۱) الف)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \qquad K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\epsilon^{-1} & \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$

نرم ۱ :

$0 < \epsilon < 1$

$\|A\|_1 = \max\{2, \epsilon\} = 2$

$\|A^{-1}\|_1 = \max\{1 + \frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}\} = 1 + \frac{1}{\epsilon}$

$K_1(A) = 2\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) = 2 + \frac{2}{\epsilon} \xrightarrow[0<\epsilon<1]{} \boxed{K_1(A) > 4}$

نرم ∞ :

$\|A\|_\infty = \max(1+0, 1+\epsilon) = 1+\epsilon$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left(1+0, \frac{2}{\epsilon}\right) = \frac{2}{\epsilon}$

$K_\infty(A) = (1+\epsilon)\left(\frac{2}{\epsilon}\right) = 2\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right) \xrightarrow[0<\epsilon<1]{} \boxed{K_\infty(A) > 4}$

ب) $D \in \mathbb{R}^{100\times 100}$

$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}\right) \qquad \boxed{\det(D) = \left(\frac{1}{3}\right)^{100} \simeq 0}$

$D^{-1} = \mathrm{diag}(3, \dots, 3)$

$\|D\|_1 = \|D\|_\infty = \frac{1}{3} \qquad \|D^{-1}\|_1 = \|D^{-1}\|_\infty = 3$

$K_1(D) = K_\infty(D) = \frac{1}{3} \times 3 = \boxed{1}$

دترمینان این ماتریس به صفر میل می‌کند ولی عدد حالت این ماتریس ۱ است که یعنی این ماتریس بسیار خوش حالت است ، پس گزاره صورت سؤال امکان پذیر است

---

۲) الف) ΔA داریم در نتیجه آشفتگی در ماتریس ضرایب رخ داده است . ابتدا جواب اصلی دستگاه $AX=b$ را می‌یابیم :

$X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{bmatrix} = X^*_{\text{جواب اصلی}}$

حال دستگاه را با ماتریس ضرایب $A+\Delta A$ حل می‌کنیم :

$\tilde{X} = (A+\Delta A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 8.9919 & -35.9514 & 29.9514 \\ -35.9676 & 191.8057 & -179.8057 \\ 29.9730 & -179.8381 & 179.8381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9919 \\ -23.9676 \\ 29.9730 \end{bmatrix} = \tilde{X}$

$\Delta X = \tilde{X} - X^* = [-0.0081, 0.0323, -0.0270]^T$

$\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.0674}{57} = \boxed{0.0011}$ میزان خطای نسبی دستگاه

$$AX = b + \Delta b$$

۲) ب) آشفتگی در ماتریس سمت راست است.

جواب اصلی را که از قسمت قبل داشتیم: $X^* = [3, -24, 30]^T$

دستگاه جدید را حل می‌کنیم:

$$A\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X} = A^{-1}(b + \Delta b)$$

$$\tilde{X} = [3.03, -24.18, 30.18]^T$$

$$\Delta X = \tilde{X} - X^* = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.18 \\ +0.18 \end{bmatrix} \qquad \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.39}{57} = \boxed{0.00684}$$

میزان خطای نسبی جواب دستگاه

با توجه به قضایایی که داخل جزوه داشتیم می‌توانیم بازه تغییرات جواب دستگاه‌مان را نیز تعیین کنیم:

$$\frac{1}{K_1(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant K_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \xrightarrow{K_1(A) = 748} \qquad \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{0.001}{3}$$

$$4.456 \times 10^{-7} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant 0.2493$$

که کران بالای بزرگی است و یعنی می‌توانیم تا ۲۴ درصد داخل جواب دستگاه خطا داشته باشیم و با توجه به عدد حالت زیادی که داشتیم این موضوع طبیعی است (ماتریس هیلبرت به طور کلی بدحالت و بدوضع است)

۲) ج) دستگاه جدید را حل می‌کنیم:

$$(A + \Delta A)X = b + \Delta b$$

$$\tilde{X} = (A + \Delta A)^{-1}(b + \Delta b) = [3.0218, -24.1474, 30.1528]^T$$

$$\Delta X = \tilde{X} - X^* = [0.0218, -0.1474, 0.1528]^T \qquad \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.3221}{57} = \boxed{0.0056}$$

