دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل صفر: پیشنیازها در جبرخطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ مقدمات

تعریف ۰.۱

بردار سطری:
فرض کنید $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ یک n تایی از اعداد حقیقی باشد. آنگاه x_1 را مولفه اول X ، x_2 را مولفه دوم X و x_n را مولفه n ام X می نامیم.
برای مثال اگر

$$X_1 = [-1, 3, 4, 2], \qquad X_2 = [0, 1, 2]$$

آنگاه X_1 یک ۴ تایی و X_2 یک ۳ تایی است.
معمولا به یک n تایی با تعریف فوق بردار سطری گفته می شود و بنابراین می گوییم X یک بردار $1 \times n$ است. مثلا X_1 یک بردار 1×4 و X_2 یک بردار 1×3 است

دستور متلب برای تعریف بردار سطری:

```
>> X=[1,2,3]
X =

1  2  3
```

تعریف ۰.۲

بردار ستونی:
اگر بردار X در تعریف قبلی به صورت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نوشته شود می گوییم X یک بردار ستونی است و به طور دقیق تر یک بردار ستونی $n \times 1$ است. مثلا اگر

$$X_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

آنگاه می گوییم X_1 یک بردار 3×1 و X_2 برداری 4×1 است.

تذکر ۰.۱

گاهی اوقات برای راحتی کار بردار های ستونی را به صورت سطری نمایش می دهند اما در هر جایی اگر این کار انجام شود باید به طور دقیق ذکر شود تا خواننده آنها را با بردار سطری یکسان تلقی نکند.

دستور متلب برای تعریف بردار ستونی:

```
>> X=[1;2;3]
```

```
X =
1
2
3
```

تعریف ۰.۳

مجموعه همه بردارهای حقیقی به صورت

$$X = [x_{۱}, \cdots, x_n]$$

را با $\mathbb{R}^{۱\times n}$ و همه بردار های حقیقی به صورت

$$X = \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

را با نماد $\mathbb{R}^{n\times ۱}$ نمایش می دهیم. بنابراین اگر

$$X_{۱} = [۲, ۶, ۹], \qquad X_{۲} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \\ ۴ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه می نویسیم $X_{۲} \in \mathbb{R}^{۴\times ۱}$, $\quad X_{۱} \in \mathbb{R}^{۱\times ۳}$,

تذکر ۰.۲

معمولا در دروس جبرخطی نماد $\mathbb{R}^{n\times ۱}$ را به کار نمی برند و به جای آن از $\mathbb{R}^n$ استفاده می شود. بنابراین اگر $X \in \mathbb{R}^{۵}$ آنگاه متوجه می شویم که x برداری ۵×۱ است یعنی برداری ستونی است که ۵ مولفه یا عضو دارد.

- بردار صفر برای $\mathbb{R}^{۴}, \mathbb{R}^{۱\times ۴}$ به صورت زیر هستند

$$[۰, ۰, ۰, ۰], \qquad \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

- بردار یک برای $\mathbb{R}^{۴}, \mathbb{R}^{۱\times ۴}$ به صورت زیر هستند

$$[۱, ۱, ۱, ۱], \qquad \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین ۰.۱

بردار های صفر و یک را برای $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{1\times n}$ بنویسید.

دستور متلب برای تعریف بردار یک:

```
>> X=ones(4,1)
X =
1
1
1
1
```

دستور متلب برای تعریف بردار صفر:

```
>> X=zeros(4,1)
X =
0
0
0
0
```

تعریف ۰.۴

ماتریس:
یک ماتریس مجموعه ای از بردار ها است مثلا اگر

$$A=\begin{bmatrix}1&2&9\\0&-1&6\\1&2&7\end{bmatrix}_{3\times 3},\qquad B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}_{2\times 3},\qquad D=\begin{bmatrix}1&9\\-1&0\\2&6\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

آنگاه:
A ماتریسی است که ۳ سطر و ۳ ستون دارد
B ماتریسی است که ۲ سطر و ۲ ستون دارد
C ماتریسی است که ۲ سطر و ۳ ستون دارد
D ماتریسی است که ۳ سطر و ۲ ستون دارد

دستور متلب برای تعریف ماتریس:

```
>> A =   [4 5;2 8;3 -9]

A =
4    5
2    8
3   -9
```

۲ دستگاه معادلات خطی

تعریف ۰.۵

دستگاه معادلات خطی:
یک دستگاه معادلات در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

که به صورت ماتریسی_برداری $AX = b$ نیز قابل نمایش است به طوری که A ماتریسی $m \times n$، b برداری $m \times 1$ و X برداری $n \times 1$ است و به صورت زیر قابل نمایش هستند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

به A ماتریس ضرایب، به b بردار سمت راست و به X بردار مجهولات گفته می شود. هدف از حل معادلات خطی $AX = b$ تعیین نمودن بردار مجهولات X است.

مثال ۰.۱

دستگاه معادلات زیر داده شده است آن را به فرم ماتریسی_برداری بنویسید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

لذا $AX = b$ فرم ماتریسی_برداری دستگاه داده شده است که A، b، X در بالا مشخص شده اند.

مثال ۰.۲

دستگاه به فرم ماتریسی_برداری را به شکل مجموعه ای از معادلات بنویسید

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 2x_4 = 9 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 15 \end{cases}$$

تعریف ۰.۶

ماتریس افزوده:
در ارتباط با هر دستگاه معادلات خطی $AX = b$ یک ماتریس مهم به نام ماتریس افزوده وجود دارد که از قرار دادن بردار b در سمت راست آخرین ستون A حاصل می شود و با نماد $[A|b]$ نمایش داده می شود.

مثال ۰.۳

ماتریس افزوده دستگاه معادلات خطی داده شده را مشخص کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 17 \\ x_1 - 7x_2 + 14x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 96 \end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس A و بردار b را تشکیل می دهیم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & -7 & 14 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 96 \end{bmatrix}$$

لذا داریم

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 6 & 17 \\ 1 & -7 & 14 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 96 \end{array}\right]$$

همانطور که مشاهده می شود با داشتن ماتریس افزوده تمامی اطلاعات مربوط به دستگاه $AX = b$ مشخص می شود.
دستور متلب برای تعریف ماتریس افزوده:

```
>> A= [4 6 -8;1 -2 3;0 5 1];
>> b=[1;1;1];
>> C= [A b]

C =
4    6   -8    1
1   -2    3    1
0    5    1    1
```

دستور متلب برای حل دستگاه معادلات خطی:

```
>> A= [4 6 -8;1 -2 3;0 5 1];
>> b=[1;1; 1];
>> A\b          |>> inv(A)*b       |>> linsolve(A,b)
|                    |
```

```
ans =              |ans =               |ans =
0.5351   |         0.5351        |      0.5351
0.1491   |         0.1491        |      0.1491
0.2544   |         0.2544        |      0.2544
```

۳ فضای برداری،استقلال خطی

تعریف ۰.۷

فضای برداری:
یک فضای برداری مجموعه ای مانند S است که متشکل از عناصری است که بردار نامیده می شوند. اعمال جمع و ضرب اسکالری برای این عناصر تعریف می شود که در شرایط ذیل صدق می کنند.(U ، V و W عناصر دلخواه S ، c و d اسکالر هستند)

۱. حاصل جمع $U+V$ وجود دارد و متعلق به S است.(S تحت جمع بسته است)

۲. cU عنصری از S است.(S تحت ضرب اسکالر بسته است.)

۳. $U+V=V+U$ (ویژگی جابجایی)

۴. $U+(V+W)=(U+V)+W$ (ویژگی شرکت پذیری)

۵. عنصری از S، که بردار صفر نامیده می شود، با 0 نشان داده می شود، وجود دارد به قسمی که $U+0=U$

۶. متناظر هر عنصر U از S عنصری وجود دارد که قرینه U نامیده و با $-U$ نشان داده می شود، به قسمی که:

$$U+(-U)=0$$

۷. $c(U+V)=cU+cV$

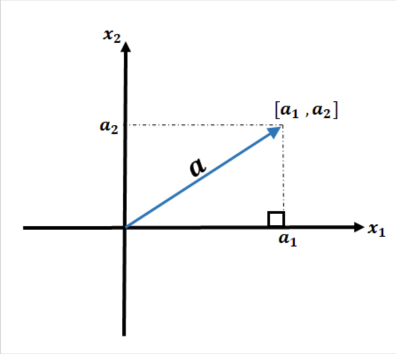
۸. $(c+d)U=cU+dU$

۹. $c(dU)=(cd)U$

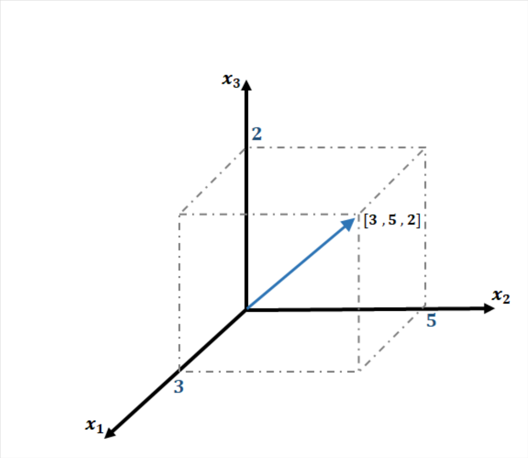
۱۰. $1U=U$

۴ فضای برداری $\mathbb{R}^n$

مجموعه تمام دو تایی های مرتب از اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}^2$ نشان می دهیم



مجموعه تمام سه تایی های مرتب از اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}^3$ نشان می دهیم



تعریف ۰.۸

ترکیب خطی:
فرض کنیم $V_1, V_2, \cdots, V_m$ بردار هایی در فضای برداری S باشند. گوییم V، برداری در S، یک ترکیب خطی از $V_1, V_2, \cdots, V_m$ است هرگاه اسکالر هایی چون $c_1, c_2, \cdots, c_m$ موجود باشند به قسمی که V را بتوان چنین نوشت:

$$V = c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_mV_m$$

تذکر ۰.۳

از این به بعد برای راحتی کار بردار های ستونی را به صورت سطری می نویسیم.

مثال ۰.۴

بردار $[12, 20]$ ترکیب خطی دو بردار $[3, 4]$, $[1, 2]$ است زیرا

$$[12, 20] = 2[3, 4] + 6[1, 2]$$

مثال ۰.۵

بردار $[۴, -۳, -۲]$ ترکیب خطی از بردار های

$$[۱, -۱, ۰], \qquad [۰, ۱, ۱], \qquad [۲, ۱, ۰]$$

است زیرا

$$[۴, -۳, -۲] = ۲[۱, -۱, ۰] - ۲[۰, ۱, ۱] + [۲, ۱, ۰]$$

مثال ۰.۶

بردار $[-۱, ۶, ۱۳]$ ترکیب خطی از بردار های $[-۳, -۲, -۱]$, $[۱, ۲, ۳]$ است زیرا

$$[-۱, ۶, ۱۳] = ۵[۱, ۲, ۳] + ۲[-۳, -۲, -۱]$$

مثال ۰.۷

آیا بردار $[۱۱, ۹]$ می تواند به صورت یک ترکیب خطی از بردار های $[۴, ۳]$, $[۱, ۱]$ نوشته شود؟

حل: داریم

$$\begin{aligned}[۱۱, ۹] &= c_۱[۱, ۱] + c_۲[۴, ۳] \\ &= [c_۱, c_۱] + [۴c_۲, ۳c_۲] \\ &= [c_۱ + ۴c_۲, c_۱ + ۳c_۲]\end{aligned}$$

لذا باید تساوی زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} c_۱ + ۴c_۲ = ۱۱ \\ c_۱ + ۳c_۲ = ۹ \end{cases}$$

می توان نشان داد $c_۱ = ۳, c_۲ = ۲$ جواب دستگاه فوق است پس

$$[۱۱, ۹] = ۳[۱, ۱] + ۲[۴, ۳]$$

تعریف ۰.۹

مولد:
مجموعه بردار های $V_۱, V_۲, \cdots, V_m$ از یک فضای برداری را وقتی یک مولد این فضا می نامیم که هر بردار فضا ترکیبی خطی از این بردار ها باشد. یک مجموعه مولد از بردار ها به یک معنی فضای برداری مربوطه را معرفی می کند زیرا هر بردار آن فضا را می توان از این بردار ها بدست آورد.

تعریف ۰.۱۰

استقلال خطی:

مجموعه بردار های $V_1, V_2, \cdots, V_n$ را مستقل خطی گوییم هرگاه از معادله

$$c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_nV_n = 0 \qquad (1)$$

نتیجه شود که

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

چنانچه حداقل یک $c_i \neq 0$ وجود داشته باشد که معادله (۱) برقرار باشد گوییم مجموعه بردار های $V_1, V_2, \cdots, V_n$ وابسته خطی هستند.

مثال ۰.۸

آیا مجموعه $\{[2,3],[1,1]\}$ مستقل خطی است؟

حل: داریم

$$c_1[2,3] + c_2[1,1] = 0$$
$$[2c_1, 3c_1] + [c_2, c_2] = 0$$

لذا باید تساوی زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

در نتیجه $c_1 = c_2 = 0$. پس این مجموعه مستقل خطی است.

مثال ۰.۹

وضعیت بردار های $[1,2,0], [3,1,4], [1,1,2]$ را در $\mathbb{R}^3$ بررسی کنید.

حل: اسکالر های c_1, c_2, c_3 را در نظر می گیریم.

$$c_1[1,1,2] + c_2[3,1,4] + c_3[1,2,0] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + \ \ c_3 = 0 \\ c_1 + \ \ c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 \qquad\ \ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad c_2 + \ \ c_3 = 0 \\ \quad - c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 \qquad\qquad\ = -2c_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow c_3 = c_2 = c_1 = 0$$

بنابراین بردارها در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی اند.

تعریف ۰.۱۱

پایه:
مجموعه ای متناهی از بردارها مانند $V = \{V_1, \cdots, V_m\}$ را یک پایه فضای برداری S نامیم هرگاه مجموعه V مولد بوده و S و مستقل خطی باشد.

مثال ۰.۱۰

نشان دهید $\{[1,0],[0,1]\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

حل: ابتدا باید نشان دهیم که مولد است پس فرض می کنیم $[x_1,x_2]$ یک بردار دلخواه در $\mathbb{R}^2$ است. اسکالر هایی مانند a_1,a_2 می یابیم که

$$a_1[1,0]+a_2[0,1]=[x_1,x_2]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \qquad = x_1 \\ \qquad a_2 = x_2 \end{cases}$$

همچنین داریم

$$c_1[1,0]+c_2[0,1]=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$$

پس مستقل خطی هم هستند. بنابراین $\{[1,0],[0,1]\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

مثال ۰.۱۱

آیا $\{[1,-1],[-1,0]\}$ پایه $\mathbb{R}^2$ است؟

حل:

$$a_1[1,-1]+a_2[-1,0]=[x_1,x_2] \Rightarrow a_1-a_2=x_1, \qquad -a_1=x_2$$
$$\Rightarrow a_2=-x_1-x_2, \qquad a_1=-x_2.$$

همچنین

$$c_1[1,-1]+c_2[-1,0]=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$$

در نتیجه نشان دادیم مجموعه $\{[1,-1],[-1,0]\}$ مستقل خطی است و مولد $\mathbb{R}^2$ است لذا تشکیل پایه برای $\mathbb{R}^2$ می دهد.

مثال ۰.۱۲

آیا بردار های $\{[1,-1,1],[-1,-1,1],[0,1,1]\}$ برای $\mathbb{R}^3$ پایه هستند؟

حل: اسکالر های a_1,a_2,a_3 باید وجود داشته باشند که

$$a_1[1,-1,1]+a_2[-1,-1,1]+a_3[0,1,1]=[x_1,x_2,x_3]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1-a_2 = x_1 \\ -a_1-a_2+a_3 = x_2 \\ a_1+a_2+a_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2x_1-x_2+x_3}{4}, \\ a_2 = \frac{-2x_1-x_2+x_3}{4}, \\ a_3 = \frac{x_2+x_3}{2} \end{cases}$$

اکنون مستقل خطی بودن را بررسی می کنیم

$$c_1[1,-1,1]+c_2[-1,-1,1]+c_3[0,1,1]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1-c_2 = 0 \\ -c_1-c_2+c_3 = 0 \\ c_1+c_2+c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

پس این مجموعه بردارها پایه $\mathbb{R}^3$ هستند.

تعریف ۰.۱۲

هرگاه فضای برداری V دارای پایه ای مشتمل بر n بردار باشد، بعد V را برابر n می نامیم و آن را به صورت $\dim(V)$ نشان می دهیم.

مثال ۰.۱۳

دیدیم که مجموعه $\{[۰,۱],[۱,۰]\}$ پایه ای برای $\mathbb{R}^۲$ است که دو بردار دارد پس ۲ $\dim(\mathbb{R}^۲) =$

مثال ۰.۱۴

مشاهده شد که $\{[۱,-۱,۱],[-۱,-۱,۱],[۰,۱,۱]\}$ پایه ای برای $\mathbb{R}^۳$ است و چون ۳ عضو دارد پس ۳ $\dim(\mathbb{R}^۳) =$

تمرین ۰.۲

ابتدا نشان دهید مجموعه

$$\{[۱,۰,۰,\cdots,۰],[۰,۱,۰,\cdots,۰],[۰,۰,۱,\cdots,۰],\cdots,[۰,۰,۰,\cdots,۱]\}$$

پایه ای برای $\mathbb{R}^n$ است و از آن نتیجه بگیرید که $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

تعریف ۰.۱۳

فرض کنید V یک فضای برداری و $\varnothing \neq W \subseteq V$. آنگاه W را زیرفضای V نامیم هرگاه نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده بر V بسته باشد.

مثال ۰.۱۵

نشان دهید مجموعه W تعریف شده به صورت

$$W = \{[\alpha,\beta,۰]^T \,;\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

زیرفضایی از $\mathbb{R}^۳$ است.

حل: فرض کنید $W_۱ = [\alpha_۱,\beta_۱,۰]^T, W_۲ = [\alpha_۲,\beta_۲,۰]^T$ دو عضو دلخواه از W باشند. باید نشان دهیم $W_۱ + W_۲ \in W$. اما

$$W_۱ + W_۲ = [\alpha_۱,\beta_۱,۰]^T + [\alpha_۲,\beta_۲,۰]^T = [\alpha_۱+\alpha_۲,\beta_۱+\beta_۲,۰]^T \in W.$$

از طرفی برای هر $k \in \mathbb{R}$ داریم

$$kW_۱ = k[\alpha_۱,\beta_۱,۰]^T = [k\alpha_۱,k\beta_۱,۰]^T \in W.$$

پس W زیر فضایی از $\mathbb{R}^۳$ می باشد.

۵ رتبه ماتریس،فضای سطری و ستونی

تعریف ۰.۱۴

فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد، سطرهای A را می توانیم به مثابه بردار های سطری $r_1, r_2, \cdots, r_m$ و ستون های آن را به مثابه بردار های ستونی $c_1, c_2, \cdots, c_n$ در نظر بگیریم. هر بردار سطری شامل n مولفه و هر بردار ستونی شامل m مولفه می باشد. بردار های سطری زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ را گسترش می دهند که فضای سطری A نامیده می شود و بردار های ستونی زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ را گسترش می دهند که فضای ستونی A نامیده می شود.

مثال ۰.۱۶

ماتریس زیر را در نظر می گیریم

$$A = \begin{bmatrix} ۷ & -۴ \\ ۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

بردار های سطری A عبارتند از

$$r_1 = [۷, -۴], \qquad r_2 = [۱۵, ۶]$$

این بردار ها زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ تولید می کنند که فضای سطری A نامیده می شود. از طرفی بردار های ستونی A عبارتند از

$$c_1 = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۵ \end{bmatrix}, \qquad c_2 = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

این بردارها زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ تولید می کنند که فضای ستونی A نامیده می شود.

قضیه ۰.۱

فضای سطری و ستونی ماتریس A دارای یک بعد هستند.

تعریف ۰.۱۵

بعد فضای سطری(ستونی) ماتریس A را رتبه A می نامیم. رتبه A را با نماد $\mathrm{Rank}(A)$ نشان می دهیم.

