دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل چهارم: تحلیل حساسیت دستگاه های معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ تحلیل حسّاسیت

توصیه های ضروری قبل از مطالعه این فصل:

تذکر ۴.۱

در سراسر فصل چهارم به جهت اثبات قضایا نیاز به نرم ماتریسی ای داریم که خاصیت سازگاری و ضربی را داشته باشد و چون نرم ماتریسی القایی چنین شرایطی را داراست پس در کل این فصل نرم ماتریسی، نرم القایی در نظر گرفته شده است. البته گاها نرم فروبنیوس که آن نیز این شرایط را دارد استفاده می شود اما اگر استفاده شود حتما نماد $\|.\|_F$ را بکار می بریم.

تذکر ۴.۲

برای نرم برداری شرایط خاصی در نظر نمی گیریم اما به طور معمول از $p-$ نرم ها استفاده می گردد.

تذکر ۴.۳

مطالعه مطالب مربوط به مبحث نرم ها در فصل صفر قبل از مطالعه ی این فصل می تواند مفید باشد.

در فصل قبل با نحوه‌ی محاسبه‌ی جواب دستگاه $AX = b$ از طریق روش‌های مستقیم و یا تکراری آشنا شدیم. حتی دیدیم که در روش‌های تکراری می‌بایست تعداد تکرارها را تا جایی مشخص ادامه دهیم و برای این کار از محک‌های توقف مختلفی استفاده کردیم. امّا به راستی بعد از محاسبه‌ی جواب دستگاه $AX = b$ به چه طریقی می‌توان پی به درستی جواب محاسبه شده برد؟

قبلاً دیدیم که می‌توان از محک توقف باقی‌مانده به صورت زیر استفاده کرد:

$$\|b - A\widetilde{X}\| \leq \epsilon$$

درواقع اگر $\widetilde{X}$ جواب تقریبی به دست آمده برای $AX = b$ باشد که در شرط فوق صدق نماید آن را به عنوان جواب قابل قبول پذیرفتیم. امّا آیا همواره کوچک بودن مقدار نرم باقی‌مانده $\|b - A\widetilde{X}\|$ تضمینی برای دقیق بودن جواب $\widetilde{X}$ است؟ در ادامه خواهیم دید که این موضوع در حالت کلی صحیح نیست. برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴.۱

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱/۰۰۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

واضح است که ماتریس ضرایب وارون‌پذیر بوده و $X^* = [۱,\ ۱]^T$ در آن دستگاه صدق می‌کند پس X^* یکتا جواب دستگاه است. بردار $\widetilde{X} = [۳,\ ۰]^T$ را در نظر بگیرید. برای $\widetilde{X}$ داریم:

$$b - A\widetilde{X} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳/۰۰۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱/۰۰۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳/۰۰۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳/۰۰۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۰/۰۰۲ \end{bmatrix}$$

لذا $\|b - A\widetilde{X}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} ۰ \\ -۰/۰۰۲ \end{bmatrix} \right\|_\infty = ۰/۰۰۲$ که نشان می‌دهد نرم باقی‌مانده مقداری کوچک است، امّا در عین حال $\widetilde{X}$ به هیچ عنوان جواب دستگاه نیست زیرا $X^* = [۱,\ ۱]^T$ جواب واقعی دستگاه می‌باشد. درواقع اختلاف بین $\widetilde{X}$ و X^* نیز حتی کوچک و قابل قبول نیست!

$$\left\|X^* - \widetilde{X}\right\|_\infty = \left\|[۱,\ ۱]^T - [۳,\ ۰]^T\right\|_\infty = \left\|[-۲,\ ۱]^T\right\|_\infty = ۲$$

درواقع اگر سهواً درایه‌ی واقع در مکان (۲و۲) یعنی ۲ را به ۲/۰۰۱ تغییر دهیم داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱/۰۰۱ & ۲/۰۰۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه به جواب $\widetilde{X} = [-۱,\ ۲]^T$ خواهیم رسید که این جواب نیز بسیار دورتر از جواب واقعی $X^* = [۱,\ ۱]^T$ است. همان‌طور که دیدید خطایی که در هنگام وارد کردن داده‌های مسأله مرتکب شدیم به صورت

$$\widetilde{A} - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱/۰۰۱ & ۲/۰۰۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱/۰۰۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

است که کوچک و قابل قبول است امّا به‌ازای این خطای کوچک با خطای بزرگی در جواب به صورت

$$\widetilde{X} - X^* = [-۱,\ ۲]^T - [۱,\ ۱]^T = [-۲,\ ۱]^T$$

مواجه شده‌ایم. به نظر می‌رسد کار کردن با دستگاه اخیر باید بسیار با احتیاط انجام شود.
سوالی که مطرح می‌شود این است که دستگاه $AX = b$ در مثال قبل از چه ویژگی‌ای برخوردار است که پدیده فوق برای آن رخ داده است؟
در ادامه خواهیم دید که چنین دستگاه‌هایی را دستگاه بدوضع و یا بدحالت گویند. قبل از تعریف رسمی دستگاه‌های بدحالت به یک مثال دیگر توجه کنید.

مثال ۴.۲

دستگاه $AX = b$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

واضح است که دستگاه دارای جواب یکتای $X^* = [۲,\ ۰]^T$ است. درواقع

$$X^* = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۱۰^۳ \begin{bmatrix} ۱/۰۰۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید اشتباهاً بردار b را با بردار $\widetilde{b} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}$ جایگزین کرده باشیم. توجه کنید که

$$\tilde{b}-b=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

برداری کوچک از لحاظ اندازه است. در نتیجه باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

پس جواب زیر را خواهیم داشت

$$\widetilde{X}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}=۱۰^{۳}\begin{bmatrix} ۱/۰۰۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه اصلاً جالب نیست زیرا جواب $\widetilde{X}=[۱,\ ۱]^T$ هیچ شباهت و نزدیکی با جواب واقعی $X^*=[۲,\ ۰]^T$ ندارد! دقت کنید که

$$\widetilde{X}-X^*=[۱,\ ۱]^T-[۲,\ ۰]^T=[-۱,\ ۱]^T$$

اختلاف کمی نیست! همان‌طور که مشاهده نمودید خطایی که هنگام وارد کردن بردار سمت راست داشتیم به اندازه‌ی بردار $\tilde{b}-b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$ که حقیقتاً مقدار کوچکی است، بود امّا به‌ازای این خطای کوچک جوابی کاملاً اشتباه به صورت $\widetilde{X}=[۱,\ ۱]^T$ حاصل شده است.

توجه کنید که در اوایل این درس دیدیم که دستگاه‌های معادلات خطی از حل یک مسأله‌ی واقعی و کاربردی در علوم مختلف پدید می‌آیند و با توجه به اینکه درایه‌های بردار b و ماتریس A می‌توانند نشان دهنده‌ی پارامترهای مختلفی در کاربردهای متنوع باشند بنابراین احتمال نادقیق بودن داده‌های مسأله برای دستگاه $AX=b$ وجود خواهد داشت.

به بیان دیگر ممکن است در طی مرحله‌ی مدلسازی و یا در هنگام ذخیره‌سازی ماتریس A و یا بردار b به ناچار خطا و اختلالی در A و b داشته باشیم. دو مثال قبل دستگاه‌های بدوضع هستند همان‌طور که در ادامه آن‌ها را به طور دقیق بررسی می‌کنیم.

توجه کنید که در هر دو مثال قبل میزان فاحش خطا در جواب‌های تقریبی حاصل شده مستقل از روش‌های حل دستگاه‌هاست. از این‌رو خواهیم دید که بدوضعی یک دستگاه یک ویژگی ذاتی آن است و مهم نیست که یک دستگاه بدوضع با چه روشی حل شود.

در ادامه به بیان یک قضیه‌ی بسیار مهم و حیاتی می‌پردازیم که مبنای تعریف دستگاه‌های بدوضع یا خوش وضع خواهد بود.

قضیه ۴.۱

دستگاه $AX=b$ را در نظر بگیرید که A ماتریسی نامنفرد است. فرض کنید بردار b آشفته شود و به $b+\Delta b$ تغییر کند. آنگاه خطای نسبی جواب دستگاه $AX=b$ در روابط زیر صدق می‌کند($\|\cdot\|$ یک نرم القایی است).

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\cdot\|A^{-۱}\|\cdot\|b\|}\leqslant\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\leqslant\|A\|\cdot\|A^{-۱}\|\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \qquad (۱)$$

به طوری که $X+\Delta X$ جواب دستگاه آشفته شده‌ی $A(X+\Delta X)=b+\Delta b$ است.

اثبات: چون $X+\Delta X$ جواب دستگاه آشفته شده $A(X+\Delta X)=b+\Delta b$ است پس داریم

$$AX+A\Delta X=b+\Delta b$$

و چون $AX = b$ است داریم:

$$b + A\Delta X = b + \Delta b$$

یا

$$A\Delta X = \Delta b$$

از اینجا $\Delta X = A^{-1}\Delta b$ به دست می‌آید. بنابراین

$$\Delta X = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta X\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \tag{۲}$$

از طرفی از $AX = b$ داریم

$$\|b\| = \|AX\| \leqslant \|A\|\|X\| \tag{۳}$$

اکنون با تقسیم طرفین (۲) بر $\|X\| \neq 0$ داریم:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \frac{1}{\|X\|} \tag{۴}$$

از طرفی از (۳) داریم ($\|b\| \neq 0$)

$$\frac{1}{\|X\|} \leqslant \frac{\|A\|}{\|b\|} \tag{۵}$$

اکنون از (۴) و (۵) داریم:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \frac{1}{\|X\|} \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

پس

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \tag{۶}$$

که نشان می‌دهد طرف راست نامساوی داده شده به دست آمده است.
برای اثبات طرف چپ نامساوی داده شده از $A\Delta X = \Delta b$ داریم

$$\|\Delta b\| = \|A\Delta X\| \leqslant \|A\| \cdot \|\Delta X\|$$

یا

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|} \leqslant \|\Delta X\| \tag{۷}$$

از طرفی از $AX = b$ خواهیم داشت $X = A^{-1}b$ پس

$$\|X\| = \left\|A^{-1}b\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| .\|b\|$$

یا

$$\frac{1}{\|b\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{\|X\|} \tag{8}$$

از طرفی با ضرب طرفین (۷) در $\frac{1}{\|X\|}$ داریم:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \geqslant \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\|X\|} = \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|A^{-1}\|} \times \frac{\|A^{-1}\|}{\|X\|}$$

حال از (۸) می‌توان نوشت

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \geqslant \frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{1}{\|b\|} = \frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|\,\|b\|}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

همان‌طور که دیدید در قضیه‌ی قبل تغییر کوچکی در بردار سمت راست دستگاه $AX = b$ اعمال کردیم(تغییرات در ورودی مسأله) و مشاهده کردیم که خطای نسبی دستگاه دارای کران بالای زیر خواهد بود

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left(\|A\|\,\|A^{-1}\|\right) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

به نامساوی فوق دقت کنید. عبارت $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ بیانگر خطای نسبی در بردار سمت راست است. حال اگر این مقدار کوچک باشد(میزان آشفتگی ورودی سمت راست) آیا می‌توان نتیجه گرفت مقدار خطای نسبی دستگاه یعنی $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ کوچک است؟ در پاسخ باید گفت خیر، زیرا یک عامل دیگر یعنی $(\|A\|\,\|A^{-1}\|)$ در $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ ضرب خواهد شد و چنانچه این عامل به قدر کافی بزرگ باشد آن‌گاه حاصل $(\|A\|\,\|A^{-1}\|)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ می‌تواند مقداری بزرگ باشد. در این صورت از

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left(\|A\|\,\|A^{-1}\|\right) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

می‌توان نتیجه گرفت خطای نسبی $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ می‌تواند تا مقدار زیادی بزرگ گردد. بنابراین نتیجه می‌گیریم کوچک بودن میزان آشفتگی در ورودی سمت راست مسأله $AX = b$ نمی‌تواند تضمینی برای کوچک بودن خطای جواب (میزان آشفتگی در خروجی مسأله) باشد.
بنابراین مقدار $(\|A\| \cdot \|A^{-1}\|)$ نقش مهمی در میزان خطای خروجی خواهد داشت و لذا شایسته است برای آن نامی انتخاب نماییم.

۲ عدد حالت ماتریس

تعریف ۴.۱

به مقدار عددی $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ عدد شرطی یا عدد وضعیت یا عدد حالت (Condition number) ماتریس A گفته می‌شود و با نماد $\kappa(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

توجه ۴.۱

با توجه به تفسیر قضیه‌ی قبل اگر $\kappa(A)$ مقداری کوچک باشد آنگاه ماتریس A را خوش حالت (Well-conditioned) و چنانچه مقداری بزرگ باشد آن را بدحالت (Ill-conditioned) می‌نامیم.

توجه ۴.۲

در منابع مختلف جبرخطی عددی از کلمات خوش وضع و بدوضع نیز استفاده می‌شود.

توجه ۴.۳

چنانچه $\kappa(A)$ مقداری بزرگ باشد آنگاه گوییم دستگاه $AX = b$ بدوضع است (Ill-conditioned problem) و یا اگر $\kappa(A)$ مقداری کوچک باشد گوییم دستگاه $AX = b$ خوش وضع (Well-conditioned problem) است.

توجه ۴.۴

در برخی موارد از کلمات (Ill-posed problem) و (Well-posed problem) نیز استفاده می شود.

توجه ۴.۵

باتوجه به تعریف عدد حالت نامساوی‌های قضیه قبل به صورت زیر قابل نمایش‌اند.

$$\frac{1}{\kappa(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leqslant \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

توجه ۴.۶

همان‌طور که مشاهده می‌شود عدد حالت یک ماتریس به یک نرم ماتریسی وابسته است لذا می‌تواند در نرم‌های مختلف محاسبه شود. از این‌رو می‌توان از مقدارهای مختلف زیر محاسبه شود. توجه کنید که اندیس در حرف κ نشان دهنده ی نرم مربوطه است

$$\kappa_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1$$
$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2$$
$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty$$
$$\kappa_F(A) = \|A\|_F \left\|A^{-1}\right\|_F$$

مثال ۴.۳

برای ماتریس‌های داده شده عدد شرطی را محاسبه نمایید و درمورد بدوضعی و یا خوش وضعی ماتریس بحث کنید.

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریس H_3 در واقع ماتریس هیلبرت 3×3 است که در حالت کلی $n \times n$ با نماد H_n نمایش داده می شود. بعلاوه درایه (i,j) ماتریس هیلبرت از $\frac{1}{i+j-1}$ به دست می آید.

حل: ابتدا عدد شرطی A را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -27 & 30 \\ 30 & -30 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه‌ی $\kappa_1(A)$، $\kappa_2(A)$، $\kappa_\infty(A)$و $\kappa_F(A)$ داریم:

$$\|A\|_1 = \frac{2}{3}, \quad \|A^{-1}\|_1 = 60 \Rightarrow \kappa_1(A) = \frac{2}{3} \times 60 = 40$$
$$\|A\|_2 = 0/6504, \quad \|A^{-1}\|_2 = 58/5375 \Rightarrow \kappa_2(A) = 0/6504 \times 58/5375 = 38/0737$$
$$\|A\|_\infty = \frac{2}{3}, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 60 \Rightarrow \kappa_\infty(A) = \frac{2}{3} \times 60 = 40$$
$$\|A\|_F = 0/6506, \quad \|A^{-1}\|_F = 58/5577 \Rightarrow \kappa_F(A) = 0/6506 \times 58/5577 = 38/1000$$

با توجه به مقادیر حاصل شده برای $\kappa(A)$ می‌توان آن را یک ماتریس بدحالت در نظر گرفت. توجه کنید نسبت به ابعاد دستگاه نیز، مقدار $\kappa(A)$ بزرگ است. بدحالتی این ماتریس را از یک روش دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

اگر درایه‌ی (۲و۲) این ماتریس را به اندازه‌ی $\frac{1}{30}$ (که مقدار کوچکی است) زیاد کنیم به $\frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$ تبدیل می‌شود در این صورت ماتریس جدید منفرد خواهد بود!

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ـ عدد شرطی ماتریس H_3

$$H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\|H_3\|_1 = 1/8333, \quad \|H_3^{-1}\|_1 = 408/0000 \Rightarrow \kappa_1(H_3) = 748/0000$$
$$\|H_3\|_2 = 1/4083, \quad \|H_3^{-1}\|_2 = 372/1151 \Rightarrow \kappa_2(H_3) = 524/0568$$
$$\|H_3\|_\infty = 1/8333, \quad \|H_3^{-1}\|_\infty = 408/0000 \Rightarrow \kappa_\infty(H_3) = 748/0000$$
$$\|H_3\|_F = 1/4136, \quad \|H_3^{-1}\|_F = 372/2056 \Rightarrow \kappa_F(H_3) = 526/1588$$

اعداد به دست آمده از $\kappa(H_3)$ نشان از بدحالتی ماتریس H_3 است.

مثال ۴.۴

اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱۰۰۰ & ۹۹۹ \\ ۹۹۹ & ۹۹۸ \end{bmatrix}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۹۹۸ & ۹۹۹ \\ ۹۹۹ & -۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\|A\|_\infty = \|A\|_۱ = ۱۹۹۹ = \|A^{-۱}\|_\infty = \|A^{-۱}\|_۱,$$
$$\kappa_\infty(A) = \kappa_۱(A) = (۱۹۹۹)^۲ = ۳/۹۹۶ \times ۱۰^۶$$

بنابراین ماتریس داده شده بدوضع می باشد. به عنوان تمرین عدد حالت را در نرم های دیگر محاسبه کنید.