میزان خطای نسبی جواب دستگاه

قضیه اصلی: فرض کنید A نامنفرد باشد و $b \neq 0$. اگر شرط $\|\Delta A\| \|A^{-1}\| < 1$ برقرار باشد آنگاه خطای نسبی جواب دستگاه $AX = b$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left(\frac{K(A)}{1 - K(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\right)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \boxed{\frac{0.00003}{1.8333}} \qquad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \boxed{0.00033} \qquad K(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 11/6 \times 408 = \boxed{748}$$

$$\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \left(\frac{748}{1 - 748 \times 1.6363 \times 10^{-5}}\right)\left(1.6363 \times 10^{-5} + 33 \times 10^{-5}\right) = \boxed{0.2622}$$

کران بالای خطای نسبی جواب دستگاه جدید (که مقدار قابل توجهی است)

۳) الف

$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = 161 \times 16 = \boxed{2576}$ عدد حالت

در خوش‌حالت کننده گاوس سایدل داریم : $A = \underbrace{(D+L)}_{M} - \underbrace{(-U)}_{N}$ و از طرفی $G_{GS} = M^{-1}N$

و خوش‌حالت کننده گاوس سایدل برابر است با $\boxed{M^{-1} = (D+L)^{-1}}$

$G_{GS} = (D+L)^{-1}(-U)$

و درنتیجه برای خوش‌حالت کردن ماتریس A باید M^{-1} را از سمت چپ در آن ضرب کنیم.

$$M = D+L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(D+L)^{-1}}_{M^{-1}} A = \underbrace{(D+L)^{-1}}_{M^{-1}} b$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ -60 & -2.5 & 1\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1.5 & -1.75 \\ 0 & -3 & -3.5 & -3.41667 \\ 0 & -60 & -65 & -63.1667 \end{bmatrix}$$

برای خوش حالت کننده ژاکوبی داریم : $A = M - N = \underbrace{D}_{M} - \underbrace{(-(L+U))}_{N}$ و $G_J = M^{-1}N = D^{-1}(-(L+U))$

و در نتیجه خوش حالت کننده ژاکوبی برابر با $M^{-1} = D^{-1}$ می‌باشد سپس کافی است برای خوش حالت کردن A با این روش A را در D^{-1} ضرب کنیم :

$D = \mathrm{diag}(1, 4, 3, 1)$ $\qquad D^{-1} = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1)$

$$M^{-1}A = D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 9 & 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

۳) ب

$$A = \begin{bmatrix} -10^{-3} & -10^{-2} & -10^{-2} \\ 2\times10^{-3} & 0 & -10^{-4} \\ 1 & 5\times10^{-3} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|a^i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

$$\|a^1\|_2 = \sqrt{(-10^{-3})^2 + (-10^{-2})^2 \times 2} = \boxed{\sqrt{201\times10^{-6}}}$$

$$\|a^2\|_2 = \sqrt{(2\times10^{-3})^2 + (-10^{-4})^2} = \boxed{\sqrt{401\times10^{-8}}}$$

$$\|a^3\|_2 = \sqrt{1^2 + (5\times10^{-3})^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{17 + 25\times10^{-6}}}$$

$$D = \begin{bmatrix} \|a^1\|_2 & 0 & 0 \\ 0 & \|a^2\|_2 & 0 \\ 0 & 0 & \|a^3\|_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۷۰/۵۳۴۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵۰۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۲۴۲۵۳ \end{bmatrix}$$ خوش حالت کننده

$$DA = \begin{bmatrix} -۰/۰۷۰۵۳ & -۰/۷۰۵۳۴ & -۰/۷۰۵۳۴ \\ ۱ & ۰ & -۰/۰۵ \\ ۰/۲۴۲۵۳ & ۰/۰۰۱۲۱ & ۰/۹۷۰۱۴ \end{bmatrix}$$ ماتریس خوش حالت شده

