

۱- تجزیه SVD ماتریس داده شده را به طور کامل و گام به گام بدون استفاده از نرم افزار محاسبه کنید. (محاسبات تا چهار رقم بعد از اعشار انجام شود).

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- ۲- با دلیل مفصل اثبات یا رد کنید:
- ۱- مقادیر تکین ماتریس های A و A^T یکسان هستند.
 - ۲- مقادیر تکین ماتریس نامنفرد A ، معکوس مقادیر تکین A^{-1} هستند.
 - ۳- آیا مقادیر تکین دو ماتریس متشابه $A = PBP^{-1}$ ، یکسان هستند؟
 - ۴- عدد حالت ماتریس A برابر 1 است اگر و فقط اگر A ضربی از یک ماتریس متعامد باشد.
 - ۵- اگر P ماتریس متعامد باشد، آنگاه مقادیر منفرد PA و A یکسان خواهند بود.

۳- فرض کنید A ماتریس $m \times n$ با مقادیر منفرد $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

- ۴- الف- فرض کنید A ماتریس معین مثبت باشد و $A = L^T L$ تجزیه چولسکی آن باشد.
اگر $L = U \Sigma V^T$ را تجزیه SVD در نظر بگیریم، آنگاه تعریف می کنیم: $X = V \Sigma V^T$. نشان دهید که X معین مثبت است، همچنین $X^2 = A$ برقرار است. (X را با \sqrt{A} نیز نشان می دهند).
- ب- معادله ای به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس هایی معلوم و X ماتریسی مجهول است که می بایست تعیین گردد.

$$X^2 + AX + XA = B$$

می توان نشان داد که جواب های این معادله را می توان از دستور زیر محاسبه نمود

$$X = -A + \sqrt{A^2 + B}$$

با استفاده از قسمت قبل و برای

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

معادله داده شده را حل کنید.

۵- الف- برای $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ که $p = \min\{m, n\}$ باشد و $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ و $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\}$ به ترتیب مقادیر تکین نامنفی A و $A + E$ باشند. ثابت کنید:

$$|\sigma_k - \beta_k| \leq \|E\|_2$$

برای هر $k = 1, 2, \dots, p$

ب- تفسیر دقیقی از این نامساوی ارائه دهید (راهنمایی: مسئله محاسبه ی مقادیر تکین یک ماتریس یک مسئله ی خوش وضع است)

۶- با استفاده از کد متلب یا پایتون، تصویر داده شده را با استفاده از تجزیه SVD از روش بهترین تقریب رتبه پایین یک ماتریس برای $k = 10, 20, 40, 80, 160$ ، فشرده کنید و میزان فضای صرفه جویی شده را محاسبه کنید.



شکل ۱: مجموعه ای از کهکشان ها

نحوه ارسال تمرین‌ها

فایل الکترونیکی پاسخ تمرینات به همراه پوشه کدهای متلب یا پایتون به آدرس زیر ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

بعلاوه فایل تمرینات در سامانه کورسز دانشگاه آپلود شود. در هنگام ارسال فایل، اسم خود و شماره دانشجویی خود را روی نام فایل قرار دهید. برای مثال نام فایل ارسالی چنین باشد:

Akbari-12345678

توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۲۵ خرداد ماه ۱۴۰۲ می‌باشد.

توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است.

توجه ۳: آمادگی کامل دانشجویان گرامی جهت ارایه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

توجه ۴: از کدهای موجود در سطح وب یا کتاب‌های مرجع نیز می‌توانید استفاده کنید اما باید منابع استفاده شده را ذکر کنید و قادر به توضیح عملکرد کد ارسال شده باشید.