مثال ۴.۵

ماتریس A را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

داریم:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱/۵ & -۰/۵ \end{bmatrix},$$

بعلاوه $\|A\|_۲ = ۵/۴۶۵۰, \|A^{-۱}\|_۲ = ۲/۷۳۲۵$ پس

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲ \|A^{-۱}\|_۲ = ۵/۴۶۵۰ \times ۲/۷۳۲۵ = ۱۴/۹۳۳۱$$

از اینرو A ماتریسی خوش وضع است.

مثال ۴.۶

ماتریس A را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}, \quad \|A\|_۱ = ۶, \quad \|A\|_\infty = ۸$$
$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۱/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & ۲/۵ & -۰/۵ \\ -۰/۵ & -۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}, \quad \|A^{-۱}\|_۱ = ۴/۵, \quad \|A^{-۱}\|_\infty = ۳/۵$$
$$\kappa_۱(A) = ۶ \times ۴/۵ = ۲۷$$
$$\kappa_\infty(A) = ۸ \times ۳/۵ = ۲۸$$

در اینجا می توان A را ماتریسی خوش وضع در نظر گرفت.

مثال ۴.۷

ماتریس خوش حالت:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}, \quad A^{-۱} = \frac{۱}{۵۶}\begin{bmatrix} ۱۲ & -۲ & -۲ \\ -۲ & ۱۹ & -۹ \\ -۲ & -۹ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

$$\kappa_۱(A) = \|A\|_۱ \, \|A^{-۱}\|_۱ = (۷)\frac{۱}{۵۶}(۳۰) = ۳/۷۵$$

پس برای یک دستگاه $AX = b$ با بردار b دلخواه و ماتریس ضرایب فوق می توان دستگاه را خوش وضع در نظر گرفت.

مثال ۴.۸

ماتریس بدحالت:

$$A = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۰۱ \end{bmatrix}, \quad A^{-۱} = \frac{۱}{۰/۰۰۰۲}\begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۱ & -۱ \\ -۱ & ۱/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$\kappa_۱(A) = \|A\|_۱ \, \|A^{-۱}\|_۱ = (۲/۰۰۰۱)\frac{۱}{۰/۰۰۰۲}(۲/۰۰۰۱) = ۲۰۰۰۲$$

پس برای یک دستگاه $AX = b$ با بردار b دلخواه و ماتریس ضرایب فوق می توان دستگاه را بد وضع در نظر گرفت.

توجه ۴.۷

عدد حالت یک ماتریس از ویژگی‌های جالبی برخوردار است که در مطالب بعدی مورد توجه قرار می‌گیرد.

با توجه به قضیه‌ی قبل وقتی در دستگاه $AX = b$ بردار b آشفته شود آن‌گاه خطای نسبی در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$\frac{۱}{\kappa(A)}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leqslant \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \tag{۹}$$

توجه کنید که با توجه به معادل بودن نرم ها فرقی نمی کند محاسبات با چه نرم انجام شود. اکنون با حل چند مثال نحوه‌ی به کارگیری نامساوی فوق را بیان می‌کنیم.

مثال ۴.۹

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۲ \\ x_۱ + ۱/۰۰۱x_۲ = ۲ \end{cases}$$

جواب دقیق این دستگاه $X^* = [۲, \ ۰]^T$ است. اگر بردار سمت راست از $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix}$ تبدیل شود. جواب دستگاه به چه میزان تغییر خواهد یافت؟

حل: ابتدا عدد حالت ماتریس را محاسبه می‌کنیم. محاسبات در نرم ۱ انجام شده است. از خواننده محترم می‌خواهیم تمامی محاسبات را به طور مشابه در نرم‌های ۲، ∞ و فروبنیوس انجام دهد.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix}$$

پس $\|A\|_1 = 2/0010$، $\|A^{-1}\|_1 = 2001$ و لذا

$$\kappa_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = 4004$$

که نشان از بدحالتی ماتریس ضرایب دارد. بنابراین انتظار داریم تغییرات زیادی در جواب دستگاه آشفته شده داشته باشیم. درواقع از اینکه

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2/001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/001 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_1 = 0/001$$
$$\|b\|_1 = \left\|[2,\ 2]^T\right\|_1 = 4$$

برای رابطه (۹) داریم:

$$\text{سمت راست} = \kappa_1(A)\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = 4004 \times \frac{0/001}{4} = 1/0010$$
$$\text{سمت چپ} = \frac{1}{\kappa_1(A)}\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{1}{4004} \times \frac{0/001}{4} = 6/2 \times 10^{-8}$$

بنابراین انتظار داریم

$$6/2 \times 10^{-8} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant 1/0010$$

کران بالا نشان می‌دهد که تغییرات جواب می‌تواند قابل توجه باشد. اکنون به طور مستقیم مقدار $\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1}$ را محاسبه می‌کنیم. دستگاه آشفته شده به صورت زیر است

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1/001x_2 = 2/001 \end{cases} \tag{10}$$

که دارای جواب

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/001 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2/001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2/001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

است که کاملاً با جواب اصلی $X^* = [2,\ 0]^T$ متفاوت است، همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود. بعلاوه

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [1,\ 1]^T - [2,\ 0]^T = [-1,\ 1]^T$$

پس

$$\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{\left\|[-1,\ 1]^T\right\|_1}{\|[2,\ 0]^T\|_1} = \frac{2}{2} = 1$$

مشاهده می‌شود که کران بالای به دست آمده برای $\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1}$ یعنی مقدار $1/0010$ تا حد زیادی به مقدار واقعی نزدیک است.

مثال ۴.۱۰

دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ۰/۰۰۱x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ + x_۲ = ۲ \end{cases}$$

که دارای جواب دقیق

$$x_۱ = \frac{۱۰۰۰}{۹۹۹} \approx ۱ \quad , \quad x_۲ = \frac{۹۹۸}{۹۹۹} \approx ۱$$

است. بردار سمت راست را به اندازه $\Delta b = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ \\ ۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$ آشفته می‌کنیم. میزان تغییرات جواب دستگاه چقدر خواهد بود؟

حل: داریم

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱/۰۰۱۰ & ۱/۰۰۱۰ \\ ۱/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۰ \end{bmatrix}, \quad \|A\|_\infty = ۲, \quad \|A^{-۱}\|_\infty = ۲/۰۰۲۰$$

لذا $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-۱}\|_\infty = ۲ \times ۲/۰۰۲۰ = ۴/۰۰۴۰$ و لذا A خوش حالت است پس انتظار تغییرات زیادی در جواب دستگاه نخواهیم داشت. توجه کنید که

$$\|\Delta b\|_\infty = \left\|[۰/۰۰۱,\ ۰/۰۰۱]^T\right\|_\infty = ۰/۰۰۱$$

و

$$\|b\|_\infty = \left\|[۱,\ ۲]^T\right\|_\infty = ۲$$

برای رابطه (۹) داریم:

$$\begin{aligned} \text{سمت راست} &= k_\infty(A)\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = ۴/۰۰۴۰ \times \frac{۰/۰۰۱}{۲} = ۰/۰۰۲۰ \\ \text{سمت چپ} &= \frac{۱}{k_\infty(A)} \quad \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{۱}{۴/۰۰۴۰} \times \frac{۰/۰۰۱}{۲} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۴} \end{aligned}$$

بنابراین

$$۱/۲۵ \times ۱۰^{-۴} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant ۰/۰۰۲۰$$

کران بالای خطای نسبی جواب مقداری کوچک است پس انتظار داریم جواب دستگاه تغییرات زیادی نداشته باشد. در حقیقت این‌چنین نیز هست زیرا با حل دستگاه آشفته داریم

$$\begin{cases} ۰/۰۰۱x_۱ + x_۲ = ۱/۰۰۱ \\ x_۱ + x_۲ = ۲/۰۰۱ \end{cases}$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱/۰۰۱ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۰۰۱۰ & ۱/۰۰۱۰ \\ ۱/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱/۰۰۱ \\ ۲/۰۰۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۱۰ \\ ۱/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

که نشان از تغییرات کم جواب اصلی $X^* \approx [۱,\ ۱]^T$ است. درواقع

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \approx \frac{\|[۱/۰۰۱۰,\ ۱/۰۰۰۰]^T - [۱,\ ۱]^T\|_\infty}{\|[۱,\ ۱]^T\|_\infty} = \frac{\|[۰/۰۰۱۰,\ ۰]^T\|_\infty}{۱} = ۰/۰۰۱$$

توجه کنید که کران بالای به دست آمده برای $\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ یعنی مقدار۰/۰۰۲۰ تا حد زیادی نزدیک به مقدار دقیق است. توجه کنید که به علت کوچکی $\kappa(A)$ در مثال قبل می‌توان نتیجه گرفت که دستگاه خوش وضع است و همان‌طور که دیدیم یک تغییر کوچک در ورودی باعث تغییرات کوچک در خروجی شده است.

تمرین ۴.۱

تمامی محاسبات در مثال قبل را با نرم‌های ۱،۲ و فروبنیوس انجام دهید.

توجه ۴.۸

برای دیدن مثال های بیشتر به پیوست فصل چهارم تحت عنوان مثال بیشتر از آشفتگی در سمت راست مراجعه نمایید.

۳ آشفتگی در ماتریس ضرایب

در قسمت قبل حالتی را که در دستگاه $AX = b$ بردار b آشفته شود بررسی نمودیم. حال سوال این است که اگر A آشفته شود چه اتفاقی برای جواب X رخ خواهد داد؟
در ادامه به بیان قضیه ای می پردازیم که این حالت را مدنظر دارد. قبل از بیان قضیه اصلی نیاز به قضیه زیر داریم. توجه کنید که در این قسمت فرض بر این است که $\|.\|$ یک نرم القایی باشد.

قضیه ۴.۲

فرض کنید A وارون پذیر باشد و $c\kappa(A) < ۱$ جایی که $c = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ و $\|.\|$ نرم القایی باشد آنگاه ماتریس $A + \Delta A$ وارون پذیر است.

توجه ۴.۹

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان قضایای مربوط به آشفتگی در ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

قضیه ۴.۳

فرض کنید A وارون پذیر و $b \neq ۰$ باشد اگر ΔA اختلال در ماتریس ضرایب باشد که در شرط $\|\Delta A\|\|A^{-۱}\| < ۱$ نیز صدق می کند آنگاه خطای نسبی جواب دستگاه $AX = b$ در نامساوی زیر صدق می کند

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{c\kappa(A)}{۱ - c\kappa(A)}$$

که در آن $c = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ میزان تغییرات نسبی ماتریس A را نشان می دهد.

توجه ۴.۱۰

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان قضایای مربوط به آشفتگی در ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

تذکر ۴.۴

دیدیم که شرط استفاده از کران به دست آمده در قضیه قبل به صورت

$$\|\Delta A\|\|A^{-1}\| < 1 \tag{12}$$

می باشد از طرفی با محاسبه ی $c\kappa(A)$ داریم:

$$c\kappa(A) = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.\|A\|.\|A^{-1}\| = \|\Delta A\|.\|A^{-1}\| \tag{13}$$

بنابراین با استفاده از (۱۳) شرط (۱۲) را می توان به شکل ساده تر زیر بیان نمود:

$$c\kappa(A) < 1 \tag{14}$$

شرط قضیه یعنی $\|\Delta A\|\|A^{-1}\| < 1$ تضمین می کند که $1 - c\kappa(A) > 0$. بعلاوه چون $c > 0$ و $\kappa(A) > 0$ پس $0 < 1 - c\kappa(A) < 1$. از اینرو

$$\frac{1}{1 - c\kappa(A)} > 1$$

حال مطابق

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{c\kappa(A)}{1 - c\kappa(A)}$$

حتی اگر میزان آشفتگی در ماتریس ضرایب ناچیز باشد یعنی مقدار $c = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ خیلی کوچک باشد اما $\kappa(A)$ بزرگ باشد آنگاه کران بالای خطای نسبی جواب که حاصل ضرب $\frac{1}{1 - c\kappa(A)} > 1$ و $c\kappa(A)$ است همچنان بزرگ خواهد بود. درنتیجه وقتی دستگاه $AX = b$ بد وضع است حتی یک آشفتگی یا تغییر کوچک در ماتریس ضرایب A باعث تولید یک جواب(از هر روشی که دستگاه حل شود) کاملا نامعقول می گردد. این موضوع در مثال های زیر بررسی شده است.

مثال ۴.۱۱

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 + 1/001 x_2 & = 2 \end{cases}$$

فرض کنید درایه واقع در مکان $(1, 1)$ از ۱ به ۰/۹۹۹۹ تغییر کند میزان اختلال در جواب دستگاه را محاسبه کنید.

حل:

جواب دقیق این دستگاه برابر $X^* = [۲, ۰]^T$ است. ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس اختلال به صورت زیر خواهد بود.

$$\Delta A = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۹۹ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۰^{-۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین در نرم ۱ خواهیم داشت.

$$\|\Delta A\|_۱ = ۱۰^{-۴} \quad , \quad \|A\|_۱ = ۲/۰۰۱۰$$

و بنابراین $c = \frac{\|\Delta A\|_۱}{\|A\|_۱} = ۴/۹۹۷۵ \times ۱۰^{-۵}$ که مقداری ناچیز است. از طرفی :

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱۰۰۱ & -۱۰۰۰ \\ -۱۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-۱}\|_۱ = ۲۰۰۱$$

پس

$$\|\Delta A\|_۱ \|A^{-۱}\|_۱ = ۱۰^{-۴} \times ۲۰۰۱ = ۰/۲۰۰۱ < ۱$$

و لذا شرط قضیه برقرار است. از طرفی $\kappa_۱(A) = \|A\|_۱ \|A^{-۱}\|_۱ = ۲/۰۰۱۰ \times ۲۰۰۱ = ۴۰۰۴$ پس برای خطای نسبی جواب کران بالای زیر حاصل می شود.

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} \leq \frac{c\kappa_۱(A)}{۱ - c\kappa_۱(A)} = \frac{۴/۹۹۷۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۴۰۰۴}{۱ - ۴/۹۹۷۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۴۰۰۴} = \frac{۰/۲۰۰۱}{۱ - ۰/۲۰۰۱} = ۰/۲۵۰۲$$

بنابراین خطای نسبی جواب در حدود ۰/۲۵۰۲ می تواند تغییر یابد که مقداری قابل توجه است. برای اینکه مقدار دقیق $\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱}$ را محاسبه کنیم ابتدا باید دستگاه آشفته شده

$$\begin{cases} ۰/۹۹۹۹x_۱ + x_۲ & = ۲ \\ x_۱ + ۱/۰۰۱x_۲ & = ۲ \end{cases}$$

را حل کنیم ، داریم:

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۹۹ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۲/۲۲۲۵ \\ -۰/۲۲۲۲ \end{bmatrix}$$

پس

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [۲/۲۲۲۵,\ -۰/۲۲۲۲]^T - [۲,\ ۰]^T = [۰/۲۲۲۵,\ -۰/۲۲۲۲]^T$$

در نتیجه

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} = \frac{\|[۰/۲۲۲۵,\ -۰/۲۲۲۲]^T\|_۱}{\|[۲,\ ۰]^T\|_۱} = \frac{۰/۴۴۴۷}{۲} = ۰/۲۲۲۴$$

همانطور که مشاهده می کنید کران به دست آمده برای $\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱}$ یعنی مقدار ۰/۲۵۰۲ به طور مناسبی به مقدار دقیق $\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} = ۰/۲۲۲۴$ نزدیک است. توجه کنید که خطای نسبی در حدود $۱۰^{-۵}$ باعث تولید خطای نسبی به اندازه ۰/۲۲۲۴ در جواب دستگاه شده است. این را باید از بدحالتی دستگاه $AX = b$ دانست زیرا $\kappa_۱(A) = ۴۰۰۴$ مقداری بزرگ است.

اکنون بیاید در همین دستگاه مقدار خطا را کمی افزایش دهیم. به طور مثال درایه $(۱,۱)$ را از ۱ به ۰/۹۹ تغییر دهیم. یعنی دستگاه را به طور زیر آشفته نماییم.

$$\begin{cases} ۰/۹۹x_۱ + x_۲ &= ۲ \\ x_۱ + ۱/۰۰۱x_۲ &= ۲ \end{cases}$$

در این صورت ماتریس اختلاف به صورت زیر خواهد بود.

$$\Delta A = \begin{bmatrix} ۰/۹۹ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۰۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس میزان آشفتگی نسبی در A به صورت زیر خواهد بود.

$$c = \frac{\|\Delta A\|_۱}{\|A\|_۱} = \frac{۰/۰۱}{۲/۰۰۱} \approx ۰/۰۰۵۰$$

که هنوز مقداری کوچک است از طرفی داریم:

$$\|\Delta A\|_۱ \|A^{-۱}\|_۱ \approx ۰/۰۱ \times ۲۰۰۱ = ۲۰/۰۱ \not< ۱$$

پس شرط قضیه یعنی $\|\Delta A\|_۱ \|A^{-۱}\|_۱ < ۱$ برقرار نمی باشد پس نمی توان از آن بهره برد و کران بالایی برای خطای نسبی جواب تعیین نمود!

