmatrix} ۰/۵۶۰۶ & ۰/۸۲۸۱ \\ -۰/۸۲۸۱ & ۰/۵۶۰۶ \end{bmatrix}$$

مطابق اثبات قضیه، $u_۱, u_۲$ متعامد یکه‌اند پس ماتریس U متعامد خواهد بود.

گام ۵ : تجزیه SVD ماتریس A کامل شده‌است و داریم :

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} = U \Sigma V^T =$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۵۶۰۶ & ۰/۸۲۸۱ \\ -۰/۸۲۸۱ & ۰/۵۶۰۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۵۱۹۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲۷۰۸ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۳۹۴۶ & -۰/۲۱۰۵ & -۰/۸۹۴۴ \\ -۰/۴۷۰۶ & ۰/۸۸۲۴ & ۰ \\ ۰/۷۸۹۲ & ۰/۴۲۰۹ & -۰/۴۴۷۲ \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} ۰/۵۶۰۶ & ۰/۸۲۸۱ \\ -۰/۸۲۸۱ & ۰/۵۶۰۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۵۱۹۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲۷۰۸ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۳۹۴۶ & -۰/۴۷۰۶ & ۰/۷۸۹۲ \\ -۰/۲۱۰۵ & ۰/۸۸۲۴ & ۰/۴۲۰۹ \\ -۰/۸۹۴۴ & ۰ & -۰/۴۴۷۲ \end{bmatrix}$$

مثال ۷.۵

تجزیه SVD ماتریس داده شده را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad m = ۲ \;,\; n = ۳$$

حل: گام ۱ :

$$A^T A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۸ & ۱۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه این ماتریس چنین‌اند :

$$\lambda_۱ = ۲۸ \;,\; \lambda_۲ = ۰ \;,\; \lambda_۳ = ۰$$

پس $r = ۱$ لذا

$$\sigma_۱ = \sqrt{\lambda_۱} = \sqrt{۲۸} = ۵/۲۹۱۵ \;,\; \sigma_۲ = \sigma_۳ = ۰$$

حال ماتریس ۱×۱ ، $\Sigma_۱$ را تشکیل می‌دهیم :

$$\Sigma_۱ = [\sigma_۱] = [۵/۲۹۱۵]$$

برای ماتریس ۲×۳ ، Σ خواهیم داشت :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۲۹۱۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

گام ۲ : بردارهای ویژه $A^T A$ به صورت زیر می‌باشند :

$$\lambda_۱ = ۲۸ \longrightarrow v_۱ = [۰/۲۶۷۳, ۰/۵۳۴۵, ۰/۸۰۱۸]^T$$
$$\lambda_۲ = ۰ \longrightarrow v_۲ = [۰/۳۵۸۶, ۰/۷۱۷۱, -۰/۵۹۷۶]^T$$
$$\lambda_۳ = ۰ \longrightarrow v_۳ = [۰/۸۹۴۴, -۰/۴۴۷۲, ۰]^T$$

لذا ماتریس V به صورت زیر حاصل می‌گردد :

$$V = [v_۱, v_۲, v_۳] = \begin{bmatrix} ۰/۲۶۷۳ & ۰/۳۵۸۶ & ۰/۸۹۴۴ \\ ۰/۵۳۴۵ & ۰/۷۱۷۱ & -۰/۴۴۷۲ \\ ۰/۸۰۱۸ & -۰/۵۹۷۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

گام ۳ : برای $i = ۱, \dots, r$ یعنی تنها $i = ۱$ (زیرا $r = ۱$) داریم :

$$u_۱ = \frac{۱}{\sigma_۱} A v_۱ = \frac{۱}{۵/۲۹۱۵} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۲۶۷۳ \\ ۰/۵۳۴۵ \\ ۰/۸۰۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

توجه گردد که مطابق اثبات قضیه $u_۱$ یکه می‌باشد. ماتریس U ، $m \times m = ۲ \times ۲$ است و در اینجا تنها یک ستون از U ساخته شده، پس لازم است ستون دیگر را با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت بسازیم.

در اینجا $u_۱$ موجود است باید $u_۲$ را به قسمی تولید کنیم که ماتریس $U = [u_۱, u_۲]$ متعامد باشد. فرض کنیم $\tilde{u}_۲$ یک بردار دلخواه است به قسمی که مجموعه‌ی $\{u_۱, \tilde{u}_۲\}$ مستقل خطی باشد. آنگاه با اعمال الگوریتم گرام_اشمیت بر این مجموعه می‌توان مجموعه‌ی جدید $\{u_۱, u_۲\}$ را طوری ساخت که یک مجموعه‌ی متعامد یکه باشد. در اینصورت حتما $U = [u_۱, u_۲]$ ماتریسی متعامد خواهد بود.

توجه کنید چون $u_۱$ یکه است پس با اعمال روش گرام_اشمیت بر $\{u_۱, \tilde{u}_۲\}$ ، بردار $u_۱$ تغییری نخواهد کرد و تنها $\tilde{u}_۲$ تغییر می کند. اما $\tilde{u}_۲$ چه می‌تواند باشد ؟ در واقع $\tilde{u}_۲$ هرچه می‌تواند باشد به شرطی که $\{u_۱, \tilde{u}_۲\}$ مستقل خطی باشد.

در اینجا با انتخاب $\tilde{u}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (به صورت دلخواه انتخاب می کنیم) واضح است که مجموعه‌ی

$$\{u_۱, \tilde{u}_۲\} = \left\{ \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

مستقل خطی است. توجه کنید هر انتخاب دیگری برای $\tilde{u}_۲$ به شرطی که مجموعه $\{u_۱, \tilde{u}_۲\}$ مستقل خطی باشد اشکالی در ادامه ی کار بوجود نمی آورد.

با اعمال الگوریتم گرام اشمیت بر این مجموعه به مجموعه‌ی جدید زیر می‌رسیم که متعامد یکه است (براحتی می‌توان بررسی کرد)

$$\{u_۱, u_۲\} = \left\{ \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ \\ -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix} \right\}$$

در نتیجه ماتریس U به شکل زیر خواهد بود:

$$U = [u_۱, u_۲] = \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

گام ۵ : اکنون ماتریس‌های V, Σ, U مشخص شده‌اند لذا داریم :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = U\Sigma V^T =$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵/۲۹۱۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۲۶۷۳ & ۰/۳۵۸۶ & ۰/۸۹۴۴ \\ ۰/۵۳۴۵ & ۰/۷۱۷۱ & -۰/۴۴۷۲ \\ ۰/۸۰۱۸ & -۰/۵۹۷۶ & ۰ \end{bmatrix}^T$$

لذا

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۷۰۷۱ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰/۷۰۷۱ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵/۲۹۱۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۲۶۷۳ & ۰/۵۳۴۵ & ۰/۸۰۱۸ \\ ۰/۳۵۸۶ & ۰/۷۱۷۱ & -۰/۵۹۷۶ \\ ۰/۸۹۴۴ & -۰/۴۴۷۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۷.۶

تجزیه SVD ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}, \quad m = ۳, \ n = ۲$$

حل: گام ۱ : ماتریس A^TA را تشکیل می‌دهیم:

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۱۴ & -۴ \\ -۴ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

برای مقادیر ویژه این ماتریس داریم :

$$\lambda_۱ = ۳۰ \ , \ \lambda_۲ = ۱۳$$

بنابراین $r = ۲$ و داریم :

$$\sigma_۱ = \sqrt{\lambda_۱} = \sqrt{۳۰} = ۵/۴۷۷۲ \ , \ \sigma_۲ = \sqrt{\lambda_۲} = \sqrt{۱۳} = ۳/۶۰۵۶$$

به علاوه $\Sigma_۱$ ماتریسی $۲ \times ۲ = r \times r$ است که

$$\Sigma_۱ = \begin{bmatrix} \sigma_۱ & ۰ \\ ۰ & \sigma_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۴۷۷۲ & ۰ \\ ۰ & ۳/۶۰۵۶ \end{bmatrix}$$

و Σ ماتریسی ۳×۲ به صورت زیر است :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۴۷۷۲ & ۰ \\ ۰ & ۳/۶۰۵۶ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

گام ۲ : بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_۱ = ۳۰\ ,\ \lambda_۲ = ۱۳$ را به دست می‌آوریم :

$$\lambda_۱ = ۳۰ \longrightarrow v_۱ = [-۰/۲۴۲۵, ۰/۹۷۰۱]^T$$
$$\lambda_۲ = ۱۳ \longrightarrow v_۲ = [-۰/۹۷۰۱, -۰/۲۴۲۵]^T$$

لذا ماتریس V چنین خواهد بود :

$$V = [v_۱, v_۲] = \begin{bmatrix} -۰/۲۴۲۵ & -۰/۹۷۰۱ \\ ۰/۹۷۰۱ & -۰/۲۴۲۵ \end{bmatrix}$$

گام ۳ : برای $i = ۱, ۲$ بردارهای u_i را به دست می‌آوریم :

$$u_۱ = \frac{۱}{\sigma_۱} A v_۱ = \frac{۱}{۵/۴۷۷۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۲۴۲۵ \\ ۰/۹۷۰۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۳۱۰۰ \\ ۰/۴۴۲۸ \\ ۰/۸۴۱۳ \end{bmatrix}$$
$$u_۲ = \frac{۱}{\sigma_۲} A v_۲ = \frac{۱}{۳/۶۰۵۶} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۹۷۰۱ \\ -۰/۲۴۲۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۴۰۳۶ \\ -۰/۷۳۹۹ \\ ۰/۵۳۸۱ \end{bmatrix}$$

گام ۴ : همانطور که مشاهده می‌گردد U ماتریسی $۳ \times ۳ = m \times m$ می‌باشد در حالی‌که تنها دو ستون از آن را محاسبه کرده‌ایم. لذا می‌بایست با استفاده از الگوریتم گرام_اشمیت یک ستون دیگر برای U پیدا کنیم. فرض کنید $\tilde{u}_۳$ به صورت $\tilde{u}_۳ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (به صورت دلخواه انتخاب می کنیم) باشد.

توجه کنید هر انتخاب دیگر به شرطی که مجموعه‌ی $\{u_۱, u_۲, \tilde{u}_۳\}$ مستقل خطی باشد قابل قبول است.

می‌خواهیم مجموعه‌ی مستقل خطی $\{u_۱, u_۲, \tilde{u}_۳\}$ را به یک مجموعه‌ی یکا متعامد $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ تبدیل کنیم. که در اینصورت ماتریس متعامد $U = [u_۱, u_۲, u_۳]$ به دست خواهد آمد.

توجه کنید از آنجایی که $\{u_۱, u_۲\}$ مجموعه‌ای یکه متعامد است (مطابق اثبات قضیه) پس وقتی الگوریتم گرام_اشمیت بر مجموعه‌ی $\{u_۱, u_۲, \tilde{u}_۳\}$ اعمال شود بردارهای $u_۱, u_۲$ دچار تغییر نخواهند شد و تنها $\tilde{u}_۳$ تغییر می‌کند که آن را $u_۳$ می‌نامیم.

اکنون الگوریتم گرام_اشمیت را بر مجموعه‌ی زیر اعمال می‌کنیم :

$$\{u_۱, u_۲, \tilde{u}_۳\} = \left\{ \begin{bmatrix} ۰/۳۱۰۰ \\ ۰/۴۴۲۸ \\ ۰/۸۴۱۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۰/۴۰۳۰ \\ -۰/۷۳۹۹ \\ ۰/۵۳۸۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

لذا به مجموعه‌ی متعامد یکه زیر می‌رسیم :

$$\{u_۱, u_۲, u_۳\} = \left\{ \begin{bmatrix} ۰/۳۱۰۰ \\ ۰/۴۴۲۸ \\ ۰/۸۴۱۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۰/۴۰۳۰ \\ -۰/۷۳۹۹ \\ ۰/۵۳۸۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰/۸۶۰۸ \\ -۰/۵۰۶۴ \\ -۰/۰۵۰۷ \end{bmatrix} \right\}$$

بنابراین ماتریس U به صورت زیر به دست می‌آید :

$$U = [u_۱, u_۲, u_۳] = \begin{bmatrix} ۰/۳۱۰۰ & -۰/۴۰۳۰ & ۰/۸۶۰۸ \\ ۰/۴۴۲۸ & -۰/۷۳۹۹ & -۰/۵۰۶۴ \\ ۰/۸۴۱۳ & ۰/۵۳۸۱ & -۰/۰۵۰۷ \end{bmatrix}$$

گام ۵ : اکنون عامل‌های تجزیه SVD به طور کامل مشخص شده‌اند :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} = U\Sigma V^T =$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۳۱۰۰ & -۰/۴۰۳۰ & ۰/۸۶۰۸ \\ ۰/۴۴۲۸ & -۰/۷۳۹۹ & -۰/۵۰۶۴ \\ ۰/۸۴۱۳ & ۰/۵۳۸۱ & -۰/۰۵۰۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵/۴۷۷۲ & ۰ \\ ۰ & ۳/۶۰۵۶ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۲۴۲۵ & -۰/۹۷۰۱ \\ ۰/۹۷۰۱ & -۰/۲۴۲۵ \end{bmatrix}^T$$

مشاهده می شود که ماتریس داده شده به صورت خواسته شده تجزیه گردیده است.

تذکر ۷.۱

همانطور که قبلا دیدید جهت محاسبه‌ی تجزیه SVD ماتریس مستطیلی A با استفاده از قضیه‌ی قبل در هنگامی که رتبه A برابر r است تنها r ستون از m ستون ماتریس U ساخته می‌شود و بنابراین نیاز است $m-r$ ستون دیگر U را از طریق الگوریتم گرام_اشمیت تولید کنیم. البته حالت خاصی هم رخ می‌دهد که نیاز نیست از الگوریتم گرام_اشمیت استفاده شود، در واقع وقتی که $m-r=۰$ یا $r=m$. با توجه به اینکه $r=Rank(A)\leq min\{m,n\}$ نتیجه می‌گیریم که اگر A ماتریسی با $m\leq n$ و رتبه کامل باشد آنگاه $r=m$ و لذا استفاده از فرآیند فوق نیازی به استفاده از الگوریتم گرام_اشمیت ندارد.
اما اگر A ماتریسی با $m>n$ باشد آنگاه از

$$r = Rank(A) \leq min\{m,n\} = n < m$$

مشاهده می‌شود که $r<m$ و لذا $r\neq m$. در این حالت $m-r>۰$ یعنی حتما در محاسبه‌ی ستون‌های U باید از الگوریتم گرام_اشمیت استفاده شود تا $m-r\neq ۰$ ستون دیگر U را محاسبه کنیم.

قضیه ۷.۲

فرض کنید تجزیه SVD ماتریس $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ به صورت $A=U\Sigma V^T$ باشد آنگاه

$$AA^TU = U\tilde{\Sigma}, \qquad A^TAV = V\hat{\Sigma}$$

که در آن $\tilde{\Sigma}$ ماتریس $m\times m$ است به طوری که

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و $\hat{\Sigma}$ ماتریسی $n\times n$ است به قسمی که

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و $\tilde{\Sigma}_۱$ ماتریسی قطری به صورت $\tilde{\Sigma}_۱ = diag(\sigma_۱^۲, \sigma_۲^۲, \ldots, \sigma_s^۲)$ با $s=\min\{m,n\}$ است.

اثبات: در اینجا تساوی $AA^TU = U\tilde{\Sigma}$ را اثبات کرده و اثبات تساوی دیگر به عنوان تمرین رها می‌شود:

$$AA^TU = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^TU = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^TU^T)U$$

$$= (U\Sigma)(V^TV)(\Sigma^T)(U^TU) = (U\Sigma)(I)(\Sigma^T)(I) \quad (\text{زیرا } U\text{،}V \text{ متعامدند})$$

$$= U\Sigma\Sigma^T = U\tilde{\Sigma}$$

که $\tilde{\Sigma}$ ماتریسی $m \times m$ تعریف شده در بالا است و این اثبات را تکمیل می کند.

اکنون طبق معادلات زیر

$$(AA^T)U = U\tilde{\Sigma} \qquad (A^TA)V = V\hat{\Sigma}$$

از قضیه‌ی قبل می‌توان دریافت که

$$(AA^T)u_i = \sigma_i^2 u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$(A^TA)v_i = \sigma_i^2 v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

و این یعنی u_i ها همان بردارهای ویژه‌ی ماتریس AA^T و v_i ها همان بردارهای ویژه ماتریس A^TA هستند. بعلاوه σ_i^2 ها مقادیر ویژه ماتریس A^TA یا AA^T می‌باشند که مقادیری نامنفی هستند.

۳ حل دستگاه های خطی مربعی و غیرمربعی با تجزیه مقادیر تکین

۱. حل دستگاه مربعی $AX = b$

فرض کنید تجزیه مقادیر تکین ماتریس مربعی وارون پذیر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به صورت $A = U\Sigma V^T$ که U و Σ و V ماتریس هایی $n \times n$ هستند موجود است. به عنوان یک استفاده فرعی از این تجزیه می توان دستگاه $AX = b$ را به شکلی که در ادامه آورده می شود حل نمود:

$$AX = b \ \rightarrow \ U\Sigma V^TX = b \tag{۱۲}$$

با ضرب طرفین رابطه (۱۲) از سمت چپ در U^T و استفاده از این حقیقت که $U^TU = I$ داریم

$$U^TU\Sigma V^TX = U^Tb \Rightarrow \Sigma V^TX = U^Tb \tag{۱۳}$$

حال فرض کنید $V^TX = Z$ پس داریم $\Sigma Z = U^Tb$ و چون Σ ماتریسی قطری است به راحتی می توان Z را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$Z = \Sigma^{-1}U^Tb \tag{۱۴}$$

اکنون از $V^TX = Z$ داریم $VV^TX = VZ$ یا $X = VZ$ و از رابطه (۱۴) داریم

$$X = VZ = V\Sigma^{-1}U^Tb$$

یا

$$\boxed{X = V\Sigma^{-1}U^Tb}$$

که یک فرم بسته برای جواب دستگاه $AX = b$ خواهد بود.

مثال ۷.۷

جواب دستگاه داده شده را با استفاده از تجزیه SVD ماتریس ضرایب پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱۳ \\ ۱۳ \end{bmatrix}$$

حل: عامل‌های تجزیه مقادیر تکین A چنین‌اند (بررسی جزییات محاسبات به عهده ی خواننده است)

$$U = \begin{bmatrix} -۰/۵۷۷۴ & -۰/۴۰۸۲ & ۰/۷۰۷۱ \\ -۰/۵۷۷۴ & -۰/۴۰۸۲ & -۰/۷۰۷۱ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰/۸۱۶۵ & ۰/۰۰۰۰ \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} ۶/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۷۳۲۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱/۷۳۲۱ \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -۰/۵۷۷۴ & ۰ & -۰/۸۱۶۵ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰/۷۰۷۱ & ۰/۴۰۸۲ \\ -۰/۵۷۷۴ & -۰/۷۰۷۱ & ۰/۴۰۸۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$X = V\Sigma^{-۱}U^T b = \begin{bmatrix} ۳/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۱/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۷.۸

جواب دستگاه داده شده را با استفاده از تجزیه SVD ماتریس ضرایب پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۴ & -۴ & ۰ \\ -۲ & -۱ & -۳ & ۶ \\ -۵ & -۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۲۲ \\ ۷ \\ -۱۱ \\ -۲۵ \end{bmatrix}$$

حل: عامل‌های تجزیه SVD ماتریس ضرایب به صورت زیرند(به کمک نرم افزار متلب)

$$U = \begin{bmatrix} -۰/۶۶۸۴ & -۰/۲۳۸۶ & -۰/۵۹۱۸ & ۰/۳۸۲۲ \\ -۰/۳۷۷۲ & -۰/۲۹۶۷ & ۰/۷۹۰۹ & ۰/۳۷۹۷ \\ ۰/۱۶۴۸ & -۰/۹۰۳۲ & -۰/۰۷۳۳ & -۰/۳۸۹۴ \\ ۰/۶۱۹۶ & -۰/۱۹۷۹ & -۰/۱۳۷۴ & ۰/۷۴۷۱ \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} ۱۰/۹۲۱۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷/۵۰۳۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴/۰۷۲۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲/۱۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} -۰/۷۷۶۷ & ۰/۱۱۰۴ & -۰/۶۱۸۴ & ۰/۰۴۴۸ \\ -۰/۵۵۹۳ & ۰/۰۳۰۴ & ۰/۶۷۲۹ & -۰/۴۸۳۲ \\ ۰/۲۷۶۵ & ۰/۶۱۴۷ & -۰/۲۸۶۸ & -۰/۶۸۰۸ \\ ۰/۰۸۶۱ & -۰/۷۸۰۴ & -۰/۲۸۷۲ & -۰/۵۴۸۷ \end{bmatrix}$$

$$X=V\Sigma^{-1}U^Tb=\begin{bmatrix} ۳/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۱/۰۰۰۰ \\ -۰/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

توجه ۷.۱

برای حل یک دستگاه این روش که ابتدا تجزیه مقادیر تکین ماتریس ضرایب را محاسبه کرده و سپس به کمک آنها دستگاه را حل کنیم مقرون به صرفه نیست بلکه اگر در مساله ای این تجزیه از قبل محاسبه شده باشد به عنوان یک استفاده ی فرعی می توان از آن برای حل دستگاه کمک گرفت.

۲. حل دستگاه فرامعیّن (جواب کمترین مربعات)

Solving the overdetermined linear system (The least square solution)

قبلاً دیدیم که جواب کمترین مربعات دستگاه فرامعین

$$AX=b,\qquad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\qquad m>n;\quad X\in\mathbb{R}^n,\quad b\in\mathbb{R}^m$$

از حل دستگاه معادلات نرمال $A^TAX=A^Tb$ به دست می‌آید. فرض کنید A رتبه کامل و دارای تجزیه‌ی $A=U\Sigma V^T$ باشد. با قرار دادن این تجزیه در معادلات نرمال داریم:

$$\left(U\Sigma V^T\right)^T\left(U\Sigma V^T\right)X=\left(U\Sigma V^T\right)^Tb$$

یا

$$V\Sigma^T\underbrace{U^TU}_{I}\Sigma V^TX=V\Sigma^TU^Tb$$

یا

$$V\Sigma^T\Sigma V^TX=V\Sigma^TU^Tb$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق از چپ در V^T و اینکه $V^TV=I$ داریم:

$$V^TV\Sigma^T\Sigma V^TX=V^TV\Sigma^TU^Tb$$

یا

$$\Sigma^T\Sigma V^TX=\Sigma^TU^Tb$$

حال فرض کنید $Y=V^TX$ آنگاه $\Sigma^T\Sigma Y=\Sigma^TU^Tb$ و چون $\Sigma^T\Sigma$ ماتریس قطری وارون پذیر است (از اینکه A رتبه کامل است) است دستگاه اخیر براحتی قابل حل است:

$$Y=(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TU^Tb$$

از طرفی از $Y = V^TX$ داریم $VY = VV^TX = IX = X$ یا

$$\boxed{X = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TU^Tb} \qquad (۱۵)$$

این جواب کمترین مربعات دستگاه $AX = b$ است.