مثال ۰.۱۷

رتبه ماتریس هیلبرت (Hilbert matrix) به ازای $n = ۲$ را بیابید.

$$H_2 = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

حل: هیچ یک از بردار ها ترکیب خطی از هم ایجاد نمی کنند پس مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس ۲ است

$$\mathrm{Rank}(H_2) = ۲$$

مثال ۰.۱۸

رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

حل: با بررسی در می یابیم که سطر سوم این ماتریس ترکیب خطی از دو سطر آن است:

$$[۲, ۵, ۸] = ۲[۱, ۲, ۳] + [۰, ۱, ۲]$$

در این صورت سه سطر این ماتریس وابسته ی خطی هستند. در نتیجه رتبه این ماتریس کوچک تر از ۳ است. چون $[۱, ۲, ۳]$ مضرب اسکالری از $[۰, ۱, ۲]$ نیست، این دو بردار مستقل خطی هستند. این دو بردار تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می دهند. از این رو $\mathrm{Rank}(A) = ۲$

مثال ۰.۱۹

رتبه ماتریس داده شده را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: مشاهده می شود که دو ستون ماتریس ترکیب خطی از هم نمی باشد و نمی توان یک را برحسب دیگری نوشت پس پایه ای برای $\mathbb{R}^۲$ هستند. بعد فضای ستونی(سطری) ۲ است بنابراین $\mathrm{Rank}(A) = ۲$

با توجه به نتایجی در جبرخطی میتوان دید که برای ماتریس $m \times n$، A همواره

$$\mathrm{Rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

در حالتی که $\mathrm{Rank}(A) = \min\{m, n\}$ می گوییم ماتریس A رتبه کامل است. اگر $\mathrm{Rank}(A) = n$ یعنی اینکه رتبه A برابر تعداد ستون ها باشد می گوییم رتبه A ستونی کامل است و دقت کنید در این حالت حتما $m \geq n$ را خواهیم داشت و اگر $\mathrm{Rank}(A) = m$ یعنی اینکه رتبه A برابر تعداد سطر ها باشد می گوییم A رتبه سطری کامل است و دقت کنید که در این حالت حتما $m \leq n$ را خواهیم داشت.
به طور خلاصه وقتی می گوییم A رتبه کامل است یعنی اینکه یا رتبه ستونی کامل است و یا رتبه سطری کامل است.

تذکر ۰.۴

وقتی که $\mathrm{Rank}(A) < \min\{m, n\}$ می گوییم A رتبه ناقص است.

مثال ۰.۲۰

ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

می توان دید که دو سطر A مستقل خطی هستند پس $\mathrm{Rank}(A) = ۲$. لذا A رتبه سطری کامل است یا به طور خلاصه A رتبه کامل است.

دستور متلب برای بدست آوردن رتبه ماتریس:

```
>> A=[6 8 1;2 8 0];
>> rank(A)

ans =

2
```

۱.۵ عملیات سطری مقدماتی (Row Elementray Operations)

تبدیلاتی وجود دارند که می توانند یک دستگاه معادلات خطی را به دستگاه معادلات خطی دیگری با جواب یکسان تبدیل کنند که به آن ها **تبدیلات مقدماتی** گفته می شود. برای این کار دستگاه را به صورت ماتریس افزوده آن می نویسند و با مراحلی که اعمال سطری مقدماتی نامیده می شوند آن را به فرم ساده تر تبدیل می کنند. این اعمال عبارتند از:

۱. تعویض دو سطر یک ماتریس

۲. ضرب یک سطر در یک عدد ناصفر

۳. افزودن مضربی از یک سطر به سطری دیگر

توجه کنید در عملیات سطری مقدماتی معمولا سطر ها با R نمایش داده می شوند.

مثال ۰.۲۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۶ فرم پلکانی تحویل یافته

یک ماتریس به فرم پلکانی تحویل یافته است هرگاه:

۱. هر سطری که کاملا شامل صفر است در پایین سطر ناصفر قرار گیرد.

۲. اولین عنصر غیر صفر هر سطر دیگر برابر ۱ باشد.(این عنصر یک **پیشرو** ۱ نامیده می شود.)

۳. پیشرو ۱ هر سطر، در سمت راست پیشرو ۱ سطر قبلی قرار گیرد.

۴. تمام درایه های دیگر در ستونی که شامل پیشرو ۱ است، صفرند.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۲۲

ماتریس های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته نیستند

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

زیرا در ماتریس سمت چپ اولین عنصر ناصفر در سطر ۲ برابر ۱ نیست و در ماتریس سمت راست سطری که متشکل از صفر است، در پایین ماتریس نیست.

تمرین ۰.۳

ماتریس هایی که به فرم پلکانی تحویل یافته هستند را مشخص کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۲۳

فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

محاسبات ابتدا در ستون سمت چپ و سپس در ادامه در ستون سمت راست تکمیل شده است:

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \longrightarrow \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-13}{4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow \frac{-4}{13}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \longrightarrow R_1 - 5R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۲۴

فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to (-3)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۲۵

فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

محاسبات ابتدا در ستون سمت چپ و سپس در ادامه در ستون سمت راست تکمیل شده است:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -13 & -30 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{-1}{13} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{30}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{30}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-43}{13} & \frac{-47}{13} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{-13}{43} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{30}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{47}{43} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to (-3)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & \frac{30}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{47}{43} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to \frac{-14}{13} R_3 + R_1]{R_2 \to \frac{-30}{13} R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-44}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-82}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{47}{43} \end{bmatrix}$$

قضیه ۰.۲

فرض کنیم M فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس A باشد. بردار های سطری غیرصفر M تشکیل یک پایه برای فضای سطری ماتریس A می دهند بنابراین رتبه A برابر تعداد سطرهای غیر صفر ماتریس M است.

مثال ۰.۲۶

ابتدا ماتریس زیر را به فرم سطری پلکانی تحویل یافته تبدیل کنید سپس رتبه آن را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \longleftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{4} R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نهایت ماتریس حاصل دو سطر غیرصفر دارد پس $\mathrm{Rank}(A) = 2$.

مثال ۰.۲۷

ابتدا ماتریس زیر را به فرم سطری پلکانی تحویل یافته تبدیل کنید سپس رتبه آن را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_1]{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{8} R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3} R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -\frac{2}{3} R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نهایت ماتریس حاصل دو سطر غیرصفر دارد پس $\mathrm{Rank}(A) = 2$.

مثال ۰.۲۸

ابتدا ماتریس زیر را به فرم سطری پلکانی تحویل یافته تبدیل کنید سپس رتبه آن را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to (-1) R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to (-1) R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت ماتریس حاصل سه سطر غیرصفر دارد پس $\mathrm{Rank}(A) = 3$

- برای بدست آوردن فرم سطری پلکانی تحویل یافته در نرم افزار Maple میتوانید از دستورات زیر استفاده کنید.

```
> with(LinearAlgebra) :
> A := <<1, 2, 1>|<2, 5, 1>|<3, 4, 5>>
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- برای بدست آوردن فرم سطری پلکانی تحویل یافته در نرم افزار Matlab میتوانید از دستورات زیر استفاده کنید.

```
>> A=[1 2 3;2 5 4;1 1 5]

A =

1    2    3
2    5    4
1    1    5


>> rref(A)

```

```
ans=
1    0    7
0    1   -2
0    0    0
```

۷ فضای برد و فضای پوچ

تعریف ۰.۱۶

برد و فضای پوچ:
برای هر ماتریس $m \times n$ دو زیر فضای مهم به صورت زیر وجود دارند

فضای برد A $\quad R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = AX, X \in \mathbb{R}^n\}$

فضای پوچ A $\quad N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$

توجه کنید بعد $N(A)$ پوچی A نامیده می شود و توسط $\dim(N(A))$ نمایش داده می شود. در فصل های بعد در مورد این دو زیرفضا بیشتر توضیح داده خواهد شد.

قضیه ۰.۳

فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه

$$\text{Rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

تذکر ۰.۵

رتبه A همان بعد فضای برد A می باشد.

مثال ۰.۲۹

فضای برد و پوچ ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه فضای پوچ A قرار می دهیم:

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

اگر $x_۳ = \alpha$ و $x_۲ = \beta$ آنگاه $x_۱ = -۲\beta + \alpha$ پس

$$X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\beta + \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $N(A)$ شامل تمام بردار هایی به شکل فوق است که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ پس

$$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

لذا مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$ پایه ای برای این فضا و در نتیجه $\dim(N(A)) = ۲$. از اینرو قضیه قبل نتیجه می دهد

$$\mathrm{Rank}(A) = n - \dim(N(A)) = ۳ - ۲ = ۱$$

از طرفی برای فضای برد داریم:

$$b = AX = \begin{bmatrix} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ \end{bmatrix} = x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + ۲x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} - x_۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$
$$= (x_۱ + ۲x_۲ - x_۳) \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

بنابراین

$$R(A) = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

فضای برد A است. واضح است که $\dim(R(A)) = ۱$ لذا از این هم می توان متوجه شد که

$$\mathrm{Rank}(A) = \dim(R(A)) = ۱$$

همچنین

$$\mathrm{Rank}(A) + \dim(N(A)) = ۱ + ۲ = ۳ = n$$

۸ تعاریف و خواص ابتدایی ماتریس ها

تعریف ۰.۱۷

ترانهاده ماتریس A را با A^T نمایش می دهیم که از جابجایی سطر ها و ستون های آن ایجاد می شود پس اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۷ & ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ \end{bmatrix}$$

تعریف ۰.۱۸

مزدوج ماتریس A را با $\bar{A}$ نمایش می دهیم و درایه های آن با مزدوج گرفتن از درایه های A وقتی که ماتریسی در میدان اعداد مختلط است، بدست می آید مثلا اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۲+۳i & -۷ \\ -۱-i & ۴-i \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} ۲-۳i & -۷ \\ -۱+i & ۴+i \end{bmatrix}$$

تعریف ۰.۱۹

ترانهاده مزدوج ماتریس A را هرمیتین A می نامیم و آن را به صورت $A^H = (\bar{A})^T$ یاA^* تعریف می کنیم مثلا اگر $A = \begin{bmatrix} ۲+i & ۳-i \\ ۴-۲i & ۶ \end{bmatrix}$ آنگاه $\bar{A} = \begin{bmatrix} ۲-i & ۳+i \\ ۴+۲i & ۶ \end{bmatrix}$ بنابراین

$$A^H = \begin{bmatrix} ۲-i & ۳+i \\ ۴+۲i & ۶ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۲-i & ۴+۲i \\ ۳+i & ۶ \end{bmatrix}$$

تعریف ۰.۲۰

ماتریس A را متقارن گوییم هرگاه $A = A^T$ و هرمیتی گوییم هرگاه $A = A^H$ مثلا اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ چون $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = A^T$ پس A متقارن است. همچنین اگر $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۲+i \\ ۲-i & ۳ \end{bmatrix}$ چون

$$B^H = \begin{bmatrix} ۲ & ۲+i \\ ۲-i & ۳ \end{bmatrix} = B$$

پس B هرمیتی است.

تعریف ۰.۲۱

ماتریس A را پادمتقارن گوییم هرگاه $A^T = -A$ و پادهرمیتی گوییم هرگاه $A^H = -A$ مثلا

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & -۳۰ \\ -۲ & ۰ & -۴ \\ ۳۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۳۰ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ -۳۰ & -۴ & ۰ \end{bmatrix} = -A$$

پس A پادمتقارن است و اگر

$$B = \begin{bmatrix} -i & ۳+i \\ -۳+i & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow B^H = \begin{bmatrix} i & -۳-i \\ ۳-i & ۰ \end{bmatrix} = -B$$

پس B پادهرمیتی است.

تعریف ۰.۲۲

ماتریس U را بالامثلثی (Upper Triangular matrix) گوییم هرگاه عناصر زیرقطر اصلی همگی صفر باشد مثلا

$$U = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

تعریف ۰.۲۳

ماتریس L را پایین مثلثی (Lower Triangular matrix) گوییم هرگاه عناصر بالای قطر اصلی همگی صفر باشد مثلا

$$L = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۶ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۹ \end{bmatrix}$$

ماتریس D را قطری (Diagonal matrix) گوییم هرگاه عناصر بالا و پایین قطر اصلی همگی صفر باشد مثلا

$$D = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس های دیگری هستند که در فصل های بعدی با آنها آشنا می شوید از جمله ماتریس همانی (Identity matrix)

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دستور متلب برای محاسبه ترانهاده ماتریس:

```
>> A= [1 2 3;7 8 9]

A =
1     2     3
7     8     9


>> A'

ans =
1     7
2     8
3     9
```

دستور متلب برای محاسبه مزدوج ماتریس:

```
>> A=[1+2i i-3; 4+i 6+3i]
A =

1.0000 + 2.0000i      -3.0000 + 1.0000i
4.0000 + 1.0000i       6.0000 + 3.0000i

>> conj(A)

ans=

1.0000 - 2.0000i      -3.0000 - 1.0000i
4.0000 - 1.0000i       6.0000 - 3.0000i
```

دستور متلب برای محاسبه ترانهاده مزدوج ماتریس:

```
>> A=[1+2i i-3; 4+i 6+3i]
A =

1.0000 + 2.0000i      -3.0000 + 1.0000i
4.0000 + 1.0000i       6.0000 + 3.0000i

>> A'

ans=

1.0000 - 2.0000i      4.0000 - 1.0000i
-3.0000 - 1.0000i     6.0000 - 3.0000i
```

دستور متلب برای تولید ماتریس همانی:

```
>> I = eye(3)

I =
1    0    0
0    1    0
0    0    1
```

۹ دترمینان و اثر ماتریس

تعریف ۲۴.۰

دترمینان ماتریس ۲×۲، A را با $\det(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\right) = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

مثال ۰.۳۰

دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل: با بکار گیری تعریف اخیر داریم: $\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix} = (۲ \times ۱) - (۴ \times (-۳)) = ۲ + ۱۲ = ۱۴$

تعریف ۰.۲۵

کهاد و همسازه:
کهاد درایه a_{ij} را با M_{ij} نشان می دهیم و عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A .
همسازه درایه a_{ij} را با C_{ij} نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_{ij} = (-۱)^{i+j} M_{ij}$$

تذکر ۰.۶

توجه کنید که کهاد و همسازه یک درایه حداکثر تفاوتشان در یک علامت است.

$$C_{ij} = +M_{ij} \text{ یا } - M_{ij}$$

مثال ۰.۳۱

کهاد و همسازه درایه های $a_{۱۲}, a_{۳۳}$ را برای ماتریس زیر بدست آورید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

حل: با بکارگیری تعریف اخیر داریم

$$M_{۱۲} = \det\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\right) = ۰ \times (-۲) - (۴ \times ۲) = -۸ \Rightarrow C_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} M_{۱۲} = -۱ \times -۸ = ۸$$
$$M_{۳۳} = \det\left(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\right) = ۲ \times ۳ - (-۱) \times ۰ = ۶ \Rightarrow C_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} M_{۳۳} = ۱ \times ۶ = ۶$$

قضیه ۰.۴

دترمینان ماتریس مربعی A برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه های هر سطر یا هر ستون در همسازه مربوط به آن درایه. بنابراین دترمینان ماتریس A برحسب بسط سطر i ام برابر است با

$$\det(A) = a_{i۱}C_{i۱} + a_{i۲}C_{i۲} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad i = ۱, ۲, ..., n.$$

مثال ۰.۳۲

مطلوب است محاسبه دترمینان ماتریس A برحسب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 13 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سطر سوم:

$$(-1)^4 \times (-1) \times \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) + (-1)^5 \times 1 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}\right) = 28$$

سطر دوم:

$$(-1)^3 \times 13 \times \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1)^4 \times -2 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1)^5 \times 5 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 28$$

ستون اول:

$$(-1)^2 \times 1 \times \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1)^3 \times 13 \times \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1)^4 \times -1 \times \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 28$$

ستون دوم:

$$(-1)^3 \times 0 + (-1)^4 \times -2 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + (-1)^5 \times 1 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}\right) = 28$$

مثال ۰.۳۳

دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از درایه های سطر اول و همسازه های آن داریم

$$\det(A) = (-1)^{(1+1)} \times -1 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right) + (-1)^{(1+2)} \times 2 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right) +$$

$$(-1)^{(1+3)} \times 0 \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 16 - 10 + 0 = 6$$

در ادامه به معرفی ماتریس الحاقی می‌پردازیم.

تعریف ۰.۲۶

ماتریس الحاقی:
فرض کنید c_{ij} همسازه درایه a_{ij} ماتریس $A = (a_{ij})$ باشد و $C = (c_{ij})$. آنگاه به C^T ماتریس الحاقی A گفته و آن را با نماد $\mathrm{adj}(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۰.۳۴

ماتریس الحاقی را برای ماتریس داده شده محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

ابتدا همسازه ها را محاسبه می‌کنیم

$$c_{۱۱} = \det \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = -۱, \qquad c_{۱۲} = -\det \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = -۴,$$
$$c_{۱۳} = \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -۱, \qquad c_{۲۱} = -\det \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = -۱۴,$$
$$c_{۲۲} = \det \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = ۰, \qquad c_{۲۳} = -\det \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = ۰,$$
$$c_{۳۱} = \det \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -۳, \qquad c_{۳۲} = -\det \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = ۲,$$
$$c_{۳۳} = \det \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = -۳,$$

لذا

$$C = \begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۱ \\ -۱۴ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

پس

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -۱ & -۱۴ & -۳ \\ -۴ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

قضیه ۰.۵

فرض کنید A ماتریسی معکوس‌پذیر باشد. آنگاه

$$A^{-۱} = \frac{۱}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

اثبات این قضیه را در کتاب‌های مبانی ماتریس و جبرخطی می‌توان یافت.

مثال ۰.۳۵

برای ماتریس زیر A^{-1} را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا $\det(A)$ را محاسبه می‌کنیم (بسط بر حسب سطر اول)

$$\det(A) = -3\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -12 - 2 = -14.$$

و بنابر مثال قبلی داریم

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}\text{adj}(A) = -\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

تعریف ۰.۲۷

اثر یک ماتریس که با نماد $\text{trace}(A)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر است

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

مثال ۰.۳۶

اثر ماتریس مثال قبل به صورت زیر است

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0 + 0 + 4 = 4.$$

مثال ۰.۳۷

اثر ماتریس های زیر را مجاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3+4i & -1 \\ -2 & 5-i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\text{trace}(A) = (3+4i) + (5-i) = 8 + 3i$$
$$\text{trace}(B) = 5 + (-1) + 7 = 11$$
$$\text{trace}(C) = 1 + 5 + (-5) = 1$$

۱۰ چند خاصیت از اثر ماتریس

نکته ۰.۱

فرض کنید A ماتریسی $n \times m$ و B ماتریسی $m \times n$ باشد آنگاه

$$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$$

اثبات: در واقع می توان نوشت

$$\mathrm{trace}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \mathrm{trace}(BA)$$

نکته ۰.۲

برای بردار های ستونی حقیقی مانند $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$ اثر ضرب خارجی برابر با ضرب داخلی است یعنی

$$\mathrm{trace}(ba^T) = \mathrm{trace}(a^Tb)$$

نکته ۰.۳

$$\mathrm{trace}(cA) = c\,\mathrm{trace}(A), \quad \mathrm{trace}(A^T) = \mathrm{trace}(A),$$
$$\mathrm{trace}(I_n) = n, \quad \mathrm{trace}(\mathbb{O}) = 0$$

نکته ۰.۴

برای دو ماتریس A و B داریم

$$\mathrm{trace}(AB) \neq \mathrm{trace}(A)\mathrm{trace}(B)$$

نکته ۰.۵

برای ماتریس های A, B و C داریم

$$\mathrm{trace}(ABC) = \mathrm{trace}(CAB) = \mathrm{trace}(BCA) \neq \mathrm{trace}(ACB)$$

مثال ۰.۳۸

به مثال نقض زیر توجه کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}(AB)=۱, \qquad \mathrm{trace}(A)\mathrm{trace}(B)=۰$$

مثال ۰.۳۹

نشان دهید

$$\mathrm{trace}(A+B)=\mathrm{trace}(A)+\mathrm{trace}(B)$$

حل: داریم

$$\mathrm{trace}(A+B)=\sum_{k=۱}^{n}(A+B)_{kk}=\sum_{k=۱}^{n}(A_{kk}+B_{kk})=\sum_{k=۱}^{n}A_{kk}+\sum_{k=۱}^{n}B_{kk}=\mathrm{trace}(A)+\mathrm{trace}(B)$$

قضیه ۰.۶

اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه عبارات زیر معادل هستند:

۱. ماتریس A نامنفرد(ناتکین، معکوس پذیر) است

۲. دترمینان ماتریس A مخالف صفر است

۳. دستگاه $Ax=b$ به ازای هر b جواب منحصر به فرد دارد

۴. $\mathrm{Rank}(A)=n$

۵. $AX=۰$ فقط جواب بدیهی صفر دارد

۶. ماتریس A با ماتریس I_n هم ارز سطری است

۷. ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند

۸. سطر های ماتریس A مستقل خطی هستند

۹. $\dim(N(A))=۰$

۱۰. مقادیر ویژه ماتریس A مخالف صفر هستند(این مفهوم بزودی تعریف می شود)

۱۱. یکتا جواب دستگاه $X=A^{-۱}b$ است.

۱۲. $\dim(R(A))=n$

دستور برای محاسبه دترمینان ماتریس:

```
Matlab
>> A=[7 8 6;1 4 8; 0 2 9]
```

```

A =
7    8    6
1    4    8
0    2    9
>> det(A)

ans=
80

python
import numpy as np

A = np.array([[7, 8, 6], [1, 4, 8], [0, 2, 9]])
det_A = np.linalg.det(A)

print(det_A)
Output:
80.0
```

دستور برای محاسبه اثر ماتریس:

```
Matlab


>> A=[7 8 6;1 4 8; 0 2 9]

A =
7    8    6
1    4    8
0    2    9
>> trace(A)

ans=
20



python
import numpy as np

A = np.array([[7, 8, 6], [1, 4, 8], [0, 2, 9]])
trace_A = np.trace(A)

print(trace_A)
Output:
20
```

۱۱ ماتریس جایگشت

ماتریس جایگشت یک ماتریس همانی است که چند سطر آن به دلخواه جابجا شده‌اند. در دروس جبر خطی معمولا ماتریس جایگشت را با نماد P نمایش می‌دهند. مثلا برای $n = ۲$ تنها دو ماتریس جایگشت ۲×۲ داریم.

$$P_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad P_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

دقت کنید که $P_۱$ همان ماتریس همانی است بنابراین در عمل برای $n = ۲$ تنها یک ماتریس جایگشت داریم(توجه کنید که ضرب ماتریس همانی در یک ماتریس دلخواه A هیچ تغییری در آن نمی‌دهد و لذا قادر نیست سطرهای A را جابجا کند.)

می‌توان دید که برای $n = ۳$ تنها $۳! = ۶$ ماتریس جایگشت وجود دارد که البته یکی از آنها ماتریس همانی است(بنابراین در عمل ۵ ماتریس جایگشت داریم)

۵ ماتریس جایگشت مرتبه ۳ به قرار زیرند:

$$P_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \; P_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, P_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \; P_۴ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \; P_۵ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

توجه ۰.۱

هر ماتریس جایگشت در خاصیت $P^TP = PP^T = I$ صدق می‌کند پس:

$$\boxed{P^{-۱} = P^T}$$

که یک خاصیت بسیار مهم ماتریس‌های جایگشت است.

۱۲ ماتریس غالب قطری

تعریف ۰.۲۸

ماتریس $A = (a_{ij})$ را غالب قطری سطری می نامیم هرگاه

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = ۱, ۲, ..., n.$$

پس در حالت خاص ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

غالب قطری سطری است اگر

$$\begin{cases} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{cases}$$

پس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

غالب قطری سطری است زیرا

$$\begin{cases} |4| \geq |2| + |-2| \\ |3| \geq |1| + |0| \\ |6| \geq |1| + |4| \end{cases}$$

اگر همواره در نامساوی فوق علامت $>$ برقرار باشد از کلمه "اکید" استفاده می‌کنیم. مثلاً ماتریس زیر غالب قطری سطری اکید است:

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & -2 \\ 0 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$\begin{cases} |17| > |1| + |5| \\ |9| > |2| + |-2| \\ |15| > |0| + |8| \end{cases}$$

تعریف ۰.۲۹

ماتریس $A = (a_{ij})$ را غالب قطری ستونی می نامیم هرگاه

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

پس در حالت خاص ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

غالب قطری ستونی است اگر

$$\begin{cases} |a_{11}| \geq |a_{21}| + |a_{31}| \\ |a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}| \\ |a_{33}| \geq |a_{13}| + |a_{23}| \end{cases}$$

پس ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۹ & ۶ & ۷ \\ ۳ & ۱۴ & -۵ \\ -۳ & ۷ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

غالب قطری ستونی اکید است زیرا

$$\begin{cases} |۹| \geq |۳| + |-۳| \\ |۱۴| \geq |۶| + |۷| \\ |۱۶| \geq |-۵| + |۷| \end{cases}$$

اگر همواره در نامساوی فوق علامت $>$ برقرار باشد از کلمه "اکید" استفاده می‌کنیم. مثلاً ماتریس زیر غالب قطری ستونی اکید است:

$$A=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۹ & ۶ \\ ۱ & ۶ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

زیرا

$$\begin{cases} |۱۱| > |-۲| + |۱| \\ |۹| > |۱| + |۶| \\ |۱۱| > |۲| + |۶| \end{cases}$$

۱۳ مقدار ویژه، بردار ویژه

تعریف ۰.۳۰

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. آنگاه (λ, x) یک **جفت ویژه** ماتریس A نامیده می شوند اگر

$$AX = \lambda X \tag{۲}$$

توجه کنید X برداری غیرصفر است و λ یک اسکالر است.

از (۲) داریم

$$AX - \lambda X = ۰ \;\Rightarrow\; AX - \lambda I_n X = ۰ \;\Rightarrow\; (A - \lambda I_n)X = ۰$$

چون فرض کرده ایم $X \neq ۰$ پس باید ماتریس $A - \lambda I_n$ منفرد باشد یعنی دترمینان آن مساوی صفر باشد زیرا اگر ناصفر باشد آنگاه وارون پذیر بوده و

$$(A - \lambda I_n)X = ۰ \;\Rightarrow\; (A - \lambda I_n)^{-۱} \times (A - \lambda I_n)X = (A - \lambda I_n)^{-۱} \times ۰ = ۰ \Rightarrow IX = ۰ \Rightarrow X = ۰$$

که تناقض است پس ماتریس $(A - \lambda I_n)$ باید منفرد باشد یعنی $\det(A - \lambda I_n) = ۰$ می توان دید که $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ یک چندجمله ای برحسب λ و دقیقا درجه n است و آن را **چندجمله ای مشخصه** ماتریس A می نامند. بنابر (۲) ریشه های $P_A(\lambda)$ همان **مقادیر ویژه** A هستند لذا بنابر قضیه اساسی جبر ماتریس A دارای n مقدار ویژه است.

قضیه ۰.۷

قضیه اساسی جبر: هر چندجمله ای درجه n در اعداد مختلط دارای n ریشه با احتساب تکرر است.

$$p(x) = a(x-\lambda_۱)^{t_۱}(x-\lambda_۲)^{t_۲}\cdots(x-\lambda_k)^{t_k}, \quad t_۱+t_۲+...+t_k = n.$$

مثال ۰.۴۰

جفت ویژه ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا چندجمله ای مشخصه را محاسبه می کنیم

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_۲)$$

$$A-\lambda I_۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{bmatrix}$$

لذا

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_۲) = \det\left(\begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (۲-\lambda)(۲-\lambda)-(۱)(۱) = \lambda^۲ - ۴\lambda + ۴ - ۱ = \lambda^۲ - ۴\lambda + ۳ \end{aligned}$$

$$P_A(\lambda) = ۰ \Rightarrow \lambda^۲ - ۴\lambda + ۳ = ۰ \Rightarrow (\lambda-۱)(\lambda-۳) = ۰ \Rightarrow \lambda_۱ = ۱, \lambda_۲ = ۳$$

برای بدست آوردن بردار ویژه متناظر با $\lambda_۱ = ۱$ داریم

$$(A-\lambda_۱ I_۲)X_۱ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲-\lambda_۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-\lambda_۱ \end{bmatrix} X_۱ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} X_۱ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \ x_۱ = -x_۲$$

پس داریم

$$X_۱ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_۲ \\ x_۲ \end{bmatrix} = x_۲ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

چون باید $X_۱ \neq ۰$ کافی است انتخاب کنیم به طور دلخواه $x_۲ = ۱$ پس بردار ویژه $X_۱$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$X_۱ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

برای بردار ویژه متناظر با $\lambda_۲ = ۳$ داریم

$$(A-\lambda_۲ I_۲)X_۲ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲-\lambda_۲ & ۱ \\ ۱ & ۲-\lambda_۲ \end{bmatrix} X_۲ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} X_۲ = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_۱ + x_۲ = ۰ \\ x_۱ - x_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \ x_۱ = x_۲$$

پس داریم

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون باید $X_2 \neq 0$ کافی است انتخاب کنیم به طور دلخواه $x_2 = 1$ پس بردار ویژه X_2 به صورت زیر حاصل می شود:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نکته ۰.۶

$$\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \operatorname{trace}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

مثال ۰.۴۱

مقدار ویژه و بردار های ویژه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: چند جمله ای مشخصه این ماتریس $\lambda^2 - 2\lambda + 9$ است و مقادیر ویژه آن

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-36}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-2} = 1 \pm 2\sqrt{2}i$$

محاسبه بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2}i$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2-2\sqrt{2}i & -3 \\ 4 & 2-2\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

با محاسباتی مشابه قبل داریم $X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2-2\sqrt{2}i \end{bmatrix}$

می توان دید که بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه دوم مزدوج X_1 است یعنی

$$X_2 = \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2+2\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۴۲

مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$A-\lambda I_3=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&4\\0&4&9-\lambda\end{bmatrix}$$

اگر دترمینان

$$P_A(\lambda)=\det\left(\begin{bmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&4\\0&4&9-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

را برحسب سطر اول بسط دهیم داریم

$$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=(2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda&4\\4&9-\lambda\end{bmatrix}\right)=(2-\lambda)((3-\lambda)(9-\lambda)-4\times 4)\\&=(2-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+27-16)=(2-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+11)=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-11)\\&\Rightarrow P_A(\lambda)=0\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=11\end{aligned}$$

محاسبه بردار ویژه متناظر $\lambda_1=1$

$$(A-\lambda_1 I_3)X_1=0\Rightarrow\begin{bmatrix}2-\lambda_1&0&0\\0&3-\lambda_1&4\\0&4&9-\lambda_1\end{bmatrix}X_1=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&4&8\end{bmatrix}X_1=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1&=0\\2x_2+4x_3=0\\4x_2+8x_3=0\end{cases}\Rightarrow\ x_1=0,x_2=-2x_3$$

پس داریم

$$X_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

پس با انتخاب $x_3=1$ می توان بردار های ویژه x_1 را به صورت زیر درنظر گرفت

$$X_1=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

محاسبه بردار ویژه متناظر $\lambda_2=2$

$$(A-\lambda_2 I_3)X_2=0\Rightarrow\begin{bmatrix}2-\lambda_2&0&0\\0&3-\lambda_2&4\\0&4&9-\lambda_2\end{bmatrix}X_2=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&4\\0&4&7\end{bmatrix}X_2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2+4x_3=0\\4x_2+7x_3=0\end{cases}\Rightarrow\ x_1=\text{دلخواه},x_2=x_3=0\Rightarrow X_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

محاسبه بردار ویژه متناظر $\lambda_3=11$

$$(A-\lambda_3 I_3)X_3=0\Rightarrow\begin{bmatrix}2-\lambda_3&0&0\\0&3-\lambda_3&4\\0&4&9-\lambda_3\end{bmatrix}X_3=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-9&0&0\\0&-8&4\\0&4&-2\end{bmatrix}X_3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x_1 = 0 \\ -8x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \; x_1 = 0, x_3 = 2x_2$$

پس داریم

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

و برای $x_2 = 1$ داریم

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال ۰.۴۳

مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 19 \\ -9 & -20 & -33 \\ 4 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

حل: با محاسباتی مانند مثال های قبلی داریم

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

محاسبه بردار ویژه متناظر $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I_3)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 12 & 19 \\ -9 & -21 & -33 \\ 4 & 9 & 14 \end{bmatrix} X_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 19x_3 = 0 \\ -9x_1 - 21x_2 - 33x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 + 33x_3 = 0 \\ -9x_1 - 21x_2 - 33x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 + 33x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to -4R_1]{R_2 \to 9R_2} \begin{cases} -36x_1 - 84x_2 - 132x_3 = 0 \\ 36x_1 + 81x_2 + 126x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3$$

از طرفی از قبل داشتیم

$$4x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 0$$

با قرار دادن $x_2 = -2x_3$ در رابطه بالا داریم

$$4x_1 + 9(-2x_3) + 14x_3 = 0 \Rightarrow 4x_1 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

بنابراین

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که از مقدار ویژه ی $\lambda = 1$ تنها می توانیم یک بردار ویژه بدست آوریم. مثلا اگر $x_3 = 1$ آنگاه

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به ازای مقدار ویژه $\lambda_3 = -1$ داریم

$$A - \lambda_3 I_3 = A + I_3 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 19 \\ -9 & -19 & -33 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

ابتدا با عملیات سطری مقدماتی ماتریس فوق را ساده می کنیم

$$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 19 \\ -9 & -19 & -33 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 12 & 19 \\ 0 & \frac{-25}{7} & \frac{-60}{7} \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{36}{7} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 12 & 19 \\ 0 & \frac{-25}{7} & \frac{-60}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 + 19x_3 = 0 \\ -\frac{25}{7}x_2 - \frac{60}{7}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 12x_2 + 19x_3 = 0 \\ 5x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

اگر $x_1 = 7\alpha$ انتخاب کنیم آنگاه $x_2 = -12\alpha, x_3 = 5\alpha$ نتیجه می شود لذا بردار ویژه متناظر با $\lambda_3 = -1$ به صورت زیر است

$$X_2 = \begin{bmatrix} 7\alpha \\ -12\alpha \\ 5\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha=1} X_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

در ادامه به تعریف شعاع طیفی یک ماتریس می‌پردازیم.

تعریف ۰.۳۱

فرض کنید A ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه‌ی λ_1 ، λ_2 ، . . . ، λ_n باشد، آنگاه شعاع طیفی ماتریس A را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\} = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

مثال ۰.۴۴

برای ماتریس‌های داده شده، شعاع طیفی را محاسبه کنید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: محاسبه شعاع طیفی ماتریس A_1: ابتدا مقادیر ویژه A_1 را محاسبه می‌کنیم

$$A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1$$

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 1 \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ 1-\lambda = -1 \rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\rho(A_1) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{0, 2\} = 2$$

محاسبه شعاع طیفی ماتریس A_2: ابتدا مقادیر ویژه A_2 را بدست می‌آوریم:

$$A_2 - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-\lambda)(-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -2$$

پس

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{2}i \rightarrow |\lambda_1| = \sqrt{2} \\ \lambda_2 = -\sqrt{2}i \rightarrow |\lambda_2| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rho(A_2) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$$

محاسبه شعاع طیفی ماتریس A_3: ابتدا مقادیر ویژه A_3 را بدست می‌آوریم:

$$A_3 - \lambda I = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_3 - \lambda I) = (-5-\lambda)(3-\lambda) - (-2)(6) = -(3\lambda - \lambda^2 + 15 - 5\lambda) + 12$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

پس داریم:

$$\rho(A_3) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{1, 3\} = 3$$

محاسبه شعاع طیفی ماتریس A_4:

$$A_4 - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

بسط با سطر اول:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} - 2\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$+2\det \begin{bmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda) + 2) - 2(-\lambda + 2) + 2(-1 + 2 - \lambda)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2\lambda - 4 + 2 - 2\lambda$$
$$= 3\lambda^2 - 6\lambda + 6 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

پس مقادیر ویژه از حل معادله درجه سوم زیر بدست می‌آیند:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

جمع ضرایب این معادله صفر است پس $\lambda_1 = 1$ ریشه‌ای از آن است. برای محاسبه ریشه‌های دیگر داریم:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad \rho(A_4) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

دستور محاسبه چندجمله ای ویژه یک ماتریس:

```
  Matlab

  >> A=[1 4 5;-1 0 2;3 5 2]
  >> poly(A)
  ans =
     1    -3   -19     3



python
import numpy as np

A = np.array([[1, 4, 5], [-1, 0, 2], [3, 5, 2]])
p = np.poly(A)

print(p)
Output:
[  1.   -3.  -19.    3.]
```

دستور محاسبه جفت ویژه یک ماتریس:

```
Matlab

  >>[x,y]=eig(A)

  x=
  0.3427    0.7503   0.7381
  0.5714   -0.5723   0.0986
  -0.7457   0.3310   0.6675
  y=
  -3.2100    0           0
  0       0.1543      0
  0       0        6.0557
```

```
python
import numpy as np

A = np.array([[1, 4, 5], [-1, 0, 2], [3, 5, 2]])
x, y = np.linalg.eig(A)

print("x =")
print(x)
print("\ny =")
print(y)
```

دستور محاسبه شعاع طیفی ماتریس :

```
Matlab

>> A=[7 5 0;2 1 3;0 1 6]

A =
7    5    0
2    1    3
0    1    6

>> vrho (A)

ans=
8.5640




python
import numpy as np

A = np.array([[7, 5, 0], [2, 1, 3], [0, 1, 6]])
rho = np.max(np.abs(np.linalg.eigvals(A)))

print(rho)

Output:
8.5640
```

دستور برای محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه:

```
Matlab

>> A=[6 12 19;-9 -20 -33;4 9 15];
>>[X, D]=eig(A)

X =
-0.4741 + 0.0000i    -0.4028 - 0.0000i    -0.4082 + 0.0000i
0.8127 + 0.0000i      0.8165 + 0.0000i     0.8165 + 0.0000i
-0.3386 + 0.0000i    -0.4082 + 0.0000i    -0.4028 - 0.0000i
```

