

دانشجویان گرامی این سری از تمرینات شامل سوالاتی از فصل چهارم درس می باشد که از اهمیت بسیار فراوانی برخوردارند. با نهایت تلاش و دقت سعی در حل آنها داشته باشید.

(۱) الف- به ازای یک نرم دلخواه، عدد حالت ماتریس زیر را محاسبه کنید و توضیح دهید که به ازای ϵ های مختلف ($0 < \epsilon < 1$) چه تغییری در عدد حالت دستگاه رخ می دهد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

ب- آیا ممکن است دترمینان ماتریسی به صفر میل کند اما ماتریس خوش حالت بماند؟ با استفاده از ماتریس $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ به این سوال پاسخ دهید.

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{3}, & i = j \end{cases}$$

(۲) دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید ماتریس اختلال در ضرایب به صورت زیر باشد

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.00003 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف- در این صورت میزان خطای نسبی جواب دستگاه $(A + \Delta A)x = b$ را محاسبه کنید.

ب- بردار اختلال برای سمت راست را به صورت $\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.001 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. حال میزان خطای نسبی جواب دستگاه $Ax = (b + \Delta b)$ را محاسبه کنید.

ج- میزان خطای نسبی جواب دستگاه $(A + \Delta A)x = (b + \Delta b)$ را محاسبه کنید. در واقع در این مرحله، ماتریس ضرایب و بردار سمت راست هر دو آشفته شده‌اند و تحلیل حساسیت صورت می‌گیرد.

۳) الف- برای ماتریس زیر ابتدا عدد حالت را محاسبه کرده و سپس با استفاده از خوش حالت کننده گاوس- سیدل و خوش حالت کننده ژاکوبی، ماتریس را خوش حالت کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ب- به طور کلی یک راه عملی برای مقیاس کردن ماتریس A این است که سطرها را نرمال نماییم. یعنی هر سطر ماتریس را بر نرم ۲ اش تقسیم نماییم. برای اینکار می‌توان ماتریس قطری

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|a^1\|_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|a^2\|_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\|a^n\|_2} \end{bmatrix}$$

را از چپ در ماتریس A ضرب نمود. توجه کنید a^i نشان دهنده ی سطر i -ام ماتریس A است. با استفاده از نکته ی بالا ماتریس زیر را به کمک مقیاس کردن خوش حالت کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -10^{-3} & -10^{-2} & -10^{-2} \\ 2 \times 10^{-3} & 0 & -10^{-4} \\ 1 & 5 \times 10^{-3} & 4 \end{bmatrix}$$

سپس عدد حالت ماتریس (در نرم ۲) جدید و قدیم را مقایسه کنید.

(۴) اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد و x و \tilde{x} به ترتیب در $Ax = b$ و $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ صدق کنند به طوری که $\tilde{A} = A + \Delta A$ ، $\tilde{x} = x + \Delta x \neq 0$ و $\tilde{b} = b + \Delta b \neq 0$ آنگاه برای نرم القایی $\|\cdot\|$ ثابت کنید

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|\tilde{b}\|} + \frac{\|\Delta A\| \|\Delta b\|}{\|A\| \|\tilde{b}\|} \right)$$

(۵) فرض کنید به ازای بردار \tilde{x} ، بردار خطای r به صورت $r = b - A\tilde{x}$ در نظر گرفته شود.

الف- نشان دهید به ازای

$$H = \frac{r\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^2}$$

داریم $(A + H)\tilde{x} = b$.

ب- اگر

$$\alpha = \frac{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2}$$

آنگاه ثابت کنید $\|H\|_2 \leq \alpha \|A\|_2$.

بنابراین نتیجه بگیرید که \tilde{x} جواب یک دستگاه نزدیک به دستگاه اصلی است اگر و فقط اگر $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2$ کوچک باشد.

(۶) هر درایه ماتریس هیلبرت به این صورت تعریف می‌شود:

$$h_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

الف- برنامه‌ای در متلب یا پایتون بنویسید که این ماتریس را در ابعاد مختلف تولید و عدد حالت آن را محاسبه کند. سپس نموداری رسم کنید که روند تغییر این عدد را نسبت به تغییر n مشخص کند.

ب- به ازای دستگاه $H_2 x = 0$ که در آن H_2 ماتریس هیلبرت ۲ در ۲ است، خطوط حاصل از دستگاه را در فضای ۲ بعدی رسم کنید. با توجه به شکلی که رسم کردید و نمودار بخش الف، درباره خوش وضعی یا بد وضعی ماتریس هیلبرت بحث کنید.

ج- قسمت قبل را وقتی که ماتریس 3×3 است تکرار کنید.

نحوه ارسال تمرین ها

- ۱- حتما در سامانه (courses) دانشگاه قرار گیرد.
- ۲- بعلاوه حتما به آدرس زیر نیز ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

- توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۳ اردیبهشت ماه ۱۴۰۳ می باشد.
- توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است
- توجه ۳: آمادگی دانشجویان گرامی جهت ارائه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می گیرد.