مثال ۷.۹

جواب کمترین مربعات مسأله‌ی داده شده را با استفاده از تجزیه SVD به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

حل: عامل‌های تجزیه SVD ماتریس ضرایب به صورت زیرند:

$$U = \begin{bmatrix} -۰/۴۱۷۸ & ۰/۱۵۹۶ & -۰/۸۹۴۴ \\ ۰/۸۳۵۵ & -۰/۳۱۹۲ & -۰/۴۴۷۲ \\ -۰/۳۵۶۸ & -۰/۹۳۴۲ & ۰/۰۰۰۰ \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} ۵/۳۳۰۷ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲۵۸۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -۰/۵۲۵۷ & -۰/۸۵۰۷ \\ ۰/۸۵۰۷ & -۰/۵۲۵۷ \end{bmatrix}$$

اما

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} ۲۸/۴۱۶۴ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵۸۳۶ \end{bmatrix}, \qquad (\Sigma^T\Sigma)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰/۰۳۵۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۶۳۱۵ \end{bmatrix}$$

بعلاوه

$$\Sigma^TU^Tb = \begin{bmatrix} -۸/۲۵۸۳ \\ -۱/۹۴۹۵ \end{bmatrix}$$

پس از (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} X &= V\left(\Sigma^T\Sigma\right)^{-۱}\Sigma^TU^Tb \\ &= \begin{bmatrix} -۰/۵۲۵۷ & -۰/۸۵۰۷ \\ ۰/۸۵۰۷ & -۰/۵۲۵۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۰۳۵۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۶۳۱۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۸/۲۵۸۳ \\ -۱/۹۴۹۵ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱/۲۰۰۰ \\ ۰/۴۰۰۰ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

درواقع می‌توان دید که جواب دقیق مسأله $X^* = \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ ۰/۴ \end{bmatrix}$ است. بعلاوه

$$r = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۴ \\ -۰/۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \neq ۰$$

$$\|r\|_۲ = \left\| \begin{bmatrix} -۰/۴ \\ -۰/۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\|_۲ = ۰/۴۴۷۲$$

پس دستگاه اصلی ناسازگار است زیرا در غیر این‌صورت می‌بایست مانده صفر شود.

مثال ۷.۱۰

با محاسبه ی دقیق عامل های تجزیه SVD ماتریس ضرایب دستگاه داده شده نشان دهید که جواب دقیق کمترین مربعات دستگاه

$$\begin{cases} -۲x_۱ + ۶x_۲ = ۳ \\ x_۱ + ۶x_۲ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۴ \end{cases}$$

برابر است با

$$X = [\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۹}]^T$$

حل: اگر عامل‌های تجزیه SVD ماتریس A را به صورت دقیق محاسبه کنیم داریم:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

اکنون طبق (۱۵) داریم:

$$X = V(\Sigma^T\Sigma)^{(-۱)}\Sigma^T U^T b$$

اما

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} ۸۱ & ۰ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}; \qquad (\Sigma^T\Sigma)^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۸۱} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix}$$

پس

$$X = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۸۱} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۴}{۹} \end{bmatrix}$$

اکنون بردار باقی مانده را محاسبه کرده و در مورد سازگاری دستگاه بحث کنید.

۱.۰.۳ خلاصه ای از حل دستگاه $AX = b$ با استفاده از روش تجزیه SVD در حالتی که رتبه ماتریس ضرایب کامل است.

در ادامه خلاصه‌ای از حل دستگاه $AX = b$ به روش SVD آورده شده است. در همه‌ی حالات فرض شده است که A رتبه‌ی کامل باشد و $A = U\Sigma V^T$ تجزیه مقادیر تکین A باشد.

۱. حل دستگاه مربعی $AX = b$

$$X = V\Sigma^{-1}U^Tb \qquad (m = n)$$

۲. حل دستگاه غیرمربعی فرامعین $AX = b$ (جواب کمترین مربعات)

$$X = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^TU^Tb \qquad (m > n)$$

تمرین ۷.۱

جواب دستگاه مربعی

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از تجزیه SVD به دست آورید.

تمرین ۷.۲

جواب کمترین مربعات دستگاه فرامعین

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از تجزیه SVD ماتریس ضرایب این دستگاه به دست آورید.

۴ رابطه بین مقادیر تکین یک ماتریس و دترمینان و عددحالت و بعضی نرمهای ماتریسی آن ماتریس

در این قسمت با استفاده از تجزیه SVD روابط زیر را ثابت می کنیم:

۱. برای ماتریس مربعی A داریم

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} \quad , \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}} \qquad (16)$$

جایی که $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ به ترتیب نشان دهنده ی کوچکترین و بزرگترین مقادیر تکین A اند.

۲. برای ماتریس دلخواه مربعی یا غیرمربعی A داریم

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \tag{17}$$

۳. برای نرم فروبنیوس ماتریس دلخواه A داریم

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2} \tag{18}$$

جایی که r رتبه A است.

۴. اگر A ماتریسی مربعی متقارن باشد آنگاه $\sigma_i = |\lambda_i|$ که λ_i مقادیر ویژه ی A اند.

۵. برای ماتریس مربعی $n \times n$، A داریم

$$|det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$$

۶. رتبه ماتریس های دلخواه A و A^TA و AA^T برابرند.

اثبات ۱: با استفاده از تعریف و خواص نرم ۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 = \left\|U\Sigma V^T\right\|_2 = \|\Sigma\|_2 &= \left\|\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}\right\|_2 \\
&= \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\} = \sigma_1 = \sigma_{\max}
\end{aligned}$$

توجه کنید که در اثبات رابطه ی فوق از این حقیقت که برای هر ماتریس قطری $D = diag(d_1, ..., d_n)$ داریم (نشان دهید)

$$\|D\|_2 = \max\{|d_1|, ..., |d_n|\}$$

استفاده شده است.

به همین صورت می توان دید که:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\|_2 &= \left\|\left(U\Sigma V^T\right)^{-1}\right\|_2 = \left\|\left(V^T\right)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1}\right\|_2 \\
&= \left\|\left(V^{-1}\right)^T\Sigma^{-1}U^{-1}\right\|_2 = \left\|\left(V^T\right)^T\Sigma^{-1}U^{-1}\right\|_2 \\
&= \left\|V\Sigma^{-1}U^T\right\|_2 = \left\|\Sigma^{-1}\right\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & & & 0 \\ & \sigma_2^{-1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r^{-1} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}\right\|_2 \\
&= \max\left\{\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

و چون $\sigma_r \geq \cdots \geq \sigma_۲ \geq \sigma_۱$ پس $\sigma_r^{-۱} \leq \cdots \leq \sigma_۲^{-۱} \leq \sigma_۱^{-۱}$ لذا

$$\left\|A^{-۱}\right\|_۲ = \max\left\{\sigma_۱^{-۱}, \sigma_۲^{-۱}, \ldots, \sigma_r^{-۱}\right\} = \sigma_r^{-۱} = \frac{۱}{\sigma_r} = \frac{۱}{\sigma_{\min}}$$

اثبات ۲: بر طبق تعریف عدد حالت در نرم ۲ داریم:

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲\|A^{-۱}\|_۲$$

اکنون با توجه به روابط قسمت ۱ به دست می آوریم:

$$\kappa_۲(A) = \sigma_۱ \times \frac{۱}{\sigma_r} = \frac{\sigma_۱}{\sigma_r} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

توجه کنید که طبق این تساوی هر چه σ_{min} به σ_{max} نزدیک تر باشد ماتریس A خوش حالت تر خواهد بود.

اثبات ۳: تمرین
اثبات ۴: طبق تعریف σ_i ها می توانیم بنویسیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\left(A^TA\right)} = \sqrt{\lambda_i(AA)} = \sqrt{\lambda_i\left(A^۲\right)} = \sqrt{\left(\lambda_i(A)\right)^۲} = |\lambda_i(A)| = |\lambda_i|$$

اثبات ۵: فرض کنید $A = U\Sigma V^T$ تجزیه مقادیر تکین A باشد. از آنجایی که دترمینان ماتریس متعامد U و V یا یک است و یا منفی یک می توان دریافت که

$$|det(A)| = |det(U\Sigma V^T)| = |det(\Sigma)| = det\begin{bmatrix} \sigma_۱ & & & \\ & \sigma_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} = \sigma_۱\sigma_۲\ldots\sigma_n = \prod_{i=۱}^{n}\sigma_i$$

و اثبات کامل می شود.
اثبات ۶: باید ثابت کنیم $Rank(A^TA) = Rank(A)$. با توجه به خواص رتبه که در فصل اول بررسی شد برای سه ماتریس A و B و C می توان نوشت:

$$Rank(BAC) = Rank(A)$$

به شرطی که B و C وارون پذیر باشند. به عبارتی اگر ماتریس های وارون پذیر از سمت چپ و راست در یک ماتریس ضرب شوند تاثیری در رتبه ی آن ندارند. از طرفی اگر $A = U\Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین A باشد داریم:

$$\begin{aligned} A^TA &= \left(U\Sigma V^T\right)^T\left(U\Sigma V^T\right) = \left(V\Sigma^TU^T\right)\left(U\Sigma V^T\right) \\ &= V\Sigma^T\left(U^TU\right)\Sigma V^T = V\Sigma^TI\Sigma V^T \\ &= V\Sigma^T\Sigma V^T \end{aligned}$$

پس

$$\text{Rank}\left(A^TA\right) = \text{Rank}\left(V\Sigma^T\Sigma V^T\right) = \text{Rank}\left(\Sigma^T\Sigma\right)$$

اکنون با توجه به اینکه Σ ماتریس $m \times n$ و به صورت

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad \Sigma_۱ = \begin{bmatrix} \sigma_۱ & & & ۰ \\ & \sigma_۲ & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

است داریم:

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T_{m\times n} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$
$$= \begin{bmatrix} \Sigma_1^T\Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

پس واضح است که:

$$\text{Rank}(A^TA) = \text{Rank}\left(\Sigma^T\Sigma\right) = \text{Rank}(\Sigma_1^2) = \text{Rank}(\Sigma_1) = r \tag{19}$$

از طرفی:

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}\left(U\Sigma V^T\right) = \text{Rank}(\Sigma) = \text{Rank}(\Sigma_1) = r \tag{20}$$

از (۱۹) و (۲۰) داریم $Rank(A^TA) = Rank(A)$ و اثبات کامل می شود. دقت کنید که با روندی کاملا مشابه می توان دریافت که رابطه ی زیر نیز برقرار است:

$$Rank(AA^T) = Rank(A)$$

۵ اثر یک ماتریس بر یک ناحیه یا یک شکل

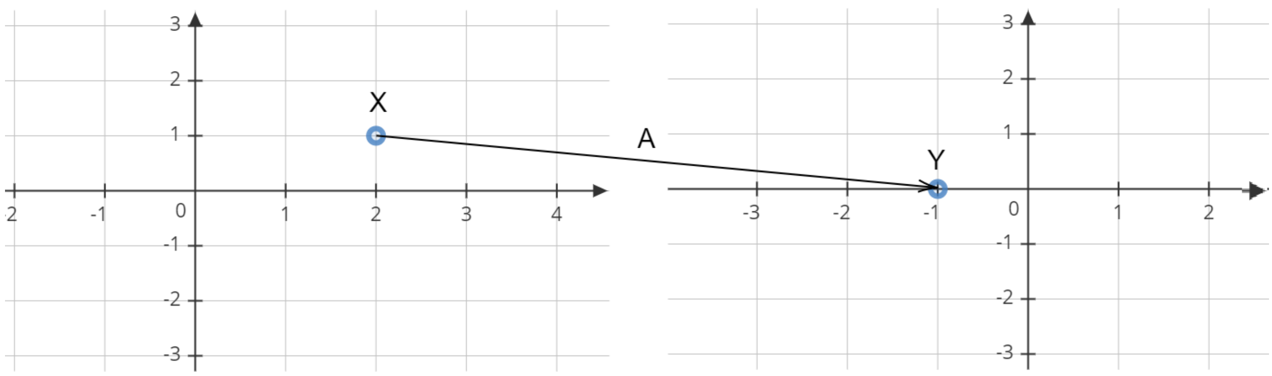
فرض کنید $X \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه و A ماتریس $m \times n$ باشد. حاصل A در X برداری چون Y است که $Y \in \mathbb{R}^m$. یعنی ماتریس A هر برداری از $\mathbb{R}^n$ را به برداری در $\mathbb{R}^m$ می نگارد. لذا ماتریس $m \times n$ ، A را می توانیم به عنوان یک تبدیل هندسی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ درنظر بگیریم. برای روشن شدن موضوع فرض کنید A ماتریس 2×2 به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

به علاوه بردار(نقطه) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ را در نظر می گیریم. داریم:

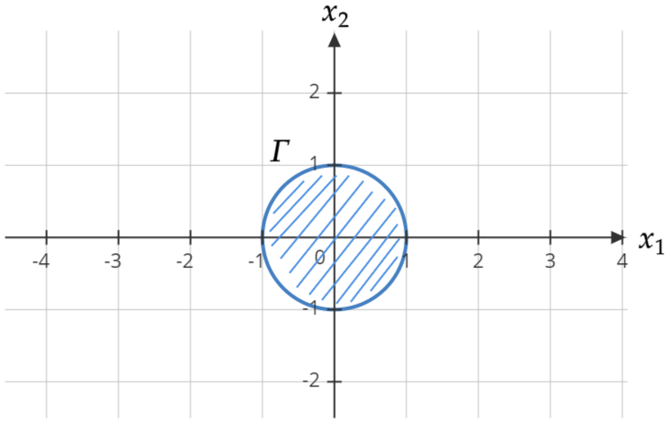
$$Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین A بردار(نقطه) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ می نگارد(به شکل زیر توجه کنید)



تا به اینجای کار دیدیم که هر ماتریس $m \times n$ به عنوان یک تبدیل هندسی قادر به نگاشتن نقطه ای دلخواه از $\mathbb{R}^n$ به نقطه ای از $\mathbb{R}^m$ است. حال سوالی که مطرح می گردد: اگر Γ یک شکل هندسی خاص در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه تحت تاثیر A بر این شکل می بایست منتظر چه شکلی در $\mathbb{R}^m$ باشیم؟ در این حالت خاص فرض کنید که A همان ماتریس 2×2 قبلی باشد و Γ مجموعه ی دایره ی یکه ی توپر در $\mathbb{R}^2$ باشد یعنی:

$$\Gamma = \{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \|X\|_2 \leq 1\} = \{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$



می خواهیم بررسی نمایم که A شکل Γ را به چه شکلی در $\mathbb{R}^2$ می نگارد. برای اینکار باید A برتمامی نقاط Γ اثر نماید تا شکل جدید حاصل گردد. فرض کنیم X نقطه ای دلخواه از Γ باشد پس:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \Gamma \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \tag{21}$$

می خواهیم اثر A بر این نقطه ی دلخواه را بیابیم. اگر $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ اثر A بر این نقطه ی دلخواه باشد باید $Y = AX$ یا

$$X = A^{-1}Y \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = A^{-1}Y = \left[\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -2y_1 - 3y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{array}\right]$$

پس

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه x_1 و x_2 می بایست در (۲۱) صدق کنند باید داشته باشیم

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \Rightarrow (-2y_1 - 3y_2)^2 + (-y_1 - y_2)^2 \leqslant 1$$

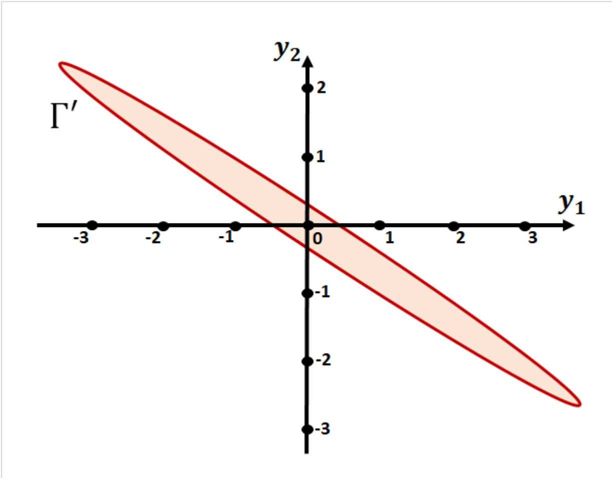
یا

$$5y_1^2 + 14y_1y_2 + 10y_2^2 \leqslant 1$$

اکنون با استفاده از نرم افزاری های ریاضی به رسم ناحیه ی جدید

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \{Y \in \mathbb{R}^2 \mid \|X\|_2 \leqslant 1\} \\ &= \left\{\left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\} \\ &= \left\{\left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^2 \mid 5y_1^2 + 14y_1y_2 + 10y_2^2 \leqslant 1\right\} \end{aligned}$$

می پردازیم که به صورت زیر است. مشاهده می شود که شکل جدید یک بیضی است که دوران یافته است زیرا یک بیضی افقی یا قائم نیست.



بنابراین ماتریس A در این مثال یک دایره را به یک بیضی دوران یافته تبدیل می کند.

۱.۵ اثر یک ماتریس متعامد بر یک شکل

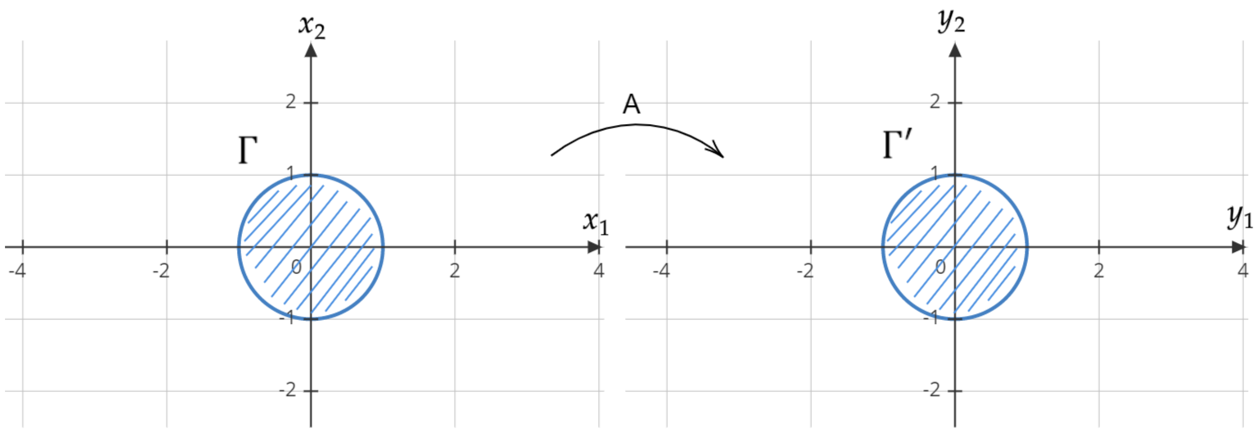
حال فرض کنید A ماتریس متعامد باشد یعنی $A^TA = I$ و Γ همان شکل قبل باشد اگر $Y \in \Gamma'$ باشد آنگاه از $Y = AX$ و $\|X\|_۲ \leq ۱$ داریم:

$$Y = AX \to A^TY = A^TAX = IX = X$$

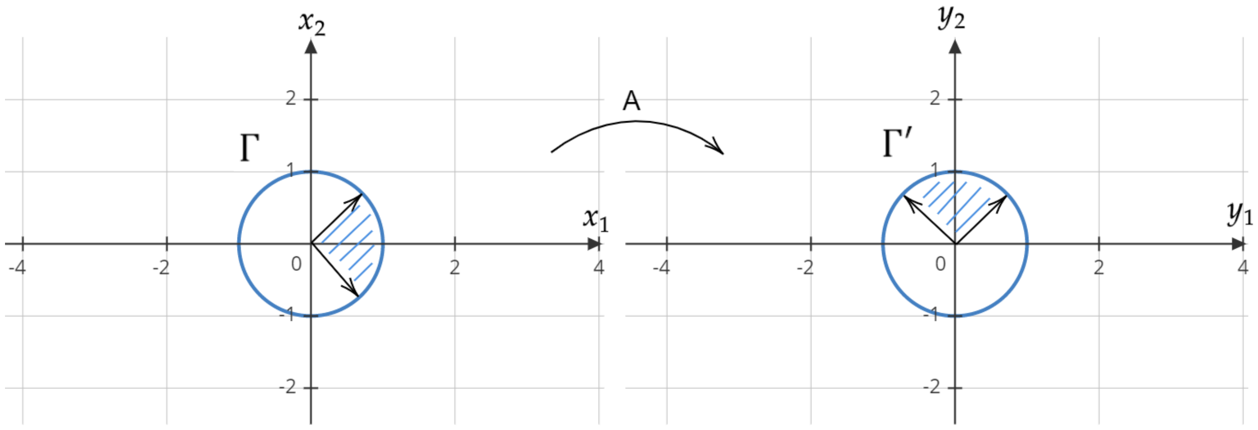
لذا $X = A^TY$ اما با توجه به خاصیت نرم ۲ داریم:

$$\|X\|_۲ = \|A^TY\|_۲ = \|Y\|_۲$$

پس $\|X\|_۲ \leq ۱$ معادل است با $\|Y\|_۲ \leq ۱$ یا $y_۱^۲ + y_۲^۲ \leq ۱$ که یک دایره توپر یکه در $\mathbb{R}^۲$ است لذا Γ' یک دایره توپر خواهد بود



اما در حالت کلی دایره ی Γ' همان دایره Γ نیست و ممکن است دوران نیز یافته باشد پس برای دقیق تر نمایش دادن تاثیر A بر Γ از شکل زیر استفاده می کنیم.