قضیه : فرض کنید λ_{max} و λ_{min} بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه A^TA باشند آنگاه :

$$K_۲(A) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۵\times ۱۰^{-۶} & ۵/۰۱\times ۱۰^{-۳} & ۴+۹۸\times ۱۰^{-۷} \\ ۵/۰۱\times ۱۰^{-۳} & ۱/۲۵\times ۱۰^{-۴} & ۲/۰۱\times ۱۰^{-۲} \\ ۴+۹۸\times ۱۰^{-۷} & ۲/۰۱\times ۱۰^{-۲} & ۱۶/۰۰۰۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_{max}(A^TA) = ۱۷/۰۰۰۱۲ \\ \lambda_{min}(A^TA) = ۳/۷۷۵۸\times ۱۰^{-۶} \end{cases}$$

$$K_۲(A) = \frac{\sqrt{۱۷/۰۰۰۱۲}}{\sqrt{۳/۷۷۵۸\times ۱۰^{-۶}}} = \boxed{۲۱۲۱/۸۷}$$ ماتریس بد وضع

$$(DA)^T DA = \begin{bmatrix} ۱/۰۶۱۳ & ۰/۰۵۰۰۴ & ۰/۲۳۵۱۶ \\ ۰/۰۵۰۰۴ & ۰/۴۹۷۵ & ۰/۴۹۸۶۸ \\ ۰/۰۲۳۵۱ & ۰/۴۹۸۶۸ & ۱/۴۴۱۱۸ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_{max} = ۱/۷۳۸۱۹ \\ \lambda_{min} = ۰/۲۷۹۸۳ \end{cases}$$

$$K_۲(DA^T.DA) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}} = \boxed{۲/۴۹۲۲۷}$$ ماتریس خوش وضع

با ضرب ماتریس A در D عدد حالت از ۲۱۲۱/۸۷ به ۲/۴۹۲۲۷ کاهش پیدا کرد که یعنی ماتریس بسیار خوش حالت تر از حالت اولیه اش شده است.

CamScanner

۴) **قضیه ۴.۷ جزوه :** اگر $X+\Delta X$ جواب دستگاه آشفته شده $(A+\Delta A)(X+\Delta X)=(b+\Delta b)$ باشد

آنگاه داریم :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|X+\Delta X\|}\right)$$

با مقایسه عبارت داده شده در صورت مسئله و عبارت بالا کافی است ثابت کنیم که :

$$\tilde{A}\tilde{X}=\tilde{b}$$

$$X+\Delta X=(A+\Delta A)^{-1}(b+\Delta b)$$

$$\tilde{X}=\tilde{A}^{-1}\tilde{b}$$

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|X+\Delta X\|}=\frac{\|\Delta b\|}{\|\tilde{b}\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|\tilde{b}\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\cancel{\|\Delta b\|}}{\|A\|\,\|\tilde{X}\|}=\frac{\cancel{\|\Delta b\|}}{\|\tilde{b}\|}\left(1+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\Longrightarrow\frac{\|\tilde{b}\|}{\cancel{\|A\|}\,\|\tilde{X}\|}=\frac{\|A\|+\|\Delta A\|}{\cancel{\|A\|}}\Longrightarrow$$

$$\|\tilde{b}\|=\|\tilde{X}\|\left(\|A\|+\|\Delta A\|\right)\Longrightarrow\|\tilde{b}\|\geqslant\|\tilde{A}\|\,\|\tilde{X}\|\Longrightarrow\|\tilde{b}\|\geqslant\|\tilde{A}\tilde{X}\|\overset{\tilde{b}=\tilde{A}\tilde{X}}{\Longrightarrow}$$

بنابراین به فرضی که کرده بودیم رسیدیم و در نتیجه نامساوی ذکر شده برقرار خواهد بود