توجه کنید که در این حالت جواب دستگاه آشفته شده به صورت زیر به دست می آید.:

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -۰/۲۲۲۰ \\ ۲/۲۱۹۸ \end{bmatrix}$$

پس

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [-۰/۲۲۲۰,\ ۲/۲۱۹۸]^T - [۲,\ ۰]^T = [-۲/۲۲۲۰,\ ۲/۲۱۹۸]^T$$

بنابراین مقدار خطای نسبی جواب برابر است با:

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} = \frac{\|[-۲/۲۲۲۰,\ ۲/۲۱۹۸]^T\|_۱}{\|[۲,\ ۰]^T\|_۱} = \frac{۴/۴۴۱۷}{۲} = ۲/۲۲۰۹$$

که مقداری قابل توجه است.

تذکر ۴.۵

همانطور که دیدیم وقتی در درایه $(۱,۱)$ ماتریس A به اندازه $۱۰^{-۲}$ اختلال وارد کردیم شرط مهم قضیه یعنی $\|\Delta A\|_۱ \|A^{-۱}\|_۱ < ۱$ برقرار نیست و لذا نمی توان از قضیه بیان شده کرانی را برای خطای نسبی تعیین نمود. در ادامه راهکار جایگزینی برای این مشکل ارایه می شود.

تمرین ۴.۲

تمامی محاسبات را در نرم های ۲ ، ∞ و فروبنیوس انجام دهید.

مثال ۴.۱۲

دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 6x_2 &= 7 \end{cases}$$

در ماتریس A اختلالی به صورت

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

وارد می کنیم. میزان تغییرات جواب را محاسبه نمایید.

حل:
واضح است که یکتا جواب دقیق دستگاه $X^* = [1,\ 1]^T$ می باشد. مقدار اختلال در ورودی دستگاه کوچک است زیرا:

$$c = \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{10^{-3}}{7} \simeq 1/4286 \times 10^{-4}$$

حال باید عدد حالت(شرطی) ماتریس A را محاسبه نماییم تا بتوانیم از میزان تغییر جواب دستگاه اطلاع پیدا کنیم. داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{29} & -\frac{1}{29} \\ -\frac{1}{29} & \frac{5}{29} \end{bmatrix} \quad , \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{7}{29}$$

بنابراین $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 7 \times \frac{7}{29} = \frac{49}{29}$ که مقداری کوچک است پس A ماتریس خوش حالت و درنتیجه دستگاه $AX = b$ خوش حالت است.
پس انتظار داریم یک اختلال کوچک در ورودی دستگاه باعث تولید یک تغییر کوچک در جواب دستگاه گردد. با بررسی شرط قضیه داریم:

$$\|\Delta A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 10^{-3} \times \frac{7}{29} < 1$$

از اینرو از کران تعیین شده در قضیه برای $\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ می توان استفاده نمود:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \frac{c\kappa_\infty(A)}{1 - c\kappa_\infty(A)} \simeq \frac{1/4286 \times 10^{-4} \times \frac{49}{29}}{1 - 1/4286 \times 10^{-4} \times \frac{49}{29}} = \frac{2/4138 \times 10^{-4}}{1 - 2/4138 \times 10^{-4}} = 2/4144 \times 10^{-4}$$

کران بالای $\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ پیش بینی می کند که تغییرات ناچیزی در جواب دستگاه خواهیم داشت. درواقع با حل دستگاه آشفته شده داریم.

$$\Delta A = \widetilde{A} - A \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A} = A + \Delta A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10^{-3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0/999 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{X} = \widetilde{A}^{-1} b = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0/999 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1/0000 \\ 1/0002 \end{bmatrix}$$

همانطور که می بینید میزان تغییرات جواب ناچیز است در واقع

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* \simeq [0,\ 0/0002]^T$$
$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \frac{\|[0,\ 0/0002]^T\|_\infty}{\|[1,\ 1]^T_\infty\|} = \frac{0/0002}{1} = 2 \times 10^{-4}$$

که میزان ناچیز تغییرات را نشان می دهد. توجه کنید که کران بالای محاسبه شده برای مقدار دقیق $\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ به طور مناسبی به آن نزدیک است.

تمرین ۴.۳

محاسبات فوق را در نرم ۲ تکرار کنید.

همان طور که دیدیم در برخی از مسائل شرط $c\kappa(A) < 1$ لزوما برقرار نبوده و از اینرو نمی توانیم از کران قضیه کمک بگیریم. در ذیل قضیه ای را می آوریم که کرانی برای نسبت تغییرات جواب دستگاه به جواب دستگاه آشفته محاسبه می کند. بدون آنکه نیاز به برقراری شرط $c\kappa(A) < 1$ باشد.

قضیه ۴.۴

فرض کنید $\|.\|$ یک نرم القایی و ΔA میزان آشفتگی در ماتریس ضرایب دستگاه $AX = b$ باشد و $\widetilde{X} = X + \Delta X$ جواب دستگاه آشفته شده $(A + \Delta A)\widetilde{X} = b$ باشد آنگاه نسبت تغییرات جواب دستگاه $AX = b$ به جواب دستگاه آشفته شده در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|\widetilde{X}\|} = \frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq c\kappa(A)$$

که در آن $c = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ می باشد.

توجه کنید که اگر ΔX نسبت به X به قدر کافی کوچک باشد آنگاه نامساوی فوق می تواند به عنوان تقریبی از خطای نسبی جواب یعنی $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ در نظر گرفته شود.

اثبات: از $(A + \Delta A)(X + \Delta X) = AX + A\Delta X + \Delta A(X + \Delta X) = b$ و $b = AX$ خواهیم داشت:

$$A(\Delta X) + \Delta A(X + \Delta X) = 0 \tag{15}$$

حال معادله (۱۵) را از چپ در A^{-1} ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$\Delta X = -A^{-1}\Delta A(X + \Delta X)$$

لذا $\|\Delta X\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|X + \Delta X\|$ و

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\| \tag{16}$$

اگر سمت راست نامساوی (۱۶) را در $\frac{\|A\|}{\|A\|}$ ضرب کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}) = c\kappa(A) \tag{17}$$

و این اثبات را کامل می کند.
به عنوان مثالی از قضیه فوق به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۴.۱۳

دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

که دارای یکتا جواب $X^* = [۲,\ ۰]^T$ است. فرض کنید ΔA به شکل زیر باشد:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -۱۰^{-۲} & ۰ \\ ۰ & -۱۰^{-۲} \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه قبل داریم(محاسبات با نرم ۲ انجام شده است)

$$c = \frac{\|\Delta A\|_۲}{\|A\|_۲} = \frac{۱۰^{-۲}}{۲/۰۰۵۰} = ۰/۰۰۵۰$$

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱۰۱ & -۱۰۰ \\ -۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲ \|A^{-۱}\|_۲ = ۲/۰۰۵۰ \times ۲۰۰/۵۰۱۲ = ۴۰۲/۰۰۷۵$$

پس

$$\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X + \Delta X\|_۲} \le c\kappa_۲(A) = ۰/۰۰۵۰ \times ۴۰۲/۰۰۷۵ = ۲/۰۰۵$$

اکنون با محاسبه جواب دستگاه آشفته شده می توان مقدار دقیق خطای نسبی $\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X+\Delta X\|_۲}$ را محاسبه نمود:

$$\begin{cases} ۰/۹۹x_۱ + x_۲ = ۲ \\ x_۱ + x_۲ = ۲ \end{cases} \quad , \quad \text{دستگاه آشفته شده}$$

از حل این دستگاه داریم:

$$\widetilde{X} = X^* + \Delta X = [۰,\ ۲]^T$$

که کاملا با جواب دقیق تفاوت دارد! بنابراین:

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [۰,\ ۲]^T - [۲,\ ۰]^T = [-۲,\ ۲]^T$$

و

$$\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|\widetilde{X}\|_۲} = \frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X^* + \Delta X\|_۲} = \frac{\|[-۲,\ ۲]^T\|_۲}{\|[۰,\ ۲]^T\|_۲} = \frac{۲/۸۲۸۴}{۲} = ۱/۴۱۴۲$$

مشاهده می شود که کران بالای بدست آمده برای $\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|\widetilde{X}\|_۲}$ یعنی مقدار ۲/۰۰۵ به طور قابل قبولی به مقدار دقیق آن (یعنی ۱/۴۱۴۲) نزدیک است.

توجه ۴.۱۱

برای دیدن مثال های بیشتر به پیوست فصل چهارم تحت عنوان مثال بیشتر از آشفتگی در ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

۴ آشفتگی در بردار سمت راست و ماتریس ضرایب

در دو قضیه قبلی وقتی که
(۱) اختلال در بردار سمت راست b وارد شود و
(۲) اختلال در ماتریس ضرایب A وارد شود.
مورد بررسی قرار گرفتند. با توجه به اینکه در مسائل واقعی ممکن است مقادیر ورودی در هر ماتریس A و بردار b دچار تغییرات جزئی شوند لذا لازم است میزان تغییرات جواب دستگاه $AX = b$ را در این حالت بررسی کنیم. برای اینکار ابتدا قضیه ی زیر را بیان می کنیم:

قضیه ۴.۵

فرض کنید که $\|E\| < 1$ (که $\|.\|$ نرم القایی است) آنگاه ماتریس $I - E$ نامنفرد است و

$$\|(I-E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|E\|}$$

توجه ۴.۱۲

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان قضایای آشفتگی در بردار سمت راست و ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

اکنون آماده ی بیان قضیه ی اصلی (اختلال در بردار سمت راست و ماتریس ضرایب) هستیم

قضیه ۴.۶

فرض کنید که A نامنفرد باشد، $b \neq 0$. اگر Δb و ΔA به ترتیب نشان دهنده ی میزان آشفتگی در بردار سمت راست b و ماتریس ضرایب A باشند و $\|\Delta A\|\|A^{-1}\| < 1$. آنگاه خطای نسبی جواب دستگاه $AX = b$ در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \left(\frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\right)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \tag{۱۸}$$

توجه ۴.۱۳

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان قضایای آشفتگی در بردار سمت راست و ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

توجه: از (۱۸) ملاحظه می کنیم که اگر اختلال های $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ و $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ کوچک باشند اما $\kappa(A)$ بزرگ باشد. همچنان ممکن است تغییرات زیادی در جواب خروجی داشته باشیم. بنابراین $\kappa(A)$ نقش بسیار قاطعی را در حساسیت جواب بازی می کند.

مثال ۴.۱۴

در دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

در هر دو ماتریس A و بردار b اختلال های به صورت

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -۰/۰۰۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta b = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ \\ -۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

وارد می شود میزان اختلال در جواب دستگاه را بررسی نمایید.

حل: جواب دقیق دستگاه $X^* = [۱۰۳, \ -۱۰۰]^T$ است بعلاوه میزان خطاهای نسبی در ماتریس A و بردار b ناچیزند

$$\text{خطای نسبی در ماتریس } A = \frac{\|\Delta A\|_۲}{\|A\|_۲} = \frac{۰/۰۰۱}{۲/۰۰۵۰} = ۴/۹۸۷۵ \times ۱۰^{-۴}$$
$$\text{خطای نسبی در بردار} b = \frac{\|\Delta b\|_۲}{\|b\|_۲} = \frac{۰/۰۰۱۴}{۳/۶۰۵۶} = ۳/۹۲۲۳ \times ۱۰^{-۴}$$

توجه کنید که شرط $\|\Delta A\|\|A^{-۱}\| < ۱$ در قضیه برقرار است:

$$\|\Delta A\|_۲\|A^{-۱}\|_۲ = ۰{,}۲۰۰۵ < ۱$$

از طرفی قبلا دیدیم که

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱۰۱ & -۱۰۰ \\ -۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix}, \quad \|A^{-۱}\|_۲ = ۲۰۰/۵۰۱۲$$

بنابراین

$$\kappa_۲(A) = \|A\|_۲\|A^{-۱}\|_۲ = ۲{,}۰۰۵۰ \times ۲۰۰/۵۰۱۲ = ۴۰۲/۰۰۷۵$$

لذا مطابق قضیه قبل می توان نوشت

$$\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X\|_۲} \leqslant \frac{\kappa_۲(A)}{۱-\kappa_۲(A)\frac{\|\Delta A\|_۲}{\|A\|_۲}}\left(\frac{\|\Delta A\|_۲}{\|A\|_۲}+\frac{\|\Delta b\|_۲}{\|b\|_۲}\right)$$
$$= \frac{۴۰۲/۰۰۷۵}{۱-۴۰۲/۰۰۷۵\times۴/۹۸۷۵\times۱۰^{-۴}}(۴/۹۸۷۵+۳/۹۲۲۳)\times۱۰^{-۴} = ۰/۴۴۸۰$$

از طرفی مقدار دقیق ΔX به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$(A+\Delta A)(X+\Delta X) = b+\Delta b$$

یا

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۹۹ & ۱/۰۰۰۰ \\ ۱/۰۰۰۰ & ۱/۰۱۰۰ \end{bmatrix}(X+\Delta X) = \begin{bmatrix} ۳/۰۰۱۰ \\ ۱/۹۹۹۰ \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$X+\Delta X=\begin{bmatrix}114/7953\\-111/6795\end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \Delta X=\begin{bmatrix}114/7953\\-111/6795\end{bmatrix}-X=\begin{bmatrix}114/7953\\-111/6795\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}103\\-100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/7953\\-11/6795\end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که جواب به دست آمده کاملا با جواب اصلی تفاوت دارد. در این حالت خطای نسبی برابر است با:

$$\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2}=\frac{\|[11/7953,\ -11/6795]^T\|_2}{\|[103,\ -100]^T\|_2}=\frac{16/5994}{143/5584}=0/1156$$

که در حدود ۱۲ درصد می باشد که میزان بالای خطای جواب بدست آمده را نشان می دهد.

در اینجا لازم است تاکید کنیم **روش حل** یک مساله بدوضع تاثیری در بهبود نهایی جواب ندارد زیرا بدوضعی دستگاه $AX=b$ مستقل از روش حل آن است.

همانطور که دیدیم برای استفاده از قضیه فوق باید شرط $\|\Delta A\|\|A^{-1}\|<1$ برقرار باشد و در صورتی که چنین نباشد نمی توان از کران تعیین شده برای خطای نسبی جواب بهره جست. در ذیل قضیه ای را می آوریم که کرانی برای نسبت تغییرات جواب دستگاه را به جواب دستگاه آشفته محاسبه می کند. بدون آنکه نیاز به برقراری این شرط باشد.

قضیه ۴.۷

اگر $X+\Delta X$ جواب دستگاه آشفته شده $(A+\Delta A)(X+\Delta X)=b+\Delta b$ آنگاه:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|}\le \kappa(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\|X+\Delta X\|}\right) \tag{19}$$

که $\|.\|$ نرم القایی است.

توجه کنید که اگر ΔX نسبت به X به قدر کافی کوچک باشد آنگاه نامساوی فوق می تواند به عنوان تقریبی از خطای نسبی جواب یعنی $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ در نظر گرفته شود.

توجه ۴.۱۴

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان قضایای آشفتگی در بردار سمت راست و ماتریس ضرایب مراجعه نمایید.

مثال ۴.۱۵

اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-3\\6&8&-36\\-6&-7/5&30\end{bmatrix}$ و $b=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$ باشد جواب دستگاه $AX=b$ بردار $x=\begin{bmatrix}-6/50000\\-66/00000\\49/50000\end{bmatrix}$

خواهد بود. حال A را با

$$\Delta A = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۰۵۰ & ۰ & ۰/۰۰۰۰۱ \\ ۰ & ۰/۰۰۰۳۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۰/۰۰۰۷۰ \end{bmatrix}$$

و b را با $\Delta b = \begin{bmatrix} -۰/۰۰۰۱۰ \\ ۰/۰۰۰۵۰ \\ -۰/۰۰۰۰۲ \end{bmatrix}$ آشفته می کنیم در نتیجه

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} -۲/۹۹۹۵۰ & ۰/۵۰۰۰۰ & ۰/۳۳۳۳۴ \\ -۳۶/۰۰۰۰۰ & ۸/۰۰۰۳۰ & ۶/۰۰۰۰۰ \\ ۳۰/۰۰۰۰۰ & -۷/۵۰۰۰۰ & -۶/۰۰۰۷۰ \end{bmatrix}$$

و

$$b + \Delta b = \begin{bmatrix} ۲/۹۹۹۹۰ \\ ۳/۰۰۰۵۰ \\ ۲/۹۹۹۹۸ \end{bmatrix}.$$

لذا جواب دستگاه آشفته شده

$$X + \Delta X = \begin{bmatrix} -۶/۴۸۶۳۷ \\ -۶۵/۷۲۷۰۸ \\ ۴۹/۲۲۱۲۸ \end{bmatrix}$$

می باشد و بعلاوه $\Delta X = \begin{bmatrix} ۰/۰۱۳۶۳ \\ ۰/۲۷۲۹۲ \\ -۰/۲۷۸۷۲ \end{bmatrix}$. پس خطای نسبی برابر است با:

$$\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X + \Delta X\|_۲} = ۰/۰۰۴۷۰$$

از طرفی $\kappa_۲(A) = ۲/۳۹۶۶۱ \times ۱۰^۳$. برای راستی آزمایی نامساوی (۱۹) داریم

$$\frac{\|\Delta X\|_۲}{\|X + \Delta X\|_۲} = ۰/۰۰۴۷ \leq \kappa_۲(A)\left(\frac{\|\Delta A\|_۲}{\|A\|_۲} + \frac{\|\Delta b\|_۲}{\|A\|_۲\|X + \Delta X\|_۲}\right)$$
$$= ۲/۳۹۶۶۱ \times ۱۰^۳\left(۱/۴۳۰۱۸ \times ۱۰^{-۵} + \frac{۵/۱۰۲۹۴ \times ۱۰^{-۴}}{۴۸/۹۵۵۱۹ \times ۸۲/۳۷۰۲۴}\right) = ۰/۰۳۴۵۸$$

در قضیه قبل دیدیم که وقتی در دستگاه $AX = b$، همزمان A و b آشفته شوند، خطای نسبی جواب در نامساوی زیر صدق می کند

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\kappa(A)}{۱ - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

حال سوالی که مطرح است این است که آیا می توان کران پایینی برای $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ یافت؟

قضیه ۴.۸

فرض کنید A وارون پذیر، $b \neq ۰$، $AX = b$ و هر دوی A و b آشفته شوند یعنی $(A + \Delta A)(X + \Delta X) = b + \Delta b$

آنگاه کران پایینی برای خطای نسبی جواب به صورت زیر به دست می آید

$$\left(\frac{\|A\|}{\|A\|+\|\Delta A\|}\right)\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\cdot\frac{۱}{\kappa(A)}-\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\leqslant\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \qquad (۲۰)$$

جایی که $\|.\|$ یک نرم القایی است.