تا دوران احتمالی دایره ی سمت چپ را نشان داده باشیم. به طور کلی نتیجه ی زیر را به دست آوردیم:

اگر ماتریس متعامد A بر یک دایره اثر کند شکل آن را تغییر نمی دهد تنها آن را دوران می دهد. اما اگر A ماتریس متعامد نباشد و بر یک دایره اثر کند هم شکل آن ر ا به بیضی تغییر می دهد و هم آنرا دوران می دهد.

۲.۵ اثر یک ماتریس قطری بر شکل دایره

ماتریس قطری وارون پذیر A را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

اگر A بر دایره Γ اثر کند آنگاه برای هر $Y \in \Gamma'$ داریم:

$$Y = AX \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

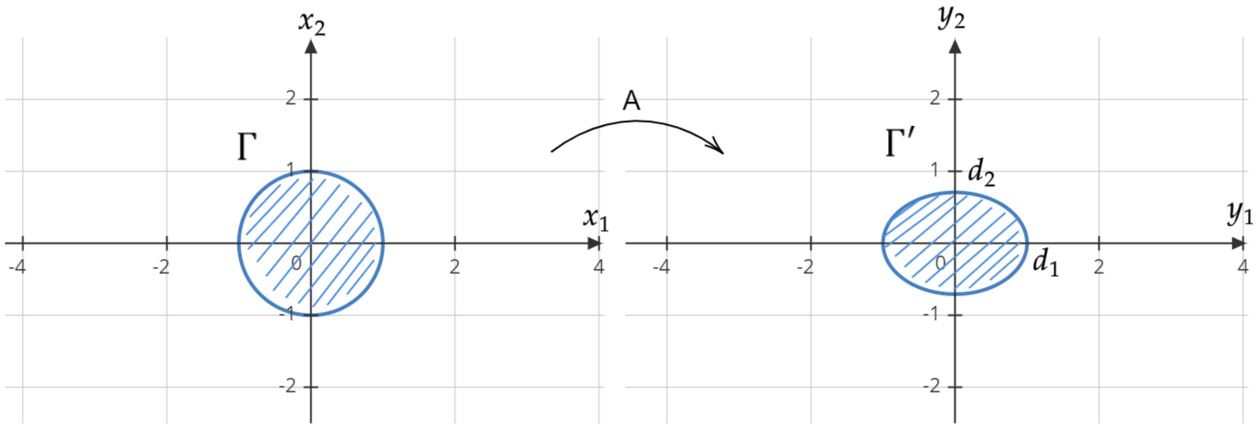
پس

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{d_1} \\ \frac{y_2}{d_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{d_1} \\ \\ x_2 = \dfrac{y_2}{d_2} \end{cases}$$

لذا شرط $\|X\|_2 \leq 1$ نتیجه می دهد

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{y_1^2}{d_1^2} + \frac{y_2^2}{d_2^2} \leq 1$$

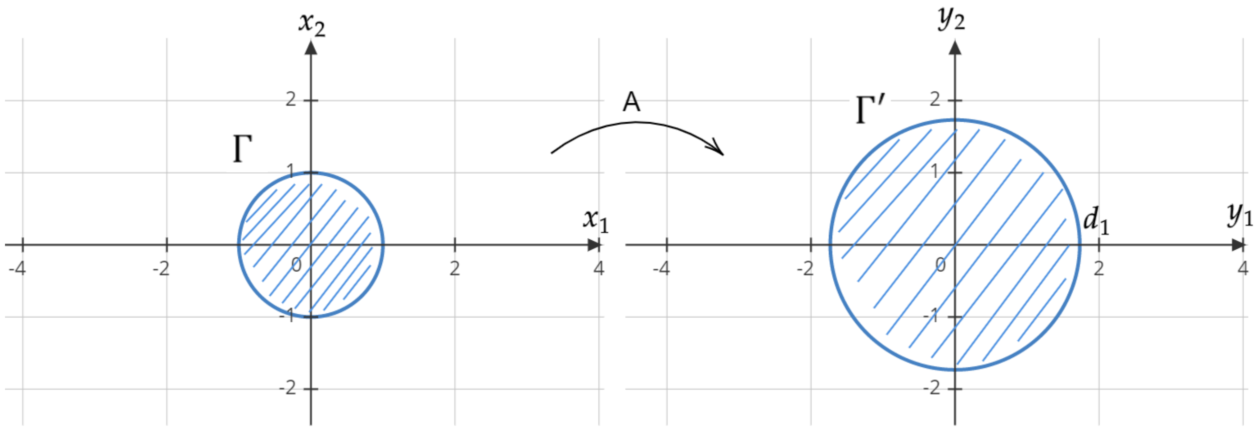
که نشان دهنده یک بیضی است(بدون دوران). بنابراین Γ' چیزی نیست بجز یک بیضی



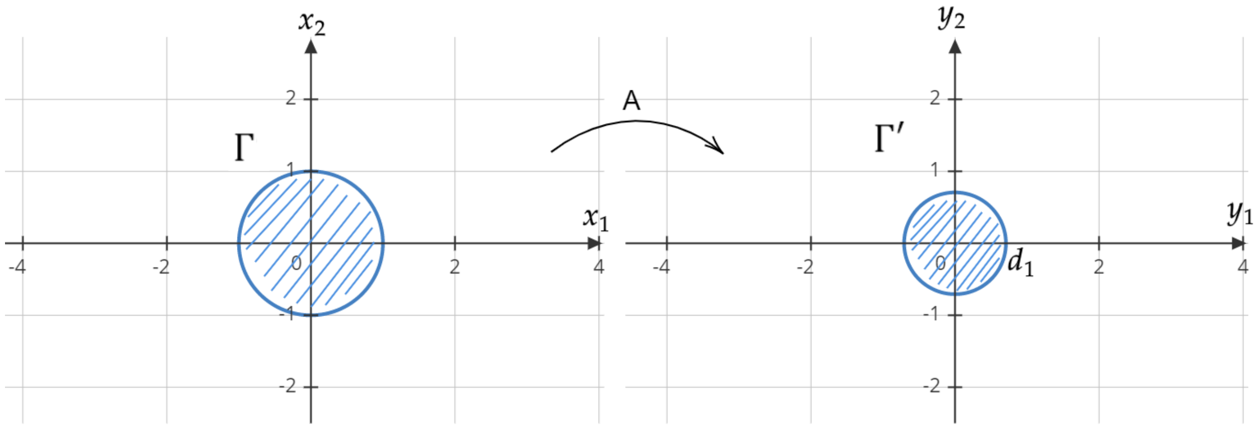
البته بر حسب اینکه $d_۲$ از $d_۱$ بزرگ تر یا کوچک تر باشد بیضی قائم یا افقی خواهد بود.
البته توجه کنید که اگر $d_۱ = d_۲$ آنگاه داریم:

$$\frac{y_۱^۲}{d_۱^۲} + \frac{y_۲^۲}{d_۱^۲} \leqslant ۱ \Rightarrow y_۱^۲ + y_۲^۲ \leqslant d_۱^۲$$

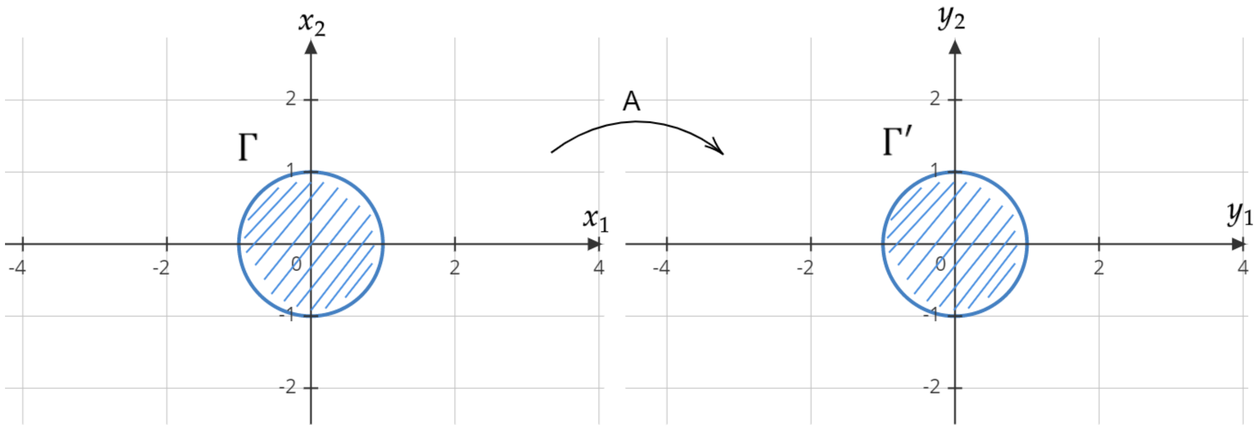
که نشان دهنده ی دایره به مرکز مبدا و شعاع $d_۱$ است. حال اگر $d_۱ > ۱$ آنگاه Γ' دایره ای است که نسبت به Γ بزرگتر است و اگر $d_۱ < ۱$ آنگاه Γ' دایره است که نسبت به Γ کوچکتر است.
حالت $d_۱ > ۱$:



حالت $d_۱ < ۱$:



بعلاوه اگر $d_۱ = d_۲ = ۱$ آنگاه A ماتریس همانی است و بر شکل Γ بی اثر خواهد بود.



با توجه به نکات گفته شده می توانیم بیان کنیم که:

اگر A ماتریسی قطری وارون پذیر دلخواه باشد آنگاه اثرش بر دایره یک دایره یا بیضی است که در مختصات جدید دوران نمی یابد

تمرین ۷.۳

مانند مباحث قبل موارد زیر را بررسی کنید:
۱. اثر یک ماتریس متعامد بر یک بیضی، یک بیضی و با دوران است.
۲. اثر یک ماتریس قطری بر یک بیضی، یک بیضی و بدون دوران است.

تمرین ۷.۴

ناحیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۲ \mid \frac{x_۱^۲}{۴} + \frac{x_۲^۲}{۹} \leqslant ۱ \right\}$$

اثر ماتریس های A ، B ، C و D را بر ناحیه Γ به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & -\frac{۳}{۵} \\ \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

۳.۵ تعبیر هندسی تجزیه SVD

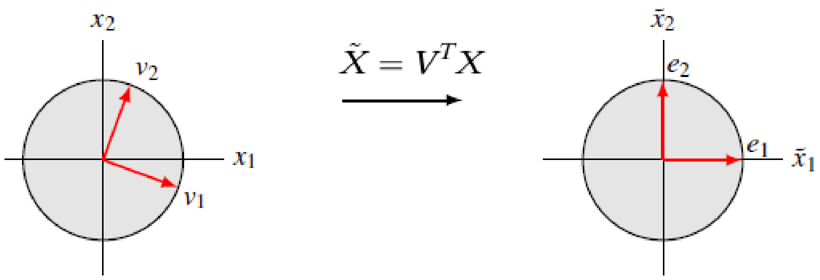
با توجه به اینکه مقدمات لازم جهت تعبیر هندسی تجزیه SVD آورده شد اکنون به تعبیر آن می پردازیم. قبلا دیدیم که ناحیه جدید Γ' به صورت زیر است

$$\Gamma' = \left\{ Y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۲ \mid \|X\|_۲ \leqslant ۱ \right\}$$

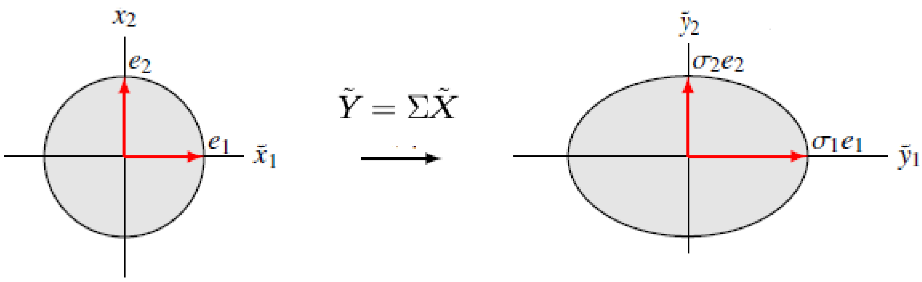
و $Y = AX$. اگر $A = U\Sigma V^T$ تجزیه SVD ماتریس A باشد داریم:

$$\Gamma' = \{Y \mid \|X\|_۲ \leqslant ۱\} = \{AX \mid \|X\|_۲ \leqslant ۱\} = \{U\Sigma V^T X \mid \|X\|_۲ \leqslant ۱\}$$

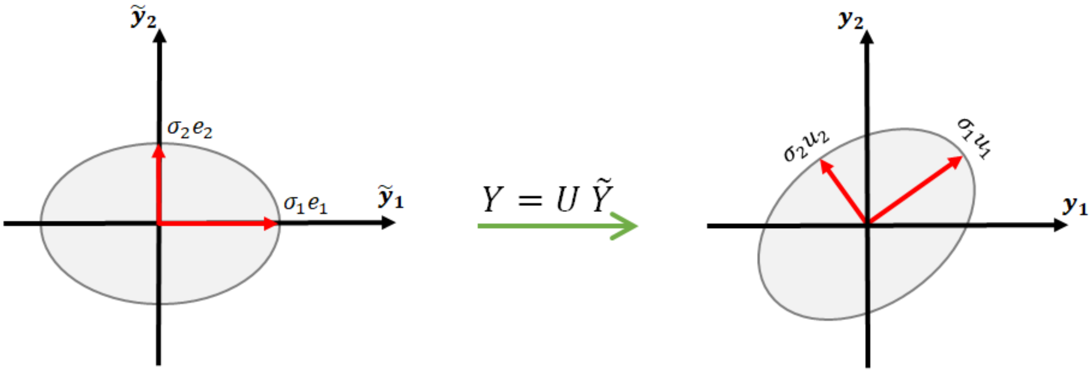
این نگاشت را می توان به ۳ مرحله ی زیر تقسیم نمود.
مرحله ی ۱: ضرب V^T در X
مرحله ی ۲: ضرب Σ در $V^T X$
مرحله ی ۳: ضرب U در $\Sigma V^T X$
مطابق مطالب بیان شده در مرحله ی اول و در ضرب $\widetilde{X} = V^T X$ چون V متعامد است پس دایره به یک دایره با دوران تبدیل می شود یعنی شکل زیر:



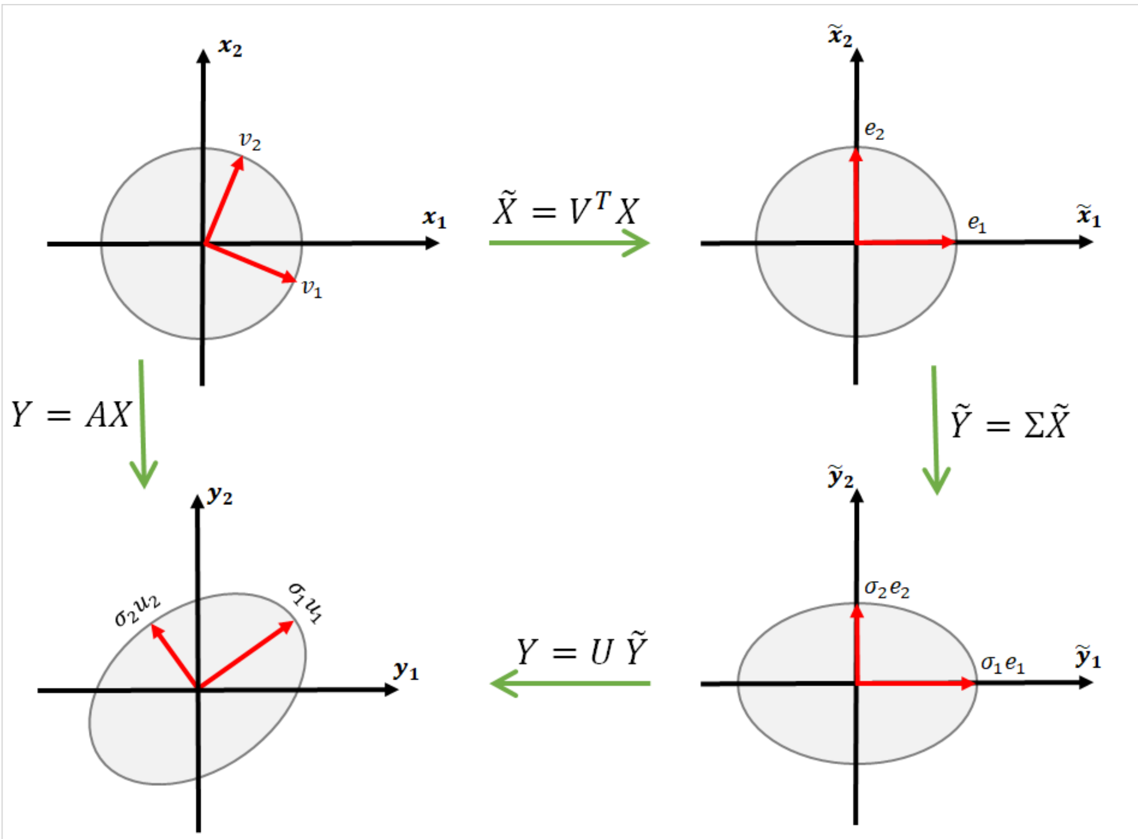
در مرحله دوم در ضرب $\Sigma(V^T X)$ یعنی $\widetilde{Y} = \Sigma \widetilde{X}$ چون Σ قطری است پس دایره به یک بیضی بدون دوران تبدیل می شود یعنی شکل زیر



در مرحله سوم در ضرب $U(\Sigma V^T X)$ یعنی $U\tilde{Y}$ چون U متعامد است بیضی به یک بیضی دوران یافته تبدیل می شود یعنی شکل زیر

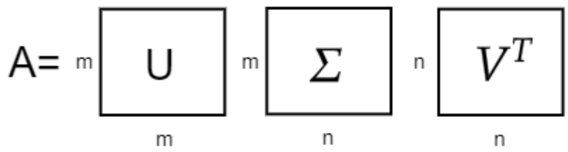


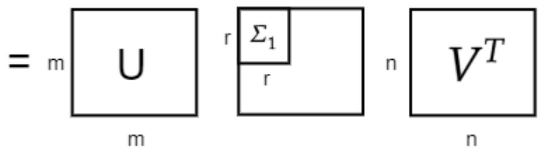
این سه مرحله را می توان به صورت زیر نمایش داد



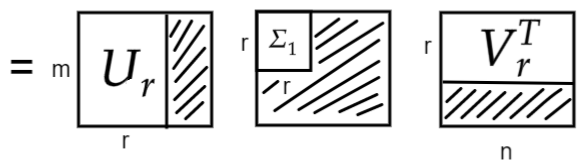
۶ کاربرد های تجزیه SVD

تجزیه SVD در علوم مختلف کاربرد های فراوان دارد از جمله پردازش سیگنال (Signal Processing)، داده کاوی (Data Mining) ، پردازش تصویر (Image Processing) الگوریتم های تشخیص چهره و غیره. در این درس به یکی از کاربرد های SVD در پردازش تصویر که فشرده سازی تصویر (Image Compressing) است می پردازیم. قبل از آن با فرم فشرده این تجزیه آشنا می شویم. دیدیم که شمای کلی تجزیه SVD به صورت زیر است:





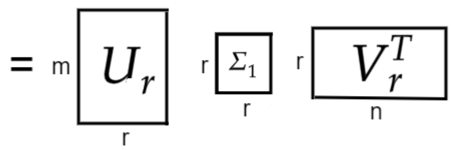
در ماتریس Σ بجز بلوک $\Sigma_۱$ بقیه بلوک ها صفرند پس وقتی Σ از چپ در V^T و از راست در U ضرب می شود تنها به r سطر و ستون آن که همان $\Sigma_۱$ است نیاز داریم یعنی(قسمت هایی که تاثیر ندارند هاشور زده شده اند)



پس A از ضرب ۳ ماتریس $U_r, \Sigma_۱, V_r^T$ به صورت زیر بدست می آید

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T \tag{۲۲}$$

که به شکل زیر است



به (۲۲) شکل فشرده تجزیه SVD گفته می شود زیرا ماتریس های $U_r, \Sigma_۱, V_r^T$ نسبت به ماتریس های اولیه شان یعنی U, V, Σ از نظر ابعاد فشرده تر شده اند (از ابعاد کوچک تری برخوردارند)

حال با توجه به (۲۲) داریم

$$A = U_r \Sigma_۱ V_r^T = [u_۱, u_۲, \cdots, u_r] \begin{bmatrix} \sigma_۱ & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱^T \\ v_۲^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} = [\sigma_۱ u_۱, \sigma_۲ u_۲, \cdots, \sigma_r u_r] \begin{bmatrix} v_۱^T \\ v_۲^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_۱ u_۱ v_۱^T + \sigma_۲ u_۲ v_۲^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

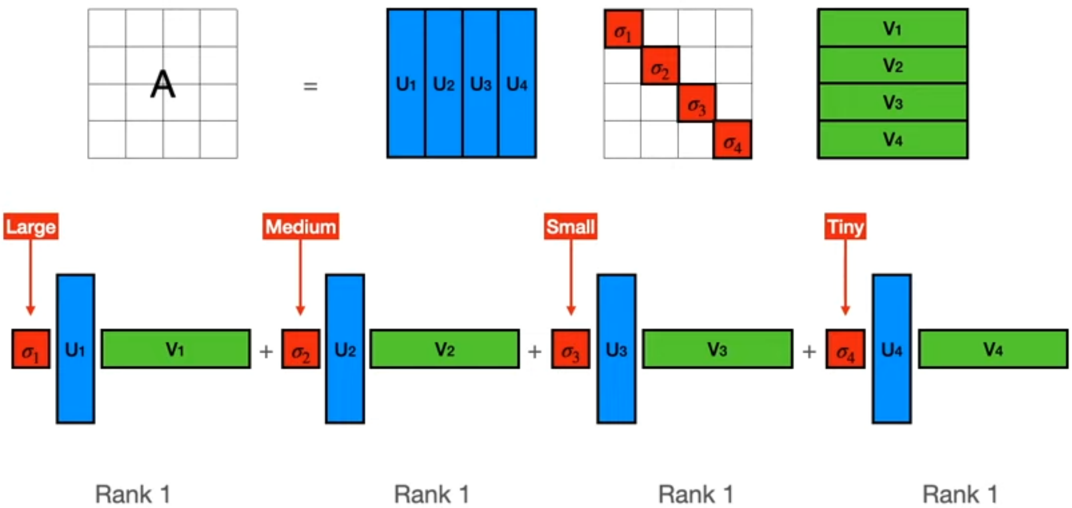
بنابراین

$$A = \sigma_۱ u_۱ v_۱^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T = \sum_{i=۱}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \tag{۲۳}$$

به (۲۳) شکل گسترده تجزیه SVD گفته می شود.
برای یک ماتریس ۴×۴ شکل گسترده به صورت زیر نمادین نمایش داده شده است. با توجه به اینکه σ_i ها نزولی هستند

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \sigma_۳ \geq \sigma_۴$$

می‌توانیم $\sigma_۱$ را بزرگترین و $\sigma_۴$ را کوچکترین مقدار منفرد تلقی کنیم.