```


D =
-1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i    1.0000 - 0.0000i





python
import numpy as np

A = np.array([[6, 12, 19], [-9, -20, -33], [4, 9, 15]])
X, D = np.linalg.eig(A)

print("X =")
print(X)
print("\nD =")
print(D)
```

تعریف ۰.۳۲

دو ماتریس مربعی A و B را متشابه گوییم هرگاه ماتریس نامنفرد P موجود باشد که

$$A = P^{-1}BP$$

۱۴ ماتریس های قطری شدنی

همانطور که قبلا دیدیم ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۲ & ۱۹ \\ -۹ & -۲۰ & -۳۳ \\ ۴ & ۹ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

تنها دارای دو بردار ویژه مستقل خطی

$$X_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \qquad X_۲ = \begin{bmatrix} ۷ \\ -۱۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

است در صورتی که A ماتریس ۳×۳ است و انتظار داشتیم ۳ بردار ویژه داشته باشد. به طور کلی فرض کنید ماتریس $n \times n$، A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد(فارغ از اینکه مقادیر ویژه تکراری باشند یا خیر) آنگاه می توان نوشت

$$AX_i = \lambda_i X_i \, , \; i = ۱, \cdots, n \qquad (۱)$$

که (λ_i, X_i) یک جفت ویژه ماتریس A است. اکنون تعریف می کنیم

$$X = [X_1, X_2, \cdots, X_n], \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم

$$AX = A[X_1, X_2, \cdots, X_n] = [AX_1, AX_2, \cdots, AX_n] \overset{(1)}{=} [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n]$$

بنابراین

$$AX = [X_1, X_2, \cdots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = XD \Rightarrow AX = XD \tag{2}$$

چون ستون های X همان بردار ویژه ها هستند و اینکه بردار ویژه ها مستقل خطی فرض شده اند نتیجه می شود X وارون پذیر است لذا از (۲) داریم

$$X^{-1}AX = D \qquad \text{یا} \qquad A = XDX^{-1}$$

روابط بالا نشان می دهند که A متشابه با یک ماتریس قطری است در چنین حالتی می گوییم A ماتریس قطری شدنی است.

تعریف ۰.۳۳

ماتریس مربعی A قطری شدنی است هرگاه ماتریس نامنفرد X موجود باشد که $D = X^{-1}AX$ قطری باشد.

قبلا دیدیم که

$A_{n\times n}$ قطری شدنی است $\Leftrightarrow$ n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد

اما چه ماتریس هایی قطری شدنی هستند؟

قضیه ۰.۸

اگر A ماتریسی با مقادیر ویژه متمایز باشد آنگاه قطری شدنی است.

قضیه ۰.۹

هر ماتریس متقارن قطری شدنی است.

مثال ۰.۴۵

نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ قطری شدنی است

حل: ابتدا جفت ویژه ها را محاسبه می کنیم

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

بعلاوه می توان دید که بردار ویژه ها به صورت زیر اند

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرار می دهیم

$$X = [X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

داریم

$$X^{-1}AX = D \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

لذا A قطری شدنی است.

مثال ۰.۴۶

نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ قطری شدنی است.

حل: ابتدا جفت ویژه ها را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \lambda - \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda(\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})1 + \frac{3}{2}(-1)(\frac{-1}{2}) - \frac{3}{2}(\lambda - \frac{3}{2})1 - \frac{1}{2}(-1)(\lambda - \frac{1}{2}) - \lambda(\frac{-3}{2})(\frac{-1}{2}) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \end{aligned}$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

محاسبه بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = -1$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_3, x_2 = -x_3$$

بنابراین

$$X_1 = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{x_3=1}{\Rightarrow} X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه بردار ویژه متناظر با $\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_3, x_2 = -x_3 \Rightarrow X_2 = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{x_3=1}{\Rightarrow} X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه بردار ویژه متناظر با $\lambda_3 = 2$

$$\begin{cases} -2x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ \quad x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_3, x_2 = x_3$$

بنابراین

$$X_3 = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{x_3=1}{\Rightarrow} X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرار می دهیم

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

مثال ۰.۴۷

نشان دهید ماتریس A قطری شدنی است و فرم کلی A^k را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

$$\begin{aligned} A^k &= (XDX^{-1})^k = (XDX^{-1})(XDX^{-1})\cdots(XDX^{-1}) \\ &= XD(X^{-1}X)D(X^{-1}X)DX^{-1} = XD^kX^{-1} \\ A^k &= XD^kX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2-2^k & -1+2^k & 2-2^{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+2^k & 1-2^k & -1+2^{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تمرین ۰.۴

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مشابه قبل بررسی کنید A قطری شدنی است و ویژگی زیر برقرار است.

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

تمرین ۰.۵

نشان دهید ماتریس A قطری شدنی است و A^{10} را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۰.۳۴ زیرماتریس های پیشرو

ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

آنگاه زیرماتریس های پیشرو را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A_1 = [a_{11}]_{1\times 1}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

توجه کنید ماتریس A را نیز می توانیم جزو ماتریس های پیشرو A در نظر بگیریم هر چند این کار رایج نیست.

مثال ۰.۴۸

زیرماتریس های پیشرو را برای ماتریس زیر بنویسید

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$A_1 = [7]_{1\times 1}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 11 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

در ادامه تعریف یک ماتریس متقارن معین مثبت (Positive Definite Matrix) را بیان می‌کنیم.

تعریف ۰.۳۵

ماتریس متقارن A را معین مثبت (Symmetric Positive Definite(SPD)) گوییم هرگاه برای هر $X \neq 0$ داشته باشیم

$$X^T A X > 0$$

مثال ۰.۴۹

نشان دهید ماتریس زیر معین مثبت است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: درستی $X^T A X$ را برای بردار $0 \neq X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ بررسی می کنیم.

$$X^T A X = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} =$$

$$x_1(3x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 3x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 3x_3) =$$

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3) \tag{1}$$

اکنون می‌توان نوشت :

$$(x_1 - x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2(x_1x_2 + x_2x_3)$$

$$\Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_1x_3 \tag{2}$$

حال با قراردادن (۱۲) در (۱۱) داریم:

$$X^T A X = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_1x_3$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + x_1^2 + x_3^2 + 2x_2^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2$$
$$= (x_1 - x_3)^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 > 0$$

در نتیجه A معین مثبت است.
ماتریس‌های معین مثبت از خواص جالبی برخوردارند. در ادامه با برخی از این خواص ماتریس‌های متقارن معین مثبت آشنا خواهیم شد.

برخی خواص ماتریس‌های متقارن معین مثبت

۱) مقادیر ویژه این ماتریس‌ها مثبت هستند.
اثبات:

$$AX = \lambda X, \qquad X \neq 0 \to X^TAX = X^T\lambda X = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

$$\text{A is PD} \to X^TAX > 0 \to \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) > 0 \xrightarrow{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>0} \lambda > 0$$

نکته ۰.۷

اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه‌ای نامثبت باشد، آنگاه A معین مثبت نیست.

نکته ۰.۸

ماتریس متقارن A دارای مقادیر ویژه‌ای مثبت است اگر و تنها اگر A معین مثبت باشد.

۲) اگر A متقارن معین مثبت باشد، آنگاه $\det A > 0$
اثبات: طبق خاصیت شماره (۱)، مقادیر ویژه ماتریس A (به دلیل PD بودن) مثبت می‌باشند یعنی:

$$\forall\, i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda_i > 0$$

بنابراین:

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n > 0$$

۳) اگر A متقارن معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس A نامنفرد خواهد بود یعنی معکوس پذیر است: $\det(A) > 0 \neq 0$
اثبات: تمرین
۴) عناصر قطری هر ماتریس متقارن معین مثبت، مثبت هستند.
اثبات: تمرین
۵) در هر ماتریس متقارن معین مثبت، بزرگترین عضو (البته از لحاظ قدر مطلق) روی قطر قرار خواهد داشت.
اثبات: فرض کنیم e_i و e_j به ترتیب ستون iام و jام ماتریس همانی باشند. آنگاه با فرض $X = e_i - e_j$ داریم:

$$0 < X^TAX = (e_i - e_j)^TA(e_i - e_j) = e_i^TAe_i - 2e_i^TAe_j + e_j^TAe_j = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}$$

$$\Rightarrow a_{ij} < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) \qquad (3)$$

بار دیگر با انتخاب $X = e_i + e_j$ داریم:

$$-a_{ij} < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) \qquad (4)$$

از (۳) و (۴) داریم:

$$|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$$

فرض کنیم که در بین اعضای روی قطر M بزرگترین باشد؛ پس

$$|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) < \frac{1}{2}(M + M) = M$$

۶) اثر هر ماتریس متقارن معین مثبت، مثبت است.
اثبات:

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n > 0$$

۷) شرط لازم و کافی برای آن که یک ماتریس PD باشد، این است که همه زیرماتریس‌های پیشرو آن PD باشد.
اثبات: تمرین
۸) جمع دو ماتریس PD نیز PD خواهد بود.
اثبات: فرض کنیم A و B دو ماتریس متقارن معین مثبت باشند. داریم:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

$$X \neq 0; \ X^T(A + B)X = \underbrace{X^TAX}_{>0} + \underbrace{X^TBX}_{>0} > 0$$

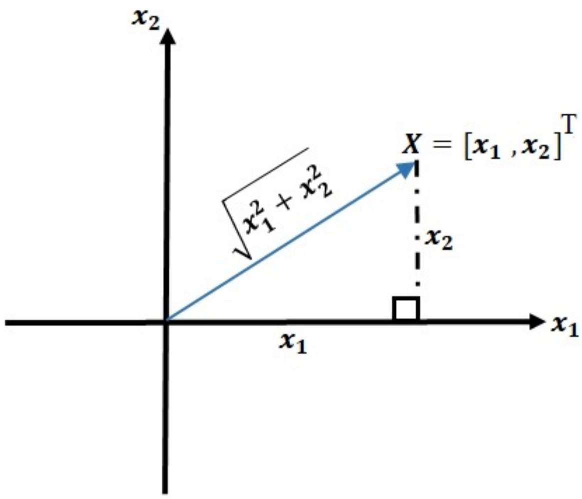
۹) ماتریس I همیشه PD است.
اثبات:

$$X \neq 0, \ X^TIX = X^TX = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

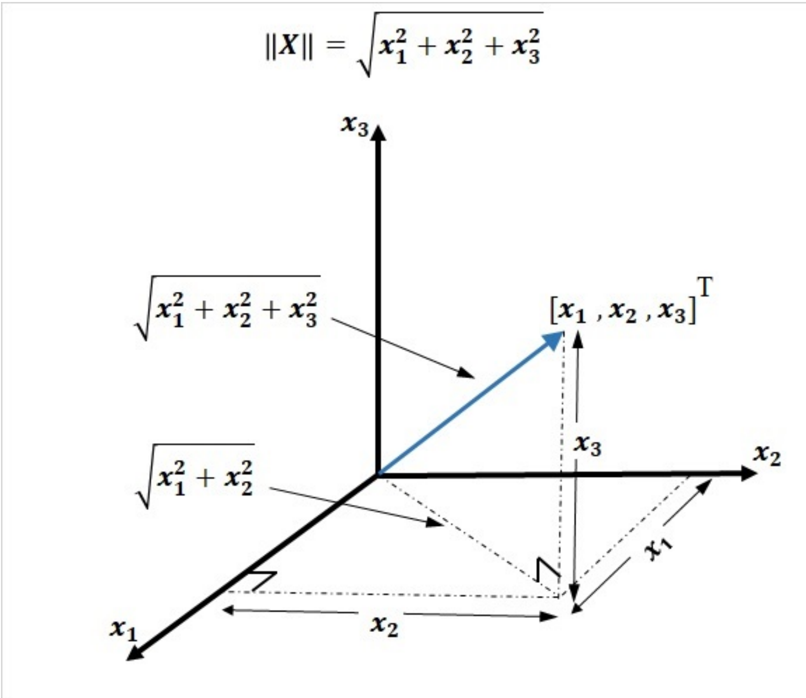
توجه کنید که چون $X \neq 0$ پس X حداقل یک درایه غیر صفر دارد. پس $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. پس $X^TIX > 0$.
۱۰) هر ماتریس قطری که عناصر روی قطر آن مثبت باشند PD است.
اثبات: تمرین

۱۵ نرم برداری و نرم ماتریسی

در ادامه‌ی این درس خواهیم دید که نیاز به یک ابزار داریم تا فاصله بین دو بردار و یا فاصله بین دو ماتریس را بتواند اندازه‌گیری کند، همچنین بتواند طول بردار و یا طول و اندازه یک ماتریس را نشان دهد.
قبلا دیدیم که فاصله‌ی دو عدد حقیقی α و β را به کمک تابع قدر مطلق به صورت $d = |\alpha - \beta|$ محاسبه می‌کردیم، بنابراین سعی ما بر این است که ابزار فوق الذکر را طوری تعریف کنیم که به نوعی تعمیمی از تابع قدرمطلق باشد و بعلاوه وقتی که بردارها و ماتریس‌ها را با اندازه های خاصی در نظر گرفتیم تا به یک اسکالر تبدیل شدند آنگاه ابزار مورد نظر دقیقا به تابع قدرمطلق تبدیل شود. به طور معمول به چنین ابزاری در ریاضیات نرم برداری و نرم ماتریسی گفته می‌شود.
البته ناگفته نماند شما قبلا با حالت خاصی از نرم برداری در دبیرستان آشنا شده‌اید.
برای مثال طول بردار دو بعدی $X = [x_1, x_2]^T$ را با کمک قضیه فیثاغورس به صورت $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ محاسبه کرده‌اید که اغلب به آن طول اقلیدسی بردار X گفته می‌شود.



و بعلاوه با بکارگیری ۲ بار قضیه فیثاغورس توانستید طول یک بردار سه بعدی $X = [x_۱, x_۲, x_۳]^T$ را به صورت $\sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲}$ بدست آورید.



خواهیم دید که در واقع طول اقلیدسی بردار n بعدی $X = [x_۲, x_۲, \cdots, x_n]^T$ می تواند به شکل $\sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}$ تعریف شود و بعلاوه خواهیم دید که این یک حالت خاصی از نرم برداری که ۲ ـ نرم(یا نرم ۲ و یا نرم اقلیدسی) گفته می‌شود، می‌باشد.

تعریف ۰.۳۶

نرم برداری: هر تابع به صورت $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ که در خواص سه گانه

۱. برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\|X\| = ۰ \Leftrightarrow X = ۰$

۲. $\|\alpha X\| = |\alpha|\|X\|, \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

۳. $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

صدق کند یک نرم برداری روی فضای برداری $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود.

توجه کنید که وقتی $n=۱$ آنگاه تابع نرم $\|.\|$ دقیقا تابع قدرمطلق خواهد بود و چون در این حالت خاصیت (۳) به صورت

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

تبدیل می‌شود، که آن را با نام مشهور **نامساوی مثلث** می‌شناسیم لذا در حالت کلی به خاصیت سوم $\|X+Y\| \leq \|X\|+\|Y\|$ را نامساوی مثلث می‌گوییم.

درست است که تعریف فوق به طور مستقیم هیچ تابعی را به طور صریح مشخص نمی‌کند اما خوشبختانه چند تابع نرم مشخص شده‌اند که کاربردهای فراوانی در ریاضیات و علوم مختلف دارند در ادامه به معرفی این توابع نرم می‌پردازیم.

۱) **نرم ۱:** برای هر $X = [x_۱, x_۲, \cdots, x_n]^T$ تعریف می‌کنیم:

$$\|X\|_۱ = |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|$$

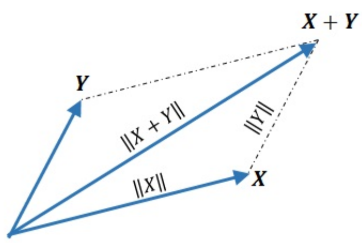
مثال ۰.۵۰

فرض کنید $X = [-۱, ۰, ۴, ۶]^T$ آنگاه

$$\|X\|_۱ = \|[-۱, ۰, ۴, ۶]^T\|_۱ = |-۱| + |۰| + |۴| + |۶| = ۱۱$$

تذکر ۰.۷

فرض کنید $n=۱$ آنگاه $X = [x_۱]$ و $\|X\|_۱ = \|[x_۱]\| = |x_۱|$



که نشان می‌دهد در این حالت نرم ۱ به تابع قدرمطلق تبدیل می‌شود.

حال که با نرم ۱ و محاسبه نرم ۱ یک بردار آشنا شدیم باید نشان دهیم نرم ۱، واقعا یک نرم است یعنی در خواص ۳ گانه نرم صدق می‌کند.

اثبات نرم بودن $\|.\|_۱$:

۱) **اثبات خاصیت اول:** باید نشان دهیم

$$\|X\|_۱ \geq ۰, \quad \|X\|_۱ = ۰ \Leftrightarrow X = ۰, \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n$$

واضح است که $\|X\|_۱ = |x_۱| + \cdots + |x_n| \geq ۰$
بعلاوه

$$\|X\|_۱ = ۰ \Leftrightarrow |x_۱| + \cdots + |x_n| = ۰ \Leftrightarrow x_۱ = ۰, \cdots, x_n = ۰$$
$$\Leftrightarrow X = [x_۱, \cdots, x_n]^T = [۰, \cdots, ۰]^T \Leftrightarrow X = ۰$$

۲) **اثبات خاصیت دوم:** باید نشان دهیم

$$\|\alpha X\|_۱ = |\alpha| \|X\|_۱, \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

داریم

$$\|\alpha X\|_۱ = \|[\alpha x_۱, \alpha x_۲, \ldots, \alpha x_n]^T\|_۱ = |\alpha x_۱| + |\alpha x_۲| + \cdots + |\alpha x_n|$$
$$|\alpha||x_۱| + \cdots + |\alpha||x_n| = |\alpha|(|x_۱| + \cdots + |x_n|) = |\alpha| \|X\|_۱$$

که نشان می‌دهد خاصیت دوم برقرار است.
۳)**اثبات خاصیت سوم:** باید نشان دهیم

$$\|X + Y\|_۱ \leq \|X\|_۱ + \|Y\|_۱, \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$$

فرض کنید

$$X = [x_۱, \cdots, x_n]^T, \quad Y = [y_۱, \ldots, y_n]^T$$

داریم

$$\|X + Y\|_۱ = \|[x_۱, \ldots, x_n]^T + [y_۱, \ldots, y_n]^T\|_۱$$
$$= \|[x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲, \ldots, x_n + y_n]^T\|_۱ = |x_۱ + y_۱| + |x_۲ + y_۲| + \cdots + |x_n + y_n|$$
$$\leq (|x_۱| + |y_۱|) + (|x_۲| + |y_۲|) + \cdots + (|x_n| + |y_n|)$$
$$= (|x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|) + (|y_۱| + |y_۲| + \cdots + |y_n|) = \|X\|_۱ + \|Y\|_۱$$

نشان می‌دهد خاصیت سوم برقرار است.
بنابراین نشان دادیم که $\|.\|_۱$ در شرایط نرم صدق می‌کند.

تذکر ۰.۸

گاهی اوقات به نرم ۱، نرم مجموع هم گفته می‌شود و یا به صورت ۱ـ نرم نوشته می‌شود.

مثال ۰.۵۱

برای بردار $X = [-\sqrt{۲},\ ۱ + \sqrt{۲},\ \sqrt{۲} - ۲]^T$، نرم $\|X\|_۱$ را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$\|X\|_۱ = |-\sqrt{۲}| + |۱ + \sqrt{۲}| + |\sqrt{۲} - ۲| = \sqrt{۲} + ۱ + \sqrt{۲} + ۲ - \sqrt{۲} = ۳ + \sqrt{۲}$$

نرم دیگری که گفته شد با حالت خاص آن آشنا هستید

۲) **نرم۲ یا ۲ـ نرم یا نرم اقلیدسی:**
برای هر $X = [x_۱, x_۲, \ldots, x_n]^T$ تعریف می‌کنیم:

$$\|X\|_۲ = \sqrt{|x_۱|^۲ + \cdots + |x_n|^۲} = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

مثال ۰.۵۲

برای $X = [-۱, ۰, ۲, ۴, -۶]^T$ نرم ۲ را محاسبه کنید.

حل:

$$\|X\|_۲ = \|[-۱, ۰, ۲, ۴, -۶]^T\|_۲ = \sqrt{(-۱)^۲ + (۰)^۲ + (۲)^۲ + (۴)^۲ + (-۶)^۲}$$
$$= \sqrt{۱ + ۰ + ۴ + ۱۶ + ۳۶} = \sqrt{۵۷} \approx ۷/۵۴۹۸.$$

اثبات نرم بودن $\|.\|_۲$ را تنها در حالت $n = ۲$ بررسی کرده و اثبات آن در حالت کلی را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

اثبات نرم بودن $\|.\|_۲$:

۱) **اثبات خاصیت اول:** باید نشان دهیم $(n = ۲)$

$$\|X\|_۲ \geq ۰, \quad \|X\|_۲ = ۰ \Leftrightarrow X_۲ = ۰ \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^۲$$

ب فرض کنید $X = [x_۱, x_۲]^T$ آنگاه واضح است که:

$$\|X\|_۲ = \|[x_۱, x_۲]^T\|_۲ = \sqrt{|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲} \geq ۰$$

از طرفی

$$\|X\|_۲ = ۰ \Leftrightarrow \sqrt{|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲} = ۰ \Leftrightarrow |x_۱|^۲ + |x_۲|^۲ = ۰$$
$$\Leftrightarrow |x_۱| = ۰, |x_۲| = ۰ \Leftrightarrow x_۱ = x_۲ = ۰ \Leftrightarrow X = [x_۱, x_۲]^T = [۰, ۰]^T = ۰$$

که نشان می‌دهد خاصیت اول برقرار است.

۲) **اثبات خاصیت دوم:** باید نشان دهیم

$$\|\alpha X\|_۲ = |\alpha|\|X\|_۲, \quad \forall X \in \mathbb{R}^۲, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

داریم

$$\|\alpha X\|_۲ = \|[\alpha x_۱, \alpha x_۲]^T\|_۲ = \sqrt{|\alpha x_۱|^۲ + |\alpha x_۲|^۲}$$

$$= \sqrt{\alpha^۲|x_۱|^۲ + \alpha^۲|x_۲|^۲} = |\alpha|\sqrt{|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲} = |\alpha|\|X\|_۲$$
$$\Rightarrow \|\alpha X\|_۲ = |\alpha|\|X\|_۲$$

که نشان می‌دهد خاصیت دوم نیز برقرار است.

۳) **اثبات خاصیت سوم:** باید نشان دهیم

$$\|X + Y\|_۲ \leq \|X\|_۲ + \|Y\|_۲, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^۲$$

فرض می‌کنیم $X = [x_۱, x_۲]^T, Y = [y_۱, y_۲]^T$ آنگاه داریم

$$\|X + Y\|_۲^۲ = \|[x_۱, x_۲]^T + [y_۱, y_۲]^T\|_۲^۲ = \|[x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲]^T\|_۲^۲$$
$$= |x_۱ + y_۱|^۲ + |x_۲ + y_۲|^۲$$

بنابراین

$$\|X + Y\|_۲^۲ \leq |x_۱|^۲ + |x_۲|^۲ + ۲(|x_۱y_۱| + |x_۲y_۲|) + |y_۱|^۲ + |y_۲|^۲$$
$$= \|X\|_۲^۲ + ۲(|x_۱y_۱| + |x_۲y_۲|) + \|Y\|_۲^۲ = \|X\|_۲^۲ + ۲\sum_{i=۱}^{۲} |x_iy_i| + \|Y\|_۲^۲ \tag{۵}$$

حال به عنوان تمرین نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{2} |x_i y_i| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 \tag{6}$$

(این نامساوی حالت خاصی از نامساوی کوشی_شوارتز برای $n = 2$ است)
با قرار دادن (۶) در (۵) داریم:

$$\|X+Y\|_2^2 \leq \|X\|_2^2 + 2\|X\|_2\|Y\|_2 + \|Y\|_2^2 = (\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2$$

و بنابراین

$$\|X+Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2$$

و لذا خاصیت سوم نیز برقرار است.

مثال ۰.۵۳

نرم ۲ و نرم۱ برداری را برای بردار داده شده محاسبه کنید.

$$X = [-2, 0, 4, -4]^T$$

حل: داریم

$$\|X\|_1 = |-2| + |0| + |4| + |-4| = 2 + 0 + 4 + 4 = 10$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 0 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

نرم دیگری که نرم بی‌نهایت و گاهی اوقات نرم ماکزیمم نامیده می‌شود به صورت زیر است.

۳) **نرم بی‌نهایت و یا نرم ماکزیمم:** فرض کنید $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ آنگاه

$$\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

مثال ۰.۵۴

برای بردار $X = [-6, 1, 0, 9, 11]^T$ نرم بی‌نهایت را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$\|X\|_\infty = \max\{|-6|, |1|, |0|, |9|, |11|\} = 11$$

اثبات نرم بودن $\|.\|_\infty$:

خاصیت(۱): واضح است که $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \geq 0$ اما

$$\|X\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0$$

اگر ماکزیمم $|x_1|$ ، $|x_2|$ ، ... ، $|x_n|$ برابر صفر باشد آنگاه همگی باید صفر باشند. یعنی $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = 0$
پس $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ لذا $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T = [0, \ldots, 0]^T = 0$ خواهد بود و اثبات تمام است.

اثبات خاصیت دوم:

$$\|\alpha X\|_\infty = \|[\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n]\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\alpha x_i| = \max_{1\leq i\leq n} |\alpha|.|x_i|$$

چون $|\alpha|$ به i وابسته نیست پس از ماکزیمم خارج می‌شود یعنی

$$\|\alpha X\|_\infty = |\alpha| \max_{1\le i\le n} |x_i| = |\alpha|.\|X\|_\infty$$

و اثبات تمام است.

اثبات خاصیت سوم: فرض کنید $X = [x_1, \dots, x_n]^T, Y = [y_1, \dots, y_n]^T$ آنگاه داریم

$$\|X+Y\|_\infty = \|[x_1, \dots, x_n]^T + [y_1, \dots, y_n]^T\|_\infty$$
$$= \|[x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]^T\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i|$$
$$\le \max_{1\le i\le n}(|x_i| + |y_i|) \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$$

و اثبات تمام است. لذا نشان دادیم $\|.\|_\infty$ در خاصیت‌های نرم صدق می‌کند.

مثال ۰.۵۵

برای بردار داده شده $\|.\|_1$ ، $\|.\|_2$ و $\|.\|_\infty$ را محاسبه کنید

$$X = [-3, 0, 3, 0, 1, 2]^T$$

حل: داریم

$$\|X\|_1 = |-3| + |3| + |0| + |1| + |2| = 9$$
$$\|X\|_2 = \sqrt{9 + 0 + 9 + 0 + 1 + 4} = \sqrt{23} \approx 4/7958$$
$$\|X\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |3|, |0|, |1|, |2|\} = \max\{3, 3, 0, 1, 2\} = 3$$

کد محاسبه نرم ۱ و نرم ۲ بردار:

```
Matlab


>> a=[1;0;6;-8];
>> norm (a,1)

ans=
15

>> norm (a, 2)

ans=
10.0499



python
import numpy as np

a = np.array([1, 0, 6, -8])

norm_1 = np.linalg.norm(a, ord=1)
```

```
norm_2 = np.linalg.norm(a, ord=2)

print("L1 norm: ", norm_1)
print("L2 norm: ", norm_2)
```

یک نرم معروف دیگر که p ـ نرم یا نرم p نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ آنگاه

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad p \in [1, +\infty]$$

توجه کنید که اگر $p = 1$ آنگاه نرم ۱ حاصل می‌شود و اگر $p = 2$ آنگاه نرم ۲ حاصل می‌شود. بعلاوه می‌توان نشان داد که

$$\|X\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|X\|_p$$

برای اینکار فرض کنید که $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ و بدون از دست دادن کلیت فرض کنید فقط یک $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ وجود دارد که $\|X\|_\infty = |x_j|$ و برای هر $k \neq j$ داشته باشیم

$$|x_k| < |x_j| \quad , k = 1, 2, \dots, n$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{|x_k|}{|x_j|} < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

یا

$$|\frac{x_k}{x_j}| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

حال طبق تعریف p نرم داریم

$$\begin{aligned} \|X\|_p &= (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_j|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (|x_j|^p (\frac{|x_1|}{|x_j|})^p + (\frac{|x_2|}{|x_j|})^p + \dots + 1 + \dots + (\frac{|x_n|}{|x_j|})^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_j| (1 + |\frac{x_1}{x_j}|^p + |\frac{x_2}{x_j}|^p + \dots + |\frac{x_n}{x_j}|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_j| (1 + \sum_{k \neq j, k=1}^{n} |\frac{x_k}{x_j}|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

با گرفتن حد از رابطه فوق داریم.

$$\lim_{p \to \infty} \|X\|_p = \lim_{p \to \infty} |x_j| (1 + \sum_{k \neq j, k=1}^{n} |\frac{x_k}{x_j}|^p)^{\frac{1}{p}} = |x_j| \lim_{p \to \infty} (1 + \sum_{k \neq j, k=1}^{n} |\frac{x_k}{x_j}|^p)^{\frac{1}{p}}$$

بنابر $(*)$ برای هر $k \neq j$ داریم $|\frac{x_k}{x_j}| < 1$ و لذا

$$\lim_{p \to \infty} |\frac{x_k}{x_j}|^p \to 0$$

پس

$$\lim_{p \to \infty} (1 + \sum_{k \neq j, k=1}^{n} |\frac{x_k}{x_j}|^p)^{\frac{1}{p}} \to 1$$

در نتیجه

$$\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = |x_j| \times ۱ = |x_j| = \|X\|_\infty$$

و اثبات تمام است.

تمرین: در حالتی که $j \in \{۱,۲,\dots,n\}$ تنها اندیس با خاصیت

$$\|X\|_\infty = |x_j|$$

نمی‌باشد، اثبات را تکمیل کنید.

مثال ۰.۵۶

فرض می‌کنیم $X = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۹ \\ ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه نرم‌های مطرح شده را برای آن محاسبه کنید.

حل:

$$\|X\|_۱ = |-۱| + |-۹| + |۲| = ۱۲$$
$$\|X\|_۲ = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۹)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{۸۶} = ۹/۲۷۳۶$$
$$\|X\|_\infty = \max\{|-۱|, |-۹|, |۲|\} = ۹$$
$$\|X\|_۵ = (|-۱|^۵ + |-۹|^۵ + |۲|^۵)^{\frac{۱}{۵}} = ۹/۰۰۱۰$$

کد برای محاسبه نرم ۳ و نرم بی نهایت بردار:

```
 Matlab


 >> a=[1;0;6;-8];
 >> norm (a, 3)
 ans=

 9

   >> norm (a, inf)
 ans=

   8



python
import numpy as np

a = np.array([1, 0, 6, -8])

norm_3 = np.linalg.norm(a, ord=3)
norm_inf = np.linalg.norm(a, ord=np.inf)

```

```
print("L3 norm: ", norm_3)
print("ωL norm: ", norm_inf)
```

۱۶ تعبیر هندسی نرم های برداری

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر برای تمام X ها در $\mathbb{R}^۲$ عبارت

$$\|X\|_۱ = ۱$$

را رسم کنیم شکل حاصل یک لوزی خواهد بود. به تعبیری دیگر مکان هندسی تمام نقاطی در صفحه $\mathbb{R}^۲$ که در $\|X\|_۱ = ۱$ صادق باشد نماینده‌ی یک لوزی است.
نشان می‌دهیم این مجموعه یک لوزی است:

$$\{X \in \mathbb{R}^۲ : \|X\|_۱ = ۱\} = \{(x_۱, x_۲) : |x_۱| + |x_۲| = ۱\}$$

برای رسم این مجموعه ۴ حالت زیر را در نظر می‌گیریم.
حالت اول(ربع اول مختصات) : $x_۱,\ x_۲ > ۰$ پس داریم

$$|x_۱| + |x_۲| = ۱ \rightarrow x_۱ + x_۲ = ۱$$

خط گذرا از نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$

حالت دوم(ربع دوم مختصات): $x_۱ < ۰$ و $x_۲ > ۰$ پس داریم

$$|x_۱| + |x_۲| = ۱ \rightarrow x_۲ - x_۱ = ۱$$

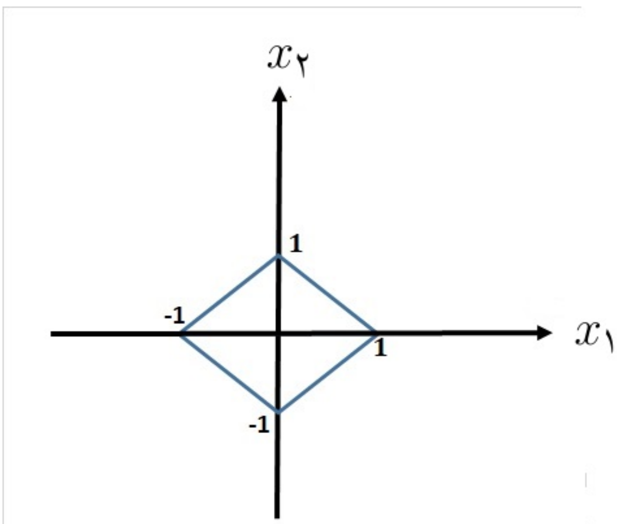
خط گذرا از نقاط $(-۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$
حالت سوم(ربع سوم مختصات): $x_۱, x_۲ < ۰$ پس داریم

$$|x_۱| + |x_۲| = ۱ \rightarrow x_۲ + x_۱ = -۱$$

خط گذرا از نقاط $(-۱, ۰)$ و $(۰, -۱)$
حالت چهارم(ربع چهارم مختصات): $x_۲ < ۰$ و $x_۱ > ۰$ پس داریم

$$|x_۱| + |x_۲| = ۱ \rightarrow -x_۲ + x_۱ = ۱$$

خط گذرا از نقاط $(۱, ۰)$ و $(۰, -۱)$



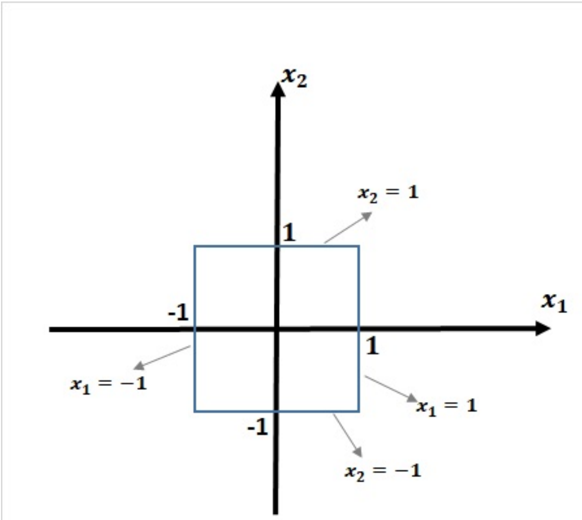
بعلاوه نشان می‌دهیم که اگر برای تمام X ها در $\mathbb{R}^۲$ عبارت $\|X\|_\infty = ۱$ را رسم کنیم شکل حاصل یک مربع است.

$$\{X \in \mathbb{R}^۲ : \|X\|_\infty = ۱\}$$
$$X \in \mathbb{R}^۲ \Rightarrow X = [x_۱, x_۲]^T \Rightarrow \|X\|_\infty = \max\{|x_۱|, |x_۲|\}$$

بهترین حالت را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \max\{|x_۱|, |x_۲|\} = ۱$$

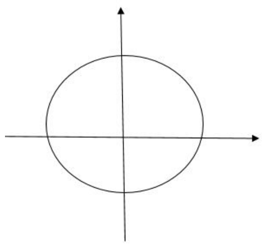
$$\begin{cases} if \;\; x_۱ = ۱ \rightarrow \max\{۱, |x_۲|\} = ۱ \rightarrow |x_۲| \leq ۱ \\ if \;\; x_۱ = -۱ \rightarrow \max\{۱, |x_۲|\} = ۱ \rightarrow |x_۲| \leq ۱ \end{cases}$$



که این رابطه برای هر x_i ای برقرار است، یعنی اگر $|x| = ۱$ را هم در نظر می‌گیریم باید به همین نتیجه برسیم و در واقع شکل یک مربع است در بازه‌ی $[-۱, ۱]^۲$.

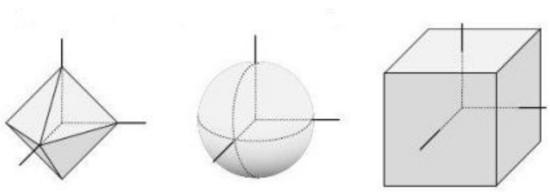
به همین صورت واضح است که مکان هندسی تمام نقاطی در $\mathbb{R}^۲$ که $\|X\|_۲ = ۱$ که $X = (x_۱, x_۲)^T$ نماینده‌ی یک دایره‌ی به شعاع ۱ و مرکز مبدا است.

$$\{X \in \mathbb{R}^۲ : \|X\|_۲ = ۱\}$$



تعبیر هندسی نرم ها در $\mathbb{R}^۳$

در هر مورد مشخص کنید هر شکل مربوط به کدام نرم است.



تعریف ۰.۳۷

نرم انرژی یا نرم بیضوی و یا $A-$ نرم :فرض کنیم A ماتریس معین مثبت و متقارن باشد، آنگاه تابع زیر یک نرم تعریف می‌کند.

$$\|X\|_A = \sqrt{X^T A X}$$

توجه ۰.۲

به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر $A = I$ ماتریس همانی باشد آنگاه معین مثبت و متقارن است، لذا تعریف Aـ نرم بصورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\|X\|_A = \|X\|_I = \sqrt{X^T I X} = \sqrt{X^T X}$$

قبلاً دیدیم که $X^T X = \|X\|_2^2$ پس $\|X\|_I = \sqrt{\|X\|_2^2} = \|X\|_2$ یعنی به ازای $A = I$، نرم انرژی همان نرم ۲ است لذا می‌توان آن را تعمیمی از نرم ۲ در نظر گرفت.

مثال ۰.۵۷

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $X = [3,\ 5]^T$، آنگاه $\|X\|_A$ را محاسبه کنید.

حل: واضح است که A متقارن معین مثبت است از طرفی

$$X^T A X = [3,\ 5] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = [3,\ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 + 35 = 38$$

لذا

$$\|X\|_A = \sqrt{X^T A X} = \sqrt{38} \approx 6/1644$$

۱.۱۶ تعبیر هندسی $A-$ نرم

فرض کنید $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ باشد، ماتریس متقارن A را به صورت $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم.
نشان می دهیم مکان هندسی تمام $X \in \mathbb{R}^2$ که $\|X\|_A^2 = 1 \iff \|X\|_A = 1$ یک بیضی است (از این رو به آن نرم بیضوی هم گفته می‌شود). داریم:

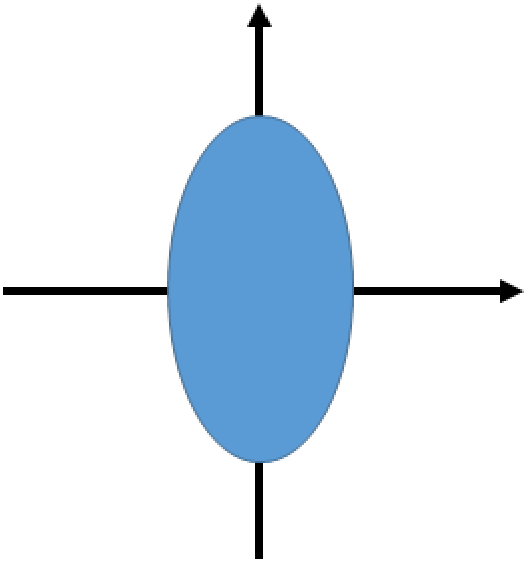
$$\|X\|_A^2 = X^T A X = [x_1,\ x_2] \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1,\ x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 \\ cx_1 + bx_2 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + cx_1x_2 + cx_1x_2 + bx_2^2 = ax_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2$$

بنابراین از $\|X\|_A^2 = 1$ داریم: $ax_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2 - 1 = 0$
از هندسه تحلیلی یا ریاضیات عمومی به یاد داریم که یک مقطع مخروطی به شکل فوق یک بیضی است هر گاه :

$$(2c)^2 - 4ab < 0 \Longrightarrow c^2 - ab < 0 \tag{7}$$

در ادامه نشان می دهیم (۷) همواره برقرار است.
ابتدا توجه کنید که با در نظر گرفتن λ_1, λ_2 به عنوان مقادیر ویژه A داریم: $det(A) = ab - c^2 = \lambda_1\lambda_2$
می‌توان ثابت کرد که مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن معین مثبت همواره حقیقی و مثبت‌اند یعنی $\lambda_1\lambda_2 > 0$ که نتیجه می دهد $ab - c^2 > 0$ و یا به طور معادل $c^2 - ab < 0$
لذا رابطه‌ی (۷) برقرار بوده و معادله گفته شده یک بیضی خواهد بود.



توجه ۰.۳

از کاربردهای نرم انرژی می‌توان به آنالیز همگرایی روش گرادیان و روش‌های کرایلف بر اساس این نرم نام برد. این کاربردها و موضوعات را در بعضی از فصل های آینده خواهیم دید.

در این درس مجموعه تمام ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ را با $\mathbb{R}^{n\times n}$ نمایش می دهیم.

۱۷ خواص نرم های برداری

نکته: فرض کنید $X \in \mathbb{R}^n$ آنگاه X^TX یک اسکالر است و

$$X^TX = [x_1, x_2, \dots, x_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|X\|_2^2 \Rightarrow X^TX = \|X\|_2^2$$

نابرابری کوشی_شوارتز: فرض کنید $X, Y \in \mathbb{R}^n$ آنگاه

$$|X^TY| \leq \|X\|_2\|Y\|_2$$

اثبات: اگر X یا Y صفر باشد نامساوی به $0 \leq 0$ تبدیل شده و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند پس فرض کنیم $X \neq 0, Y \neq 0$ بردار جدید Z را به صورت $Z = Y - \alpha X$ که α اسکالری حقیقی ناصفر است می‌سازیم. داریم

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Z\|_2^2 = Z^T Z &= (Y - \alpha X)^T (Y - \alpha X) \\ = (Y^T - \alpha X^T)(Y - \alpha X) &= Y^T Y - \alpha Y^T X - \alpha X^T Y + \alpha^2 X^T X \\ &= \|Y\|_2^2 - \alpha (Y^T X + X^T Y) + \alpha^2 \|X\|_2^2 \end{aligned} \tag{8}$$

از طرفی $X^T Y$ یک اسکالر است و ترانهاده هر اسکالر برابر خودش است پس

$$X^T Y = (X^T Y)^T = Y^T X \Rightarrow X^T Y = Y^T X$$

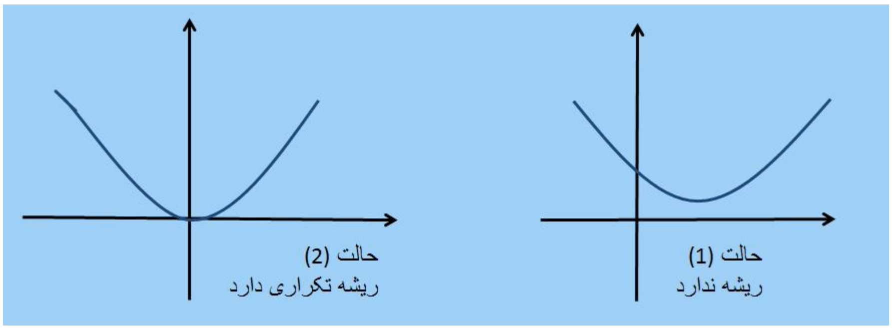
با جایگذاری رابطه بالا در (۸) داریم

$$0 \leq \|Z\|_2^2 = \|Y\|_2^2 - 2\alpha X^T Y + \alpha^2 \|X\|_2^2$$

واضح است که عبارت فوق یک چند جمله‌ای درجه دوم برحسب α است و چون ضریب α^2 ، مثبت است و این چند جمله‌ای همواره بزرگتر مساوی صفر است پس باید دلتای آن کوچکتر مساوی صفر باشد، یعنی

$$b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow (-2X^T Y)^2 - 4\|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 \leq 0$$

$$4(X^T Y)^2 \leq 4\|X\|_2^2 \|Y\|_2^2 \Rightarrow |X^T Y| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$



و اثبات تمام است.

تذکر ۰.۹

به عبارت $X^T Y$ ضرب داخلی دو بردار X, Y گفته می‌شود و آن را با نماد $< X, Y >$ نمایش می‌دهیم. در واقع

$$< X, Y >= X^T Y \Rightarrow | < X, Y > | \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

کد محاسبه ضرب داخلی دو بردار:

```
Matlab


>> X=[1;2;-1];
>> Y=[3;0;4];
>> dot(X, Y)
```

```
ans=
-1


python
import numpy as np

X = np.array([1, 2, -1])
Y = np.array([3, 0, 4])

dot_product = np.dot(X, Y)


print("Dot product: ", dot_product)
Output:
Dot product:  -1
```

مثال ۰.۵۸

دو بردار $X = [۱, ۲, -۱]^T$ و $Y = [۳, ۰, ۴]^T$ را در نظر بگیرید. درستی نامساوی کوشی_شوارتز را برای این دو بردار تحقیق کنید.

حل: داریم

$$< X, Y >= X^T Y = [۱, ۲, -۱] \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} = (۱)(۳) + (۲)(۰) + (-۱)(۴) = -۱$$

از طرفی

$$\|X\|_۲ = \sqrt{۱ + ۴ + ۱} = \sqrt{۶}, \qquad \|Y\|_۲ = \sqrt{۹ + ۰ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

واضح است که

$$| < X, Y > | = ۱ < ۵\sqrt{۶} = \|X\|_۲ \|Y\|_۲$$

مثال ۰.۵۹

برای دو بردار داده شده نامساوی کوشی_شوارتز را بررسی کنید

$$X = [۰, ۱, ۴, -۱]^T, \quad Y = [۲, ۱, ۰, ۳]^T$$

حل: داریم

$$< X, Y >= X^T Y = [۰, ۱, ۴, -۱] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۰ + ۱ + ۰ - ۳ = -۲$$

$$\|X\|_۲ = \sqrt{۰ + ۱ + ۱۶ + ۱} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$\|Y\|_۲ = \sqrt{۴ + ۱ + ۰ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

$$\|X\|_۲\|Y\|_۲ = ۳\sqrt{۲}\sqrt{۱۴} = ۳\sqrt{۲۸} = ۶\sqrt{۷}$$

لذا واضح است که

$$| < X, Y > | = ۲ < \|X\|_۲\|Y\|_۲ = ۶\sqrt{۷}$$

مثال ۰.۶۰

فرض کنید $X = \beta Y$ که $\beta \in \mathbb{R}$ نشان دهید نامساوی کوشی_شوارتز به تساوی تبدیل می‌شود.

در واقع X مضربی از بردار Y است. داریم :

$$|< X, Y >| = |< \beta Y, Y >| = |\beta Y^T Y| = |\beta| \, |\|Y\|_۲^۲| = |\beta|\|Y\|_۲^۲ \tag{۹}$$

$$\|X\|_۲\|Y\|_۲ = \|\beta Y\|_۲\|Y\|_۲ = |\beta|\|Y\|_۲\|Y\|_۲ = |\beta|\|Y\|_۲^۲ \tag{۱۰}$$

از (۹) و (۱۰) داریم :

$$|< X, Y >| = \|X\|_۲\|Y\|_۲$$

تمرین ۰.۶

آیا شرایط دیگری برای دو بردار X, Y می‌توان یافت که تساوی برقرار باشد.

قضیه ۰.۱۰ نامساوی هولدر

فرض کنید $p, q > ۱$ و طوری باشند که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ آنگاه برای هر دو بردار $X, Y \in \mathbb{R}^n$ داریم :

$$| < X, Y > | \leq \|X\|_p\|Y\|_q$$

اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

توجه ۰.۴

واضح است که اگر $p = q = ۲$ آنگاه نامساوی هولدر به نامساوی کوشی_شوارتز تبدیل می‌شود.

مثال ۰.۶۱

فرض کنید $X = [۱, ۰]^T, Y = [-۱, ۲]^T$ آنگاه برای $p = ۴, q = \frac{۴}{۳}$ نامساوی هولدر را بررسی کنید.

داریم :

$$< X, Y > = < [۱, ۰]^T, [-۱, ۲]^T > = [۱, ۰] \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۱$$

$$\Longrightarrow |< X, Y >| = ۱$$

از طرفی

$$\|X\|_p = \|X\|_4 = \|[1, 0]^T\|_4 = \left(|1|^4 + |0|^4\right)^{\frac{1}{4}} = (1 + 0)^{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\|Y\|_q = \|Y\|_{\frac{4}{3}} = \|[-1, 2]^T\|_{\frac{4}{3}} = \left(|-1|^{\frac{4}{3}} + |2|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = (1 + 2/5198)^{\frac{3}{4}} = 2/5698$$

واضح است که :

$$|< X, Y >| = 1 < 1 \times 2/5698 = \|X\|_4 \|Y\|_{\frac{4}{3}}$$

توجه ۰.۵

روابطی به شکل زیر در بین نرم ۲ ، نرم ۱ و نرم ماکزیمم وجود دارند:

۱. $\|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \sqrt{n}\|X\|_2$

۲. $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$

۳. $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

این روابط نشان می دهند که این ۳ نرم باهم معادل‌اند، لذا برای آنالیز همگرایی روش‌ها از هر کدام می‌توان استفاده کرد.

مثال ۰.۶۲

فرض کنیم $X = [1, 4, -9]^T$ در اینصورت داریم :

$$\|X\|_\infty = 9, \;\; \|X\|_1 = 14, \;\; \|X\|_2 = \sqrt{98}$$

با توجه به خواص گفته شده واضح است که :

$$9 \leq \sqrt{98} \leq \sqrt{3} \times 9 \;\; , \;\; \sqrt{98} \leq 14 \leq \sqrt{3} \times \sqrt{98} \;\; , \;\; 9 \leq 14 \leq 3 \times 9$$

در اینجا فقط به اثبات نامساوی آخر پرداخته و مابقی را به خواننده واگذار می‌کنیم.

اثبات خاصیت سوم:

فرض کنید

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T, \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_k| \;\; ; \; k \in \{1, 2, ..., n\}$$

بنابراین :

$$\|X\|_\infty = |x_k| = \sqrt{|x_k|^2} \leq \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_k|^2 + ... + |x_n|^2} = \|X\|_2$$

$$\Longrightarrow \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \tag{11}$$

از طرفی

$$\|X\|_2^2 = |x_1|^2 + ... + |x_k|^2 + ... + |x_n|^2 \leq |x_k|^2 + ... + |x_k|^2 = n|x_k|^2 = n\|X\|_\infty^2$$

$$\Longrightarrow \|X\|_2^2 \leq n\|X\|_\infty^2 \Longrightarrow \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty \tag{12}$$

از روابط (۱۱) و (۱۲) داریم :

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

قضیه ۰.۱۱

نامساوی وارون مثلثی: فرض کنید $X, Y \in \mathbb{R}^n$ آنگاه برای هر نرم برداری $\|.\|$ داریم : $|\,\|X\| - \|Y\|\,| \leq \|X - Y\|$

اثبات: داریم :

$$\|X\| = \|X - Y + Y\| \leq \|X - Y\| + \|Y\| \Longrightarrow \|X\| - \|Y\| \leq \|X - Y\| \tag{۱۳}$$

از طرفی :

$$\|Y\| = \|-Y\| = \|X - Y - X\| \leq \|X - Y\| + \|-X\| = \|X - Y\| + \|X\| \Longrightarrow \|X\| - \|Y\| \geq -\|X - Y\| \tag{۱۴}$$

حال با توجه به روابط (۱۳) و (۱۴) داریم :

$$-\|X - Y\| \leq \|X\| - \|Y\| \leq \|X - Y\| \Longrightarrow |\,\|X\| - \|Y\|\,| \leq \|X - Y\|$$

مثال ۰.۶۳

برای بردارهای $X = [-۱, ۳]^T, Y = [۴, ۲]^T$ نامساوی وارون مثلثی را بررسی کنید.

حل: نامساوی را با نرم ماکزیمم بررسی می کنیم، هر چند برای هر نرم برداری دیگر قابل بررسی است

$$\|X\|_\infty = \|[-۱, ۳]^T\|_\infty = \max\{|-۱|, |۳|\} = ۳$$

$$\|Y\|_\infty = \|[۴, ۲]^T\|_\infty = \max\{|۴|, |۲|\} = ۴$$

$$\|X - Y\|_\infty = \|[-۱, ۳]^T - [۴, ۲]^T\|_\infty = \|[-۵, ۱]^T\|_\infty = ۵$$

$$|\,\|X\|_\infty - \|Y\|_\infty\,| = |۳ - ۴| = |-۱| = ۱$$

لذا داریم:

$$|\,\|X\|_\infty - \|Y\|_\infty\,| = ۱ \leq ۵ = \|X - Y\|_\infty$$

قضیه ۰.۱۲

فرض کنید بردار $X \in \mathbb{R}^n$ به صورت $X = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ افراز شده باشد، آنگاه : $\|X\|_۲^۲ = \|Y\|_۲^۲ + \|Z\|_۲^۲$

اثبات: در واقع بردار X به صورت زیر است

$$X = [y_۱, y_۲, ..., y_k, z_۱, z_۲, ..., z_m]^T, \quad k + m = n$$

بنابراین

$$\|X\|_۲^۲ = |y_۱|^۲ + |y_۲|^۲ + ... + |y_k|^۲ + |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + ... + |z_m|^۲ = \|Y\|_۲^۲ + \|Z\|_۲^۲$$

همانطور که دیدیم نرم برداری ابزاری مناسب برای سنجش طول یک بردار و یا فاصله‌ی دو بردار است. همین نیاز ها برای وقتی که در محاسبات با ماتریس‌ها سروکار داریم احساس می‌شود، لذا به ابزاری مانند نرم برداری نیاز داریم که از الان به بعد آن را نرم ماتریسی می‌نامیم.

۱۸ نرم های ماتریسی

تعریف ۰.۳۸

تابع $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را یک نرم ماتریسی گوییم هرگاه در شرایط ۳ گانه زیر صدق کند.

۱. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \iff A = \mathbb{O}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

۲. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

۳. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

توجه کنید خاصیت سوم همان نامساوی مثلث است که البته گاهی اوقات به آن سازگاری جمعی هم گفته می‌شود.
هر تابع $\|.\|$ که در خواص سه گانه بالا صدق کند یک نرم ماتریس خواهد بود. البته در کاربردها و آنالیز همگرایی روش ها اغلب لازم است یک نرم ماتریسی خاصیت اضافی دیگری به صورت

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{۱۵}$$

داشته باشد که به آن خاصیت ضربی گفته می‌شود.
بنابراین یک نرم ممکن است فقط در ۳ خاصیت گفته شده صدق کند و در خاصیت چهارم صدق نکند . اما همانطور که گفته شد اگر نرم ماتریسی که با آن کار می کنیم در خاصیت ضربی هم صدق کند بسیار مناسب و کاربردی تر خواهد بود.

تعریف ۰.۳۹

نرم فروبنیوس: اولین نرمی که ظاهراً تعمیم نرم ۲ برداری برای ماتریس‌هاست (دقت کنید نرم ۲ ماتریسی به صورتی دیگر تعریف می‌شود) نرم فروبنیوس (Frobenius norm) است که به صورت $\|.\|_F$ نمایش داده می‌شود و برابر است با جذر مجموع مربعات درایه های ماتریس.

مثال ۰.۶۴

ماتریس A را به صورت $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\|A\|_F = \sqrt{(۲)^۲ + (-۱)^۲ + (-۴^۲) + (-۲)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

توجه کنید اگر $a_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix}, a_۲ = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ستونهای ماتریس A باشند داریم:

$$\|A\|_F^۲ = \|[a_۱ \quad a_۲]\|_F^۲ = \|a_۱\|_۲^۲ + \|a_۲\|_۲^۲ \tag{۱۶}$$

لذا نرم فروبنیوس همچنین با جذر گرفتن از مجموع مربعات نرم ۲ ستونهای A حاصل خواهد شد.

حال با محاسبات ساده‌ی زیر عبارات معادل دیگری برای نرم فروبنیوس به دست می‌آوریم.

$$\begin{gathered} A^TA = [a_۱ \quad a_۲]^T[a_۱ \quad a_۲] = \begin{bmatrix} a_۱^T \\ a_۲^T \end{bmatrix} [a_۱ \quad a_۲] = \begin{bmatrix} a_۱^Ta_۱ & a_۱^Ta_۲ \\ a_۲^Ta_۱ & a_۲^Ta_۲ \end{bmatrix} \\ \Longrightarrow \operatorname{trace}(A^TA) = a_۱^Ta_۱ + a_۲^Ta_۲ = \|a_۱\|_۲^۲ + \|a_۲\|_۲^۲ \end{gathered} \tag{۱۷}$$

با مقایسه‌ی (۱۶) و (۱۷) داریم :

$$\|A\|_F^۲ = \operatorname{trace}(A^TA) \Longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(A^TA)}$$

در ادامه همه‌ی فرم‌های معادل $\|A\|_F$ آورده شده اند.
به راحتی می‌توان نشان داد که هر ۴ شکلی که برای نرم فروبنیوس در ادامه آورده شده‌اند باهم معادل می‌باشند.

۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد آنگاه:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^TA)} = \sqrt{\text{trace}(AA^T)}$$

۲. فرض کنید $A = (a_{ij})$ آنگاه:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2}$$

۳. فرض کنید نمایش ستونی A به صورت $A = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n]$ باشد، آنگاه:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_2^2}$$

۴. فرض کنید نمایش سطری A به صورت $A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a'_i\|_2^2}$$

مثال ۰.۶۵

فرض کنید ماتریس A به شکل زیر داده شده است، نرم فروبنیوس ماتریس A را با هر ۴ روش گفته شده حساب کنید و نشان دهید که جواب همگی یکسان است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

۱.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(AA^T)} = \sqrt{8}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^TA)} = \sqrt{8}$$

۲.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mid a_{ij} \mid^2} = \sqrt{1+0+1+0+1+1+0+0+4} = \sqrt{8}$$

۳.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|a_1\|_2^2 = 1,\ \|a_2\|_2^2 = 1,\ \|a_3\|_2^2 = 6$$

$$\Longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|_2^2} = \sqrt{1+1+6} = \sqrt{8}$$

.۴

$$a'_1 = [1 \;\; 0 \;\; -1],\; a'_2 = [0 \;\; -1 \;\; 1],\; a'_3 = [0 \;\; 0 \;\; 2]$$

لذا داریم $\|a'_1\|_2^2 = 2,\ \|a'_2\|_2^2 = 2,\ \|a'_3\|_2^2 = 4$. بنابراین نتیجه می‌گیریم :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \|a'_i\|_2^2} = \sqrt{2+2+4} = \sqrt{8}$$

در نتیجه ملاحظه شد که با هر ۴ روش به یک نتیجه یکسان رسیدیم.
اکنون که با محاسبه نرم فروبنیوس ($\|.\|_F$) به طور کامل آشنا شدیم لازم است تا ثابت کنیم $\|.\|_F$ یک نرم ماتریسی است. یعنی باید خواص سه گانه نرم ماتریسی را برای آن بررسی کنیم. در ادامه به این مطلب خواهیم پرداخت.

قضیه ۰.۱۳

$\|.\|_F$ یک نرم ماتریسی است.

اثبات نرم بودن $\|.\|_F$: فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ آنگاه :

- اثبات خاصیت (۱) نرم ماتریسی : واضح است که $\|A\|_F \geq 0$ و

$$\|A\|_F = 0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 0$$

$$\iff |a_{ij}| = 0 \iff a_{ij} = 0 \iff A = (a_{ij}) = \mathbb{O}$$

- اثبات خاصیت (۲) نرم ماتریسی : فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$ آنگاه داریم :

$$\|\alpha A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha^2 |a_{ij}|^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = |\alpha| \, \|A\|_F$$

- اثبات خاصیت (۳) نرم ماتریسی : فرض کنید $B = (b_{ij}), A = (a_{ij})$. ستون های ماتریس A را به صورت متوالی قرارداده و بردار $\hat{A}$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{A} = [a_{11} \ldots a_{n1}\; a_{12} \ldots a_{n2} \ldots a_{1n} \ldots a_{nn}]^T$$

با همین روند برای ماتریس B قرار می‌دهیم :

$$\hat{B} = [b_{11} \ldots b_{n1}\; b_{12} \ldots b_{n2} \ldots b_{1n} \ldots b_{nn}]^T$$

آنگاه واضح است که $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n^2}$ و بردارند و نیز داریم : $\|A\|_F = \|\hat{A}\|_2$ و $\|B\|_F = \|\hat{B}\|_2$ بنابراین می توان نوشت :

$$\|A+B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}|^2} = \|\hat{A}+\hat{B}\|_2$$

$$\leq \|\hat{A}\|_2 + \|\hat{B}\|_2 = \|A\|_F + \|B\|_F \Longrightarrow \|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$$

بنابراین ثابت کردیم که $\|.\|_F$ یک نرم ماتریسی است.

مثال ۰.۶۶

نشان می‌دهیم که خاصیت نامساوی مثلثی برای $\|.\|_F$ برقرار است. ماتریس‌های A, B را به صورت زیر داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۷ \\ ۲۳ & ۴ & ۱۲ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۶ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{(-۱)^۲ + ۲^۲ + \ldots + ۱۲^۲} = ۲۷/۸۰۲۹$$

$$\|B\|_F = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + \ldots + ۲^۲} = ۷/۵۴۹۸$$

$$\|A+B\|_F = \left\| \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۴ & ۱۰ \\ ۲۴ & ۵ & ۱۴ \end{bmatrix} \right\|_F = ۳۰/۷۸۹۶$$

$$\Longrightarrow \|A+B\|_F = ۳۰/۷۸۹۶ < ۳۵/۳۵۲۷ = \|A\|_F + \|B\|_F$$

قضیه ۰.۱۴

نرم فروبنیوس در خاصیت ضربی صدق می کند، یعنی برای دو ماتریس مربعی A, B داریم :

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

اثبات: خاصیت ضربی نرم فروبنیوس: ماتریس C را به صورت حاصلضرب ماتریس‌های A, B در نظر می‌گیریم پس : $C = AB$ و $c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}$ حال داریم :

$$\|AB\|_F^۲ = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}^۲ = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj})^۲ = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left(\begin{bmatrix} a_{i۱} \\ a_{i۲} \\ \vdots \\ a_{in-۱} \\ a_{in}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{n-۱j} \\ b_{nj}\end{bmatrix}\right)^۲$$

$$\leq \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left(\left\|\begin{bmatrix} a_{i۱} \\ a_{i۲} \\ \vdots \\ a_{in-۱} \\ a_{in}\end{bmatrix}\right\|_۲ \left\|\begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{n-۱j} \\ b_{nj}\end{bmatrix}\right\|_۲\right)^۲$$

$$= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left[\left(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n} b_{kj}^۲\right)\right] = \|A\|_F^۲ \|B\|_F^۲$$

مثال ۰.۶۷

برای ماتریس‌های داده شده خاصیت ضربی را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۷ & ۹ & -۴ \\ ۹ & ۳ & ۱ \\ -۷ & -۸ & ۱۰ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۰ & -۷ \\ -۶ & ۰ & -۱ \\ ۱۰ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

برای بررسی خاصیت ضربی داریم :

$$AB = \begin{bmatrix} -۲۴ & ۴۲ & -۹۴ \\ ۸۲ & ۹۷ & -۵۷ \\ ۷۸ & ۰ & ۱۴۷ \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{۴۵۰} = ۲۱/۲۱۳۲, \quad \|B\|_F = \sqrt{۵۱۶} = ۲۲/۷۱۵۶$$

$$\|AB\|_F = \sqrt{۵۸۲۵۱} = ۲۴۱/۳۵۲۴$$

$$\Longrightarrow \|AB\|_F = ۲۴۱/۳۵۲۴ < ۴۸۱/۸۷۱۴ = \|A\|_F\|B\|_F$$

تمرین ۰.۷

تحت چه شرایطی برای A, B داریم :

$$\|AB\|_F = \|A\|_F\|B\|_F$$

مثال ۰.۶۸

درستی خاصیت ضربی نرم فروبنیوس را برای ماتریس های A, B به صورت زیر نشان می دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۷ \\ ۲۳ & ۴ & ۱۲ \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۶ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} ۸ & -۸ & ۱۶ \\ ۱۰ & -۶ & ۲۰ \\ ۴۳ & ۱۱ & ۳۶ \end{bmatrix}$$

داریم $\|AB\|_F = ۶۴/۶۹۹۳$ و $\|A\|_F\|B\|_F = ۲۰۹/۹۰۷$ پس

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$$

توجه کنید که نرم فروبنیوس در یک خاصیت جالب که در قضیه زیر آمده است صدق می کند.

قضیه ۰.۱۵

فرض کنید A, B ماتریس‌های مربعی $n \times n$ باشند، آنگاه :

$$\|A+B\|_F^۲ = \|A\|_F^۲ + ۲\mathrm{trace}(A^TB) + \|B\|_F^۲ \tag{۱۸}$$

از اثبات این قضیه خودداری شده و به خواننده واگذار می‌شود.

فرض کنید $n = ۱$ باشد یعنی $A = a, B = b$ اسکالر باشند، آنگاه:

$$\|A+B\|_F^۲ = (a+b)^۲ = \|A\|_F^۲ + ۲\mathrm{trace}(A^TB) + \|B\|_F^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

یعنی رابطه‌ی (۱۸) تعمیمی از اتحاد مربع برای ماتریس‌های مربعی است.

مثال ۰.۶۹

برای دو ماتریس داده شده درستی رابطه (۱۸) را بررسی می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}\rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۵ & ۲\end{bmatrix},\quad A^TB=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱۱ & -۳\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{trace}(A^TB)=-۴,\quad \|A\|_F^۲=۶,\quad \|B\|_F^۲=۳۵,\quad \|A+B\|_F^۲=۳۳$$

از طرفی داریم :

$$\|A\|_F^۲+۲\mathrm{trace}(A^TB)+\|B\|_F^۲=۶+۲(-۴)+۳۵=۳۳=\|A+B\|_F^۲$$

علاوه بر نرم فروبنیوس نرمهای دیگری نیز می‌توان برای ماتریس‌ها ساخت. هر چند این نرم‌ها کاربرد کمتری دارند در ادامه بعضی از آنها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۰.۴۰

نرم مجموع: برای ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ نرم مجموع به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\|A\|_S=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}|\,a_{ij}\,|$$

تعریف ۰.۴۱

نرم ماکزیمم: نرم ماکزیمم برای ماتریس مربعی A به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\|A\|_M=\max_{۱\le i,j\le n}|\,a_{ij}\,|$$

مثال ۰.۷۰

برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۶\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۴ & -۴ & ۱\end{bmatrix}$ مقادیر $\|A\|_S,\|A\|_M$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\|A\|_S=|-۱|+|۲|+|۶|+|۰|+|۱|+|۳|+|۴|+|-۴|+|۱|=۲۲$$
$$\|A\|_M=\max\{|-۱|,|۲|,|۶|,|۰|,|۱|,|۳|,|۴|,|-۴|,|۱|\}=۶$$

مثال ۰.۷۱

اگر ماتریس های A,B را به صورت $A=B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم آنگاه

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow \|A\|_M=\|B\|_M=۱,\|AB\|_M=۲$$

لذا $\|AB\|_M \geq \|A\|_M\|B\|_M$ در نتیجه نرم ماکزیمم خاصیت ضربی ندارد.