توجه ۴.۱۵

برای دیدن اثبات به پیوست فصل چهارم تحت عنوان <u>کران پایین خطای نسبی</u> مراجعه نمایید.

برای بررسی نامساوی فوق به مثال زیر توجه کنید.
مثال - در دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۰۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

داریم

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱۰۰۱ & -۱۰۰۰ \\ -۱۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$

از این رو جواب دقیق دستگاه به صورت زیر است:

$$X^*=A^{-۱}b=\begin{bmatrix} ۱۰۰۱ & -۱۰۰۰ \\ -۱۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۰۰۳ \\ -۴۰۰۰ \end{bmatrix}$$

اکنون به A و b اختلال هایی به صورت زیر وارد می کنیم

$$\Delta A=\begin{bmatrix} -۰/۰۰۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۰۰۹ \end{bmatrix}, \qquad \Delta b=\begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ \\ ۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه جواب دستگاه تغییر یافته $(A+\Delta A)\widetilde{X}=(b+\Delta b)$ به صورت زیر است

$$\widetilde{X}=(A+\Delta A)^{-۱}(b+\Delta b)=\begin{bmatrix} ۰/۹۹۹ & ۱ \\ ۱ & ۱/۰۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۳/۰۰۱۰ \\ -۰/۹۹۹۰ \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} ۴۴۸/۲۷۷۰ \\ -۴۴۴/۸۲۷۷ \end{bmatrix}$$

همانطور که می بینید جواب دستگاه بسیار تغییر کرده است. خطای نسبی داده ها به صورت زیر است

$$\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}=\frac{۰/۰۰۹۰}{۲/۰۰۱۰}=۰/۰۰۴۵, \qquad \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}=\frac{۰/۰۰۱۰}{۳}=۳/۳\times۱۰^{-۴}$$

از طرفی

$$\tilde{X}-X^*=\begin{bmatrix} ۴۴۸/۲۷۷۰ \\ -۴۴۴/۸۲۷۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴۰۰۳ \\ -۴۰۰۰ \end{bmatrix}=۱۰^۳\times\begin{bmatrix} -۳/۵۵۴۷ \\ ۳/۵۵۵۲ \end{bmatrix}$$

لذا به خطای نسبی خروجی به صورت

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}=\frac{\|\tilde{X}-X^*\|_\infty}{\|X^*\|_\infty}=\frac{\|[-۳/۵۵۴۷,\ ۳/۵۵۵۲]^T\times۱۰^۳\|_\infty}{\|[۴۰۰۳,\ -۴۰۰۰]^T\|_\infty}\simeq۰/۸۹$$

خواهد بود که حدود ۸۹ درصد است! اکنون با استفاده از کران به دست آمده در قضیه ی قبل و عدد شرطی

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-۱}\right\|_\infty = ۲/۰۰۱۰ \times ۲۰۰۱ = ۴۰۰۴$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} &\geqslant \left(\frac{\|A\|_\infty}{\|A\|_\infty + \|\Delta A\|_\infty}\right)\left(\frac{\|\Delta \mathrm{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \cdot \frac{۱}{\kappa_\infty(A)} - \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right) \\ &= \left(\frac{۲/۰۰۱۰}{۲/۰۰۱۰ + ۰/۰۰۹۰}\right)\left(۳/۳ \times ۱۰^{-۴} \times \frac{۱}{۴۰۰۴} - ۰/۰۰۴۵\right) \\ &= ۰/۹۹۵۵ \times (-۰/۰۰۴۵) = -۰/۰۰۴۵\end{aligned}$$

که البته کران به دست آمده قابل استفاده نیست زیرا عددی منفی شده است در حالی که $\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ همواره مثبت است. در واقع برای اینکه این کران قابل استفاده باشد لازم است که

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\frac{۱}{\kappa(A)} - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} > ۰$$

یا

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\frac{۱}{\|A\|\|A^{-۱}\|} - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} > ۰$$

با ضرب طرفین این رابطه در $\|A\|$ داریم

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{۱}{\|A^{-۱}\|} - \|\Delta A\| > ۰$$

یا

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{۱}{\|A^{-۱}\|} > \|\Delta A\|$$

یا

$$\|\Delta b\| > \|b\| \left\|A^{-۱}\right\| \|\Delta A\|$$

مثال ۴.۱۶

دستگاه زیر با اختلال های داده شده را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ۵x_۱ + x_۲ = ۶ \\ x_۱ + ۶x_۲ = ۷ \end{cases}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۰/۰۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{bmatrix} ۰/۱۵ \\ ۰/۱۵ \end{bmatrix}$$

کران پایینی برای $\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱}$ محاسبه کنید.

حل: جواب دقیق $X^* = [۱,\ ۱]^T$ است، بعلاوه

$$\frac{\|\Delta A\|_۱}{\|A\|_۱} = ۰/۰۰۱۴, \qquad \frac{\|\Delta b\|_۱}{\|b\|_۱} = ۰/۰۲۳۱$$

و از آنجایی که

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰/۲۰۶۹ & -۰/۰۳۴۵ \\ -۰/۰۳۰۵ & ۰/۱۷۲۴ \end{bmatrix}$$

داریم $\|A^{-۱}\|_۱ = ۰/۲۴۱۴$ و در نتیجه

$$\kappa_۱(A) = \|A\|_۱\|A^{-۱}\|_۱ = ۷ \times ۰/۲۴۱۴ = ۱/۶۸۹۷$$

که نشان می دهد A خوش حالت است. از طرفی طبق قضیه قبل داریم

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} \geqslant \left(\frac{\|A\|_۱}{\|A\|_۱ + \|\Delta A\|_۱}\right)\left(\frac{\|\Delta b\|_۱}{\|b\|_۱} \cdot \frac{۱}{\kappa_۱(A)} - \frac{\|\Delta A\|_۱}{\|A\|_۱}\right)$$
$$= \left(\frac{۷}{۷ + ۰/۰۱}\right)\left(۰/۰۲۳۱ \times \frac{۱}{۱/۶۸۹۷} - ۰/۰۰۱۴\right) = ۰/۹۹۸۶ \times ۰/۰۱۲۳ = ۰/۰۱۲۳$$

از طرفی با حل دستگاه آشفته شده داریم

$$\widetilde{X} = (A + \Delta A)^{-۱}(b + \Delta b) = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۰/۹۹ & ۶ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۶/۱۵ \\ ۷/۱۵ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۰/۲۰۶۸ & -۰/۰۳۴۵ \\ -۰/۰۳۴۱ & ۰/۱۷۲۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶/۱۵ \\ ۷/۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۲۵۵ \\ ۱/۰۲۲۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [۰/۰۲۵۵,\ ۰/۰۲۲۵]^{\mathrm{T}}$$

در نتیجه

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} = \frac{\left\|[۰/۰۲۵۵,\ ۰/۰۲۲۵]^T\right\|_۱}{\|[۱,\ ۱]^T\|_۱} = \frac{۰/۰۴۸}{۲} = ۰/۰۲۴$$

مشاهده می شود که کران پایین ۰/۰۱۲۳ به طور مناسبی به مقدار دقیق ۰/۰۲۴ نزدیک است.

توجه ۴.۱۶

برای دیدن دقت جواب بر اساس باقیمانده به پیوست فصل چهارم تحت عنوان دقت جواب بر اساس باقیمانده مراجعه نمایید.

۵ میزان بزرگی $\kappa(A)$ برای بدحالتی

اغلب معیار مشخصی برای اینکه $\kappa(A)$ چقدر می بایست بزرگ باشد تا بتوانیم از کلمات بدحالت یا خوش حالت برای A استفاده کنیم وجود ندارد. گاهاً اگر عدد شرطی A از ۱۰۰۰ بزرگتر باشد A را بدحالت و در غیراینصورت آن را خوش حالت می نامند. اما به طور کلی چنین استدلالی نمی تواند دقیق باشد. برای اینکه کمی دقیق تر در مورد این موضوع بحث کنیم، نامساوی زیر را بخاطر آورید.

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \tag{۲۱}$$

حال فرض کنید داده های مسئله دارای دقت $d-$ رقم اعشار باشد یعنی

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \approx 5\times 10^{-d}, \quad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \approx 5\times 10^{-d}$$

و همچنین فرض کنید مقدار عددی $\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ از یک کوچکتر باشد آنگاه از (۲۱) داریم

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \lessapprox \kappa(A)(5\times 10^{-d}+5\times 10^{-d}) = 10^{1-d}\kappa(A)$$

فرض کنید $\|.\|$ یک نرم القایی باشد. فرض کنید که حداکثر خطای نسبی قابل قبول جواب 10^{-k} باشد آنگاه کافی است:

$$10^{1-d}\kappa(A) \leq 10^{-k}$$

یا

$$\kappa(A) \leq 10^{d-k-1} \tag{۲۲}$$

بنابراین اگر $\kappa(A) \leq 10^{d-k-1}$ باشد A را خوش حالت و در غیر اینصورت A را ماتریس بدحالت می نامیم. برای مثال فرض کنید برای دستگاه $AX=b$ داده های A و b دارای دقت ۴ رقم اعشار $(d=4)$ هست و دقتی در حد 10^{-2} برای خطای نسبی جواب $(k=2)$ مدنظر است آنگاه طبق (۲۲) داریم

$$\kappa(A) \leq 10^{4-2-1} = 10$$

پس اگر $\kappa(A) \leq 10$ آنگاه مسئله خوش وضع و چنانچه $\kappa(A) > 10$ مسئله را بدوضع می نامیم.
به عنوان مثالی دیگر فرض کنید خطای نسبی داده ها در حدود 5×10^{-5} یعنی $d=5$ و دقتی در حدود 10^{-2} مد نظر باشد $(k=2)$ آنگاه باید

$$\kappa(A) \leq 10^{5-2-1} = 100$$

پس اگر $\kappa(A) > 100$ باشد مسئله بدوضع خواهد بود.

مثال ۴.۱۷

مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۲/۰۱x_۲ = -۱ \end{cases}$$

فرض کنید Δb و ΔA به صورت زیر باشد

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -۱۰^{-۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{bmatrix} ۱۰^{-۴} \\ ۱۰^{-۴} \end{bmatrix}$$

اگر دقتی در حد $۱۰^{-۲}$ مد نظر باشد آنگاه مسئله فوق یک مسئله بدوضع در نظر گرفته می شود یا خوش وضع؟

حل: داریم

$$\frac{\|\Delta A\|_۱}{\|A\|_۱} \simeq ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} \leq ۵ \times ۱۰^{-۴}$$
$$\frac{\|\Delta b\|_۱}{\|b\|_۱} \simeq ۱ \times ۱۰^{-۴} \leq ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

از اینرو دقت داده های مسئله ۴ رقم بامعنی است پس $d = ۴$. از طرفی چون دقتی در حدود $۱۰^{-۲}$ خواسته شده است پس $k = ۲$ لذا

$$۱۰^{d-k-۱} = ۱۰^{۴-۲-۱} = ۱۰$$

پس اگر $\kappa(A) \leq ۱۰$ آنگاه مسئله خوش وضع و چنانچه $\kappa(A) > ۱۰$ مسئله بدوضع خواهد بود. از طرفی $\|A\|_۱ = ۴/۰۱$ و

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱۰۰/۵ & -۱۰۰ \\ -۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix}$$

پس $\|A^{-۱}\|_۱ = ۲۰۰/۵$ لذا

$$\kappa_۱(A) = \|A\|_۱\|A^{-۱}\|_۱ = ۴/۰۱ \times ۲۰۰/۵ = ۸۰۴/۰۰۵ > ۱۰$$

بنابراین مسئله بدوضع خواهد بود. توجه کنید که در این حالت

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} \approx ۱۰^{k-d+۱} = ۱۰^{۲-۴+۱} = ۱۰^{-۱}$$

پس حداکثر دقت جواب یک رقم اعشار خواهد بود! این واقعیت را می توان به طور مستقیم بررسی کرد.
جواب دستگاه اصلی:

$$AX = b \Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} ۲۰۰/۵ \\ -۲۰۰ \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه آشفته شده:

$$(A+\Delta A)\widetilde{X} = b+\Delta b \Rightarrow \widetilde{X} = \begin{bmatrix} ۲۲۲/۹۰۱۷ \\ -۲۲۲/۲۹۰۲ \end{bmatrix}$$

پس

$$\Delta X = \widetilde{X} - X^* = [۲۲/۴۰۱۷,\ -۲۲/۲۹۰۲]^T$$

و از آنجا

$$\frac{\|\Delta X\|_۱}{\|X\|_۱} = \frac{۴۴/۶۹۱۸}{۴۰۰/۵} \approx ۰/۱۱ \leq ۵ \times ۱۰^{-۱}$$

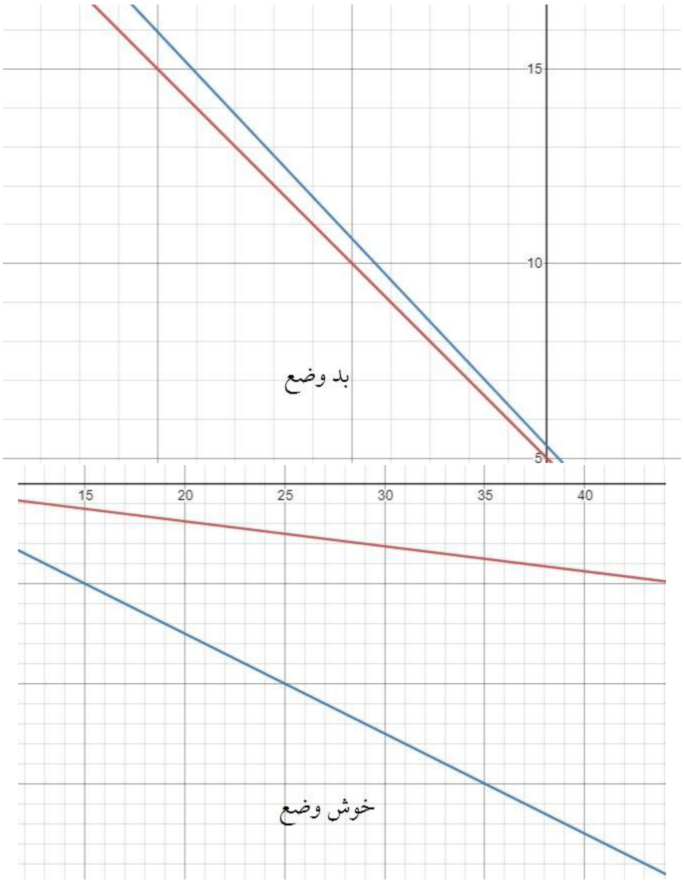
که نشان می دهد جواب به دست آمده تا ۱ رقم بامعنا ارتباط دارد.