نکته ۷.۳

با توجه به (۲۳) ماتریس A را می توان به صورت جمع r ماتریس به شکل $\sigma_i u_i v_i^T$ نوشت. بعلاوه هر ماتریس به صورت $\sigma_i u_i v_i^T$ دارای رتبه یک است. برای دیدن این موضوع برای حالت خاص $n = ۲, m = ۳$ واضح است که u_i ها برداری ۳×۱ و v_i ها برداری ۲×۱ اند پس برای i ثابت می توان فرض کرد

$$u_i = \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix}, \qquad v_i = \begin{bmatrix} \beta_۱ \\ \beta_۲ \end{bmatrix}$$

پس داریم

$$u_i v_i^T = \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_۱ & \beta_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_۱\beta_۱ & \alpha_۱\beta_۲ \\ \alpha_۲\beta_۱ & \alpha_۲\beta_۲ \\ \alpha_۳\beta_۱ & \alpha_۳\beta_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_۱ \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix} & \beta_۲ \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = [\beta_۱ u_i \quad \beta_۲ u_i]$$

این نشان می دهد که در ماتریس $u_i v_i^T$ ستون اول مضربی از ستون دوم است پس این ماتریس باید دارای رتبه یک باشد.
به همین صورت در حالت کلی می توان نشان داد که هر ماتریس به صورت $u_i v_i^T$ و به دنبال آن $\sigma_i u_i v_i^T$ از رتبه یک است.
بنابراین در (۲۳) هر r ماتریس از رتبه ۱ هستند بنابراین ماتریس A را به صورت مجموع r ماتریس رتبه یک نوشتیم.

۱.۶ بهترین تقریب رتبه پایین یک ماتریس

با توجه به (۲۳) اگر k جمله را جدا کنیم $(k \leq r)$ آنگاه

$$A_k = \sigma_۱ u_۱ v_۱^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T = \sum_{i=۱}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

توجه کنید که رتبه A_k برابر k خواهد بود. چرا؟
حال یک سوال مطرح می شود. در بین تمام ماتریس های از رتبه k نزدیک ترین آنها به A کدام است؟ جواب در قضیه زیر آمده است

قضیه ۷.۳ اکارت – یانگ- میرسکي (Eckart- Young- Mirsky)

در بین تمام ماتریس های از رتبه k ماتریس $A_k = \sum_{i=۱}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ بهترین تقریب A است. یعنی برای هر ماتریس دیگر X داریم

$$\|A - A_k\|_۲ \leq \|A - X\|_۲$$

بعلاوه دقت این تقریب برابر است با:

$$\|A - A_k\|_۲ = \sigma_{k+۱}$$

ممکن است پرسیده شود که چه نیازی است تا ماتریس A با رتبه r را با یک ماتریس رتبه k که $k \leq r$ تقریب بزنیم. پاسخ در تعریف رتبه عددی یک ماتریس است. قبل از آن ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۶۰ & -۰/۴۷ & ۰/۵۶ \\ -۰/۱۴ & -۰/۷۱ & -۰/۱۳ \\ ۰/۸۲ & -۰/۷۳ & ۰/۷۹ \\ -۰/۶۴ & ۰/۷۴ & -۰/۶۷ \end{bmatrix}$$

چون ستون های A مستقل خطی اند می توان دید که A رتبه کامل است پس $Rank(A) = ۳$. با کمی دقت در ماتریس A می بینیم که ستون اول نزدیک به ستون سوم است(اگرچه یکی نیستند) بنابراین می توانیم رتبه A را به صورت تقریبی ۲ در نظر بگیریم. این کار منطقی است زیرا از ۳ مقدار تکین A که به صورت

$$\sigma_۱ = ۲/۰۴, \qquad \sigma_۲ = ۰/۷۰, \qquad \sigma_۳ = ۰/۰۴$$

هستند کوچکترین آنها مقداری کوچک است و می توان از آن صرف نظر نمود (دقت کنید که رتبه ماتریس برابر با تعداد مقادیر تکین ناصفر است). پس اگر به این ماتریس به اینصورت بنگریم در اینصورت می توانیم بنویسیم $Rank(A) \approx ۲$. در این مثال می گوییم رتبه ماتریس A برابر ۳ است اما رتبه عددی آن ۲ است. حال که رتبه ی عددی ماتریس ۲ است پس می توانیم A را با یک ماتریس رتبه پایین تر از رتبه اصلی اش که ۳ است تقریب نماییم.
اکنون با توجه به قضیه قبل می توان ماتریس A را به صورت زیر تقریب زد.

$$A \approx A_۲ = U_۲ \Sigma_۱ V_۲^T = \sigma_۱ u_۱ v_۱^T + \sigma_۲ u_۲ v_۲^T \qquad (k = ۲)$$

زیرا بهترین تقریب رتبه ۲ همان $A_۲$ است. با توجه به اینکه برای این ماتریس عامل های تجزیه SVD به صورت زیرند(محاسبه

کنید):

$$U = \begin{bmatrix} -۰/۴۶ & ۰/۱۶ & -۰/۵۴ & ۰/۶۹ \\ -۰/۱۳ & -۰/۹۸ & -۰/۱۷ & ۰/۰۱ \\ -۰/۶۶ & ۰/۱۳ & -۰/۲۸ & -۰/۶۹ \\ ۰/۵۸ & ۰/۰۶ & -۰/۷۸ & -۰/۲۳ \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} ۲/۰۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۷۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۰۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -۰/۵۷ & ۰/۴۴ & -۰/۶۹ \\ ۰/۶۰ & ۰/۸۰ & ۰/۰۱ \\ -۰/۵۶ & ۰/۴۱ & ۰/۷۲ \end{bmatrix}$$

پس داریم

$$A_۲ = ۲/۰۴ \begin{bmatrix} -۰/۴۶ \\ -۰/۱۳ \\ -۰/۶۶ \\ ۰/۵۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۵۷ \\ ۰/۶۰ \\ -۰/۵۶ \end{bmatrix}^T + ۰/۷۰ \begin{bmatrix} ۰/۱۶ \\ -۰/۹۸ \\ ۰/۱۳ \\ ۰/۰۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۴۴ \\ ۰/۸۰ \\ ۰/۴۱ \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} ۰/۵۹ & -۰/۴۷ & ۰/۵۷ \\ -۰/۱۴ & -۰/۷۱ & -۰/۱۳ \\ ۰/۸۱ & -۰/۷۳ & ۰/۸۰ \\ -۰/۶۶ & ۰/۷۴ & -۰/۶۵ \end{bmatrix}$$

همچنین خطای تقریب نسبت به نرم ۲ برابر است با

$$||A - A_۲||_۲ = \left\| \begin{bmatrix} ۰/۰۱ & ۰/۰۰ & -۰/۰۱ \\ ۰/۰۰ & ۰/۰۰ & ۰/۰۰ \\ ۰/۰۱ & ۰/۰۰ & -۰/۰۱ \\ ۰/۰۲ & ۰/۰۰ & -۰/۰۲ \end{bmatrix} \right\|_۲ = ۰/۰۴ = \sigma_۳$$

که مقداری کوچک است.

اکنون ممکن است بپرسید که انجام عملیات های مختلف با A_k چه مزایایی نسبت به A دارد؟ دلیل اینکار نیاز به حافظه کمتر برای ذخیره سازی A_k نسبت به A است.

اگر با خود ماتریس A کارکنیم به $m \times n$ درایه برای ذخیره سازی نیازمندیم اما اگر با فرم فشرده آن به صورت $A_k = U_k \Sigma_۱ V_k^T$ کار کنیم کافی است ماتریس های $U_k, \Sigma_۱, V_k$ را ذخیره کنیم پس با این سه ماتریس هر عملیاتی که لازم باشد می توان انجام داد. از طرفی:

- برای ذخیره سازی U_k به $m \times k$ درایه نیازمندیم
- برای ذخیره سازی $\Sigma_۱$ چون قطری است به k درایه نیازمندیم
- برای ذخیره سازی V_k به $k \times n$ درایه نیازمندیم

پس در مجموع برای ذخیره سازی A_k به

$$m \times k + k + k \times n = k(m + n + ۱)$$

درایه نیازمندیم. پس برای ذخیره سازی ماتریس A به mn مکان حافظه نیازمندیم در حالی که برای ذخیره سازی ماتریس A_k به $k(m + n + ۱)$ مکان حافظه نیازمندبم. واضح است که هدف اصلی این است که

$$k(m + n + ۱) < mn$$

پس مقدار k باید در شرط

$$k < \frac{mn}{m+n+۱}$$

صدق نماید. توجه کنید که در حالت کلی هیچ مقدار بهینه ای برای k تعیین نشده است.

برای مثال فرض کنید A ماتریس ۱۰۰۰×۵۰ باشد. در این صورت برای ذخیره سازی A نیاز به ذخیره سازی ۵۰۰۰۰ درایه نیازمندیم. اما اگر رتبه عددی آن $k = ۱۰$ باشد آنگاه به ذخیره سازی

$$k(m+n+۱) = ۱۰(۵۰ + ۱۰۰۰ + ۱) \approx ۱۰۰۰۰$$

درایه نیازمندیم که نسبت به ۵۰۰۰۰ مقداری کوچک است. پس از نسبت

$$\frac{۱۰۰۰۰}{۵۰۰۰۰} = ۲۰\%$$

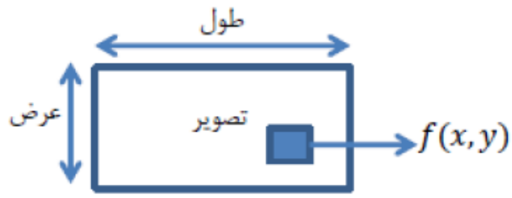
می توان گفت که ۸۰ درصد موفق به ذخیره سازی حافظه شده ایم. چون

$$k < \frac{mn}{m+n+۱} = \frac{۵۰۰۰۰}{۱۰۵۱} \approx ۴۷/۵۷$$

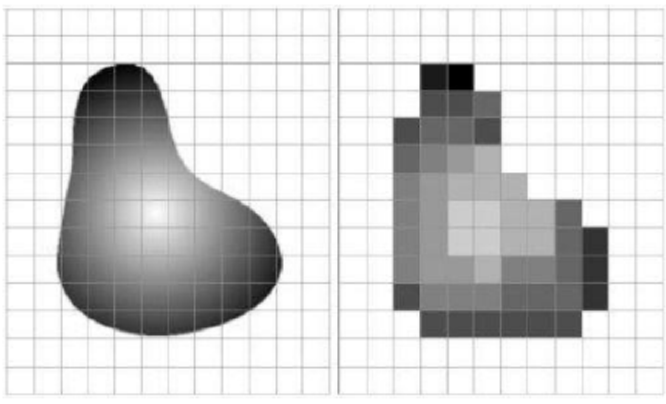
پس در اینجا حداکثر مقدار قابل قبول برای k برابر ۴۷ است.

۷ تصویر به صورت یک ماتریس

هر عکس شامل یک عرض و طول است که مرز عکس را مشخص می کند و هر نقطه آن مقداری می پذیرد. به عبارت دیگر اگر تصویر را یک تابع پیوسته $f(x,y)$ در نظر بگیریم در عرض x و در طول y مقدار مشخص تابع برابر با $f(x,y)$ است که نشانگر مقدار رنگ آن در نقطه می باشد.



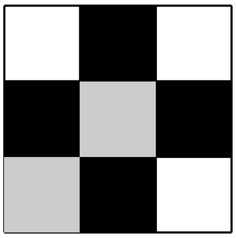
چون ضابطه ای برای تابع $f(x,y)$ نداریم پس اگر بخواهیم تصویر را ذخیره کنیم باید تمام نقاط آن را ذخیره کنیم، اما در عمل برای ذخیره سازی ناچاریم تعداد متناهی از نقاط را در نظر گرفته و ذخیره نماییم. در نتیجه تنها یک نماینده از عکس واقعی خواهیم داشت که در پردازش تصویر به این کار نمونه گیری می گویند. از طرفی هر نقطه می تواند عددی را به عنوان رنگ به خود اختصاص دهد و چون بینهایت مقدار برای رنگ وجود دارد به ناچار باید یک مقدار را بعنوان رنگ هر نقطه بپذیریم که به این عمل کمی سازی گفته می شود. در شکل زیر لبه های تصویر با کمک مربع هایی مشخص شده اند، به این عمل دیجیتال کردن گفته می شود.



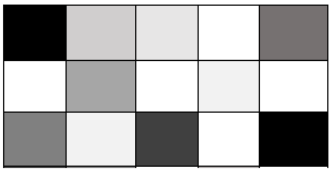
در واقع نتیجه حاصل از کمی سازی روی نماینده تصویر تولید یک ماتریس از مقادیر حقیقی است. یک تصویر دیجیتال، از طریق ماتریس به شکل زیر قابل نمایش است.

$$\begin{bmatrix} f(۱,۱) & f(۱,۲) & \cdots & f(۱,n) \\ f(۲,۱) & f(۲,۲) & \cdots & f(۲,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(m,۱) & f(m,۲) & \cdots & f(m,n) \end{bmatrix}$$

به هر کدام از عناصر(درایه) این ماتریس پیکسل گفته می شود. این عناصر می توانند مقداری بین ۰ و ۲۵۵ دریافت کنند، ۰ برای رنگ سیاه و ۲۵۵ برای رنگ سفید. شکل های زیر نشان دهنده ی نسبت دادن مقدار به هر رنگ پیکسل ها را نشان می دهند.

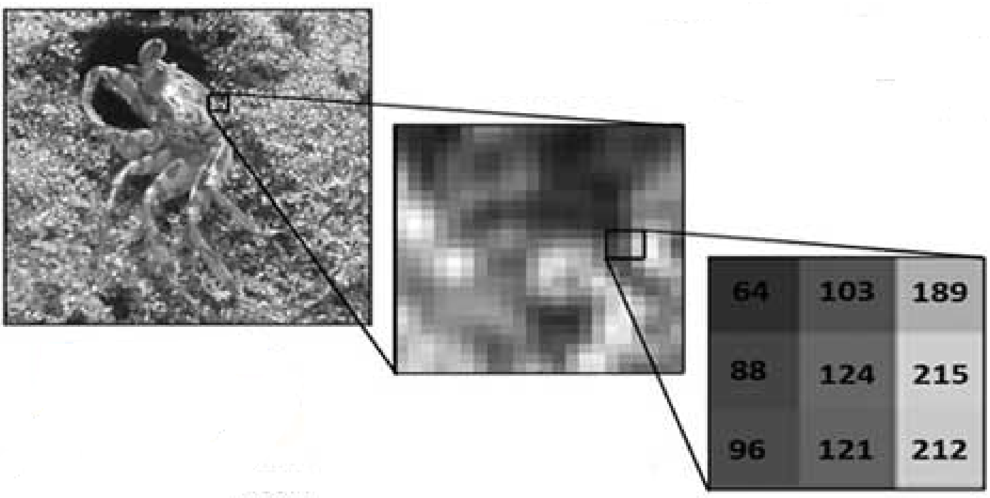


$$= \begin{bmatrix} ۲۵۵ & ۰ & ۲۵۵ \\ ۰ & ۱۲۸ & ۰ \\ ۱۲۸ & ۰ & ۲۵۵ \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۱۵۰ & ۱۸۰ & ۲۵۵ & ۸۰ \\ ۲۵۵ & ۱۲۰ & ۲۵۵ & ۱۸۰ & ۲۵۵ \\ ۱۰۰ & ۲۰۰ & ۳۰ & ۲۵۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

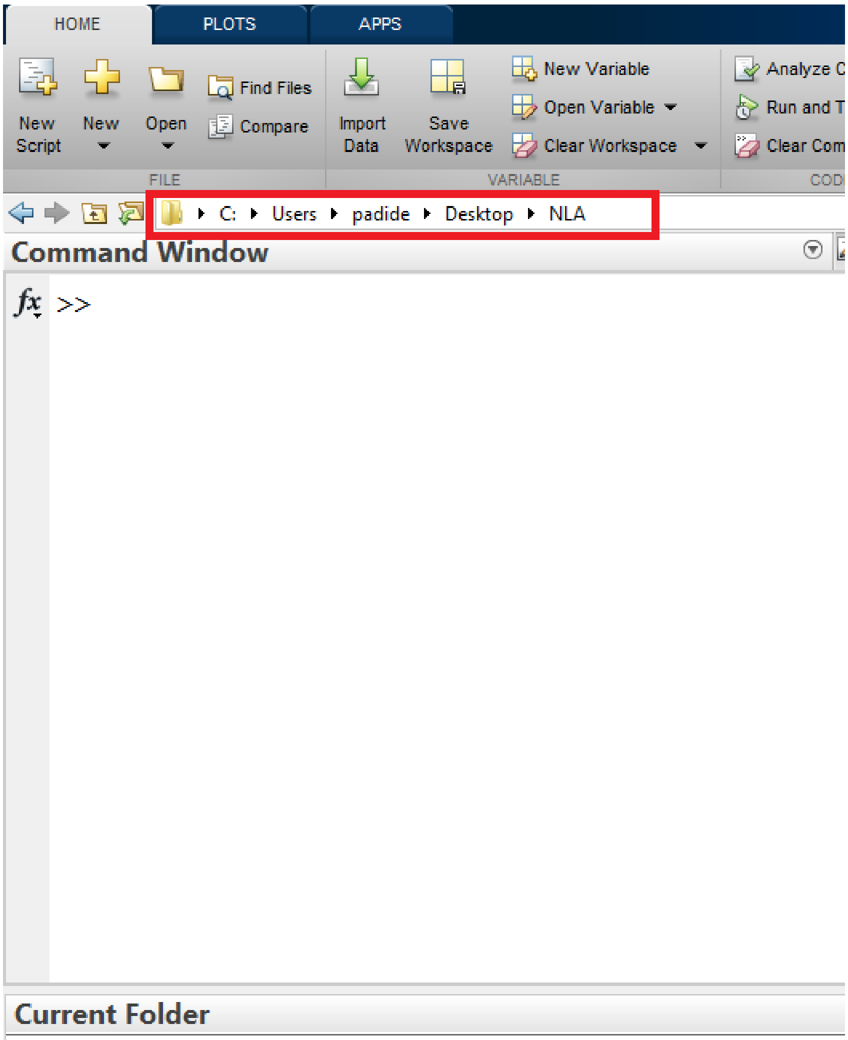
توجه نمایید که می توانیم به هر رنگ مقداری در بازه $[۰,۱]$ نیز نسب دهیم در واقع با انتقال بازه ی $[۰,۲۵۵]$ به $[۰,۱]$ اینکار انجام می شود.
شکل زیر نیز بخوبی نشان می دهد که هر تصویر از پیکسل های بسیار ریزی تشکیل شده است و اینکه رنگ هر پیکسل مقداری بین ۰ تا ۲۵۵ را می گیرد. توجه کنید که در قسمتی از تصویر زوم شده است.



