$$H_{n\times n} = I - \frac{2}{u^T u} u u^T \quad , I \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , u \in \mathbb{R}^n$$

$n\times 1$ یک بردار غیرصفر $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$H_{2\times 2} = I_2 - \frac{2}{u^T u} u u^T \longrightarrow u^T u = u_1^2 + u_2^2 \qquad u u^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} [u_1 \;\; u_2] = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$H_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2u_1^2}{u_1^2 + u_2^2} & \frac{-2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{-2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2} & 1 - \frac{2u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\Big(\overbrace{\frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}}^{\cos(\phi)}\Big)^2 + \Big(\overbrace{\frac{-2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}}^{\sin(\phi)}\Big)^2 = \frac{u_1^4 + u_2^4 - 2u_1^2 u_2^2 + 4u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} =$$

$$\frac{u_1^4 + u_2^4 + 2u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{(u_1^2 + u_2^2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = 1 \Longrightarrow \boxed{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1}$$

در نتیجه با توجه به این که مقادیر ذکر شده شرط مورد نظر را دارند بنابراین می‌توان ϕ ای پیدا کرد که به ازای آن ماتریس هاوس هولدر حقیقی 2×2 به شکل زیر باشد:

$$H_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -\cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که برای هر بردار ناصفر u داریم $\boxed{Hu = -u}$. حال به محاسبه مقدار Hx وقتی $x = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}$ است می‌پردازیم: (انتظار داریم که به $Hx = -x$ برسیم)

$$Hx = \begin{bmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ 2\sin\phi \cdot \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$Hx = \begin{bmatrix} -\cos(2\phi) \\ \sin(2\phi) \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & -2 & -1\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{bmatrix}\right)= \qquad A=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix}-2-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{bmatrix}\right)-(-2)\det\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}\right)+(-1)\det\left(\begin{bmatrix}1&-2-\lambda\\1&-1\end{bmatrix}\right)=$$

$$(3-\lambda)\Big((-2-\lambda)(-\lambda)+1\Big)+2(-\lambda-1)-\Big(-1-(-2-\lambda)\Big)=$$

$$(3-\lambda)(2+\lambda)(\lambda)+(3-\lambda)+2(-\lambda-1)+1+(-2-\lambda)=(3-\lambda)(2+\lambda)(\lambda)-4(\lambda)=$$

$$\Big((3-\lambda)(2+\lambda)-4\Big)\lambda=(\cancel{6}_{2}+3\lambda-2\lambda-\lambda^2\cancel{-4})\lambda=-(\lambda^2-\lambda-2)\lambda=-(\lambda+1)(\lambda-2)\lambda$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A به شکل زیر اند :

$$\lambda_1=-1\qquad\lambda_2=0\qquad\lambda_3=2$$

و بردارهای ویژه متناظر با هر مقدار ویژه را بدست می‌آوریم $(AX=\lambda X, X\neq 0)$

$$\lambda_1=-1\longrightarrow AV=-V,\ V\neq 0\longrightarrow (A+I)V_1=0\longrightarrow\begin{bmatrix}4&-2&-1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=0$$

یا $(A-\lambda I)V=0$

$$\begin{cases}4v_1-2v_2-v_3=0\\ v_1-v_2+v_3=0\\ v_1-v_2+v_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}4v_1=2v_2+v_3\longrightarrow\boxed{2v_1=3v_3}\\ v_1+v_3=v_2\longrightarrow\boxed{5v_3=2v_2}\end{cases}$$

$15v_3=10v_1=6v_2$ اگر $v_3=t$ آنگاه داریم :

$$V_1=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5t\\2.5t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1.5\\2.5\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان V_1 را $\begin{bmatrix}1.5\\2.5\\1\end{bmatrix}$ در نظر گرفت.

$$\lambda_2=0\longrightarrow(A-\lambda I)V=0\longrightarrow AV_2=0\longrightarrow\begin{bmatrix}3&-2&-1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}3v_1-2v_2-v_3=0\\ v_1-2v_2+v_3=0\\ v_1-v_2=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}v_1=v_3\\ v_1=v_2\end{cases}\longrightarrow v_1=v_2=v_3=t$$

$$V_2=\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توانیم V_2 را $[1,1,1]^T$ در نظر بگیریم