۶ تعبیر هندسی دستگاه های بدوضع

دیدیم که در دستگاه $AX=b$ اگر $\kappa(A)$ مقداری بزرگ باشد آنگاه دستگاه را بدوضع و در غیر این صورت دستگاه را خوش وضع می نامیم. سوالی که مطرح است این است که آیا برای بدوضعی یک دستگاه می توان یک تعبیر هندسی ارائه نمود؟ به طور کلی برای یک دستگاه ۲ در ۲

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ = b_۲ \end{cases}$$

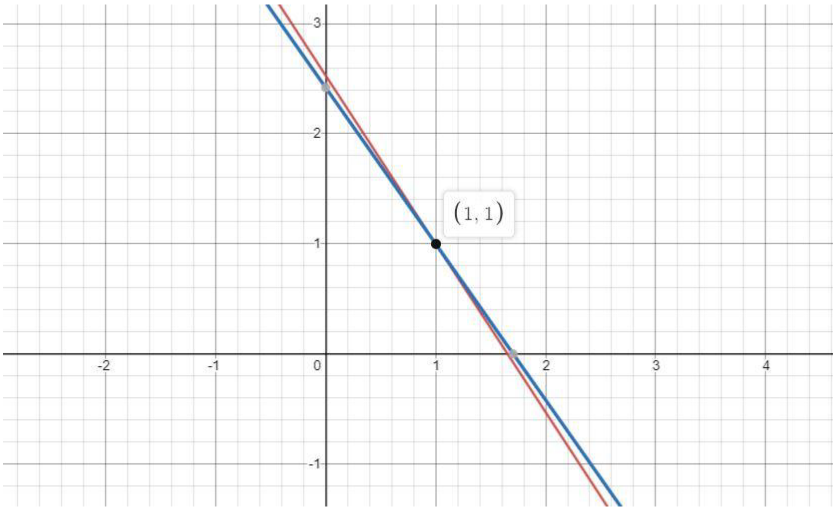
دستگاه بدوضع خواهد بود اگر دو خط (همان معادلات دستگاه) دارای شیب تقریبا برابری باشند (به شکل های زیر دقت کنید)



دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ۲/۶x_۱ + ۱/۷x_۲ = ۴/۳ \\ ۰/۴۴x_۱ + ۰/۳۱x_۲ = ۰/۷۵ \end{cases}$$

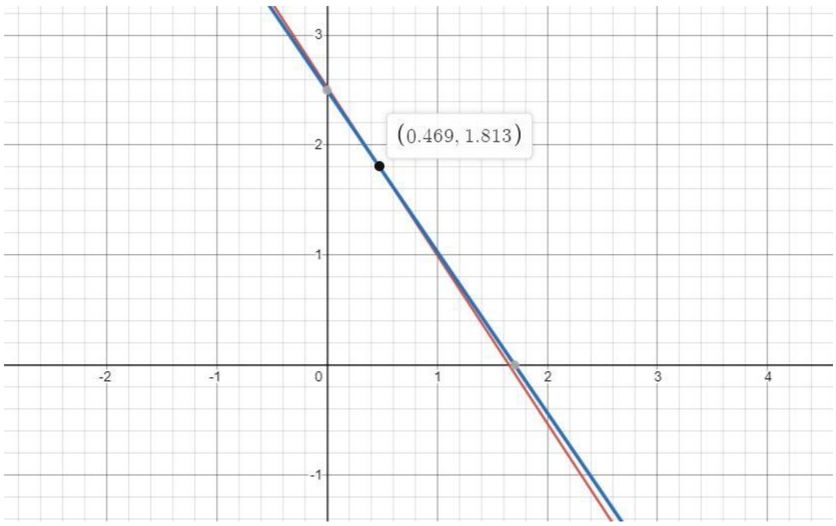
که دارای جواب $[۱, \ ۱]^T$ است. این دستگاه دارای دو معادله ی خط است که در ذیل رسم شده اند.(رنگ قرمز برای معادله اول و رنگ آبی برای معادله دوم)



همانطور که مشاهده می شود دو خط تقریبا موازی هم می باشد. بنابراین دستگاه داده شده بدوضع خواهد بود.
حال اگر ضریب $x_۲$ در خط دوم یعنی $۰/۴۴x_۱ + ۰/۳۱x_۲ = ۰/۷۵$ را از ۰/۳۱ به ۰/۳ تغییر دهیم به جواب تقریبی

$x_۱ \approx ۰/۴۷, \qquad x_۲ = ۱/۸$

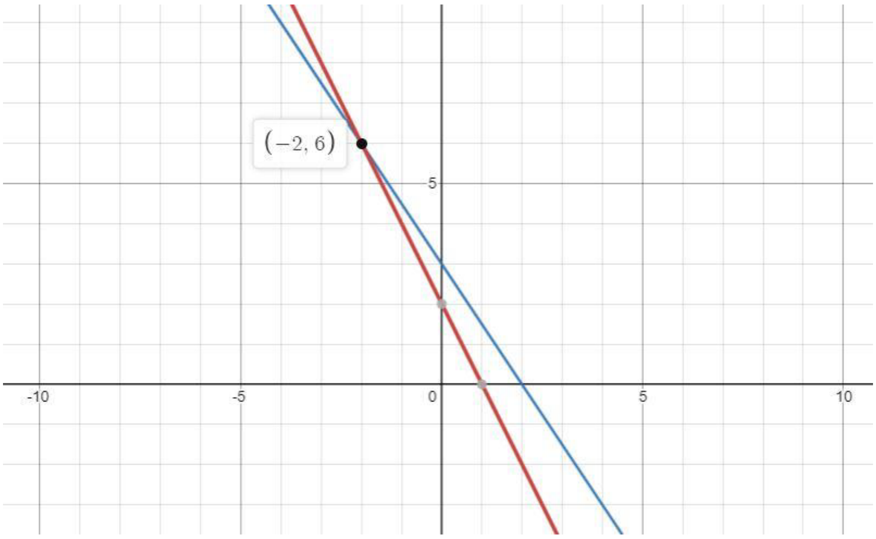
می رسیم. همانطور که میبینید نقطه تقاطع جابجا شده است. همچنین مشاهده می شود با کاهش ضریب $x_۲$ شیب خط آبی افزایش یافته و این باعث جابجایی نقطه تقاطع شده است.



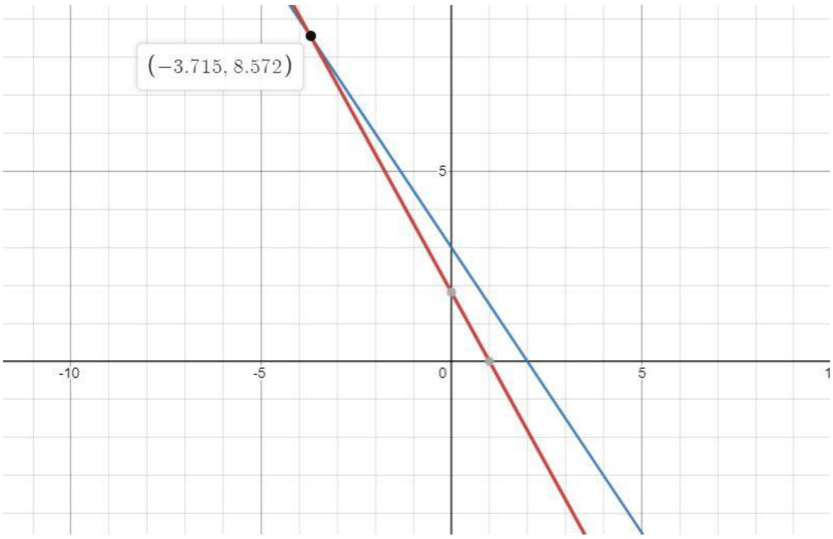
به عنوان یک مثال دیگر از یک دستگاه ۲×۲، دستگاه با ماتریس هیلبرت را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ = ۱ \\ \frac{۱}{۲}x_۱ + \frac{۱}{۳}x_۲ = ۱ \end{cases}$$

که دارای جواب دقیق $X^* = [-۲,\ ۶]^T$ می باشد. به شکل زیر دقت کنید.(معادله اول با رنگ قرمز و معادله دوم با رنگ آبی نمایش داده شده است)



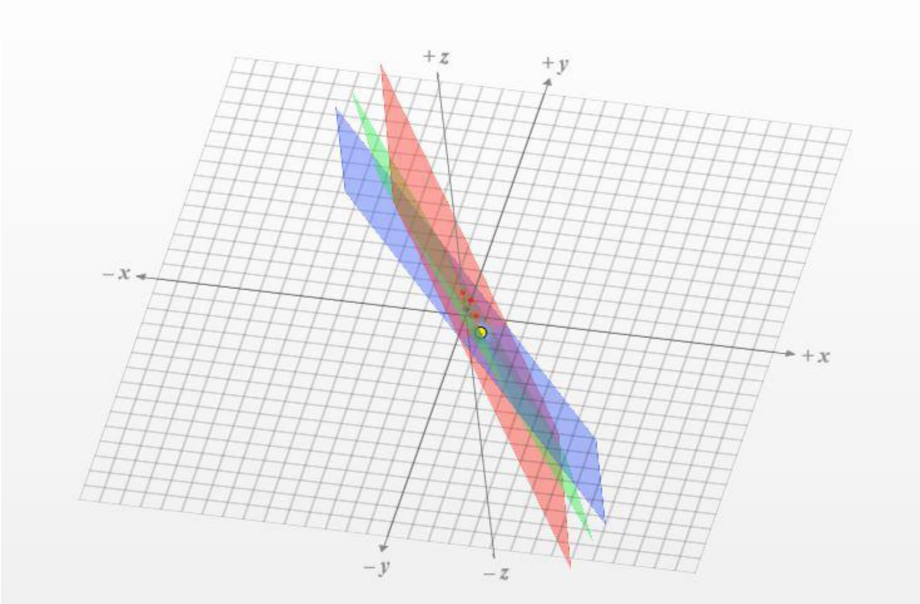
حال ضرایب $x_۲$ در معادله اول را از ۰/۵ به ۰/۵۵ تغییر می دهیم. این کار باعث کاهش شیب خط قرمز شده و در نمودار نقطه تقاطع از (۶ ,۲−) به (۸/۵۷۲ ,۳/۷۱۵−) تغییر یافته است که جابجایی زیاد جواب را نشان می دهد. همانطور که میبینید دو خط تقریبا موازی آبی و قرمز رنگ نسبت به کمترین تغییر جابجایی زیاد داشته و در نقطه تقاطع که همان جواب دستگاه است جابجایی زیاد خواهد داشت.



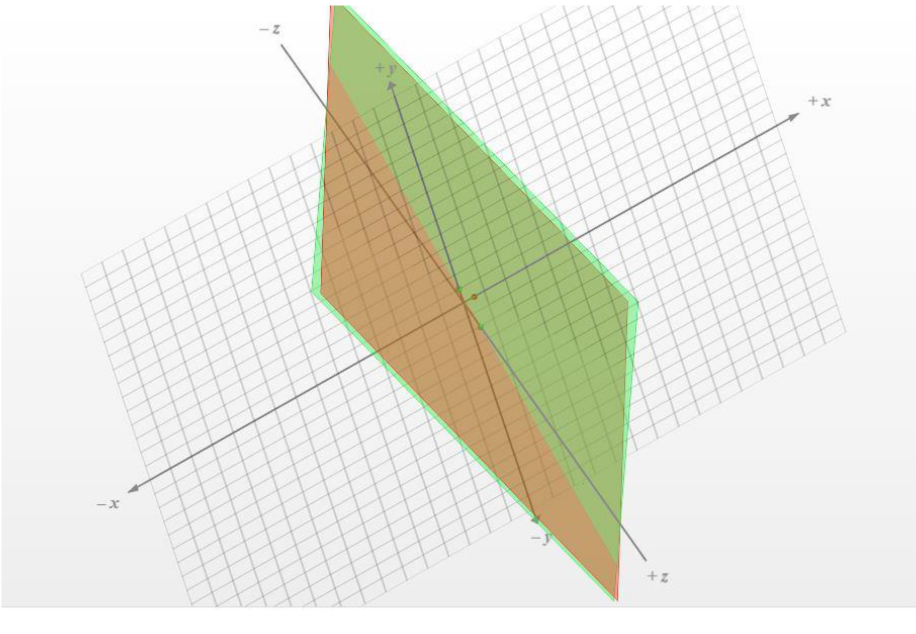
مثال: دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۱۲} \end{bmatrix}$$

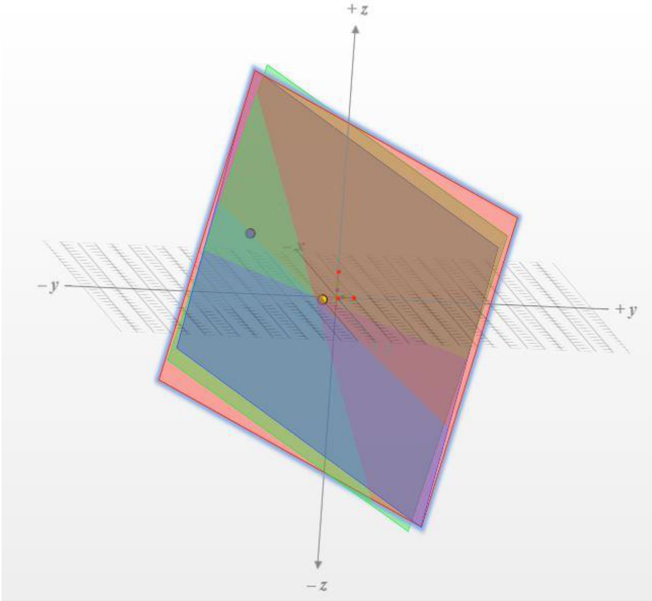
که دارای جواب دقیق $X^* = [۱,\ -۱,\ ۰]^T$ است. ابتدا معادلات این دستگاه به همراه نقطه X^* (نقطه زرد رنگ) را رسم می کنیم.

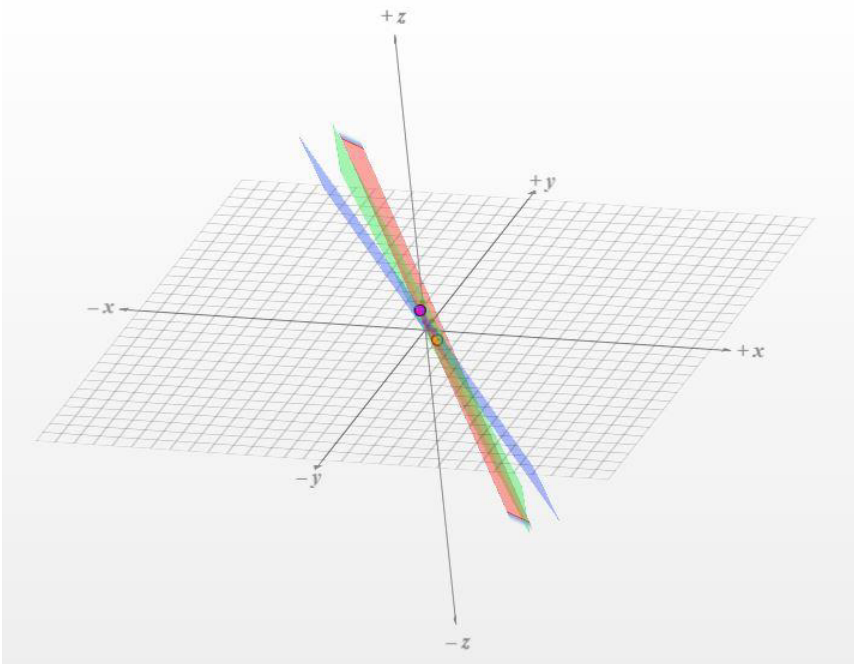


توجه کنید اولین معادله با رنگ قرمز، دومین معادله با رنگ سبز و سومین معادله با رنگ آبی نمایش داده شده است. بعلاوه نقطه تقاطع با رنگ زرد مشخص گردیده است. اکنون درایه $(۱,۱)$ ماتریس را از ۱ به ۰/۹۴ تغییر می دهیم. آنگاه جواب جدید دستگاه $X = [۲/۱۷۳۹,\ -۵/۶۹۵۷,\ ۳/۹۱۳۰]^T$ می باشد. برای درک بهتر شکل ها صفحه قرمز رنگ یعنی معادله اول دستگاه را در دو حالت قدیم و جدید رسم کرده ایم تا میزان تغییر این صفحه نمایان شود. همانطور که میبینید تغییر شکل صفحه ناچیز است اما همین تغییر ناچیز باعث جابجایی زیاد نقطه تقاطع خواهد شد.



همانطور که در شکل زیر مشاهده می کنید با چنین تغییری صفحه قرمز رنگ جابجا شده است که در نهایت باعث شده است محل تقاطع ۳ صفحه تغییر زیادی داشته باشد. در شکل محل تقاطع جدید با رنگ بنفش نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می شود محل تقاطع جابجایی زیادی داشته است.(به دو نقطه زرد و بنفش دقت کنید.)





تمرین ۴.۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰/۵ & ۰/۳۳۳۳ \\ -۳۶ & ۸ & ۶ \\ ۳۰ & -۷/۵ & -۶ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

قبلا دیدیم که ماتریس ضرایب این دستگاه بدحالت است.
الف - ابتدا سه معادله این دستگاه که هر یک صفحه ای در $\mathbb{R}^۳$ می باشند را در یک مختصات سه بعدی رسم کنید.
ب - سعی نمایید محل تقاطع این سه صفحه را تعیین نمایید. محل تقاطع همان جواب دستگاه فوق خواهد بود.

ج - اکنون در معادله اول ضریب ۰/۵ را به ۰/۶ تغییر دهید و شکل جدید حاصل از سه صفحه را بار دیگر رسم کنید و سپس محل تقاطع جدید را نمایش دهید. نقطه جدید نسبت به نقطه تقاطع قبلی چه میزان تغییر کرده است؟
به طور دقیق تر اگر X محل تقاطع قدیم و Y محل تقاطع جدید باشد آنگاه حاصل $\|X-Y\|$ را برای یک نرم دلخواه محاسبه کنید.

د - دلیل جابجایی نقطه X به Y را شرح دهید.