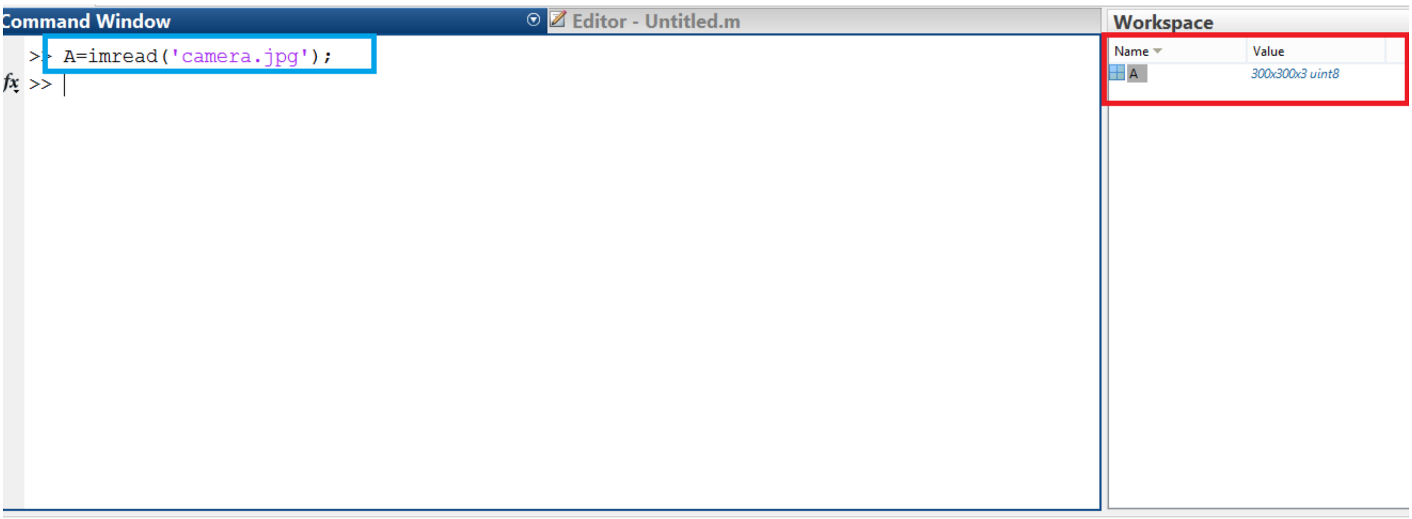
۱.۷ تبدیل تصاویر به ماتریس در نرم افزار متلب

در ادامه نحوه خواندن یک تصویر در محیط ویندوز و با استفاده از نرم افزار متلب آورده شده است. عکس دوربین زیر را در نظر بگیرید:

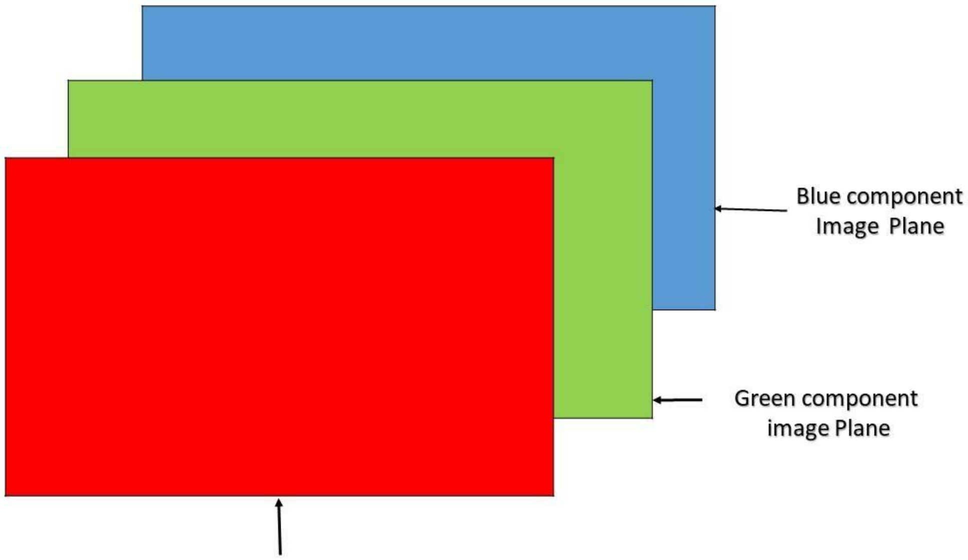
این عکس را که با فرمت jpg است به نام camera در پوشه‌ای به نام NLA در Desktop ذخیره می‌کنیم (به کادر قرمز رنگ زیر که از محیط نرم افزار متلب گرفته شده است دقت کنید)



سپس با دستور imread آن را در نرم افزار متلب فراخوانی می‌کنیم:



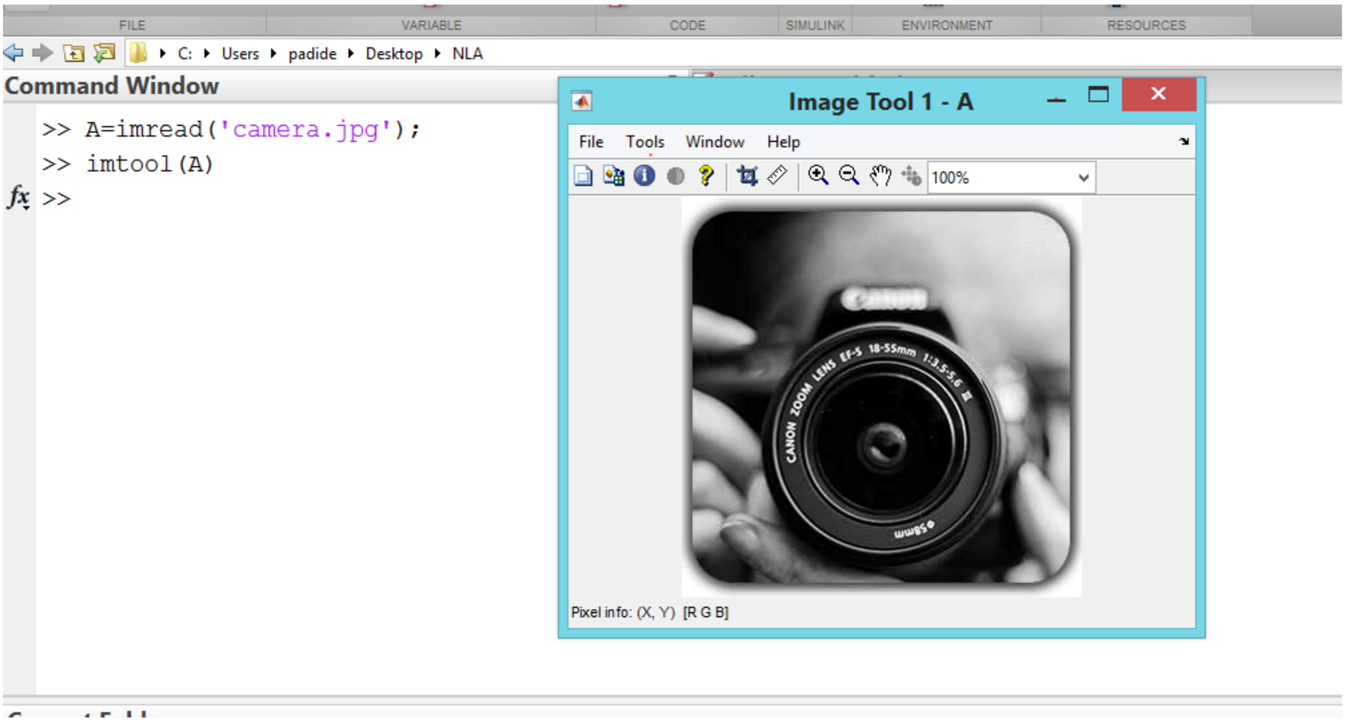
به سمت راست تصویر بالا دقت کنید. متلب عکس یاد شده را به صورت یک ماتریس ۳ لایه ذخیره کرده است. همچنین ابعاد هر یک از ماتریس‌ها ۳۰۰ × ۳۰۰ می‌باشند. که هر ماتریس یا لایه یکی از رنگ های قرمز ، سبز و آبی را ذخیره می کند.



[RGB image is a three layered image]

توجه کنید که تمام رنگ‌های موجود به کمک ترکیبی از این ۳ رنگ آبی، سبز و قرمز ساخته می‌شوند بعلاوه پیکسل هر لایه می‌تواند مقداری بین ۰ تا ۲۵۵ بگیرد. همچنین توجه کنید که اگر تصویری خاکستری باشد (که در واقع دیگر رنگی نیست) آنگاه ماتریس های سه لایه دقیقا یکی هستند. البته در این مثال چون تصویر خاکستری است ماتریس‌های هر سه لایه درواقع یکی هستند.

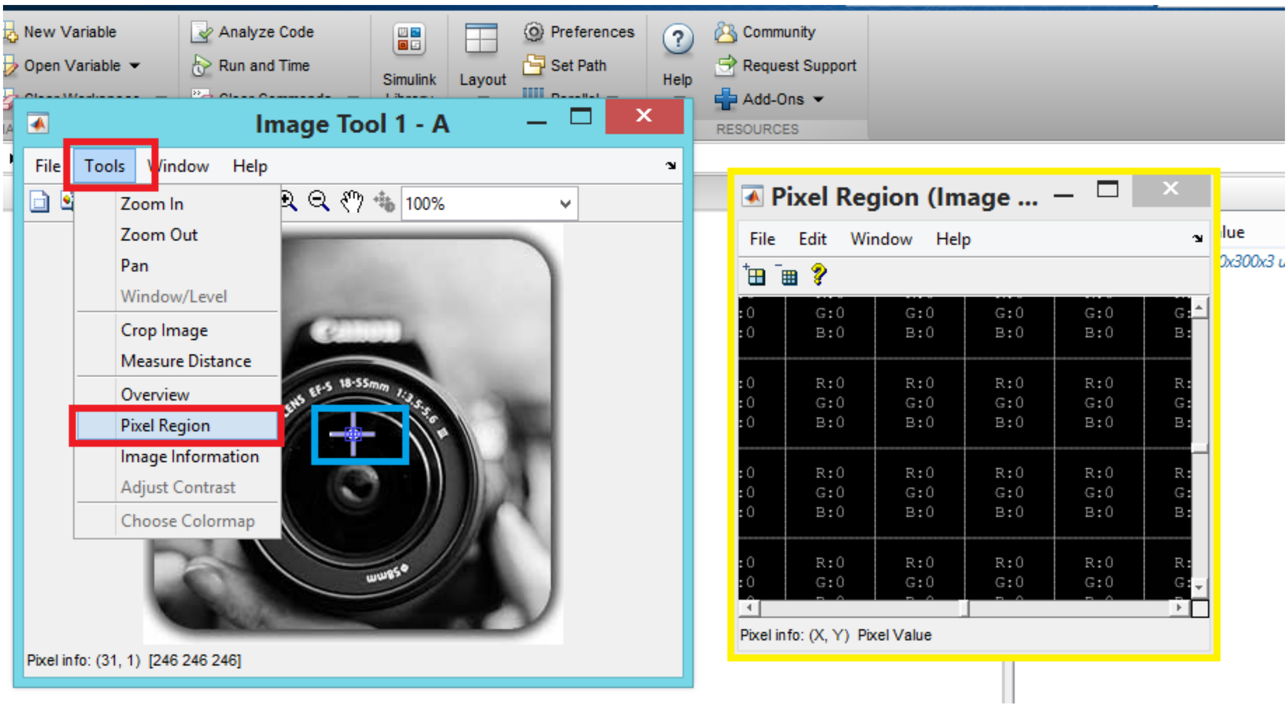
حال با دستور imtool(A) تصویر را نمایش می‌دهیم. نتیجه چنین است:



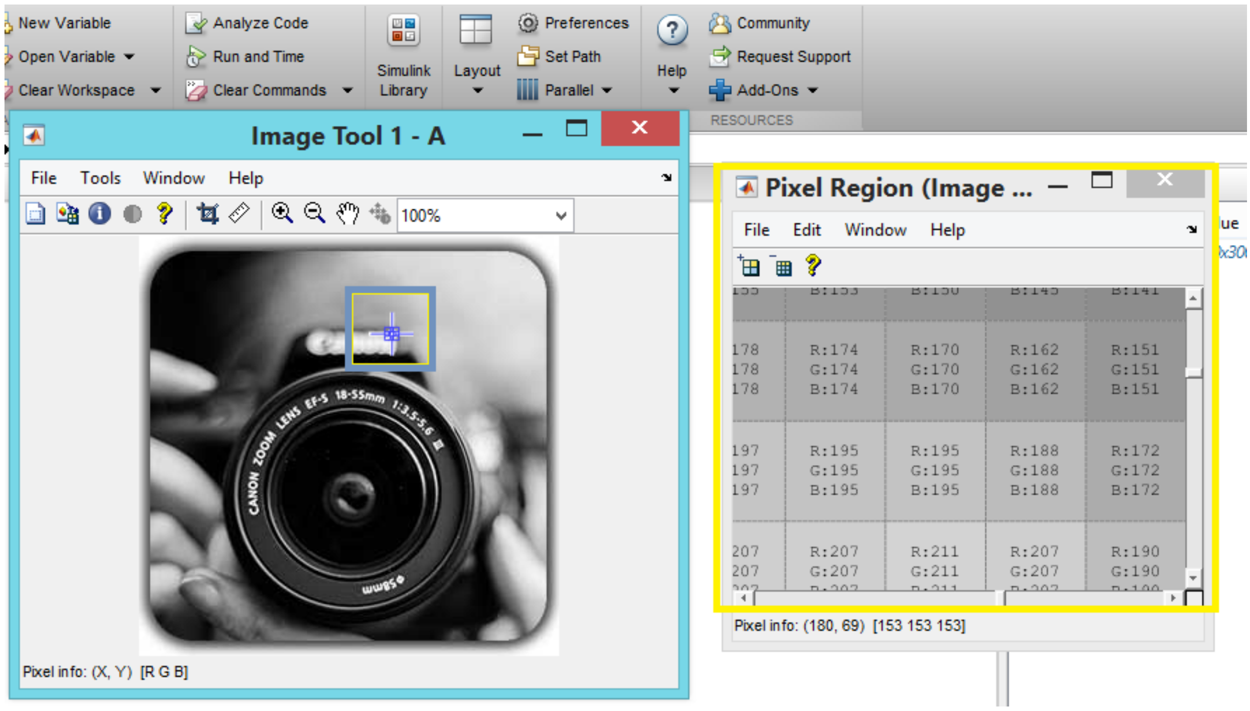
حال می‌توانیم به مشاهده‌ی پیکسل‌های این تصویر با استفاده از کلیک روی گزینه های

$$\text{Tools} \rightarrow \text{Pixel Region}$$

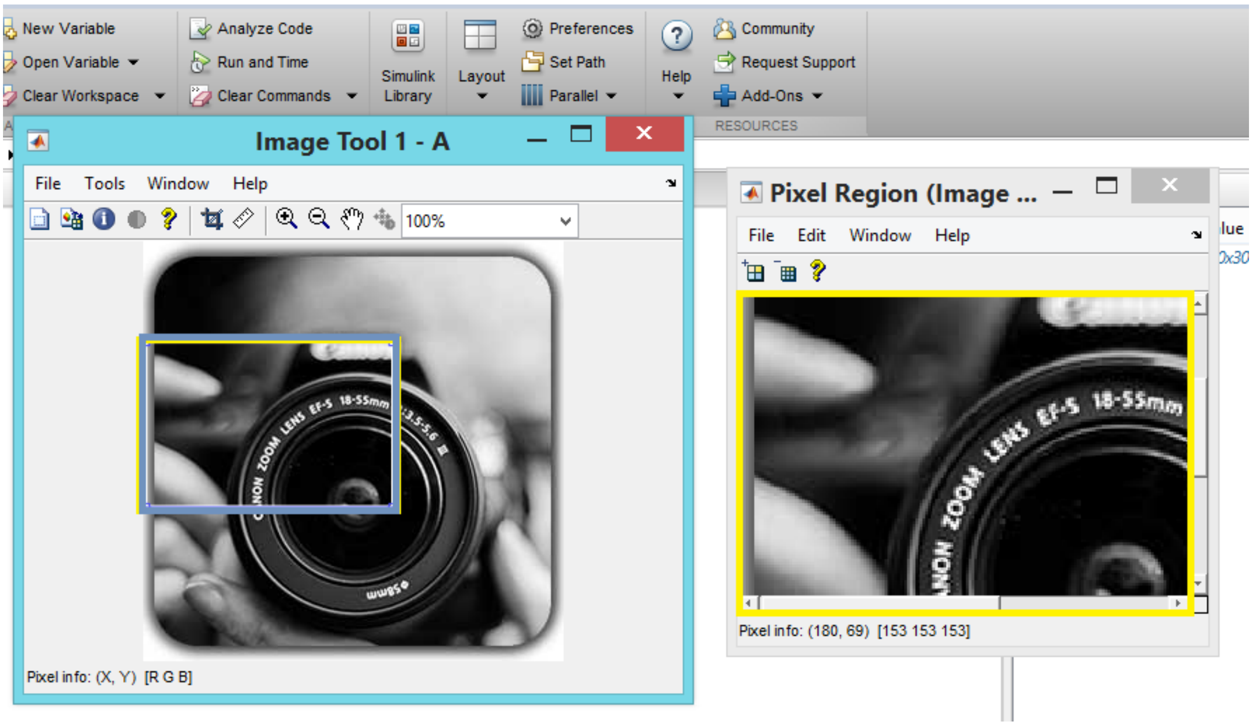
بپردازیم. نتیجه چنین است:



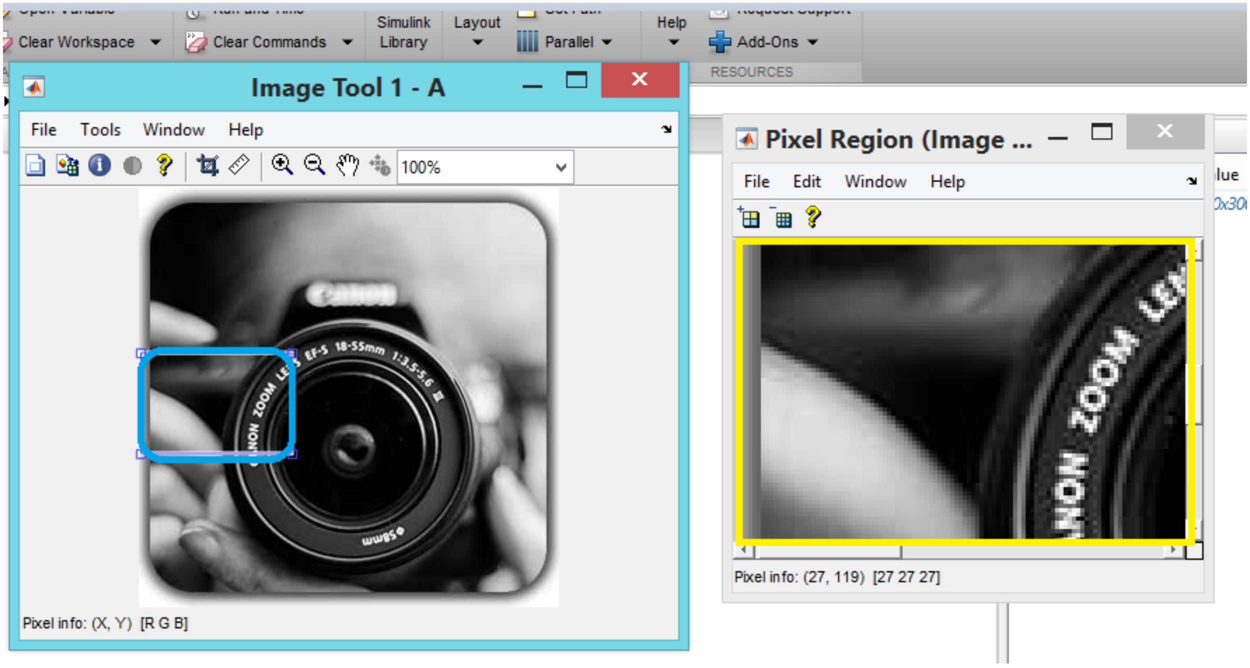
مستطیل داخل کادر زرد رنگ بزرگنمایی قسمتی از تصویر که در کادر آبی رنگ قرار دارد می‌باشد. همان‌طور که می‌بینید درایه‌های تمامی پیکسل ها از صفر تشکیل شده اند یعنی رنگ سیاه و این به علت آن است که کادر آبی رنگ قسمتی از تصویر که تیره است را نشانه گرفته است. با جابجایی کادر آبی رنگ با استفاده از ماوس آن را به قسمت روشن‌تر تصویر انتقال داده و مشاهده می‌کنیم که اعداد نشان داده شده در کادر زرد رنگ مقادیر بزرگتر را اختیار می‌کنند.



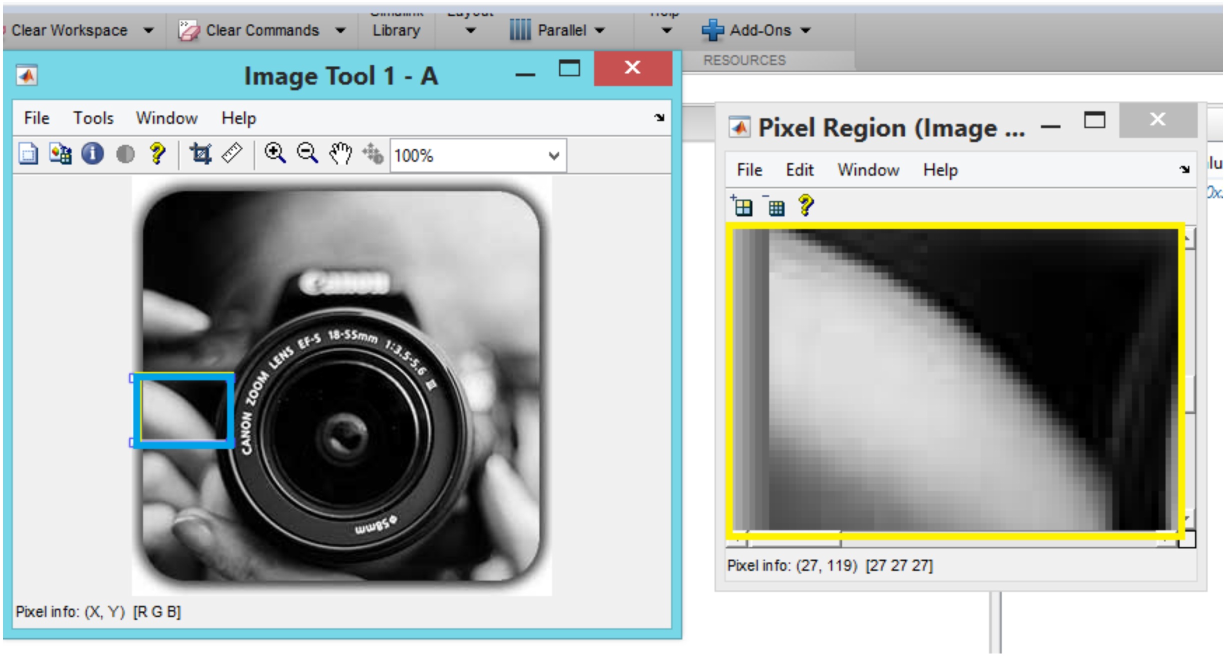
در ادامه مرحله به مرحله بر روی تصویر زوم کرده‌ایم تا جایی که پیکسل‌ها مشاهده شوند.