۵) الف)

$$\boxed{r = b - A\tilde{x}} \qquad A + H = A + \frac{r\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^2}$$

$$(A+H)\tilde{x} = A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_2^2} = A\tilde{x} + \frac{r\cancel{\|\tilde{x}\|_2^2}}{\cancel{\|\tilde{x}\|_2^2}} = A\tilde{x} + r = A\tilde{x} + b - A\tilde{x} = b$$

$$\boxed{\tilde{x}^T\tilde{x} = \|\tilde{x}\|_2^2}$$

در نتیجه $\boxed{(A+H)\tilde{x} = b}$

ب)

$$\alpha = \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2} \qquad H = \frac{r\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^2} \qquad (A+H)\tilde{x} = b$$

$$\leftarrow H\tilde{x} = b - A\tilde{x} = r$$

$$\|H\tilde{x}\| = \|b - A\tilde{x}\|_2 = \|r\|_2$$

$$\rightarrow \|H\|_2\|\tilde{x}\|_2 \geq \|r\|_2 \rightarrow \frac{\|r\|_2}{\|\tilde{x}\|_2} \leq \|H\|_2 \xrightarrow[\times \frac{1}{\|A\|_2}]{} \underbrace{\frac{\|r\|_2}{\|\tilde{x}\|_2\|A\|_2}}_{1/\alpha} \leq \frac{\|H\|_2}{\|A\|_2} \longrightarrow$$

$$\boxed{\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2}$$

اگر $\tilde{x}$ یک جواب نزدیک به دستگاه اصلی باشد در این صورت H باید مقدار بسیار کوچکتری نسبت به A داشته باشد و اختلال کمی در A ایجاد کند و در این صورت α باید مقدار بزرگی داشته باشد تا حکمی که اثبات کردیم صحیح باشد و در نتیجه $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ باید کوچک باشد و برای عکس این موضوع نیز اگر مخرج α نسبت به صورتش کوچک باشد نتیجه می‌شود که H کوچک است و $\tilde{x}$ به جواب اصلی دستگاه نزدیک است

فرض کنیم $\tilde{x}$ جواب نزدیک به جواب اصلی دستگاه باشد. رابطه $(A+H)\tilde{x}=b$ را داریم و در این رابطه می‌توان H را میزان آشفتگی در ماتریس A در نظر گرفت. چون $\tilde{x}$ به جواب دستگاه نزدیک است در نتیجه میزان آشفتگی ناچیز است و بنابراین H مقدار بسیار کوچکتری از A خواهد داشت و داریم:

$$\|H\|_2 \ll \|A\|_2 \Rightarrow 1 \ll \frac{\|A\|_2}{\|H\|_2}$$

از رابطه $\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2$ می‌دانیم که $1 \ll \frac{\|A\|_2}{\|H\|_2} \leq \alpha$ بنابراین داریم: $1 \ll \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2}$

و نتیجه می‌شود که $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ کوچک است.

حال اگر فرض کنیم $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ خیلی کوچک است نتیجه می‌شود: $1 \ll \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2}$

که این یعنی α خیلی بزرگ است و از رابطه $\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2$ متوجه می‌شویم که $\frac{\|A\|_2}{\|H\|_2} \leq \alpha$

و چون α خیلی بزرگ بود پس مقدار $\|H\|_2$ در برابر $\|A\|_2$ ناچیز است و در نتیجه میزان آشفتگی H ناچیز است و نهایتاً جواب $\tilde{x}$ جوابی نزدیک به جواب اصلی دستگاه $(A+H)\tilde{x}=b$ خواهد بود.

۶) الف) ✓

$K(H_2) = 19.28$

ب)

$H_2 x = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2 = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 x_1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_1 \end{cases}$

شیب خط

به صورت کلی شیب این دو خط خیلی هم به هم نزدیک نیست و به نوعی خوش وضع به حساب می‌آیند اما به ازای n های بزرگتر عدد حالت ماتریس های هیلبرت بسیار بزرگ می‌شود و به طور کلی این ماتریس ها بدوضع هستند.

ج)

$H_3 x = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} x = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = 0 \\ \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{5} = 0 \end{cases}$

می‌دانیم که $K(H_3) = 524$ درنتیجه H_3 بدوضع است و همانطور که از شکل هم مشخص است این سه صفحه بسیار به یکدیگر نزدیک هستند درنتیجه یک آشفتگی و اختلال کوچک می‌تواند منجر به اختلاف بسیار زیاد در جواب دستگاه موردنظر بشود که اصلاً مطلوب ما نیست.