۷ برخی خواص عدد شرطی(عدد حالت)

در مطالب قبل دیدیم که عدد شرطی (عدد حالت) یک ماتریس A نقش بسیار مهمی را در تحلیل حساسیت دستگاه $AX=b$ ایفا می‌کند. از این‌رو نیاز است اطلاعات کافی درمورد $\kappa(A)$ و خواص آن را داشته باشیم. قبل از هر چیز با توجه به تعریف $\kappa(A)$ یعنی $\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ اگر ماتریس منفرد باشد یعنی A^{-1} وجود نداشته باشد، تعریف می‌کنیم $\kappa(A)=\infty$.
در سرتاسر این قسمت فرض کنید $\|.\|$ یک نرم القایی است.
در ذیل برخی از خواص عدد شرطی (عدد حالت) آورده شده است:

۱. برای هر $\alpha\neq 0$ و هر ماتریس دلخواه A داریم

$$\kappa(\alpha A)=\kappa(A) \tag{۲۳}$$

اثبات: با توجه به تعریف واضح است که

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha A)&=\|\alpha A\|\cdot\|(\alpha A)^{-1}\|=|\alpha|\|A\|\cdot\|\alpha^{-1}A^{-1}\|\\&=|\alpha|\|A\|\,|\alpha^{-1}|\,\|A^{-1}\|=\|A\|\,\|A^{-1}\|=\kappa(A)\end{aligned}$$

توجه کنید بنابر رابطه‌ی (۲۳) ضرب یک ماتریس در یک اسکالر دلخواه تاثیری در خوش‌وضعی یا بدوضعی آن نخواهد داشت. بنابراین اگر قصد حل دستگاه $AX=b$ با ماتریس بدوضع A را داشته باشیم آنگاه اینکه بخواهیم اسکالر $\alpha\neq 0$ را بیابیم به‌طوری که $\alpha AX=\alpha b$ دستگاهی خوش‌وضع باشد، امکان‌پذیر نیست.

۲. برای هر ماتریس A داریم $\kappa(A)\geq 1$

اثبات: چون نرم در تعریف $\kappa(A)$ یک نرم القایی است پس

$$1=\|I\|=\|AA^{-1}\|\leqslant\|A\|\,\|A^{-1}\|=\kappa(A)$$

بر طبق رابطه‌ی فوق خوش حالت‌ترین ماتریس A، ماتریسی است که $\kappa(A)=1$

۳. فرض کنید λ_{max} و λ_{min} به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژه A^TA (یا در حالت مختلط A^HA) باشند، آنگاه

$$k_2(A)=\frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$$

اثبات: فرض کنید A وارون‌پذیر باشد آنگاه A^TA معین مثبت است پس می‌توان مقادیر ویژه آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\lambda_{\max} = \lambda_n \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1 = \lambda_{\min} > 0$$

حال داریم

$$\rho((A^TA)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}}, \qquad \rho\left(A^TA\right) = \lambda_{\max}$$

در نتیجه

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^TA\right)} = \sqrt{\lambda_{\max}}$$
$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^{-T}A^{-1}\right)} = \sqrt{\rho\left(\left(AA^T\right)^{-1}\right)}$$

و چون برای هر دو ماتریس دلخواه F و E داریم $\rho(FE) = \rho(EF)$ پس

$$\rho\left(AA^T\right) = \rho\left(A^TA\right)$$

لذا داریم

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho((A^TA)^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$$

در نتیجه

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$$

و اثبات تمام است.

۴. فرض کنید Q ماتریسی متعامد باشد ($Q^TQ = I = QQ^T$) آنگاه

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(AQ) = \kappa_2(QA) = \kappa_2\left(Q^TAQ\right) \tag{24}$$

اثبات: تمرین

۵. برای هر ماتریس متعامد Q داریم $\kappa_2(Q) = 1$

اثبات: داریم

$$\|Q\|_2 = \sqrt{\rho\left(Q^TQ\right)} = \sqrt{\rho(I)} = \sqrt{1} = 1$$
$$\left\|Q^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho\left(Q^{-T}Q^{-1}\right)} = \sqrt{\rho((QQ^T)^{-1})} = \sqrt{\rho\left(I^{-1}\right)} = \sqrt{\rho(I)} = \sqrt{1} = 1$$

لذا

$$\kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \left\|Q^{-1}\right\|_2 = 1 \times 1 = 1$$

با توجه به خاصیت فوق برای ماتریس متعامد می توان گفت ماتریس‌های متعامد جزو خوش حالت‌ترین ماتریس‌ها می‌باشند از اینرو کار کردن با چنین ماتریس‌هایی در الگوریتم‌های عددی مورد توجه فراوان قرار می‌گیرد.

۶. برای هر ماتریس دلخواه A داریم:

$$\kappa_2\left(A^TA\right) = (\kappa_2(A))^2$$

اثبات: تمرین.

۷. برای ماتریس A داریم:

$$\kappa_2(A^T) = \kappa_2(A)$$

اثبات: واضح است زیرا

$$\kappa_2\left(A^T\right) = \|A^T\|_2\|(A^T)^{-1}\|_2 = \|A\|_2\|(A^{-1})^T\|_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \kappa_2(A).$$

۸. برای دو ماتریس A و B داریم

$$\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$$

اثبات: چون نرم در تعریف عدد شرطی (عدد حالت) خاصیت ضربی دارد پس

$$\begin{aligned}\kappa(AB) &= \|AB\| \left\|(AB)^{-1}\right\| = \|AB\| \left\|B^{-1}A^{-1}\right\| \\ &\leqslant \|A\|\|B\| \left\|B^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\| = \left(\|A\| \left\|A^{-1}\right\|\right) \left(\|B\| \left\|B^{-1}\right\|\right) = \kappa(A)\kappa(B)\end{aligned}$$

۹- برای هر ماتریس نامنفرد داریم

$$\kappa(A) = \kappa\left(A^{-1}\right)$$

اثبات: تمرین.

۱۰- فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ آنگاه روابط زیر برای عدد شرطی (عدد حالت) A برقرار است

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\kappa_2(A) \leq \kappa_1(A) \leq n\kappa_2(A)\\ &\frac{1}{n}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\kappa_\infty(A)\\ &\frac{1}{n^2}\kappa_1(A) \leq \kappa_\infty(A) \leq n^2\kappa_1(A)\end{aligned}$$

اثبات: تمرین.

۱۱- فرض کنید $\lambda_{\max}$ و $\lambda_{\min}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس متقارن A باشند. آنگاه

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

اثبات: داریم

$$\rho\left(A^TA\right) = \rho\left(A^2\right) = \rho^2(A) = \lambda_{\max}^2$$
$$\rho((A^TA)^{-1}) = \rho((A^2)^{-1}) = \left(\rho\left(A^{-1}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_{\min}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}^2}$$

پس

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^TA\right)} = \sqrt{\lambda_{\max}^2} = \lambda_{\max}$$
$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho\left((AA^T)^{-1}\right)} = \sqrt{\rho\left(A^TA\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}^2}} = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

بنابراین برای ماتریس متقارن A داریم

$$\boxed{\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$$

توجه ۴.۱۷

برای دیدن تاثیر مقیاس کردن در بدحالتی دستگاه به پیوست فصل چهارم تحت عنوان تاثیر مقیاس کردن در بدحالتی دستگاه مراجعه نمایید.

۸ محاسبه‌ی عدد حالت

برای محاسبه‌ی عدد حالت یک ماتریس با توجه به تعریف ابتدا باید A^{-1} محاسبه شود سپس نرم‌های $\|A\|$ و $\|A^{-1}\|$ محاسبه شده و از آن $\kappa(A)$ محاسبه گردد. امّا همان‌طور که در فصل‌های بعد خواهیم دید محاسبه‌ی A^{-1} در عمل کار بسیار مشکلی است و هزینه محاسباتی از $O(n^3)$ خواهد داشت. بعلاوه چه لزومی دارد که $\kappa(A)$ به طور دقیق محاسبه گردد. گاهاً تنها داشتن تقریبی از $\kappa(A)$ برای اینکه بدانیم دستگاه $AX = b$ بدوضع و یا خوش وضع است کفایت می‌کند. توجه کنید علت اصلی اینکه اصرار داریم قبل از حل یک دستگاه متوجه شویم دستگاه بدوضع و یا خوش وضع است این است که به هیچ طریقی نباید به سراغ حل یک دستگاه بدوضع برویم. درواقع چنانچه بتوانیم از قبل متوجه شویم دستگاه $AX = b$ بدوضع است آنگاه باید به کمک تکنیکی که آن را خوش حالت سازی می‌نامند(در ادامه این فصل این تکنیک را بیان می‌کنیم) دستگاه $AX = b$ را به دستگاه خوش وضع $\hat{A}\hat{X} = \hat{b}$ تبدیل کرده و سپس با حل این دستگاه خوش وضع بتوانیم جواب دستگاه اصلی را بیابیم.

توجه ۴.۱۸

روش‌های متنوعی برای تخمین زدن $\kappa(A)$ وجود دارد و همان‌طور که می دانیم برای محاسبه‌ی $\kappa(A)$ تنها محاسبه‌ی $\|A^{-1}\|$ می‌تواند با مشکل همراه باشد. برای تقریب $\|A^{-1}\|$ راهکارهای نسبتاً ساده ای وجود دارد.
علاقمندان برای مطالعه بیشتر در این مورد به پیوست فصل چهارم تحت عنوان تقریب عدد حالت مراجعه نمایید.

۹ عدد حالت یک ماتریس یا دترمینان آن ماتریس، کدام مهم‌ترند؟

توجه ۴.۱۹

مثال‌های نقض متعددی وجود دارند که نشان می‌دهند دترمینان یک ماتریس نمی‌تواند بدوضعی یا خوش وضعی آن ماتریس را همیشه و به خوبی بیان کند در حالی که از کوچک یا بزرگ بودن عدد حالت یک ماتریس می‌توان به ترتیب به خوش وضعی یا بدوضعی آن پی برد یعنی عدد حالت واقع بینانه‌تر قضاوت می‌کند.

مثال ۴.۱۸

ماتریس A را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} -0/0053 & -0/0031 \\ 0/0031 & -0/0053 \end{bmatrix}$$

عدد حالت این ماتریس در نرم ۲ برابر با ۱ است. این بدان معنی است که ماتریس خوش حالت است. اما اگر دترمینان این ماتریس را محاسبه کنیم داریم

$$\det(A) = 3/77 \times 10^{-5}$$

که مقداری کوچک است پس A نزدیک یک ماتریس منفرد است. همانطور که می بینیم نزدیک بودن دترمینان یک ماتریس به صفر نمی تواند بدوضعی یا خوش وضعی آن را نشان دهد.

مثال ۴.۱۹

ماتریس بالا مثلثی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

دترمینان ماتریس فوق همیشه ۱ است. نشان دهید

$$\kappa_2(\mathbf{U}) = \cot^2 \frac{\pi}{4n}$$

می توان مشاهده کرد با افزایش n عبارت داخل کتانژانت به صفر میل کرده که نتیجتا کتانژانت آن بزرگ‌تر می‌شود. در نهایت افزایش n باعث افزایش عدد شرطی (عدد حالت) ماتریس U خواهد شد. بنابراین علی رغم اینکه مقدار دترمینان کوچک و ۱ است عدد شرطی (عدد حالت) ماتریس بزرگ خواهد بود.

مثال ۴.۲۰

ماتریس $U_{n\times n}$ را در نظر بگیرید.

$$U = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & \cdots & \cdots & -۱ \\ & ۱ & -۱ & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -۱ \\ & & & & ۱ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

دترمینان ماتریس فوق همیشه ۱ است، از طرفی:

$$\kappa_\infty(U) = n۲^{n-۱}$$

پس با افزایش n عدد شرطی (عدد حالت) ماتریس U بزرگ خواهد شد. بنابراین علی رغم اینکه مقدار دترمینان کوچک و ۱ است عدد شرطی (عدد حالت) ماتریس بزرگ خواهد بود.

مثال ۴.۲۱

ماتریس قطری $A = ۱۰^{-۵۰} I$ دترمینان بسیار کوچکی دارد، اما عدد شرطی (عدد حالت) اش در هر نرمی برابر ۱ است پس خوش حالت است.

مثال ۴.۲۲

عدد حالت ماتریس قطری $A_{۱۰۰\times۱۰۰}$ را به دست می‌آوریم.

$$A = diag[۰/۱, \ldots, ۰/۱]$$

$$\det(A) = (۰/۱)^{۱۰۰} \cong ۰, \qquad A^{-۱} = \operatorname{diag}\left(\frac{۱}{۰/۱}, \ldots, \frac{۱}{۰/۱}\right) = \operatorname{diag}(۱۰, \ldots, ۱۰)$$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-۱}\right\|_\infty = ۰/۱ \times ۱۰ = ۱$$

توجه ۴.۲۰

همان‌طور که در مثال بالا دیده شد عدد حالت ماتریس A به درستی از خوش وضع بودن آن خبر می‌دهد. بخصوص باید به این حقیقت توجه کرد که حل دستگاه $AX = b$ در مثال بالا خیلی ساده است.

۱۰ روش تصفیه تکراری برای بهبود جواب دستگاه‌های بد وضع

فرض کنید $X_۰$ یک جواب محاسبه شده برای دستگاه $AX = b$ باشد. در حالتی که دستگاه بد وضع باشد احتمالا $X_۰$ از دقت خوبی برخوردار نخواهد بود. از این‌رو

$$AX_۰ \neq b,$$

بنابراین بردار باقی‌مانده $r_۰ = b - AX_۰$ ناصفر است. فرض کنید X^* جواب دقیق دستگاه $AX = b$ باشد پس $b = AX^*$ از این‌رو

$$r_۰ = b - AX_۰ = AX^* - AX_۰ = A(X^* - X_۰) \tag{۲۵}$$

چون X_0 جواب تقریبی دستگاه است پس $X^* \neq X_0$ و در نتیجه $X^* - X_0 \neq 0$ با تعریف بردار خطا $E_0 = X^* - X_0$ از (۲۵) داریم

$$AE_0 = r_0 \tag{۲۶}$$

پس اگر بتوانیم از حل (۲۶) مقدار دقیق E_0 را بیابیم آنگاه از $E_0 = X^* - X_0$ داریم

$$X^* = X_0 + E_0 \tag{۲۷}$$

که جواب دقیق حاصل می‌شود. رابطه‌ی (۲۷) نشان می‌دهد که اگر مقدار خطای E_0 را به جواب تقریبی X_0 اضافه کنیم به جواب دقیق X^* خواهیم رسید.
اما محاسبه‌ی دقیق E_0 در عمل امکان‌پذیر نمی‌باشد چرا که برای محاسبه‌ی E_0 باید دستگاه (۲۶) را یعنی $AE_0 = r_0$ را حل کنیم و چون ماتریس ضرایب این دستگاه همان ماتریس A است که بد وضع نیز می‌باشد، لذا تنها به تقریبی از E_0 می توان اکتفا نمود. مثلا فرض کنید $\tilde{E}_0$ تقریبی از E_0 باشد آنگاه از (۲۷) می‌توان نوشت:

$$X_1 = X_0 + \tilde{E}_0$$

که جوابی با دقت بهتر از X_0 است. حال برای اینکه جواب X_1 را بهبود دهیم ابتدا باقی‌مانده r_1 را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$r_1 = b - AX_1 = AX^* - AX_1 = A(X^* - X_1)$$

پس با تعریف بردار خطا $E_1 = X^* - X_1$ داریم

$$AE_1 = r_1$$

این نشان می دهد که بردار خطای E_1 در یک دستگاه با همان ماتریس ضرایب A صدق می‌کند. به دلایل مشابه محاسبه‌ی دقیق E_1 در عمل امکان‌پذیر نیست و تنها می‌توان تقریبی از آن مثل $\tilde{E}_1$ را محاسبه نمود. در این‌صورت از $E_1 = X^* - X_1$ داریم

$$X^* = X_1 + E_1$$

و با داشتن $\tilde{E}_1$ به عنوان تقریبی از E_1 خواهیم داشت:

$$X_2 = X_1 + \tilde{E}_1$$

که انتظار داریم جوابی با دقت بهتر از جواب X_1 باشد. با ادامه‌ی این روند در هر مرحله جواب X_k را بهبود داده و جواب X_{k+1} را محاسبه می کنیم. این روش را تصیفه تکراری یا بهبود تکراری (Iterative refinement) می‌نامند.
در روش تصیفه تکراری به چند نکته می‌بایست توجه داشت:

۱. در هر مرحله لازم است دستگاهی با ماتریس ضرایب A حل شود تا خطای E_k را محاسبه کنیم از این‌رو اگر تجزیه LU ماتریس A در دسترس باشد و اینکه در مرحله‌ی kـام داریم $AE_k = r_k$ و چون $A = LU$ آنگاه خواهیم داشت $LUE_k = r_k$ پس با تعریف $Y_k = UE_k$ خواهیم داشت

$$LY_k = r_k \to Y_k \text{ حل دستگاه پایین مثلثی جهت محاسبه‌ی }$$
$$UE_k = Y_k \to E_k \text{ حل دستگاه بالا مثلثی جهت محاسبه‌ی }$$

قبلا تذکر دادیم که چون A بد وضع است در این مرحله تنها تقریبی از E_k یعنی $\tilde{E}_k$ به دست می‌آید.