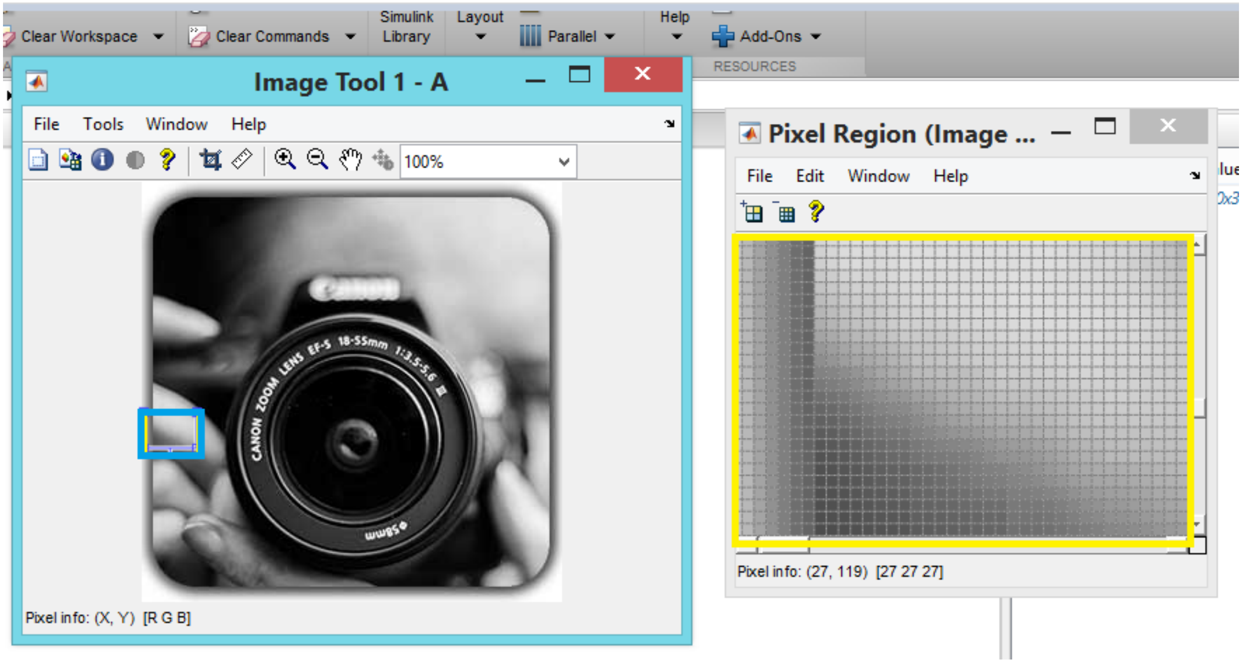
با زوم بیشتر داریم



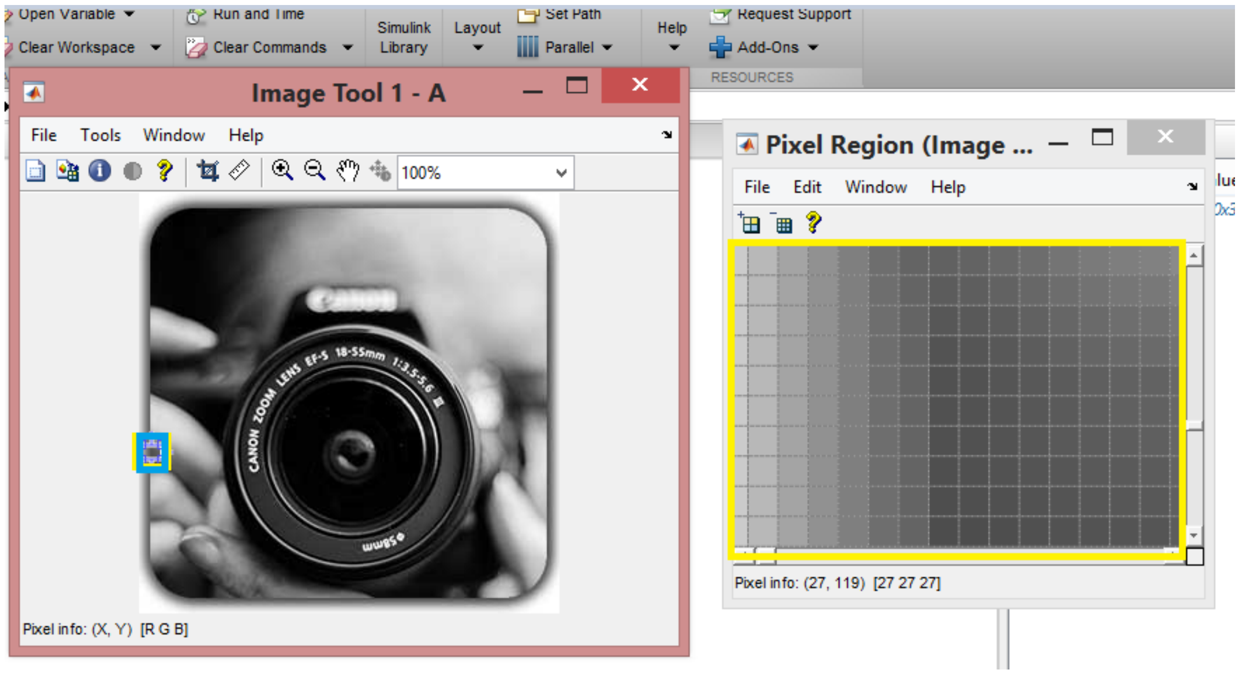
با زوم بیشتر داریم



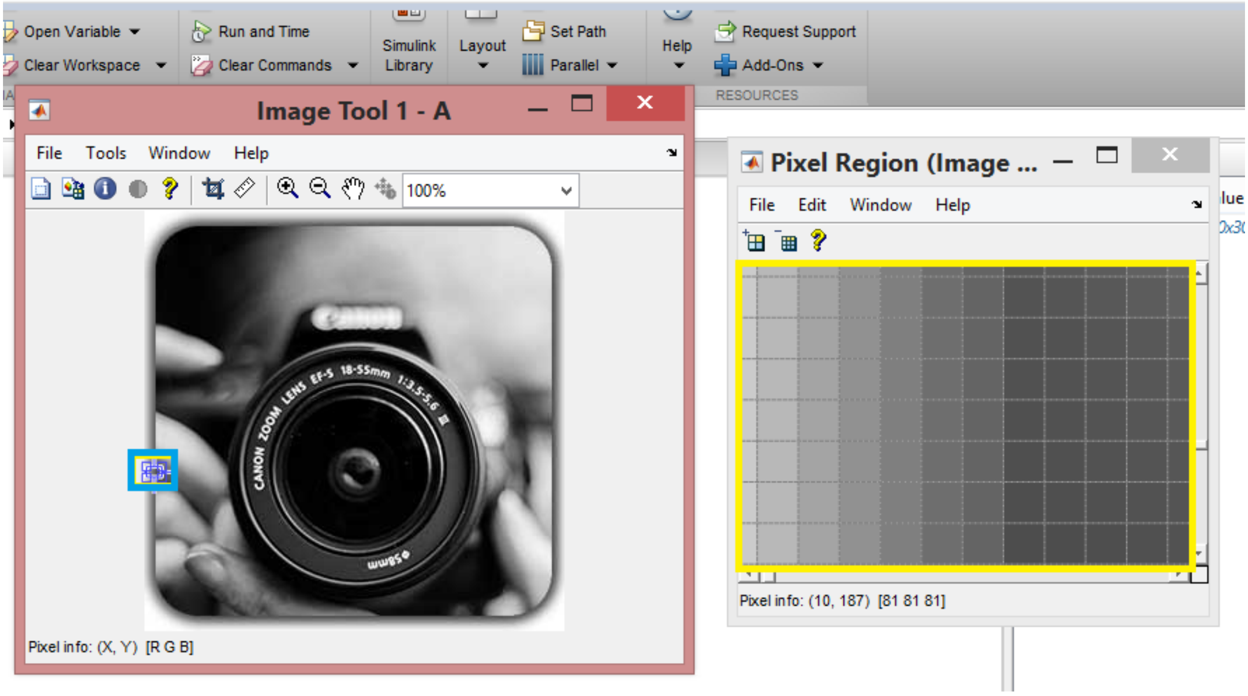
با زوم بیشتر داریم



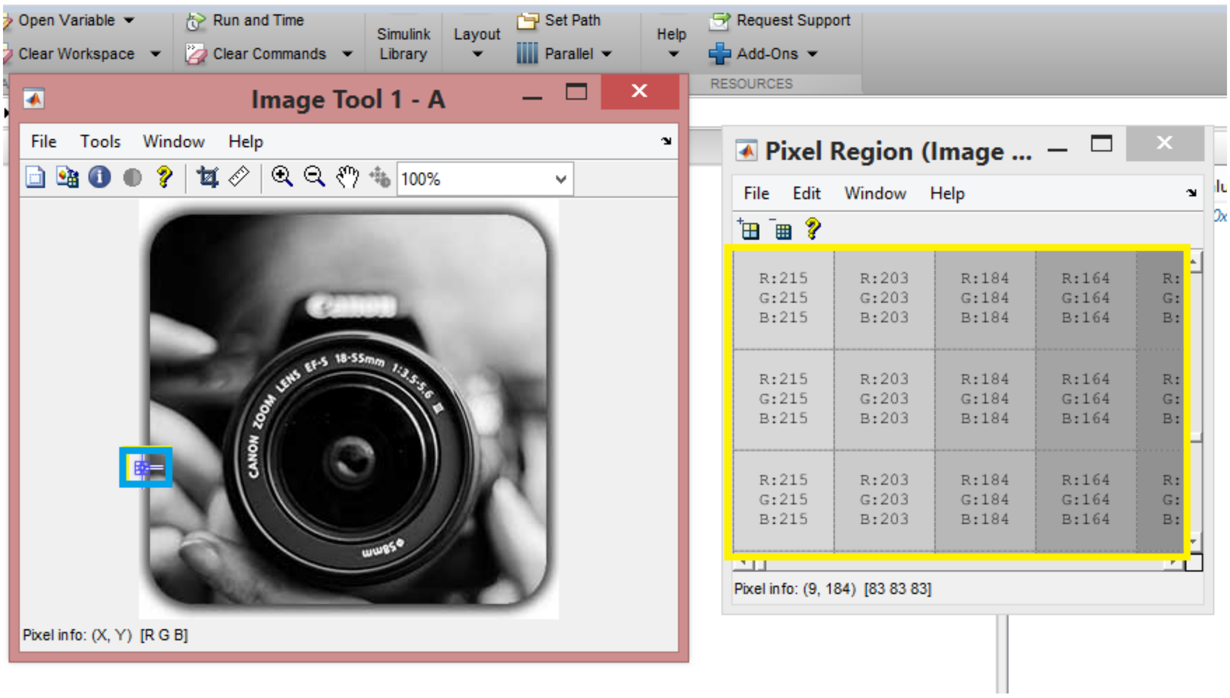
با زوم بیشتر داریم



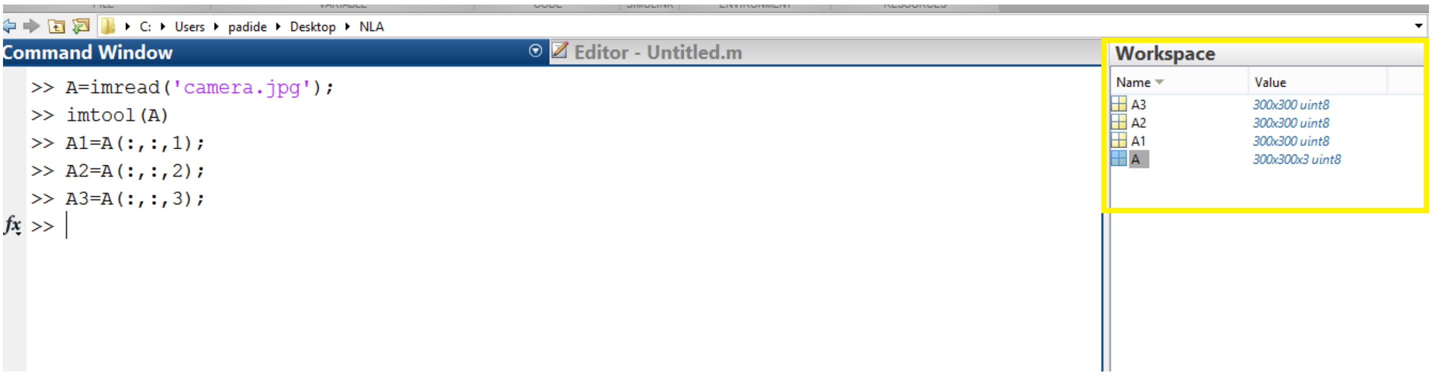
با زوم بیشتر داریم



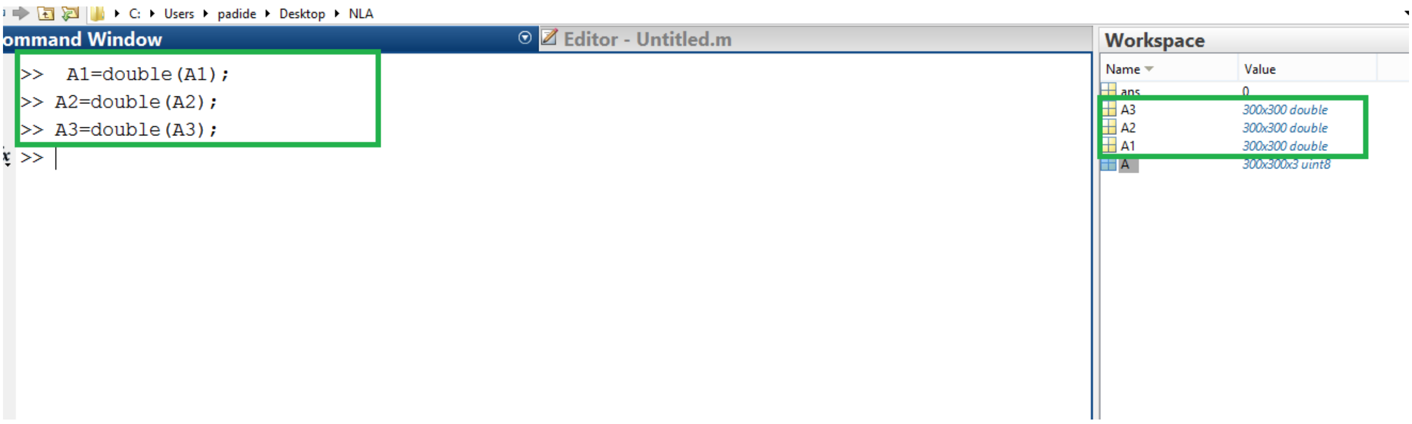
با زوم بیشتر داریم



در تصویر بالا پیکسل های تصویر اصلی قابل مشاهده هستند. مشاهده می شود که هر پیکسل از مقدار خاصی برخوردار است.
همان‌طور که گفتیم برای تصاویر خاکستری هر سه ماتریس برای لایه‌های (لایه‌های) قرمز، سبز و آبی یکسان هستند (مگر اینکه اختلاف بسیار جزئی داشته باشند).
بنابراین می‌توانیم پردازش‌های مربوط به عکس را تنها با یکی از ماتریس ها انجام دهیم(اگر چه برای تصاویر رنگی هر سه ماتریس متفاوت هستند و پردازش برای هر یک از آن‌ها به طور جداگانه باید انجام شود). با استفاده از دستورات زیر ماتریس هر سه لایه را از ماتریس سه لایه ی اصلی جدا کنیم.



همان‌طور که در کادر زرد رنگ سمت راست شکل فوق می‌بینید ماتریس‌های A_1, A_2, A_3 درواقع ماتریس‌هایی با ابعاد ۳۰۰ × ۳۰۰ می‌باشند.
البته قبل از اینکه با آن‌ها عملیات ماتریسی انجام دهیم باید با استفاده از دستورات زیر آن‌ها را به ماتریسی که برای نرم افزار متلب قابل خواندن باشد تبدیل کنیم:



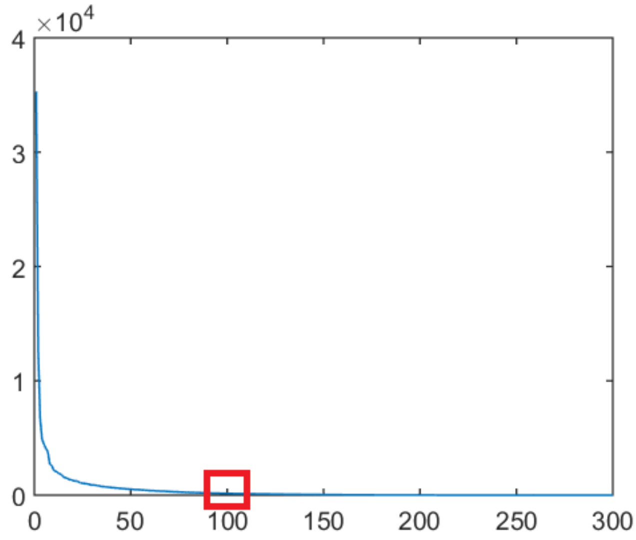
باز هم تاکید می‌کنیم که در اینجا ماتریس‌های A_1, A_2, A_3 یکی هستند، چون تصویر خاکستری است و در این موارد هر پیکسل تصویر تنها از یک عدد تشکیل می شود.
اکنون با استفاده از دستور زیر متوجه می‌شویم که رتبه‌ی ماتریس A_1 برابر ۳۰۰ است.

```
>> rank(A1)

ans =

   300
```

همچنین با رسم مقادیر تکین این ماتریس با شکل زیر مواجه خواهیم شد. مطابق این شکل به طور تقریبی می توان گفت که تنها ۱۰۰ مقدار تکین بزرگ تر ماتریس A بزرگ هستند و مقادیر تکین بعدی مقداری ناچیز خواهند بود پس می توانیم رتبه عددی این ماتریس را ۱۰۰ فرض کنیم.



۸ فشرده‌سازی تصویر

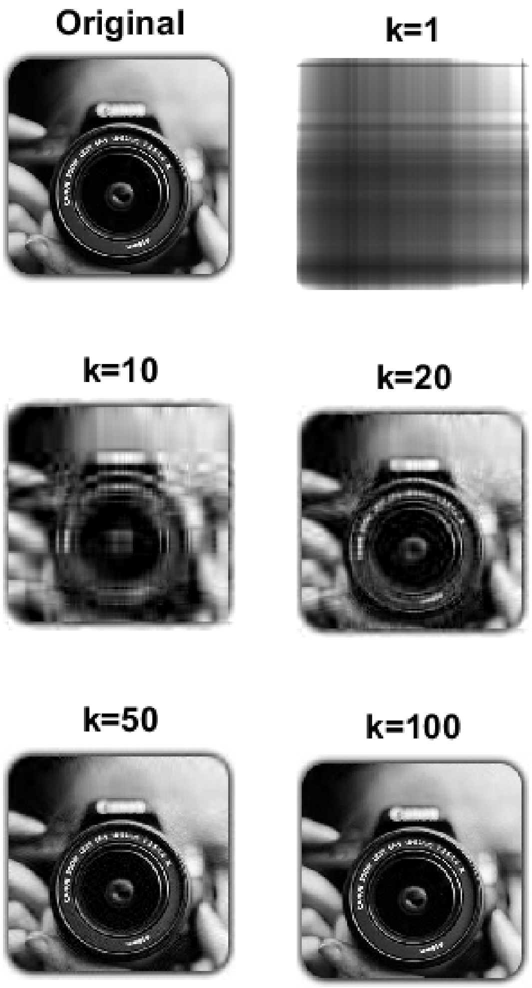
در فشرده سازی تصویر ابتدا تصویر به سه ماتریس (یا سه لایه) تبدیل می شود و با فرض اینکه رتبه این ماتریس ها r باشد آنگاه برای هر ماتریس تقریب رتبه $k \leq r$ به شکل

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

به دست می آید. در نهایت با این سه ماتریس تقریبی که نسبت به ماتریس های اصلی نیاز به حافظه ی کمتری نیز دارند تصویر تقریبی تشکیل می شود. توجه کنید که ابتدا قبل از فشرده‌سازی تصویر با استفاده از دستور im2double اعداد تصویر را مقیاس نموده و به بازه‌ی $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم. در زیر کد ساده ای در نرم افزار متلب جهت فرآیند فشرده سازی تصویر آورده است (این کد برای تصاویر رنگی و خاکستری قابل استفاده است).

```
clc
clear all
close all
B=imread('camera.jpg');
I=im2double(B);
k=1;
for i = 1:3
[U,S,V] = svd(I(:,:,i));
A(:,:,i) = U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';
end
A(A>1)=1; A(A<0)=0;
imshow(A)
```

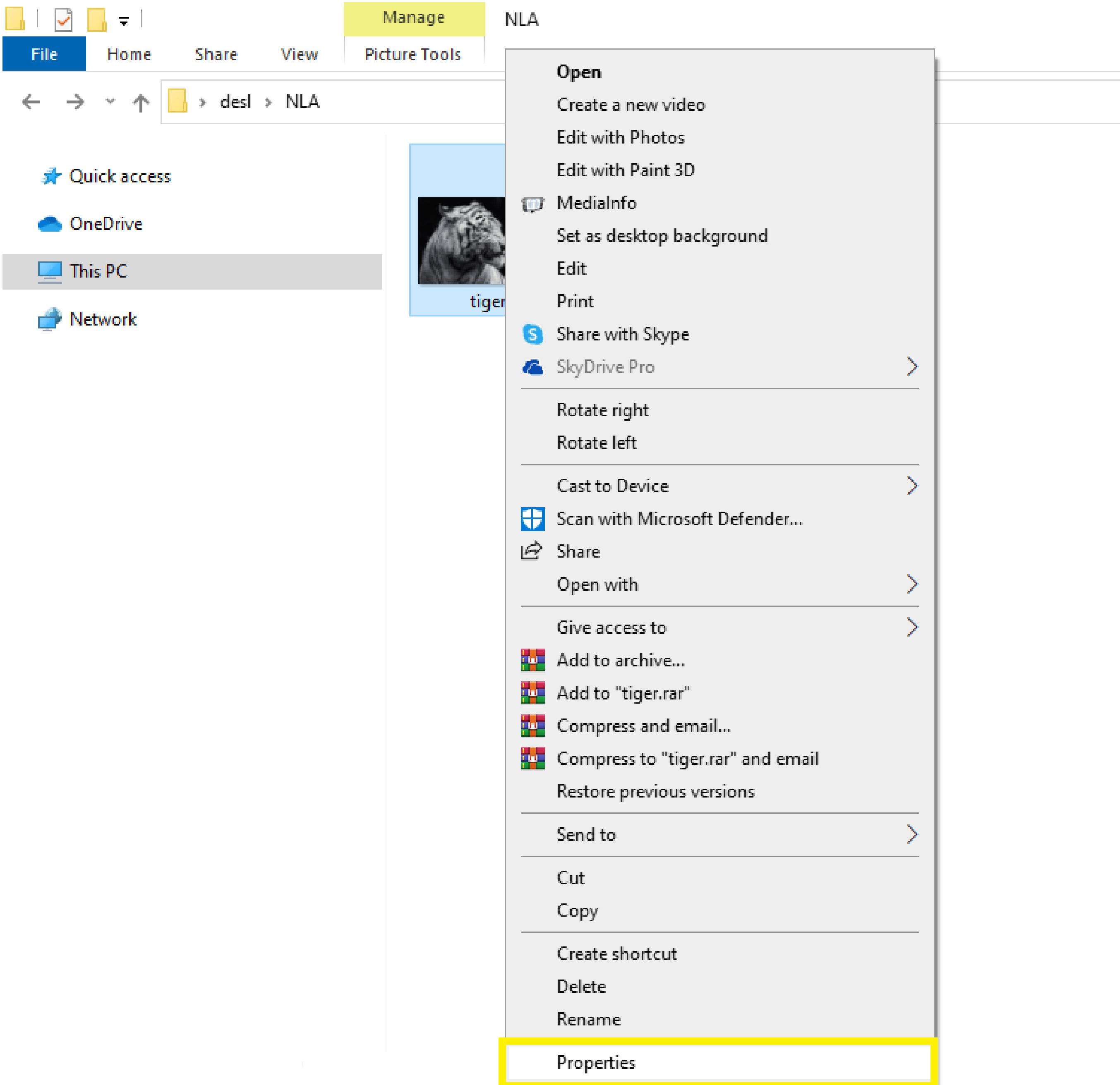
با اجرای این برنامه برای چند مقدار مختلف از k به رسم تصویر فشرده شده می‌پردازیم. با توجه به نتایج به دست آمده تصویر به ازای $k = 50$ از دقت خوبی برخوردار است بعلاوه برای $k = 100$ تصویری آنچنان شبیه تصویر اصلی است که اختلافی بین آن‌ها با چشم دیده نمی‌شود! اگرچه از لحاظ جنبه ی ریاضی ماتریس های مربوط به دو تصویر اصلی و فشرده شده با $k = 100$ اساسا با هم برابر نمی‌باشند. این بخاطر آن است که تقریب های رتبه ۱۰۰ برای سه ماتریس در تصویر به ازای $k = 100$ در واقع تقریب های رتبه پایین خوب و دقیقی از ماتریس های اصلی مربوط به تصویر اصلی هستند.