$\lambda_3 = 2 \rightarrow (A-\lambda I)v_3 = 0 \rightarrow (A-2I)v_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - 4v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 + v_3 \\ v_1 = 4v_2 - v_3 \\ v_1 = v_2 + 2v_3 \end{cases}$$

$2v_2 + v_3 = v_2 + 2v_3 \rightarrow \boxed{v_2 = v_3}$

$\boxed{v_1 = 3v_2}$

$\boxed{v_2 = v_3 = t}$ $\boxed{v_1 = 3t}$

یعنی می‌توانیم v_3 را بصورت $v_3 = \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ نمایش دهیم و بنابراین $[3,1,1]^T$ بردار ویژه این ماتریس است.

از روش توانی مقیاس شده استفاده می‌کنیم:

$\|v^{(k)}\|_\infty \rightarrow \lambda_1$ و $\tilde{v}^{(k)}$ بردار ویژه متناظر با λ_1

$v^{(0)} = [-1, 1, 1]^T$

$v^{(1)} = A v^{(0)} = [-6, -2, -2]^T$

$\tilde{v}^{(1)} = [-1, -0.3333, -0.3333]^T$

$v^{(2)} = A\tilde{v}^{(1)} = [-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]^T$

$\tilde{v}^{(2)} = [-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]^T$

$v^{(3)} = A\tilde{v}^{(2)} = [-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]^T$

$\tilde{v}^{(3)} = [-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]^T$

می‌بینیم که در تکرار سوم مقادیر هیچ تفاوتی با تکرار دوم ندارند و روش توانی همگرا شده است و داریم:

$\|v^{(3)}\|_\infty \rightarrow \lambda_1 = 2$ $\quad \tilde{v}^{(3)} = [-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]^T$ بردار ویژه و مقدار ویژه غالب A

علامت مقدار ویژه غالب A مثبت است زیرا علامت عناصر $v^{(k)}$ در مراحل مختلف ثابت بوده است.

نمی‌توان از روش معکوس توانی استفاده کرد زیرا $\det(A) = 0$ و این ماتریس منفرد است و A^{-1} وجود ندارد و معکوس پذیر نیست. همچنین با توجه به این که یکی از مقادیر ویژه‌ی این ماتریس برابر با صفر است در نتیجه این که مقادیر ویژه A^{-1} به صورت $\frac{1}{|\lambda_1|} \geqslant \dots \geqslant \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} > \frac{1}{|\lambda_n|}$ باشند نیز امکان پذیر نیست و در نتیجه نمی‌توانیم از این روش استفاده کنیم.

(3)

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -5 & 3 & a\\ 4 & -2 & -1\end{bmatrix} \qquad P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}-2-\lambda & 0 & 1\\ -5 & 3-\lambda & a\\ 4 & -2 & -1-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$=(-2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & a\\ -2 & -1-\lambda\end{bmatrix}\right)+\det\left(\begin{bmatrix}-5 & 3-\lambda\\ 4 & -2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=(-2-\lambda)\big((3-\lambda)(-1-\lambda)+2a\big)+10-4(3-\lambda)=(2+\lambda)\big((3-\lambda)(1+\lambda)-2a\big)+10-12+4\lambda=$$

$$=(2+\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda)-2a(2+\lambda)-2+4\lambda=(2+\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda)+\lambda(4-2a)-2-4a$$

$\lambda=0:\quad 2\times 3\times 1+0-2-4a=0 \qquad\qquad 4a=4\rightarrow a=1$

$\lambda=3:\quad 5\times \cancel{0}\times 4+3(4-2a)-2-4a=0 \qquad\qquad 10=10a\rightarrow a=1$

$\lambda=-3:\quad -1\times 6\times -2-3(4-2a)-2-4a=0 \qquad\qquad 2a=2\rightarrow a=1$

$$\boxed{a=1}$$