۲. در درس مبانی آنالیز عددی دیده‌ایم که هنگام تفریق دو عدد نزدیک به هم حذف ارقام با معنی رخ می‌دهد. در اینجا برای محاسبه‌ی بردار مانده ها یعنی

$$r_k = b - AX_k = AX^* - AX_k$$

چون بردارهای AX^* و AX_k به هم نزدیک هستند پس در هنگام تفریق آن‌ها حذف ارقام با معنی رخ خواهد داد. از این‌رو لازم است محاسبه‌ی $r_k = AX^* - AX_k$ با دقت مضاعف انجام شود و در دقت ساده گرد گردد.

مثلا اگر محاسبات را با ۴ رقم انجام می‌دهیم، آنگاه بردار مانده را با دقت ۸ رقمی محاسبه می‌کنیم و سپس با دقت ۴ رقم اعشار گرد می‌کنیم.

در اینجا چند عدد با تعداد ارقام با معنای مختلف را مشاهده می کنید

$$\begin{array}{lll}
۱۰ \quad (۲d) & ۱۰۰ \quad (۳d) & ۱۰۰۰ \quad (۴d) \\
۰/۰۱ \quad (۱d) & ۰/۰۱۰ \quad (۲d) & ۰/۰۱۰۰ \quad (۳d) \\
۱/۲۱ \quad (۳d) & -۱۶/۰۲۰ \quad (۵d) & ۰/۰۰۲ \quad (۱d)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
۱۱/۰۲۱ \quad (۵d) & ۰/۰۲۰ \quad (۲d) & -۰/۰۰۷۰ \quad (۲d) \\
۱/۲ \quad (۲d) & ۱/۲۰ \quad (۳d) & ۱/۲۰۰ \quad (۴d) \\
۰/۰۱ \quad (۱d) & ۰/۰۱۰ \quad (۲d) & ۰/۰۱۰۰ \quad (۳d) \\
۰/۰۱۰۱ \quad (۳d) & -۰/۰۰۲۰۳۰ \quad (۴d) & ۰/۰۰۵۰۶۰۱۰ \quad (۶d)
\end{array}$$

توجه کنید برای اعدادی که در بازه ی $(-۱, ۱)$ قرار می گیرند صفرهای بعد از ممیز را نمی شماریم.

مثال ۴.۲۳

دستگاه داده شده

$$\begin{cases} ۳/۹x_۱ + ۱/۶x_۲ = ۵/۵ \\ ۶/۸x_۱ + ۲/۹x_۲ = ۹/۷ \end{cases} \tag{۲۸}$$

را با جواب دقیق $X^* = [۱, \quad ۱]^T$ در نظر بگیرید.

ابتدا این دستگاه را با روش حذفی گاوس حل می‌کنیم تا جواب تقریبی $X_۰$ را به دست آوریم. محاسبات را در دقت ساده با ۳ رقم اعشار و در دقت مضاعف با ۶ رقم اعشار محاسبه می کنیم. داریم (3d)

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳/۹ & ۱/۶ & ۵/۵ \\ ۶/۸ & ۲/۹ & ۹/۷ \end{array}\right]$$

داریم

$$m_{۲۱} = -\frac{۶/۸}{۳/۹} = -۱/۷۴$$

با اعمال $R_۲ \longrightarrow R_۲ + m_{۲۱}R_۱$ درایه های سطر دوم ماتریس افزوده فوق به صورت زیر تغییر می کنند

$$\begin{aligned}
۶/۸ + m_{۲۱} \times ۳/۹ &= ۶/۸ - ۱/۷۴ \times ۳/۹ = ۰/۰۱۰۰ \\
۲/۹ + m_{۲۱} \times ۱/۶ &= ۲/۹ - ۱/۷۴ \times ۱/۶ = ۰/۱۲۰ \\
۹/۷ + m_{۲۱} \times ۵/۵ &= ۹/۷ - ۱/۷۴ \times ۵/۵ = ۰/۱۳۰
\end{aligned}$$

پس

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳/۹ & ۱/۶ & ۵/۵ \\ ۶/۸ & ۲/۹ & ۹/۷ \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} ۳/۹ & ۱/۶ & ۵/۵ \\ ۰/۰۱۰۰ & ۰/۱۲۰ & ۰/۱۳۰ \end{array}\right]$$

دستگاه اخیر که تقریبا بالا مثلثی است را با جایگذاری پسرو حل می‌کنیم

$$x_2 = \frac{0/13}{0/12} = 1/08$$
$$x_1 = \frac{5/5 - 1/6x_2}{3/9} = \frac{3/77}{3/9} = 0/967$$

پس روش حذفی گاوس جواب تقریبی $X_0 = [0/967,\ 1/08]^T$ را می‌دهد که جواب قابل قبولی نیست. باقی‌مانده به ازای X_0 برابر است با (6d)

$$r_0 = b - AX_0 = \begin{bmatrix} 5/5 \\ 9/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/9 & 1/6 \\ 6/8 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/967 \\ 1/08 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5/5 \\ 9/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/499930 \\ 9/707760 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/000700000 \\ -0/00760000 \end{bmatrix}$$

اکنون با گرد کردن باقی‌مانده در دقت ساده (3d) داریم

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0/000700 \\ -0/00760 \end{bmatrix}$$

در این گام برای بهبود جواب می‌بایست دستگاه $AE_0 = r_0$ را حل کنیم

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3/9 & 1/6 & 0/000700 \\ 6/8 & 2/9 & -0/00760 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3/9 & 1/6 & 0/000700 \\ 0/0100 & 0/120 & -0/00882 \end{array}\right]$$

و از حل دستگاه پایین مثلثی فوق داریم

$$e_2 = \frac{-0/00882}{0/120} = -0/0735$$
$$e_1 = \frac{0/000700 - 1/6e_2}{3/9} = \frac{0/119}{3/9} = 0/0305$$

بنابراین جواب تقریبی X_0 به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$X_1 = X_0 + \tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} 0/967 \\ 1/08 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/0305 \\ -0/0735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/997 \\ 1/01 \end{bmatrix}$$

همانطوریکه دیده می شود جواب با این روند بهتر شده است اما هنوز با جواب قابل قبول فا صله دارد. برای X_1 باقی‌مانده به صورت زیر است (6d)

$$r_1 = b - AX_1 = \begin{bmatrix} 5/5 \\ 9/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/9 & 1/6 \\ 6/8 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/997 \\ 1/01 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5/5 \\ 9/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/50430 \\ 9/70860 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/00430000 \\ -0/00860000 \end{bmatrix}$$

اکنون با گرد کردن مانده در دقت ساده (3d) داریم

$$r_1 = \begin{bmatrix} -0/00430 \\ -0/00860 \end{bmatrix}$$

در این گام برای بهبود جواب X_1 می‌بایست دستگاه $AE_1 = r_1$ را حل کنیم

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳/۹ & ۱/۶ & -۰/۰۰۴۳۰ \\ ۶/۸ & ۲/۹ & -۰/۰۰۸۶۰ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} ۳/۹ & ۱/۶ & -۰/۰۰۴۳۰ \\ ۰/۰۱۰۰ & ۰/۱۲۰ & -۰/۰۰۱۱۲ \end{array}\right]$$

از حل دستگاه بالا مثلثی فوق داریم

$$e_۲ = \frac{-۰/۰۰۱۱۲}{۰/۱۲۰} = -۰/۰۰۹۳۳$$
$$e_۱ = \frac{-۰/۰۰۴۳۰ - ۱/۶e_۲}{۳/۹} = \frac{۰/۰۱۰۶}{۳/۹} = ۰/۰۰۲۷۲$$

پس $X_۱$ به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$X_۲ = X_۱ + \tilde{E}_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۷ \\ ۱/۰۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰۰۲۷۲ \\ -۰/۰۰۹۳۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰ \\ ۱/۰۰ \end{bmatrix}$$

همانطور که می‌بینید جواب $X_۲$ کاملا به جواب اصلی $X^* = [۱, ۱]^T$ نزدیک است.
به یک مثال دیگر توجه کنید

مثال ۴.۲۴

دستگاه زیر با جواب دقیق $X^* = [۲, -۳]^T$ داده شده است.

$$\begin{cases} ۱/۳x_۱ + ۰/۸۶x_۲ = ۰/۰۲ \\ ۰/۲۲x_۱ + ۰/۱۴x_۲ = ۰/۰۲ \end{cases}$$

با فرض اینکه $X_۰ = [۱/۹, -۲/۹]^T$ جواب تقریبی برای دستگاه فوق باشد. با استفاده از روش تصفیه تکراری جواب $X_۰$ را در محاسبات ۲ رقمی اعشار تصحیح نمایید.

حل: با استفاده از جواب $X_۰$ مانده $r_۰$ را در حساب ۴ رقمی اعشار (مضاعف) محاسبه می‌کنیم

$$r_۰ = b - AX_۰ = \begin{bmatrix} ۰/۰۲ \\ ۰/۰۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱/۳ & ۰/۸۶ \\ ۰/۲۲ & ۰/۱۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۹ \\ -۲/۹ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۰/۰۲ \\ ۰/۰۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۰/۰۲۴۰۰ \\ ۰/۰۱۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۴۴۰۰ \\ ۰/۰۰۸۰۰۰ \end{bmatrix}$$

که با گرد کردن آن در دقت ساده (2d) داریم

$$r_۰ = \begin{bmatrix} ۰/۰۴۴ \\ ۰/۰۰۸۰ \end{bmatrix}$$

اکنون با حل دستگاه $AE_۰ = r_۰$ داریم (با روش حذفی گاوس)

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۱/۳ & ۰/۸۶ & ۰/۰۴۴ \\ ۰/۲۲ & ۰/۱۴ & ۰/۰۰۸۰ \end{array}\right]$$

ضربگر $m_{۲۱}$ برابر است با

$$m_{۲۱} = -\frac{۰/۲۲}{۱/۳} = -۰/۱۷$$

بنابراین سطر دوم ماتریس افزوده فوق به صورت زیر تغییر خواهد کرد

$$\begin{aligned}
&0/22 + m_{21} \times 1/3 = 0/22 - 0/17 \times 1/3 = 0 \\
&0/14 + m_{21} \times 0/86 = 0/14 - 0/17 \times 0/86 = -0/010 \\
&0/0080 + m_{21} \times 0/044 = 0/0080 - 0/17 \times 0/044 = 0/00050
\end{aligned}$$

پس ماتریس افزوده جدید چنین خواهد بود

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1/3 & 0/86 & 0/044 \\ 0 & -0/010 & 0/00050 \end{array}\right]$$

حال از حل دستگاه بالا مثلثی فوق داریم

$$e_2 = \frac{0/00050}{-0/010} = -0/050$$
$$e_1 = \frac{0/044 - 0/86e_2}{1/3} = \frac{0/087}{1/3} = 0/067$$

بنابراین $\tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} 0/067 \\ -0/050 \end{bmatrix}$ و جواب X_0 به صورت زیر تصحیح می‌شود

$$X_1 = X_0 + \tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/067 \\ -0/050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/0 \\ -3/0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که جواب X_1 به جواب واقعی $X^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ نزدیک شده است.

توجه ۴.۲۱

برای دیدن آنالیز همگرایی روش تصفیه تکراری به پیوست فصل چهارم تحت عنوان آنالیز همگرایی روش تصفیه تکراری مراجعه نمایید.

۱۱ خوش‌حالت سازی

در این فصل دیدیم که از حل یک دستگاه بدوضع $AX = b$ به طور کلی باید اجتناب ورزید. در واقع دو رویکرد کلی در مواجهه باچنین دستگاههایی داریم :

- عموماً دستگاه $AX = b$ از مدل شده‌ی یک پدیده‌ی طبیعی توسط یک معادله دیفرانسیل یا یک معادله انتگرال و یا غیره و به طبع آن بوجود می‌آید و یا از حل یک مساله کاربردی استخراج شده است، پس اگر بعد از مدل‌بندی به چنین دستگاه بدوضعی برخورد کردیم سعی کنیم از اول در صورت امکان با یک روش و ایده‌ی دیگر پیش بریم تا به چنین دستگاه بد وضعی برخورد نکنیم. البته باید توجه کنیم که چنین کاری ممکن است در عمل امکان پذیر نباشد.
- قبل از حل دستگاه $AX = b$ آن را خوش‌حالت کرده و سپس دستگاه خوش حالت شده را حل کنیم.

به طور کلی به رویکرد دوم خوش‌حالت سازی و یا پیش‌شرط سازی گفته می‌شود. قبلاً دیدیم که خوش‌حالت سازی در عمل ممکن است قابل انجام باشد. مثلاً در بخش مقیاس کردن دیدیم که با مقیاس مناسب ماتریس A می‌توان آن را خوش‌حالت نمود. به علاوه یک راه کلی هم برای حل مسائل بدوضع، یعنی روش تصفیه تکراری، بیان کردیم. اما دیدیم که برای بهبود واقعی جواب در این روش باید محاسبات را در دقت بالا یعنی با حساب ارقام اعشاری زیاد انجام دهیم که در خیلی از مواقع مقرون به صرفه نیست.

در بحث خوش‌حالت سازی دستگاه $AX = b$ می‌خواهیم ماتریس معکوس پذیر M را طوری حساب کنیم که با ضرب آن در طرفین دستگاه از سمت چپ، دستگاه حاصل

$$MAX = Mb \tag{۲۹}$$

خوش‌حالت گردد یعنی به عبارتی : $\kappa(MA) < \kappa(A)$

گاهی اوقات ممکن است ماتریس $M^{-۱}$ را طوری پیدا کنیم که دستگاه

$$M^{-۱}AX = M^{-۱}b \tag{۳۰}$$

خوش‌حالت گردد یعنی به عبارتی : $\kappa(M^{-۱}A) < \kappa(A)$

در این فصل عمدتا هدف از خوش حالت سازی تبدیل دستگاه $AX = b$ به صورت $MAX = Mb$ است یعنی به دنبال ماتریس M هستیم مگر اینکه صریحا بیان شود هدف تبدیل $AX = b$ به صورت $M^{-۱}AX = M^{-۱}b$ یعنی به دنبال یافتن $M^{-۱}$ هستیم.

توجه ۴.۲۲

لازم است تاکید کنیم در حالت کلی برای هر ماتریس دلخواه A نحوه‌ی محاسبه ماتریس M مشخص نگردیده‌است (یعنی این مو ضوع در حالت کلی یک مساله باز است).

در ادامه قصد داریم به بعضی از روش‌های رایج برای محاسبه‌ی M بپردازیم. توجه کنید که وقتی A ساختار خاصی دارد مثلاً متقارن معین مثبت باشد روش‌های مشخصی برای خوش‌حالت سازی وجود دارند.

همانطور که می دانیم ماتریس I خوش حالت است پس اگر در رابطه‌ی (۲۹) انتخاب کنیم $M = A^{-۱}$ آنگاه برای یک نرم القایی داریم :

$$\kappa(MA) = \kappa(A^{-۱}A) = \kappa(I) = ۱$$

یعنی دستگاه (۲۹) در این حالت به بهترین وضع (از لحاظ خوش‌حالتی) رسیده است.

اما در عمل محاسبه‌ی $M = A^{-۱}$ امکان پذیر نیست زیرا محاسبه $A^{-۱}$ در حالت کلی بسیار مشکل‌تر از حل دستگاه $AX = b$ است.

بحث اخیر پیشنهاد می کند که اگر M ماتریسی نزدیک به $A^{-۱}$ باشد آنگاه با توجه به اینکه MA به ماتریس همانی نزدیک می‌شود انتظار داریم دستگاه جدید (۲۹) خوش‌وضع شود. بنابراین سعی می‌گردد ماتریس M طوری انتخاب شود که به $A^{-۱}$ نزدیک شود تا MA نیز به I نزدیک گردیده و در اینصورت : $\kappa(MA) \approx \kappa(I) = ۱$

روش های مختلفی برای خوش حالت سازی وجود دارد از جمله:

۱- روش خوش حالت سازی چندجمله ای ،
۲- روش خوش حالت سازی قطری،
۳- روش تجزیه ناقض LU
۴- روش تجزیه ناقض چولسکی،
۵- جداساز های روش های تکراری ....

در این درس مورد دوم و پنجم بیان می گردند.

توجه ۴.۲۳

علاقمندان برای دیدن موارد دیگر به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۱.۱۱ خوش‌حالت کننده‌های قطری

فرض کنید ماتریس بدحالت A داده شده است. می‌خواهیم ماتریس قطری M را طوری بیابیم که ماتریس MA خوش‌حالت باشد. اگر $A=(a_{ij})$ آنگاه ۲ انتخاب زیر به طور معمول وجود دارند

$$۱)\qquad M_۱=\operatorname{diag}\left(\frac{۱}{a_{۱۱}},\frac{۱}{a_{۲۲}},\cdots,\frac{۱}{a_{nn}}\right);\quad a_{ii}\neq ۰$$

$$۲)\qquad M_۲=\operatorname{diag}\left(\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{n}a_{۱j}^۲}},\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{n}a_{۲j}^۲}},\cdots,\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{n}a_{nj}^۲}}\right)$$

توجه کنید که دو ماتریس خوش‌حالت کننده‌ی فوق در اغلب موارد باعث خوش حالتی ماتریس A خواهد شد.
توجه: به طور معمول از خوش‌حالت کننده‌ی ۱ وقتی که A، متقارن معین مثبت است استفاده می‌شود.
توجه: به خوش حالت کننده‌ی ۱، خوش حالت کننده ژاکوبی(بعدا خواهیم دید) نیز گفته می‌شود.