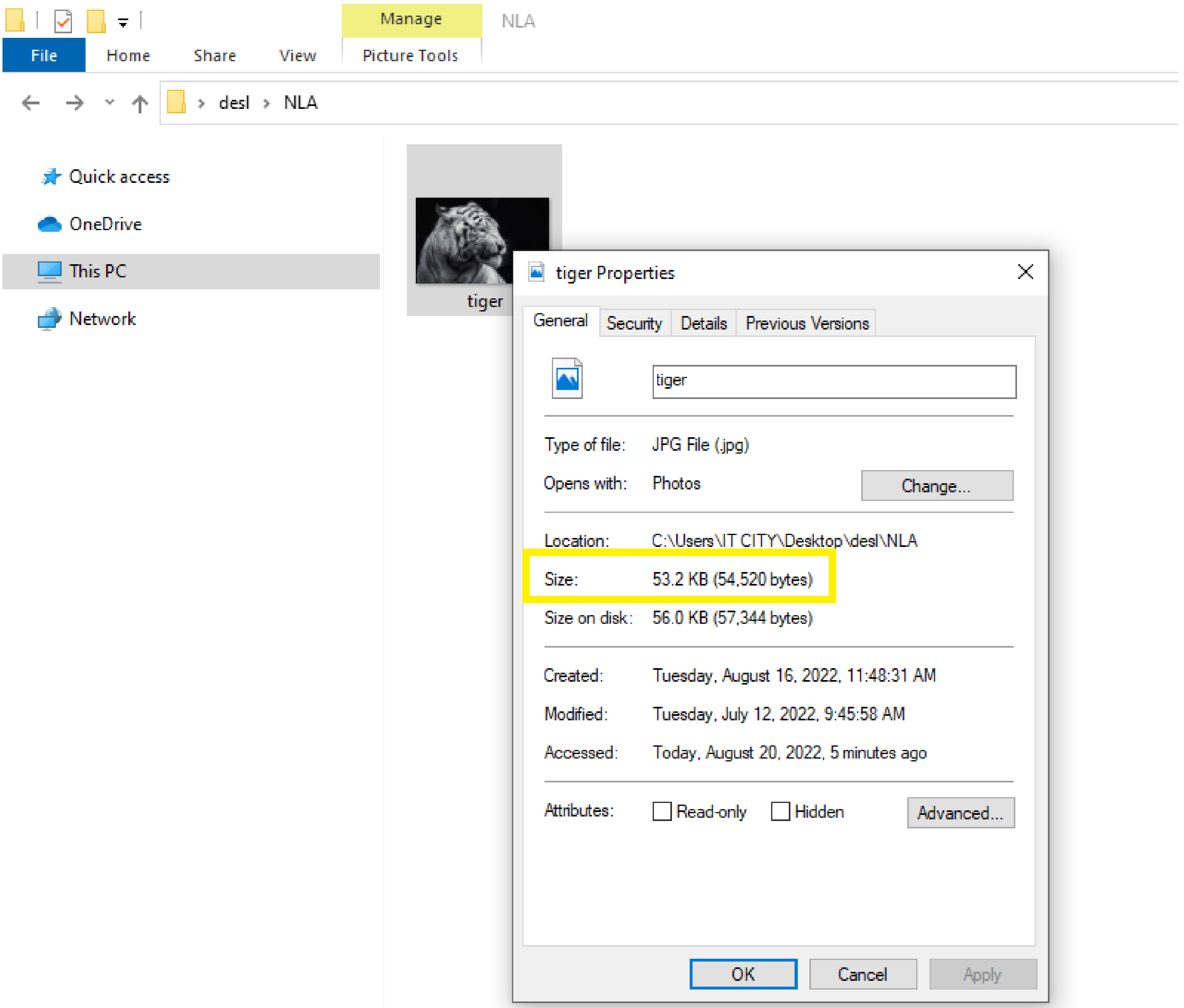


حجم اولیه تصویر دوربین $= ۱۵/۹KB$

حجم فشرده شده با $k = ۱۰۰$ $= ۱۳/۳KB$

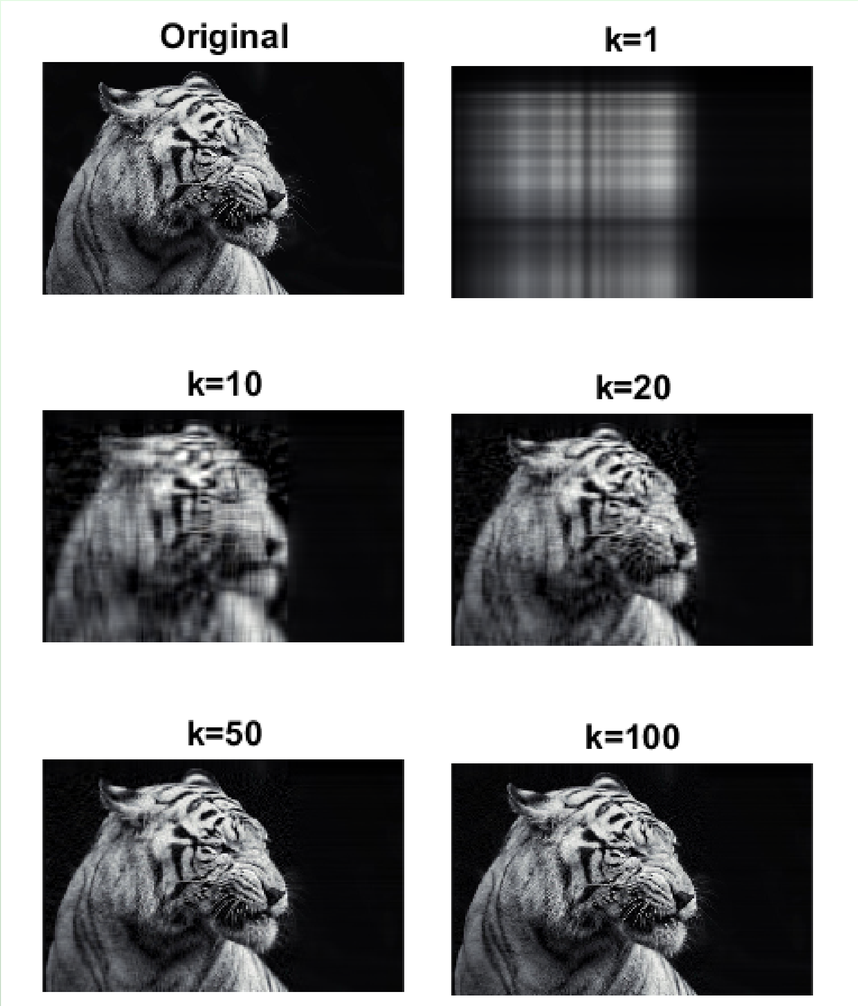
مشاهده می شود که حجم تصویر فشرده شده کمتر از حجم تصویر اصلی است. در اینجا برای به دست آوردن حجم تصویر اصلی و فشرده شده به صورت زیر عمل شده است: ابتدا بر روی تصویر مورد نظر کلیک راست کرده و گزینه Properties را انتخاب می کنیم سپس مطابق تصویر زیر می توانیم حجم تصویر را یادداشت نماییم. به نظر شما روش دیگری برای محاسبه ی حجم تصاویر اصلی و فشرده شده وجود دارد؟ پاسخ این سوال در تمرینات از شما خواسته شده است.


Manage
NLA
File
Home
Share
View
Picture Tools
desl
NLA
Quick access
OneDrive
This PC
Network
tiger
Open
Create a new video
Edit with Photos
Edit with Paint 3D
MediaInfo
Set as desktop background
Edit
Print
Share with Skype
SkyDrive Pro
Rotate right
Rotate left
Cast to Device
Scan with Microsoft Defender...
Share
Open with
Give access to
Add to archive...
Add to "tiger.rar"
Compress and email...
Compress to "tiger.rar" and email
Restore previous versions
Send to
Cut
Copy
Create shortcut
Delete
Rename
Properties



چند مثال و با مقادیر مختلف k در ادامه آورده شده است.

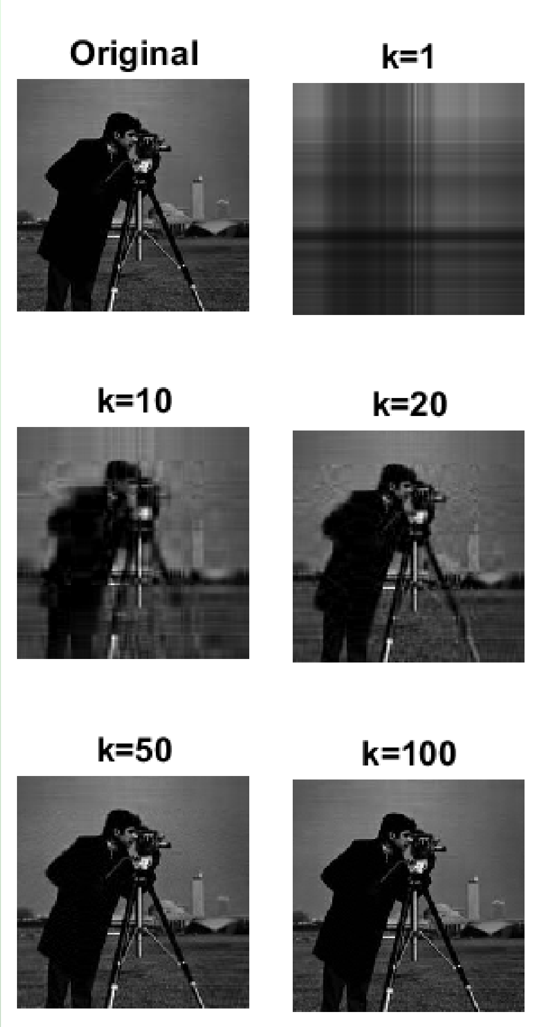
مثال ۷.۱۱



حجم اولیه تصویر ببر $= ۵۳/۲KB$
حجم فشرده شده با $k = ۱۰۰$ $= ۴۲/۲KB$

مشاهده می شود که تصویر برای $k = ۱۰۰$ از کیفیت خوبی برخوردار است و بعلاوه در این حالت حجم تصویر فشرده شده از حجم تصویر اصلی کمتر است.

مثال ۷.۱۲

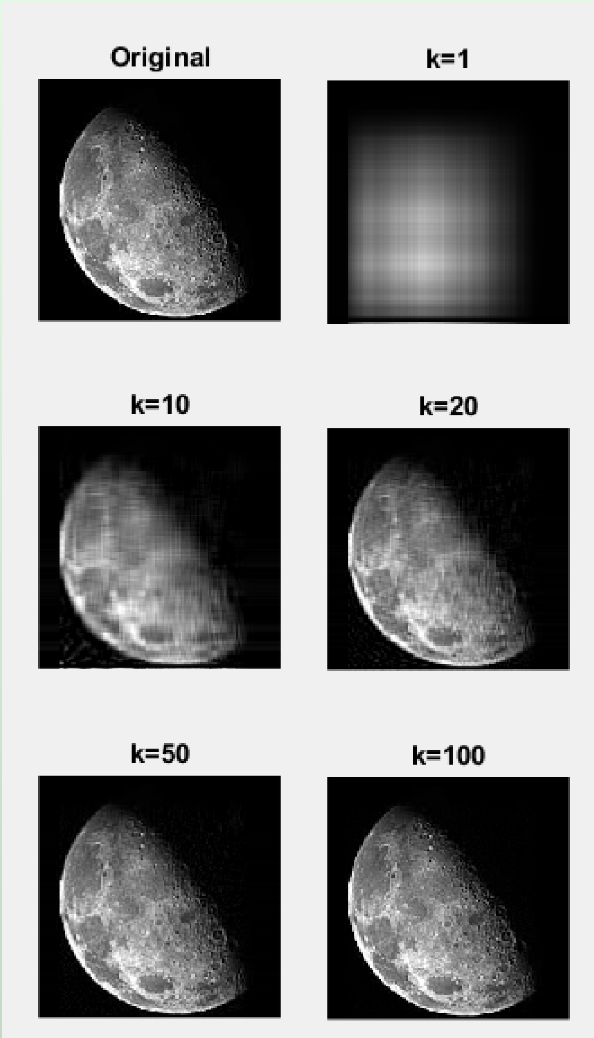


$$\text{حجم اولیه تصویر عکاس} = ۵/۲۶KB$$
$$\text{حجم فشرده شده با } k = ۱۰۰ = ۶/۸۲KB$$

در تصویر بالا مشاهده می کنید که به ازای $k = ۱۰۰$ حجم تصویر فشرده شده در واقع از تصویر اصلی بیشتر است. پس مقدار k در این مثال به درستی انتخاب نشده است. اکنون ابتدا برنامه ی مربوط به فشرده سازی تصویر را اجرا و با اعمال آن بر عکس مربوط به تصویر عکاس حداکثر مقدار قابل برای k را به دست آورید. یعنی مقادیری از k را تعیین کنید که به ازای آنها حجم تصویر فشرده شده از حجم تصویر اصلی کمتر است. همانطور که می بینید با افزایش مقدار k کیفیت تصاویر افزایش می یابد. به نظر شما می توان مقدار بهینه ای برای k تعیین نمود؟

مثال ۷.۱۳

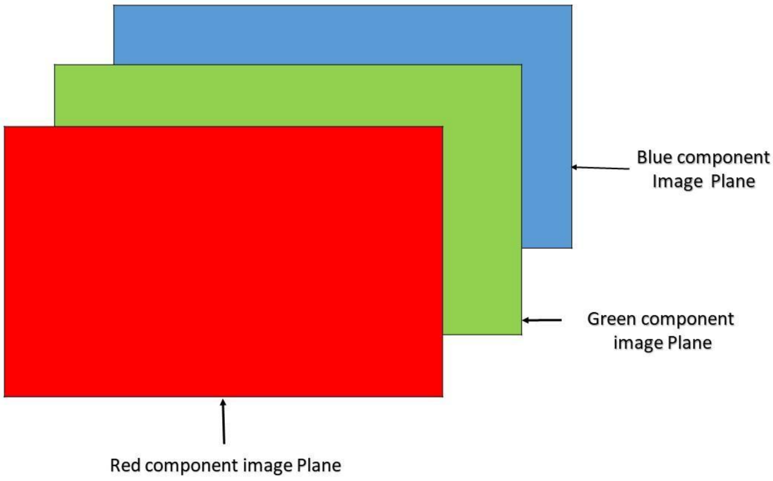
در ادامه به فشرده سازی یک تصویر دیگر(تصویر کره ی ماه) می پردازیم. توجه کنید که برای $k = ۱۰۰$ تصویر از دقت بسیار خوبی برخوردار است.



حجم اولیه تصویر ماه $= ۶/۳۰KB$
حجم فشرده شده با $k = ۱۰۰$ $= ۷/۹۹KB$

۱.۸ فشرده‌سازی تصویر رنگی

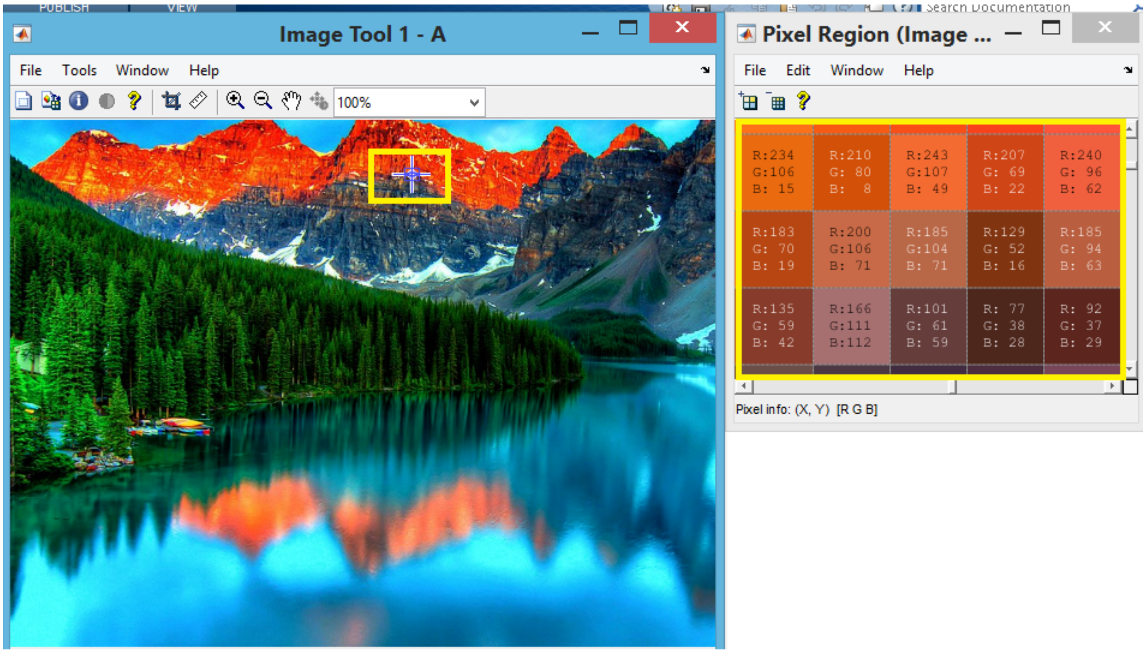
در شکل زیر سه لایه رنگی که برای تصاویر رنگی استفاده می‌شود مشاهده می‌شود.



[RGB image is a three layered image]

برای مثال تصویر رنگی زیر را در نظر بگیرید

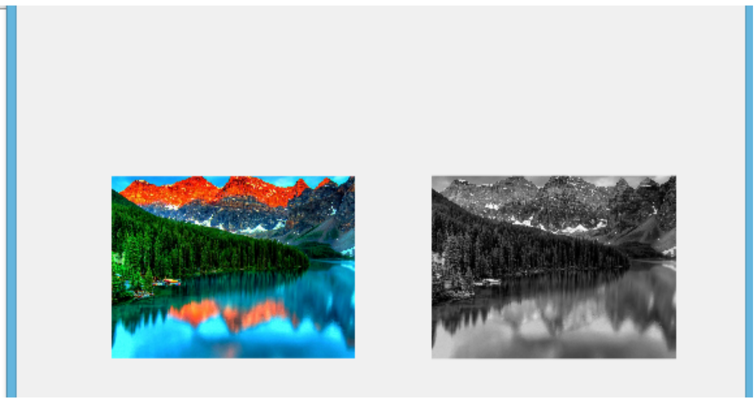
در شکل زیر پیکسل‌های همین تصویر رنگی را با دستورات زیر به نمایش گذاشته‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود تصویر از ۳ لایه رنگی تشکیل شده است و درایه‌های هر لایه با هم متفاوت‌اند.



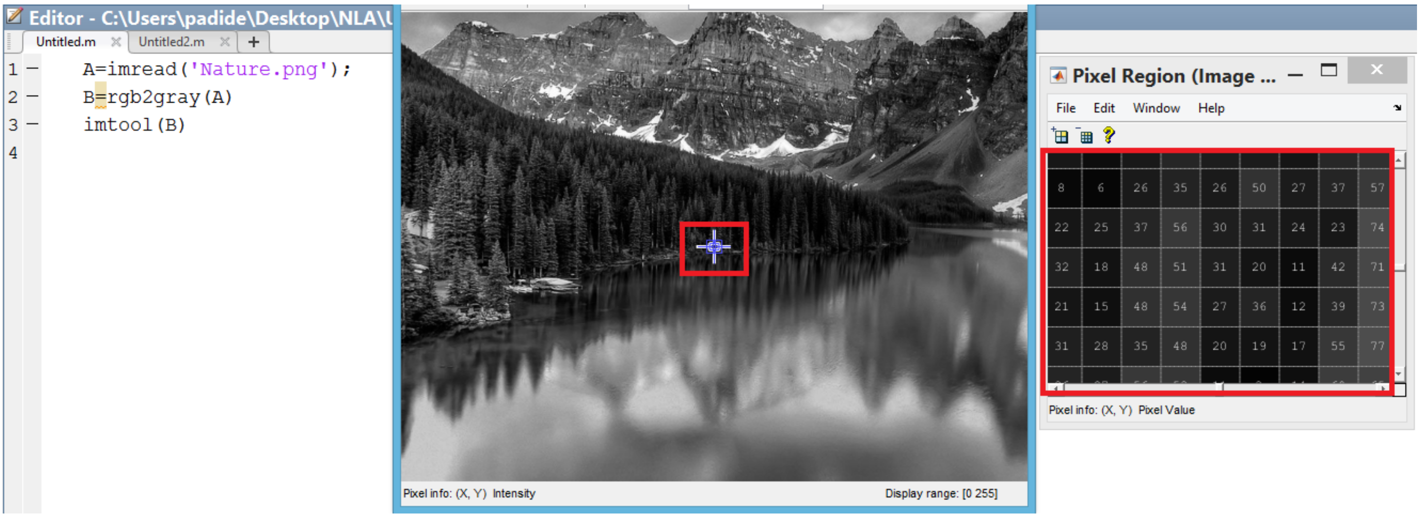
البته با دستور rgb2gray(A) می‌توان دید تصویر فراخوانده شده که ابتدا سه ماتریس کنار هم (ماتریس سه لایه) است را خاکستری نموده و درواقع آن را به ماتریس تبدیل نمود. توجه کنید که ممکن است در ظاهر تصاویری خاکستری باشند اما همچنان به صورت ماتریس سه لایه که هر ۳ لایه یکی هستند باشند همان‌طور که در مثال قبل نیز دیدیم. در ادامه نحوه‌ی تبدیل تصویر رنگی به خاکستری با استفاده از نرم افزار متلب آمده است.

```
A=imread('Nature.png');
B=rgb2gray(A);
subplot(1,2,1)
imshow(A)
subplot(1,2,2)
imshow(B)
```

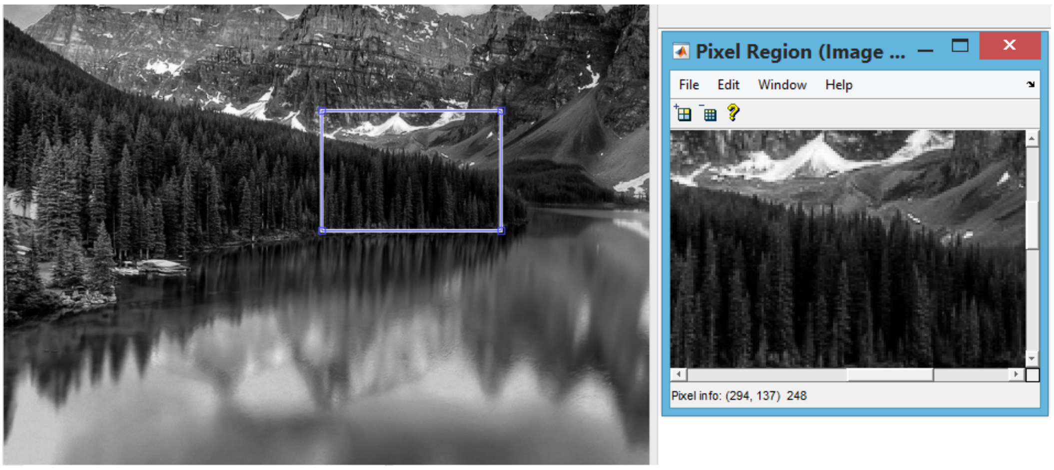
A 439x587x3 uint8
B 439x587 uint8



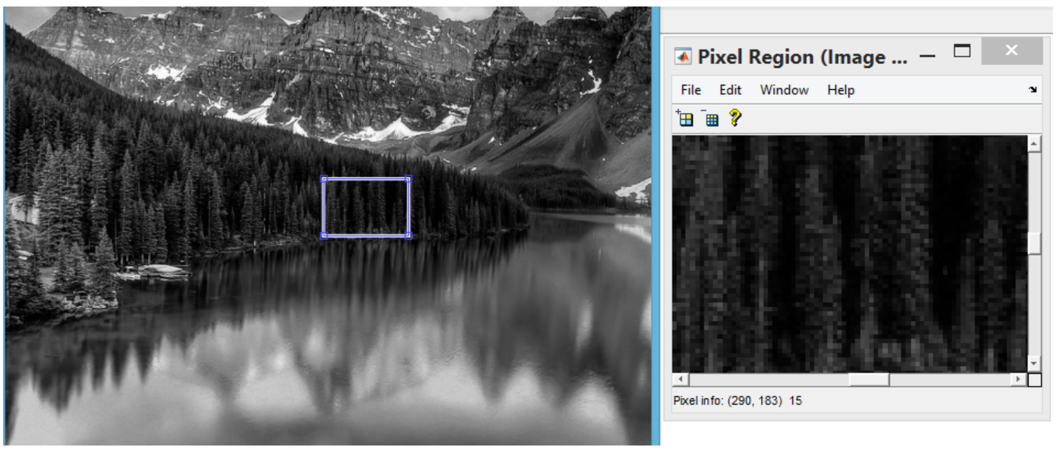
همان‌طور که مشاهده می‌کنید تصویر رنگی به یک تصویر خاکستری تبدیل شده است و ماتریس حاصل آن که از بعد ۵۸۷ × ۴۳۹ است در B ذخیره شده است.
در شکل زیر همان‌طور که می‌بینید بعد از تبدیل شدن تصویر رنگی به تصویر خاکستری، این تصویر تنها از یک لایه تشکیل شده است.



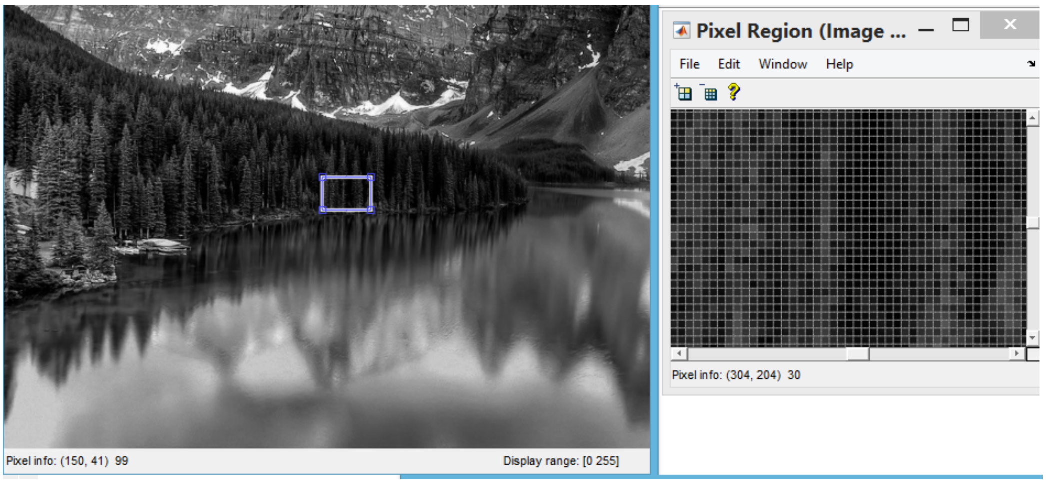
با زوم بیشتر داریم



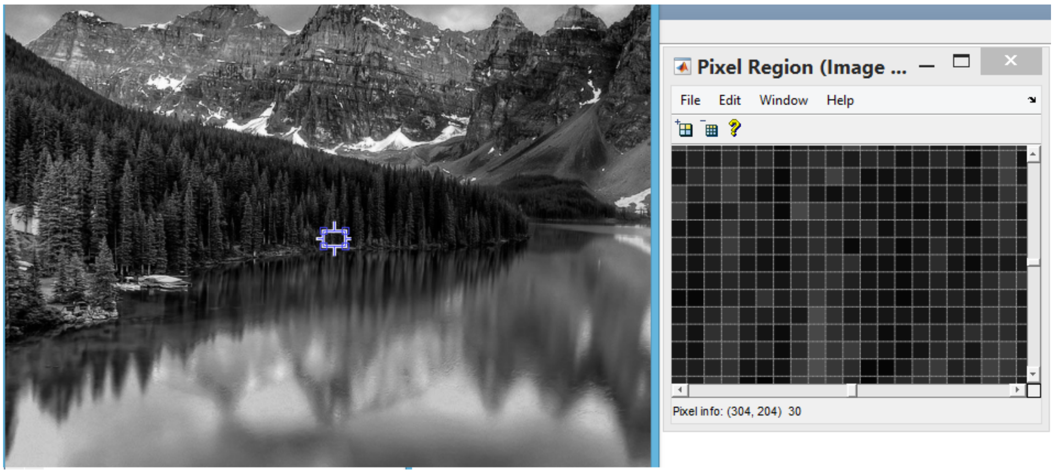
با زوم بیشتر داریم



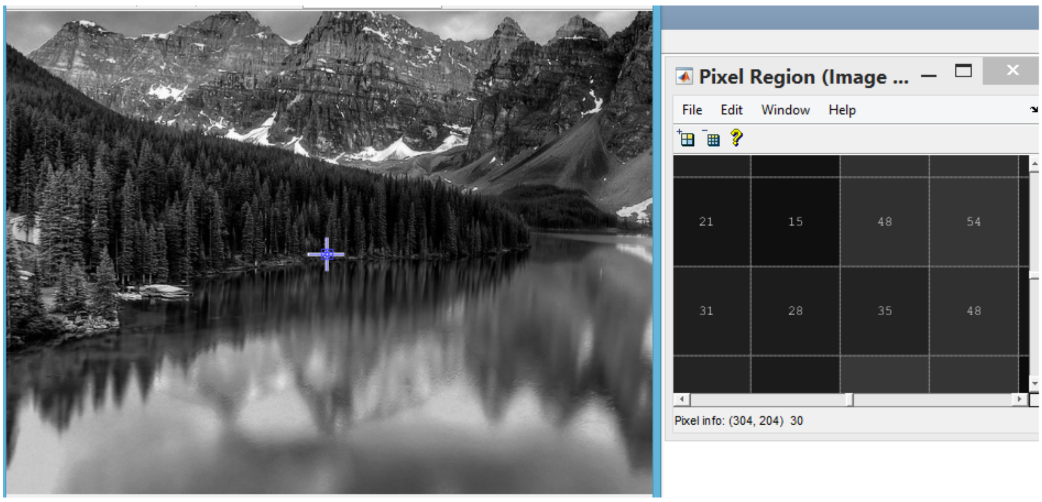
با زوم بیشتر داریم



با زوم بیشتر داریم



با زوم بیشتر داریم

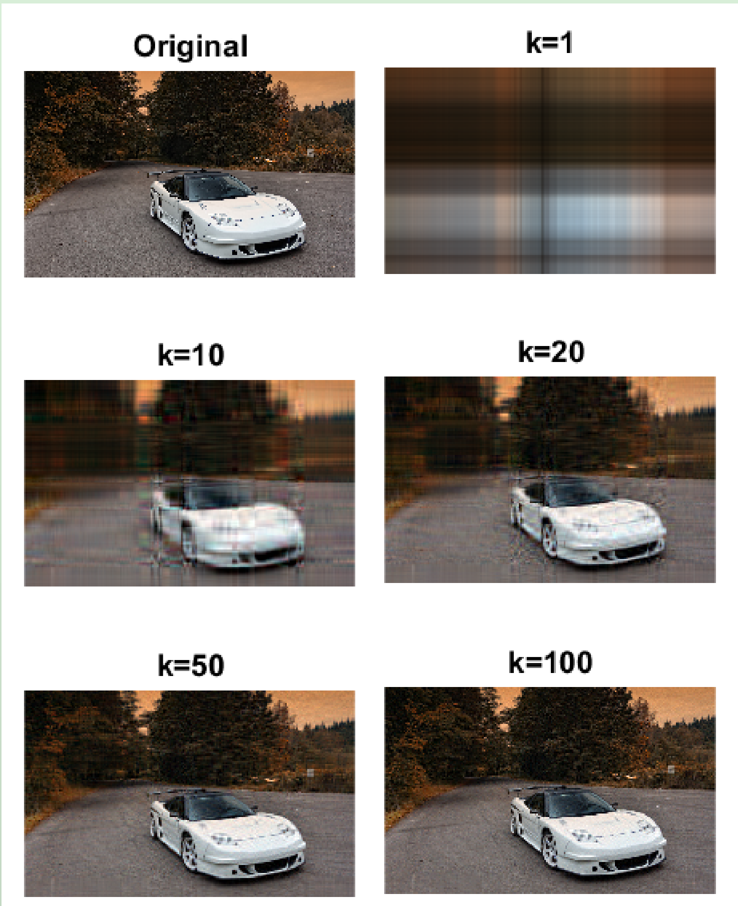


همانطور که می بینید با دستور rgb2gray(A) می‌توان دید تصویر فراخوانده شده که ابتدا یک ماتریس سه لایه است را خاکستری نمود و درواقع آن را به ماتریس تبدیل نمود. بخصوص در تصویر بالا می توانید ماتریس متناظر با تصویر خاکستری را مشاهده کنید.

اکنون به فشرده سازی تصویر رنگی می‌پردازیم. فشرده سازی تصاویر رنگی نیز همانند تصاویر خاکستری است. بویژه این کد نوشته شده در نرم افزار متلب مثال های قبل برای تصاویر رنگی نیز قابل استفاده است. در ادامه به فشرده سازی دو تصویر رنگی پرداخته ایم.

مثال ۷.۱۴

ابتدا تصویر رنگی که در پایین دیده می شود را در کامپیوتر ذخیره کرده و سپس با استفاده از کد متلب بیان گردیده به فشرده سازی آن می پردازیم.



حجم اولیه تصویر خودرو $= ۱/۸۳MB$
حجم فشرده شده با $k = ۱۰۰$ $= ۲۸۹KB$

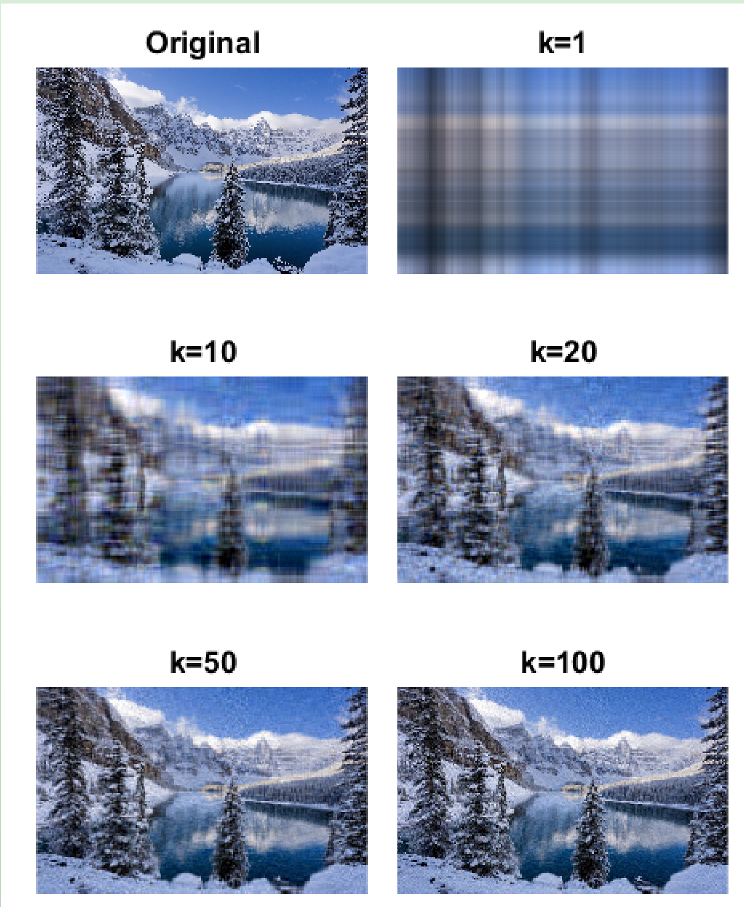
توجه کنید که برای $k = ۱۰۰$ تصویر از دقت خیلی خوبی برخوردار است. بعلاوه حجم تصویر فشرده شده به طور چشمگیری کاهش یافته است. به طور دقیق تر از آنجایی که

$$۱/۸۳MB = ۱/۸۳ \times ۱۰۲۴KB \approx ۱۸۷۴KB$$

و $\frac{۲۸۹}{۱۸۷۴} \approx \frac{۱}{۶}$ می توان گفت حجم تصویر فشرده شده به طور تقریبی $\frac{۱}{۶}$ حجم تصویر اصلی است.

مثال ۷.۱۵

در اینجا نیز تصویر رنگی که در پایین دیده می شود را ابتدا در کامپیوتر ذخیره کرده و سپس با استفاده از کد متلب بیان گردیده به فشرده سازی آن می پردازیم.

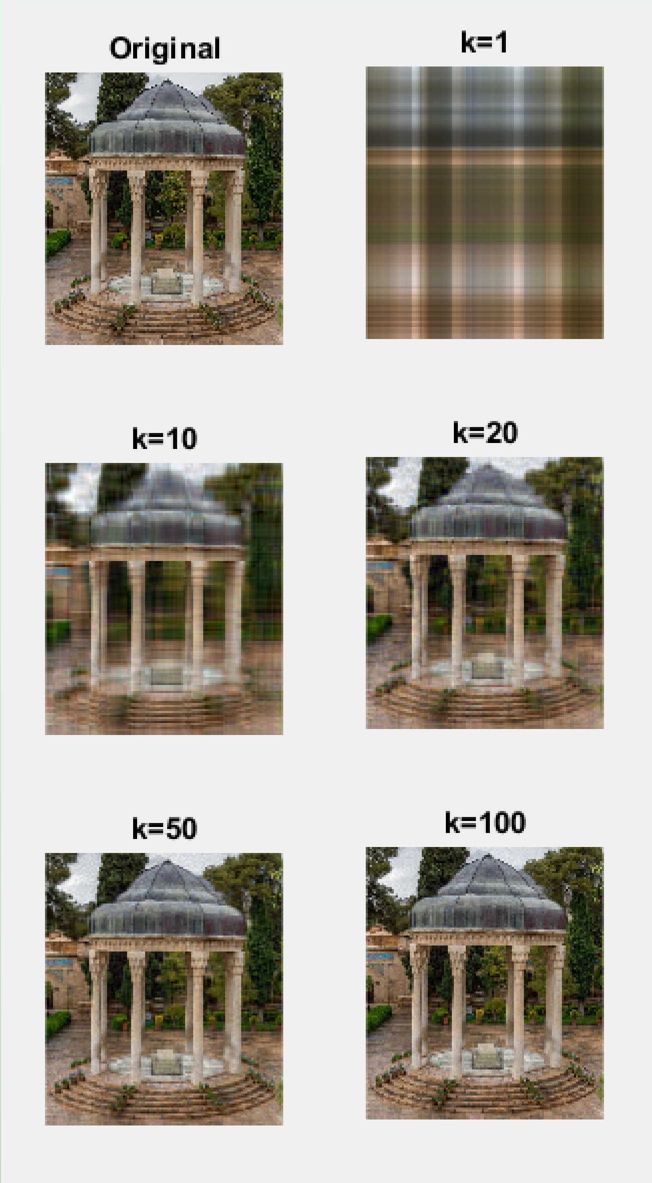


$$\text{حجم اولیه تصویر برف} = ۱/۰۳MB$$
$$k = \text{حجم فشرده شده با}۱۰۰ = ۴۰۳KB$$

در این مثال نیز برای چند تقریب رتبه پایین مختلف (یعنی چند k ی مختلف) تصویر فشرده شده را به دست آورده ایم. به وضوح با افزایش k کیفیت و دقت تصویر بیشتر می شود. البته بدیهی است که با افزایش k حجم تصویر فشرده شده نیز بیشتر می شود. به هر حال مشاهده می شود که تصویر حاصل به ازای $k = ۱۰۰$ هم از دقت خوبی برخوردار است و هم به حافظه ی کمتری برای ذخیره سازی نیاز دارد.

تمرین ۷.۵

تصویر رنگی که مربوط به آرامگاه حافظ شیرازی است را ابتدا در کامپیوتر ذخیره کرده و سپس با استفاده از کد متلب بیان گردیده به فشرده سازی آن پرداخته ایم. با اجرای کد متلب مربوط به این مثال در مورد k های مناسب برای ذخیره سازی این تصویر بحث کنید.


Original
k=1
k=10
k=20
k=50
k=100

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

C

Coefficient Matrix .... ماتریس ضرایب
Compression .... فشرده سازی

D

Data Mining .... داده کاوی
Diagonalizable matrix .... ماتریس قطری شدنی
Digitization .... دیجیتال کردن

E

eigenvalue .... مقدار ویژه
eigenvector .... بردارویژه

G

Gram-Schmidt Algorithm .... الگوریتم گرام–اشمیت

I

Image Processing .... پردازش تصویر

L

linear combination .... ترکیب خطی

O

Orthogonal Matrix .... ماتریس متعامد

P

pixel .... پیکسل

Q

Quantization .... کمی‌سازی

R

rank .... رتبه
rotation .... دوران

S

sampling .... نمونه گیری
Symmetric Matrix .... ماتریس متقارن
Signal Processing .... پردازش سیگنال
Similar Matrices .... ماتریس‌های متشابه
Singular Value Decomposition .... تجزیه ی مقادیر تکین
Solving Square Linear Systems .... حل دستگاه‌های خطی مربع
Solving the underdetermined linear system .... حل دستگاه فرومعین
Solving the overdetermined linear system .... حل دستگاه فرامعین

T

the last square solution .... جواب کمترین مربعات
The minimum norm solution .... جواب کمترین نرم
Transformation matrix .... ماتریس تبدیل

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

الگوریتم گرام‌ـاشمیت ..... Gram-Schmidt Algorithm

ب

بردارویژه ..... eigenvector

پ

پردازش تصویر ..... Image Processing
پردازش سیگنال ..... Signal Processing
پیکسل ..... pixel

ت

تجزیه ی مقادیر تکین ..... Singular Value Decomposition
ترکیب خطی ..... linear combination

ج

جواب کمترین مربعات ..... the last square solution
جواب کمترین نرم ..... The minimum norm solution

ح

حل دستگاه فرامعین ..... Solving the overdetermined linear system
حل دستگاه فرومعین ..... Solving the underdetermined linear system
حل دستگاه‌های خطی مربع ..... Solving Square Linear Systems

د

داده کاوی ..... Data Mining
دوران ..... rotation
دیجیتال کردن ..... Digitization

ر

رتبه ..... rank

ف

فشرده سازی ..... Compression

ک

کمی‌سازی ..... Quantization

م

ماتریس تبدیل ..... Transformation matrix
ماتریس ضرایب ..... Coefficient Matrix
ماتریس قطری شدنی ..... Diagonalizable matrix
ماتریس متعامد ..... Orthogonal Matrix
ماتریس متقارن ..... Symmetric Matrix
ماتریس‌های متشابه ..... Similar Matrices
مقدار ویژه ..... eigenvalue

ن

نمونه گیری ..... sampling

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل هفتم: تجزیه مقادیر تکین

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