در ادامه به ارائه چند مثال از خوش‌حالت کننده‌های فوق می‌پردازیم.

مثال ۴.۲۵

دستگاه بد وضع $AX=b$ را که در آن

$$A=\begin{bmatrix}۷/۵ & ۹/۲\\ ۰/۲۱ & ۰/۲۵\end{bmatrix},\quad \kappa_۱(A)\approx ۲/۷۷\times ۱۰^۳,\qquad b=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. این ماتریس را خوش حالت نمایید.

حل: محاسبات را در نرم افزار متلب انجام داده ایم. ابتدا از خوش‌حالت کننده‌ی ۱ استفاده می‌کنیم

$$M_۱=\operatorname{diag}(\frac{۱}{a_{۱۱}},\frac{۱}{a_{۲۲}})=\operatorname{diag}(\frac{۱}{۷/۵},\frac{۱}{۰/۲۵})=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۷/۵} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۰/۲۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۳۳۳ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$$

سپس داریم

$$M_۱A=\begin{bmatrix}۰/۱۳۳۳ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷/۵ & ۹/۲\\ ۰/۲۱ & ۰/۲۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۰۰۰۰ & ۱/۲۲۶۷\\ ۰/۸۴۰۰ & ۱/۰۰۰۰\end{bmatrix}$$

حال $\kappa_۱(M_۱A)$ را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم ماتریس $M_۱A$ خوش حالت می‌باشد یا خیر.
داریم

$$(M_۱A)^{-۱}=A^{-۱}M_۱^{-۱}=\begin{bmatrix}-۴/۳۸۶۰ & ۱۶۱/۴۰۳۵\\ ۳/۶۸۴۲ & -۱۳۱/۵۷۸۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷/۵ & ۰\\ ۰ & ۰/۲۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳۲/۸۹۴۷ & ۴۰/۳۵۰۹\\ ۲۷/۶۳۱۶ & -۳۲/۸۹۴۷\end{bmatrix}$$

بنابراین $\|(M_1A)^{-1}\|_1 = 73/2456$ از طرفی داریم که $\|M_1A\|_1 = 2/2267$ بنابراین

$$\kappa_1(M_1A) = \|M_1A\|_1\|(M_1A)^{-1}\|_1 = 2/2267 \times 73/2456 \approx 163/0936$$

مشاهده می‌شود که

$$163/0936 \approx \kappa_1(M_1A) < \kappa_1(A) \approx 2/77 \times 10^3$$

بنابراین ماتریس M_1A نسبت به A خوش وضع تر می‌باشد. از اینرو به جای حل دستگاه $AX = b$ می توانیم دستگاه $M_1AX = M_1b$ یعنی دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1/0000 & 1/2267 \\ 0/8400 & 1/0000 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0/1333 \\ 4/0000 \end{bmatrix}$$

اکنون از خوش‌حالت کننده‌ی۲ استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 = (7/5)^2 + (9/2)^2 = 140/8900$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 = \sum_{j=1}^{2} a_{2j}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = (0/21)^2 + (0/25)^2 = 0/1066$$

بنابراین ماتریس خوش حالت کننده‌ی M_2 به صورت زیر خواهد بود:

$$M_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2}}, \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2}}\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{140/8900}}, \frac{1}{\sqrt{0/1066}}\right)$$

$$= \operatorname{diag}(0/0842, 3/0628) = \begin{bmatrix} 0/0842 & 0 \\ 0 & 3/0628 \end{bmatrix}$$

از طرفی

$$M_2A = \begin{bmatrix} 0/0842 & 0 \\ 0 & 3/0628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/5 & 9/2 \\ 0/21 & 0/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/6315 & 0/7746 \\ 0/6432 & 0/7657 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه می‌توان دید که $\kappa_1(M_2A) \approx 147/5930$. بنابراین

$$147/5930 \approx \kappa_1(M_2A) < \kappa_1(A) \approx 2/77 \times 10^3$$

توجه کنید که در اینجا A نامتقارن است، به همین علت خوش‌حالت کننده‌ی M_2 بهتر عمل کرده است، در واقع

$$147/5930 \approx \kappa_1(M_2A) < \kappa_1(M_1A) \approx 163/0936$$

از اینرو به جای حل دستگاه $AX = b$ می توانیم دستگاه $M_2AX = M_2b$ یعنی دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0/6315 & 0/7746 \\ 0/6432 & 0/7657 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0/0842 \\ 3/0628 \end{bmatrix}$$

مثال ۴.۲۶

ماتریس هیلبرت مرتبه۳ را در نظر بگیرید. این ماتریس را خوش حالت نمایید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix},\quad A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۹ & -۳۶ & ۳۰\\ -۳۶ & ۱۹۲ & -۱۸۰\\ ۳۰ & -۱۸۰ & ۱۸۰\end{bmatrix}$$

حل: محاسبات را در نرم افزار متلب انجام داده ایم. با یک سری محاسبات خواهیم داشت $\kappa_۲(A)\approx ۵۲۴/۰۵۶۸$. حال اگر از خوش‌حالت کننده‌ی $M_۱$ استفاده کنیم داریم

$$M_۱=\operatorname{diag}(\frac{۱}{a_{۱۱}},\frac{۱}{a_{۲۲}},\frac{۱}{a_{۳۳}})=\operatorname{diag}(\frac{۱}{۱},\frac{۱}{\frac{۱}{۳}},\frac{۱}{\frac{۱}{۵}})=\operatorname{diag}(۱,۳,۵)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$M_۱A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۰۰۰ & ۰/۵۰۰۰ & ۰/۳۳۳۳\\ ۱/۵۰۰۰ & ۱/۰۰۰۰ & ۰/۷۵۰۰\\ ۱/۶۶۶۷ & ۱/۲۵۰۰ & ۱/۰۰۰۰\end{bmatrix}$$

می‌توان دید که $\kappa_۲(M_۱A)\approx ۳۶۴/۷۸۹۲$. بنابراین

$$۳۶۴/۷۸۹۲\approx\kappa_۲(M_۱A)<\kappa_۲(A)\approx ۵۲۴/۰۵۶۸$$

اکنون محاسبات را با ماتریس خوش‌حالت کننده‌ی $M_۲$ پی می‌گیریم.

$$\sum_{j=۱}^{n}a_{۱j}^۲=\sum_{j=۱}^{۳}a_{۱j}^۲=a_{۱۱}^۲+a_{۱۲}^۲+a_{۱۳}^۲=(۱)^۲+(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۳})^۲=۱/۳۶۱۱$$

$$\sum_{j=۱}^{n}a_{۲j}^۲=\sum_{j=۱}^{۳}a_{۲j}^۲=a_{۲۱}^۲+a_{۲۲}^۲+a_{۲۳}^۲=(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۳})^۲+(\frac{۱}{۴})^۲=۰/۴۲۳۶$$

$$\sum_{j=۱}^{n}a_{۳j}^۲=\sum_{j=۱}^{۳}a_{۳j}^۲=a_{۳۱}^۲+a_{۳۲}^۲+a_{۳۳}^۲=(\frac{۱}{۳})^۲+(\frac{۱}{۴})^۲+(\frac{۱}{۵})^۲=۰/۲۱۳۶$$

بنابراین

$$M_۲=\operatorname{diag}\left(\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{۳}a_{۱j}^۲}},\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{۳}a_{۲j}^۲}},\frac{۱}{\sqrt{\sum_{j=۱}^{۳}a_{۳j}^۲}}\right)=diag(\frac{۱}{\sqrt{۱/۳۶۱۱}},\frac{۱}{\sqrt{۰/۴۲۳۶}},\frac{۱}{\sqrt{۰/۲۱۳۶}})$$

$$=\operatorname{diag}(۰/۸۵۷۱,۱/۵۳۶۴,۲/۱۶۳۷)=\begin{bmatrix} ۰/۸۵۷۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱/۵۳۶۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲/۱۶۳۷\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$M_۲A=\begin{bmatrix} ۰/۸۵۷۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱/۵۳۶۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲/۱۶۳۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۸۵۷۱ & ۰/۴۲۸۵ & ۰/۲۸۵۷\\ ۰/۷۶۸۲ & ۰/۵۱۲۱ & ۰/۳۸۴۱\\ ۰/۷۲۱۲ & ۰/۵۴۰۹ & ۰/۴۳۲۷\end{bmatrix}$$

از این رو $\kappa_2(M_2A) \approx 373/7203$ خواهد بود. توجه کنید که

$$364/7892 \approx \kappa_2(M_1A) < \kappa_2(M_2A) \approx 373/7203 < \kappa_2(A) \approx 524/0568$$

در اینجا خوش‌حالت کننده‌ی M_1 بهتر عمل کرده است زیرا ماتریس A متقارن معین مثبت است(نشان دهید که هر ماتریس هیلبرت، متقارن معین مثبت است).

۲.۱۱ پیش شرط حاصل از جداساز های روش های تکراری

دستگاه $AX = b$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = M - N$ آنگاه

$$(M - N)X = b \Rightarrow MX - NX = b \Rightarrow MX = NX + b$$

بنابراین

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b \tag{31}$$

توجه کنید که معادله بالا نشان می دهد $G = M^{-1}N$ ماتریس تکرار است. اکنون (۳۱) را می توان به صورت

$$X - M^{-1}NX = M^{-1}b$$

یا

$$(I - M^{-1}N)X = M^{-1}b \tag{32}$$

نوشت. اما

$$I - M^{-1}N = M^{-1}M - M^{-1}N = M^{-1}(M - N) = M^{-1}A$$

لذا (۳۲) معادل است با

$$M^{-1}AX = M^{-1}b \tag{33}$$

با مقایسه روابط (۳۱) و (۳۳) می توان دریافت که هرگاه برای یک روش تکراری بتوان ماتریس تکرار را به صورت $G = M^{-1}N$ نوشت به قسمی که $A = M - N$ باشد آنگاه ماتریس M^{-1} یک خوش حالت کننده دستگاه $AX = b$ خواهد بود (طبق رابطه (۳۳)). بنابراین متناظر با هر روش تکراری از نوع (۳۱) می توان یک ماتریس خوش حالت کننده متناظر با آن روش یافت. باید توجه داشت که با استفاده از پیش شرط های حاصل از جداساز های روش های تکراری چون M^{-1} را به دست می آوریم بنابراین دستگاه $AX = b$ را به صورت

$$M^{-1}AX = M^{-1}b$$

خوش حالت می کنیم.

در ادامه خوش حالت کننده دو روش ژاکوبی و گاوس سیدل را می یابیم.

۱۲ خوش حالت کننده روش ژاکوبی

فرض کنید A به صورت $A = D + L + U$ نوشته شود که D قسمت قطری A و L قسمت پایین A و U قسمت بالایی A باشد. قبلا دیدیم که ماتریس تکرار روش ژاکوبی به صورت زیر است

$$G_J = -D^{-1}(L + U)$$

اگر A را به صورت $A = D - (-(L+U))$ بنویسیم و ماتریس تکرار G_J را نیز به صورت

$$G_J = D^{-1}(-(L+U))$$

در نظر بگیریم آنگاه با معرفی ماتریس های M و N به صورت

$$M = D, \qquad N = -(L+U)$$

داریم $A = M - N$ و $G_J = M^{-1}N$. یعنی M ای که دنبالش هستیم $M = D$ می باشد. حال طبق رابطه (۳۳) ماتریس خوش حالت کننده به صورت $M^{-1} = D^{-1}$ است. این همان خوش حالت کننده قطری است که قبلا دیدیم. توجه کنید به $M^{-1} = D^{-1}$ خوش حالت کننده ژاکوبی گفته می شود.

۱۳ خوش حالت کننده روش گاوس_سیدل

دیدیم که ماتریس تکرار روش گاوس سیدل به صورت

$$G_{GS} = -(D+L)^{-1}U$$

است. پس اگر A را به صورت $A = (D+L) - (-U)$ تجزیه کنیم آنگاه با نوشتن ماتریس تکرار G_{GS} به صورت

$$G_{GS} = (D+L)^{-1}(-U)$$

می توان دید که ماتریس های M و N به صورت زیر هستند

$$M = D+L, \qquad N = -U$$

بنابراین خوش حالت کننده روش گاوس سیدل $M^{-1} = (D+L)^{-1}$ خواهد بود. یعنی برای خوش حالت سازی دستگاه $AX = b$ کافی است آن را از سمت چپ در $(D+L)^{-1}$ ضرب کنیم تا دستگاه خوش حالت شده

$$(D+L)^{-1}AX = (D+L)^{-1}b$$

را به دست آوریم.

مثال ۴.۲۷

برای ماتریس داده شده زیر با استفاده از خوش حالت کننده گاوس_سیدل، این ماتریس را خوش حالت کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۷/۵ & ۹/۲ \\ ۰/۱۹ & ۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

حل - خوش حالت کننده این روش به صورت $(D+L)^{-1}$ است.

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} ۷/۵ & ۰ \\ ۰/۱۹ & ۰/۲۵ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ۰/۱۳۳۳ & ۰ \\ -۰/۱۰۱۳ & ۴/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس خوش حالت شده به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$(D+L)^{-1}A = \begin{bmatrix} ۰/۱۳۳۳ & ۰ \\ -۰/۱۰۱۳ & ۴/۰۰۰۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷/۵ & ۹/۲ \\ ۰/۱۹ & ۰/۲۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۲۲۶۷ \\ ۰ & ۰/۰۶۷۷ \end{bmatrix}$$

با کمی محاسبه داریم

$$\kappa_1(A) = ۱/۲۴۲۶ \times ۱۰^{۳}, \qquad \kappa_1((D+L)^{-1}A) = ۴۲/۵۵۲۱$$

نتیجه به دست آمده قابل توجه است زیرا ماتریس $(D+L)^{-1}A$ نسبت به A به مقدار زیادی خوش حالت تر است.

مثال ۴.۲۸

ماتریس هیلبرت ۳ × ۳ زیر را در نظر بگیرید. این ماتریس را خوش حالت کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

حل - این ماتریس بدوضع است زیرا $\kappa_1(A) = ۷۴۸$ مقداری بزرگ است. حال برای خوش حالت کننده روش گاوس-سیدل داریم

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱/۵۰۰۰ & ۳/۰۰۰۰ & ۰ \\ ۰/۲۰۸۳ & -۳/۷۵۰۰ & ۵/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

و از آنجا

$$(D+L)^{-1}A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱/۵۰۰۰ & ۳/۰۰۰۰ & ۰ \\ ۰/۲۰۸۳ & -۳/۷۵۰۰ & ۵/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ & ۰/۵۰۰۰ & ۰/۳۳۳۳ \\ ۰/۰۰۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ \\ ۰/۰۰۰۰ & ۰/۱۰۴۲ & ۰/۱۳۱۹ \end{bmatrix}$$

اگر عدد شرطی ماتریس $(D+L)^{-1}A$ را محاسبه کنیم خواهیم دید که

$$\kappa_1((D+L)^{-1}A) \simeq ۷۸$$

که نسبت به $\kappa_1(A) = ۷۴۸$ کاهش چشمگیری داشته است که نشان دهنده کارآیی پیش شرط روش گاوس-سیدل است.

تمرین ۴.۵

پیش شرط روش SOR را برای هر ماتریس دلخواه به دست آورید.

تمرین ۴.۶

ماتریس هیلبرت ۴ × ۴ زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix}$$

الف - نشان دهید

$$\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = 2/8375 \times 10^4$$

ب - با استفاده از روش های گفته برای خوش حالت سازی در این درس، ماتریس A را خوش وضع نمایید. بهترین نتیجه از کدام روش حاصل شده است؟

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Absolute .... مطلق
Accuracy .... دقت

C

Condition number عدد وضعیت، عدد شرطی، عدد حالت

E

Error .... خطا
Error bound .... کران خطا

H

Hilbert matrix .... ماتریس هیلبرت

I

Ill-conditioned problem .... مسئله بدوضع
Incomplete cholesky factorization .... تجزیه چولسکی ناقص
Iterative refinement .... تصفیه تکراری، بهبود تکراری

P

Perturbation analysis .... تحلیل اختلال
Preconditioning .... پیش شرط سازی

R

Relative .... نسبی
Relative error .... خطای نسبی
Residual correction .... تصحیح باقیمانده
Round off .... گرد کردن
Rounding .... گرد کردن
Rounding error .... خطای گرد کردن

S

Stopping criterion .... معیار توقف

T

Termination criterion .... معیار توقف
Truncation .... برشی

W

Well-conditioned problem .... مسئله خوش وضع

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ب

برشی .... Truncation

پ

پیش شرط سازی .... Preconditioning

ت

تجزیه چولسکی ناقص .... Incomplete cholesky factorization
تحلیل اختلال .... Perturbation analysis
تصحیح باقیمانده .... Residual correction
تصفیه تکراری، بهبود تکراری .... Iterative refinement

خ

خطا .... Error
خطای گرد کردن .... Rounding error
خطای نسبی .... Relative error

د

دقت .... Accuracy

ع

عدد وضعیت، عدد شرطی، عدد حالت Condition number

ک

کران خطا .... Error bound

گ

گرد کردن .... Rounding

م

ماتریس هیلبرت .... Hilbert matrix
مسئله بدوضع .... Ill-conditioned problem
مسئله خوش وضع .... Well-conditioned problem
مطلق .... Absolute
معیار توقف .... Termination criterion

ن

نسبی .... Relative

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل چهارم: تحلیل حساسیت دستگاه های معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