تمرین ۰.۸

آیا نرم مجموع خاصیت ضربی دارد ؟

تعریف ۰.۴۲

یک نرم ماتریسی به صورت کلی از روی درایه‌های ماتریس: فرض کنید $A = (a_{ij})$ آنگاه $\|A\|_{p,p}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\|A\|_{p,p} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{۱۹}$$

می‌توان نشان داد که $\|A\|_{p,p}$ در خواص سه گانه نرم ماتریسی صدق می کند و بعلاوه داریم :

۱. اگر $p = 1$ آنگاه رابطه‌ی (۱۹) به نرم مجموع $\|A\|_S$ تبدیل می‌شود.

۲. اگر $p = 2$ آنگاه رابطه‌ی (۱۹) به نرم فروبنیوس $\|A\|_F$ تبدیل خواهد شد.

۳. اگر $p \to \infty$ در اینصورت رابطه‌ی (۱۹) همان نرم ماکزیمم $\|A\|_M$ خواهد شد.

تعریف ۰.۴۳

نرم القایی، طبیعی و یا مشتق شده از نرم برداری: دسته‌ای دیگر از نرم های ماتریسی را که بر اساس یک نرم برداری به صورت

$$\|A\| = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \tag{۲۰}$$

ساخته می‌شوند نرم القایی(طبیعی) می‌نامیم. توجه کنید که دو نرم در سمت راست رابطه‌ی (۲۰) نرم برداری بوده و نرم سمت چپ این رابطه بیانگر یک نرم ماتریسی است.

به عنوان اولین نتیجه مهم با قرار دادن $A = I$ در رابطه‌ی (۲۰) داریم :

$$\|I\| = \max_{X\neq 0} \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1$$

این نشان می‌دهد که برای هر نرم القایی(طبیعی) داریم: $\|I\| = 1$
توجه کنید که اگر نرم فروبنیوس را برای ماتریس همانی محاسبه کنیم داریم (I ماتریس همانی $n \times n$ است)

$$\|I\|_F = \sqrt{\text{trace}(I^T I)} = \sqrt{\text{trace}(I)} = \sqrt{n}$$

اگر در نرم القایی(طبیعی) از تغییر متغیر $Y = \frac{X}{\|X\|}$ استفاده شود داریم :

$$\|A\| = \max_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \max_{X\neq 0} \left\|\frac{AX}{\|X\|}\right\| = \max_{X\neq 0} \|AY\|$$

چون $1 = \frac{\|X\|}{\|X\|} = \left\|\frac{X}{\|X\|}\right\| = \|Y\|$ لذا داریم :

$$\|A\| = \max_{\|Y\|=1} \|AY\|$$

با برگرداندن نماد Y به X داریم :

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

که عبارت ساده تری برای یک نرم القایی(طبیعی) است.

واضح است که با انتخاب نرم‌های برداری مختلفی می توان نرم های القایی(طبیعی) مختلفی برای ماتریس‌ها به دست آورد.

اگر از نرم ۱، نرم ۲ و نرم بینهایت برداری استفاده کنیم داریم :

$$\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1 \ , \ \|A\|_2 = \max_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 \ , \ \|A\|_\infty = \max_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$$

توجه ۰.۶

نرم القایی(طبیعی) $\|A\|_\infty$ با نرم ماکزیمم $\|A\|_M$ که قبلا تعریف شد متفاوت است.

مثال ۰.۷۲

با استفاده از تعریف، مقدار $\|A\|_1$ را برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ محاسبه کنید.

حل: فرض کنید $X \in \mathbb{R}^2$ طوری باشد که $\|X\|_1 = 1$ یعنی اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ آنگاه $|x_1| + |x_2| = 1$ از طرفی داریم:

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم : $\|AX\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \right\|_1 = |x_2| + 2|x_1|$ لذا داریم :

$$\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1 = \max_{|x_1|+|x_2|=1} \{|x_2| + 2|x_1|\}$$

مساله اخیر یک مساله بهینه‌سازی (ماکزیمم) غیر خطی (به دلیل وجود قدر مطلق در تابع هدف $|x_2| + 2|x_1|$) و مقید است و یک قید غیر خطی به صورت $|x_1| + |x_2| = 1$ مفروض است.

$$\begin{aligned} &\max |x_2| + 2|x_1| \\ &s.t \\ &|x_1| + |x_2| = 1 \end{aligned} \tag{21}$$

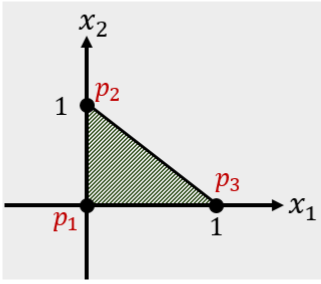
برای حل این مساله ۴ حالت ممکن می‌بایست در نظر گرفته شود.

حالت ۱) $x_1 > 0, x_2 > 0$ حالت ۲) $x_1 < 0, x_2 > 0$
حالت ۳) $x_1 < 0, x_2 < 0$ حالت ۴) $x_1 > 0, x_2 < 0$

حالت اول) $x_1 > 0, x_2 > 0$ بنابراین $|x_1| = x_1, |x_2| = x_2$ آنگاه مساله (۲۱) به صورت خطی زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\max \quad x_2 + 2x_1 \\ &s.t \\ &x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

ابتدا ناحیه جواب را در این حالت رسم می کنیم.



بنابه قضیه ای در بهینه‌سازی جواب های بهینه مساله خطی فوق در یکی از نقاط گوشه‌ای $p_1 = (0,0), p_2 = (0,1), p_3 = (1,0)$ قرار دارند. لذا باید تابع هدف $x_2 + 2x_1$ به ازای این نقاط محاسبه گردند. داریم :

$$p_1 = (0,0) \rightarrow x_2 + 2x_1 = 0$$

$$p_2 = (0,1) \rightarrow x_2 + 2x_1 = 1$$

$$p_3 = (1,0) \rightarrow x_2 + 2x_1 = 2$$

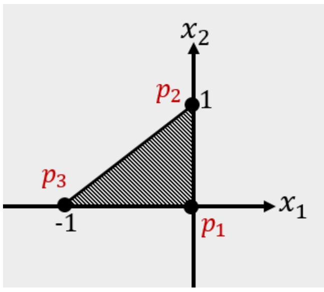
از آنجاییکه هدف محاسبه‌ی ماکزیمم تابع هدف است لذا جواب مساله در این حالت برابر $p_3 = (1,0)$ و $x_2 + 2x_1 = 2$ است، یعنی در این حالت داریم :

$$\|A\|_1 = 2 \ , \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالت دوم) $x_1 < 0, x_2 > 0$ پس $|x_1| = -x_1, |x_2| = x_2$ لذا در این حالت مساله به صورت خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max \quad x_2 - 2x_1 \\ s.t & \\ & -x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

توجه کنید در این حالت ناحیه جواب به صورت زیر است.



در این حالت داریم

$$p_1 = (0,0) \rightarrow x_2 - 2x_1 = 0$$

$$p_2 = (0,1) \rightarrow x_2 - 2x_1 = 1$$

$$p_3 = (-1,0) \rightarrow x_2 - 2x_1 = 2$$

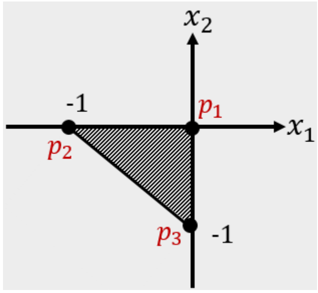
لذا برای این حالت به دست می‌آوریم :

$$\|A\|_1 = 2 \ , \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالت سوم) $x_1 < 0, x_2 < 0$ پس $|x_1| = -x_1, |x_2| = -x_2$ لذا در این حالت مساله به صورت خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max \quad -x_2 - 2x_1 \\ s.t & \\ & -x_1 - x_2 = 1 \end{aligned}$$

توجه کنید در این حالت ناحیه جواب به صورت زیر است.



در این حالت داریم

$$p_1 = (0,0) \to -x_2 - 2x_1 = 0$$
$$p_2 = (-1,0) \to -x_2 - 2x_1 = 2$$
$$p_3 = (0,-1) \to -x_2 - 2x_1 = 1$$

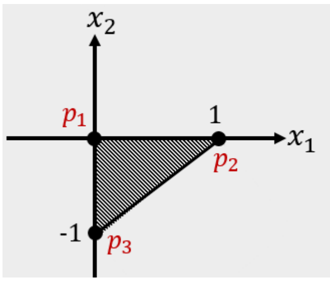
لذا برای این حالت به دست می‌آوریم :

$$\|A\|_1 = 2 \ , \ X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالت چهارم) $x_1 > 0, x_2 < 0$ پس $|x_1| = x_1, |x_2| = -x_2$ لذا در این حالت مساله به صورت خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\max \quad -x_2 + 2x_1 \\ &s.t \\ &\quad x_1 - x_2 = 1 \end{aligned}$$

توجه کنید در این حالت ناحیه جواب به صورت زیر است.



در این حالت داریم

$$p_1 = (0,0) \to -x_2 + 2x_1 = 0$$
$$p_2 = (1,0) \to -x_2 + 2x_1 = 2$$
$$p_3 = (0,-1) \to -x_2 + 2x_1 = 1$$

مشاهده می‌شود که در این حالت نیز به دست می‌آوریم :

$$\|A\|_1 = 2 \ , \ X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دیدیم که مقدار ماکزیمم در هر ۴ حالت برابر ۲ است که به ازای هر یک از بردارهای زیر حاصل می‌شود.

$$X_1 = X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ X_2 = X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان دید ۲ $= \max\{2,2\} = ||A||_1$ لذا فرقی ندارد که بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و یا بردار $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ انتخاب شود در هر دو حالت مقدار $\max_{||X||_1=1} ||AX||_1$ برابر ۲ بوده و با اطمینان می توان گفت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow ||A||_1 = 2$$

همانطور که دیدیم محاسبه‌ی نرم القایی(طبیعی) با استفاده از تعریف دشوار و زمان‌بر می‌باشد به ویژه زمانی که ابعاد ماتریس بزرگتر از ۳ باشد. بنابراین نیاز است عبارات معادل دیگری برای نرم‌های القایی(طبیعی) تعیین کنیم که زمان محاسبه‌ی کمتری داشته باشند.

قضیه ۰.۱۶

هرگاه A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد، آنگاه برای نرم‌های ماتریس القایی(طبیعی) داریم:

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{۲۲}$$

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{۲۳}$$

در اینجا تنها اثبات (۲۲) آورده می‌شود. اثبات (۲۳) مشابها انجام می‌شود.
اثبات: داریم

$$||A||_\infty = \max_{||X||_\infty=1} ||AX||_\infty \tag{۲۴}$$

بردار X را طوری می‌گیریم که ۱ $||X||_\infty =$. از طرفی

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه i ام بردار AX به صورت زیر است:

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{۲۵}$$

طبق تعریف نرم بی‌نهایت برای بردار AX واضح است که:

$$\begin{aligned} ||AX||_\infty &= \max\{|(AX)_1|, |(AX)_2|, \dots, |(AX)_n|\} \\ &= \max_{1\le i\le n} |(AX)_i| \overset{(25)}{=} \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \end{aligned} \tag{۲۶}$$

از طرفی برای هر $1 \le j \le n$ واضح است که

$$|x_j| \le ||X||_\infty = 1 \tag{۲۷}$$

بنابراین با قرار دادن (۲۷) در (۲۶) داریم:

$$||AX||_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{۲۸}$$

از (۲۸) داریم:

$$||A||_\infty = \max_{||X||_\infty=1} ||AX||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{۲۹}$$

حال فرض کنید ماکزیمم در سمت راست (۲۹) به ازای $1 \leq i = k \leq n$ رخ دهد. یعنی:

$$||A||_\infty \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \tag{۳۰}$$

اکنون بردار $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_j = \begin{cases} 1 & a_{kj} \geq 0 \\ -1 & a_{kj} < 0 \end{cases}$$

آنگاه واضح است که $||X||_\infty = 1$ برقرار است. به یاد آورید:

$$||AX||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|$$

توجه کنید این ماکزیمم لزوما به ازای $i = k$ رخ نمی‌دهد لذا در حالت کلی

$$||AX||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j|$$

اکنون با توجه به تعریف x_j ها داریم:

$$a_{kj}x_j = \begin{cases} a_{kj} & a_{kj} \geq 0 \\ -a_{kj} & a_{kj} < 0 \end{cases} = |a_{kj}|$$

پس

$$||AX||_\infty \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| = |\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \tag{۳۱}$$

و چون $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ به ازای $i = k$ رخ داده، پس از (۳۱) داریم:

$$||AX||_\infty \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

در نتیجه

$$||A||_\infty = \max_{||X||_\infty=1} ||AX||_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{۳۲}$$

با مقایسه‌ی (۲۹) و (۳۲) داریم:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

و اثبات تمام است.

توجه ۰.۷

دقت کنید بنابه قضیه فوق برای محاسبه نرم ۱ ماتریس A کافی است مجموع قدر مطلق اعضای هر ستون را حساب کرده و ماکزیمم بگیریم و برای محاسبه‌ی نرم بی‌نهایت ماتریس A کافی است مجموع قدرمطلق اعضای هر سطر را حساب کرده و سپس ماکزیمم بگیریم.

توجه ۰.۸

واضح است که محاسبه $||.||_1$ و $||.||_\infty$ بر اساس قضیه فوق و برای هر ماتریس دلخواه به مراتب راحت‌تر از تعریف اصلی آنها است.

مثال ۰.۷۳

قبلا دیدیم به کمک تعریف نرم برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

بدست می‌آوریم $||A||_1 = 2$ ، اکنون طبق تعریف داریم:

$$||A||_1 = \max\{|0| + |2|, |-1| + |0|\} = \max\{2, 1\} = 2$$

که به راحتی محاسبه شد، بعلاوه

$$||A||_\infty = \max\{|0| + |-1|, |2| + |0|\} = \max\{1, 2\} = 2.$$

مثال ۰.۷۴

برای ماتریس های زیر $||.||_1$ ، $||.||_F$ و $||.||_\infty$ را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||A||_1 = \max\{|1| + |-1|, |1| + |1|\} = 2 \\ ||A||_\infty = \max\{|-1| + |1|, |1| + |1|\} = 2 \\ ||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}\sum_{j=1} |a_{ij}|^2} = \sqrt{1+1+1+1} = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||A||_1 = \max\{7 + \sqrt{5}, 5\} = 7 + \sqrt{5} \\ ||A||_\infty = \max\{3 + \sqrt{5}, 9\} = 9 \\ ||A||_F = \sqrt{5 + 9 + 49 + 4} = \sqrt{67} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||A||_1 = \max\{8, 11, 17\} = 17 \\ ||A||_\infty = \max\{8, 11, 17\} = 17 \\ ||A||_F = \sqrt{25 + 1 + 4 + 1 + 9 + 49 + 4 + 49 + 64} = \sqrt{206} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||A||_1 = \max\{4, 9, 8\} = 9 \\ ||A||_\infty = \max\{3, 11, 7\} = 11 \\ ||A||_F = \sqrt{5 + 43 + 25} = \sqrt{73} \end{cases}$$

تمرین ۰.۹

برای ماتریس زیر نرم۱ و نرم بی‌نهایت را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۸ & ۱ \\ ۰ & -۴ & -۲۱ & ۱۸ \\ -۳۳ & ۱۴ & -۶ & ۲۰ \\ ۱۴ & -۲۰ & -۱۸ & ۵ \\ ۸ & -۱ & ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

۱۹ فرم معادل دیگر برای نرم۲

قضیه ۰.۱۷

فرض کنید A ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد آنگاه

$$||A||_۲ = \max_{||X||_۲=۱} ||AX||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$$

اثبات: ابتدا طبق تعریف داریم

$$||A||_۲^۲ = \max_{||X||_۲=۱} ||AX||_۲^۲ = \max_{||X||_۲^۲=۱} ||AX||_۲^۲$$

از طرفی برای هر بردار $X_۱$ دیدیم که $||X_۱||_۲^۲ = X_۱^TX_۱$ پس چون AX بردار است داریم

$$||A||_۲^۲ = \max_{||X||_۲^۲=۱} ||AX||_۲^۲ = \max_{||X||_۲^۲=۱} (AX)^T(AX) = \max_{||X||_۲^۲=۱} X^TA^TAX \tag{۳۳}$$

ماتریس A^TA متقارن و بنابر قضیه تجزیه طیفی قطری شدنی است، پس ماتریس متعامد P وجود دارد که

$$D = P^T(A^TA)P \Rightarrow A^TA = PDP^T$$

لذا از (۳۳) داریم:

$$||A||_۲^۲ = \max_{||X||_۲^۲=۱} X^TA^TAX = \max_{||X||_۲^۲=۱} X^TPDP^TX = \max_{||X||_۲^۲=۱} (P^TX)^TD(P^TX)$$

فرض کنید $Y = P^TX$ آنگاه

$$||Y||_۲^۲ = ||P^TX||_۲^۲ = (P^TX)^TP^TX = X^TPP^TX = X^TIX = X^TX = ||X||_۲^۲ = ۱$$

پس

$$||A||_۲^۲ = \max_{||Y||_۲^۲=۱} Y^TDY$$

چون D ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه A^TA است پس اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\dots$، λ_n مقادیر ویژه A^TA باشند، آنگاه

$$Y^TDY = [y_۱, y_۲, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_۱ & & & ۰ \\ & \lambda_۲ & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [y_1, y_2, \dots, y_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 y_1\\ \lambda_2 y_2\\ \vdots\\ \lambda_n y_n\end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

پس داریم

$$||A||_2^2 = \max_{||Y||_2^2=1} Y^T D Y = \max_{||Y||_2^2=1} \{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\} \tag{۳۴}$$

فرض کنید $\lambda_{\max} = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$ انگاه

$$||A||_2^2 \leq \{\lambda_{\max} y_1^2 + \lambda_{\max} y_2^2 + \cdots + \lambda_{\max} y_n^2\} = \lambda_{\max}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \tag{۳۵}$$

که Y در شرط $||Y||_2^2 = 1$ صدق می‌کند. اما

$$1 = ||Y||_2^2 = Y^T Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

با جایگذاری عبارت فوق در (۳۵) داریم

$$||A||_2^2 \leq \lambda_{\max} \tag{۳۶}$$

حال فرض کنید $\lambda_{\max} = \lambda_k$ (ماکزیمم در k امین عضو قطر اصلی D اتفاق بیفتد) بعلاوه اگر P_k را k امین ستون ماتریس P و e_k را به صورت

$$e_k = [0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots, 0]^T$$

تعریف کنیم آنگاه

$$Pe_k = \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix}p_{1k}\\ p_{2k}\\ \vdots\\ p_{nk}\end{bmatrix} = P_k$$

$$\Rightarrow P^T P e_k = P^T P_k \Rightarrow I e_k = P^T P_k \Rightarrow e_k = P^T P_k$$

اکنون با انتخاب $X = P_k$ داریم

$$Y = P^T X = P^T P_k = e_k$$

پس از رابطه (۳۴) داریم

$$\begin{aligned}||A||_2^2 &= \max_{||Y||_2^2=1} \{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\}\\ &= \max_{||Y||_2^2=1} \{\lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 + \cdots + \lambda_k \times 1 + \cdots + \lambda_n \times 0\}\\ &= \max_{||Y||_2^2=1} \{\lambda_k\} = \lambda_k = \lambda_{\max}\end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

از طرفی اگر λ یک مقدار ویژه دلخواه از A^TA باشد و z بردار ویژه متناظر با λ باشد آنگاه طبق تعریف

$$A^TAz = \lambda z \Rightarrow z^TA^TAz = \lambda z^Tz \Rightarrow (Az)^TAz = \lambda z^Tz \Rightarrow ||Az||_۲^۲ = \lambda ||z||_۲^۲$$

لذا $\lambda = \frac{||Az||_۲^۲}{||z||_۲^۲} \geq ۰$. بنابراین تمامی مقادیر ویژه A^TA نامنفی‌اند لذا

$$\rho(A^TA) = \max_{۱\leq i\leq n} |\lambda_i| = \max_{۱\leq i\leq n} \lambda_i = \lambda_k = \lambda_{\max}$$

لذا

$$||A||_۲ = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

و اثبات تمام می‌شود.

مثال ۰.۷۵

برای ماتریس‌های داده شده نرم ۲ ماتریسی را محاسبه کنید.

$$A = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۸} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا مقادیر ویژه A^TA را محاسبه کنیم:

$$A^TA = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & \sqrt{۸} \end{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۸} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۹ & -۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

پس

$$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} ۳-\lambda & -۱ \\ -۱ & ۳-\lambda \end{bmatrix}$$

لذا مقادیر ویژه از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$(۳-\lambda)^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳-\lambda = ۱ \rightarrow \lambda_۱ = ۲ \\ ۳-\lambda = -۱ \rightarrow \lambda_۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \rho(A^TA) = ۴$$

پس

$$||A||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{۴} = ۲$$

برای ماتریس B داریم:

$$B^TB = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

با محاسبه چند جمله‌ای ویژه B^TB داریم

$$\lambda^۳ - ۶\lambda^۲ + ۱۰\lambda - ۴ = ۰$$

واضح است که $\lambda_۱ = ۲$ ریشه‌ای از آن است پس می‌توان دید که

$$\lambda^۳ - ۶\lambda^۲ + ۱۰\lambda - ۴ = (\lambda - ۲)(\lambda^۲ - ۴\lambda + ۲)$$

پس مقادیر ویژه دیگر از حل معادله زیر بدست می‌آیند

$$\lambda^۲ - ۴\lambda + ۲ \Rightarrow \lambda = \frac{۴ \pm \sqrt{۸}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۲}$$

پس

$$||B||_۲ = \sqrt{\rho(B^TB)} = \sqrt{۲+\sqrt{۲}} \approx ۱/۸۴۷۸.$$

مثال ۰.۷۶

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ داریم:

$$||A||_۱ = \max\{|۴|+|۲|, |۳|+|-۲|\} = ۶$$
$$||A||_\infty = \max\{|۴|+|۳|, |۲|+|-۲|\} = ۷$$

از طرفی:

$$A^TA=\begin{bmatrix} ۲۰ & ۸ \\ ۸ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$||A||_F = \sqrt{trace(A^TA)} = \sqrt{۳۳}$$
$$||A||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{۲۵/۲۳} = ۵/۰۲$$

البته می‌توانستیم $||A||_F$ را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$||A||_F = \sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲+(۲)^۲+(-۲)^۲} = \sqrt{۳۳}$$

نکته ۰.۹

نرم ۲ هر ماتریس متقارن معین مثبت با شعاع طیفی‌اش برابر است.
اثبات:

$$||A||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^۲)} = \sqrt{(\rho(A))^۲} = \rho(A)$$

کد متلب محاسبه نرم ۱ و نرم ۲ ماتریس:

```
>> A= [7 5 0;2 1 3;0 1 6];
>> norm (A, 1)          >> norm (A, 2)

ans=                    ans=
9                     9.0547
```

کد متلب محاسبه نرم بی نهایت و نرم فروبینیوس ماتریس:

```
>> A=[7 5 0;2 1 3:0 1 6];
>> norm (A, inf)          >> norm (A, 'fro')

ans=                      ans=
12                        11.1803
```

۲۰ سازگاری یک نرم

تا به اینجای کار توانستیم نرم‌های مختلفی برای ماتریس‌ها به دست آوریم از جمله نرم‌های القایی(طبیعی).
نرم‌های القایی(طبیعی) دارای خاصیت جالبی هستند، یک‌بار دیگر به تعریف آنها برمی‌گردیم

$$||A|| = \max_{X\neq ۰} \frac{||AX||}{||X||}$$

با توجه به تعریف باید $||A|| \geq \frac{||AX||}{||X||}$ برای هر $X \neq ۰$.
لذا

$$||AX|| \leq ||A||.||X||$$

به این خاصیت می‌گوییم، **سازگاری نرم**. به طور دقیق تر می‌گوییم نرم‌های القایی(طبیعی) سازگارند لذا داریم

$$||AX||_۱ \leq ||A||_۱.||X||_۱$$

$$||AX||_۲ \leq ||A||_۲.||X||_۲$$

$$||AX||_\infty \leq ||A||_\infty.||X||_\infty$$

توجه کنید وقتی یک نرم ماتریسی سازگار باشد فوایدی دارد که بعدها در اثبات قضایای همگرایی می‌تواند مفید باشد.

قضیه ۰.۱۸

نرم‌های القایی(طبیعی) خاصیت ضربی دارند.

اثبات: اگر B ماتریس صفر باشد اثبات واضح است. پس فرض کنید
ناصفر است. آنگاه داریم

$$||AB|| = \max_{X\neq ۰} \frac{||ABX||}{||X||} = \max_{X\neq ۰} \frac{||A(BX)||}{||BX||}\frac{||BX||}{||X||}$$
$$\leq \left(\max_{X\neq ۰} \frac{||AX||}{||X||}\right)\left(\max_{X\neq ۰} \frac{||BX||}{||X||}\right) = ||A||||B||$$

قضیه ۰.۱۹

نرم فروبنیوس با نرم۲ برداری سازگار است. یعنی:

$$||AX||_۲ \leq ||A||_F.||X||_۲$$

اثبات: فرض کنید $(AX)_i$ نشان دهنده درایه i ام بردار AX باشد، قبلا دیدیم که برای هر بردار Y داریم $||Y||_۲^۲ = y_۱^۲+y_۲^۲+\cdots+y_n^۲$

لذا

$$\begin{aligned}||AX||_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}(AX)_i^2 = \sum_{i=1}^{n}|(AX)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2) \\ &\leq (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2) = ||A||_F^2.||X||_2^2\end{aligned}$$

پس $||AX||_2 \leq ||A||_F||X||_2$ و اثبات تمام است.

توجه ۰.۹

نرم فروبنیوس با دیگر نرم‌های برداری سازگار نیست، به عنوان مثال نقض فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $||AX||_1 = 2$ ، $||A||_F = \sqrt{2}$ و $||X||_1 = 1$

لذا

$$2 = ||AX||_1 > ||A||_F.||X||_1 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

که نشان می‌دهد نرم فروبنیوس با نرم۱ برداری سازگار نمی‌باشد.

همچنین اگر A و X به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$||AX||_\infty = 5, \quad ||X||_\infty = 2, \quad ||A||_F = \sqrt{6}$$

حال

$$5 = ||AX||_\infty > ||A||_F.||X||_\infty = 2\sqrt{6} \approx 4/6$$

لذا نرم فروبنیوس با نرم بی‌نهایت برداری سازگار نمی‌باشد.

قضیه زیر ارتباطی بین نرم القایی(طبیعی) و شعاع طیفی یک ماتریس برقرار می‌کند.

قضیه ۰.۲۰

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $||.||$ هم یک نرم ماتریسی طبیعی باشد، آنگاه

$$\rho(A) \leq ||A||$$

اثبات: فرض می‌کنیم شعاع طیفی A برابر $\rho(A)$ و $\rho(A)=|\lambda|$ و بردار ویژه غیر صفر متناظر با آن را با X نشان می‌دهیم پس خواهیم داشت

$$\rho(A)||X||=|\lambda|||X||=||\lambda X||=||AX||\leq ||A||||X|| \xrightarrow{||X||\neq ۰} \rho(A)\leq ||A||$$

قضیه ۰.۲۱

اگر B یک ماتریس مربعی باشد آنگاه اگر نرم ماتریسی مربوطه سازگار باشد، خواهیم داشت

$$\lim_{k\to\infty}||B^k||^{\frac{1}{k}}=\rho(B)$$

اثبات: خودتان.

نکته ۰.۱۰

یکی از کاربردهای قضیه فوق، تخمین شعاع طیفی یک ماتریس است. زیرا: $\rho(B)\approx ||B^k||^{\frac{1}{k}}$ (وقتی k بزرگ است)

و در اینجا می‌توان از یک نرم سازگار که محاسبه آن به راحتی انجام می‌پذیرد، استفاده کرد. مثلا: $||.||_۱$ یا $||.||_\infty$

مثال ۰.۷۷

$$A=\begin{bmatrix}-۸ & ۷\\ ۶ & ۲\end{bmatrix}$$

داریم

$$\lambda_۱=۵/۱۸۵۴,\quad \lambda_۲=-۱۱/۱۸۵۴$$

پس $\rho(A)=۱۱/۱۸۵۴$ از طرفی

k	$\|\|A^k\|\|_۱$	$\|\|A^k\|\|_۱^{\frac{1}{k}}$
۵	۲۰۵۸۳۲	۱۱/۵۵۳۲
۱۰	$۳/۵۹۲۳\times ۱۰^{۱۰}$	۱۱/۳۶۴۲
۲۰	$۱/۱۰۱۳\times ۱۰^{۲۱}$	۱۱/۲۷۴۴
۴۰	$۱/۰۳۴۹\times ۱۰^{۴۲}$	۱۱/۲۲۹۸

مشاهده می‌شود که اعداد ستون آخر جدول به $\rho(A)$ میل می‌کنند.

مثال ۰.۷۸

فرض کنید ماتریس A به صورت زیر داده شده است. تخمینی از شعاع طیفی آن را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۱\\ -۱ & ۲ & ۴\\ ۰ & ۱ & -۳\end{bmatrix}$$

حل: مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر می‌باشد:

$$\lambda_۱\approx -۳/۷۲۴۷,\quad \lambda_{۲,۳}\approx ۲/۸۶۲۴\pm ۰/۳۶۰۲i$$

پس $\rho(A)\approx |-۳/۷۲۴۷|=۳/۷۲۴۷$. حال در ادامه با توجه به قضیه بیان شده، آن را تقریب میزنیم.

اکنون جدول را تشکیل می‌دهیم:

k	$\|\|A^k\|\|_\infty$	$\|\|A^k\|\|_\infty^{\frac{1}{k}}$
۱۰	۵۵۹۱۶۵	۳/۷۵۶۲
۲۰	۲/۸۰۹۷ $\times$ ۱۰^۱۱	۳/۷۳۶۲
۴۰	۷/۴۱۰۱ $\times$ ۱۰^۲۲	۳/۷۳۰۳
۸۰	۵/۱۷۰۰ $\times$ ۱۰^۴۵	۳/۷۲۷۵
۱۶۰	۲/۵۱۶۶ $\times$ ۱۰^۹۱	۳/۷۲۶۱
۳۲۰	۵/۹۶۳۱ $\times$ ۱۰^۱۸۲	۳/۷۲۵۴

که مقدار تقریبی ۳/۷۲۵۴ را برای شعاع طیفی ماتریس A برآورد می‌کند.
قبل از وارد شدن به بحث‌های دیگر برخی نکات مهم و کاربردی در ارتباط با نرم ۲ ماتریسی آورده می‌شود.

قضیه ۰.۲۲

فرض کنید A ماتریس متقارن باشد، آنگاه $||A||_2 = \rho(A)$

اثبات: چون A متقارن است پس

$$\rho(A^TA) = \rho(AA) = \rho(A^2)$$

از طرفی اگر λ مقدار ویژه A باشد، آنگاه λ^2 مقدار ویژه A^2 است. زیرا

$$AX = \lambda X \Rightarrow \lambda^2 X = \lambda AX = A\lambda X = A(AX) = A^2 X$$

پس $\rho(A^2) = (\rho(A))^2$ لذا

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A)$$

قضیه ۰.۲۳

برای هر ماتریس دلخواه داریم

$$||A^TA||_2 = ||AA^T||_2 = ||A||_2^2$$

اثبات: تمرین.

قضیه ۰.۲۴

نشان دهید برای هر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$||A||_2 \leq \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}$$

اثبات: فرض کنیم λ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^TA از نظر قدر مطلق و X بردار ویژه متناظر با آن با خاصیت $||X||_\infty = 1$ باشد، داریم:

$$\lambda X = A^TAX \xrightarrow{||.||_\infty} |\lambda| ||X||_\infty = ||A^TAX||_\infty \Rightarrow |\lambda| = ||A^TAX||_\infty \qquad (۳۷)$$

$$||A^TAX||_\infty \leq ||A^T||_\infty . ||A||_\infty . \underbrace{||X||_\infty}_{=1} = ||A^T||_\infty . ||A||_\infty .$$

می‌دانیم $||A||_1 = ||A^T||_\infty$ ، بنابراین

$$||A^TAX||_\infty \leq ||A||_1.||A||_\infty \tag{38}$$

از (۳۷) و (۳۸) نتیجه می‌شود:

$$|\lambda| \leq ||A||_1.||A||_\infty$$

با توجه به اینکه λ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^TA از نظر قدرمطلق است، بنابر این $\rho(A^TA) = |\lambda|$ همچنین می‌دانیم:

$$||A||_2^2 = \rho(A^TA) = |\lambda| \leq ||A||_1.||A||_\infty$$
$$||A||_2 \leq \sqrt{||A||_1.||A||_\infty}.$$

نکته ۰.۱۱

می‌توان ثابت کرد: $||AB||_F \leq ||A||_2||B||_F$ (بر عهده خودتان)

۲۱ همگرایی ماتریس ها

تعریف ۰.۴۴

ماتریس همگرا: ماتریس A را همگرا گوییم(همگرا به ماتریس صفر) هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \mathbb{O}$$

ماتریس‌های همگرا نقش مهمی در آنالیز همگرایی روش‌های تکراری ایجاب می‌کند.

مثال ۰.۷۹

ثابت کنید ماتریس زیر همگراست

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \to A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \to \cdots$$

می توان دید که وقتی k زوج است داریم:

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$$

و وقتی فرد است داریم:

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2^{k-2}} \\ \frac{1}{2^{k+2}} & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین در هر صورت داریم $\lim_{k\to\infty} A^k = \mathbb{O}$

مثال ۰.۸۰

ثابت کنید ماتریس زیر همگراست

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

حل: برای هر k داریم

$$B^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^k}{3^{2k}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^{3k}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = \mathbb{O}$$

قضیه ۰.۲۵

ماتریس A همگراست اگر و تنها اگر $\rho(A) < 1$ باشد.

تذکر ۰.۱۰

ماتریس‌هایی وجود دارند که برای آنها $\lim_{k\to\infty} A^k$ وجود دارد ولی به یک ماتریس ناصفر میل می‌کند. یعنی

$$\lim_{k\to\infty} A^k = M \neq \mathbb{O}$$

به طور معمول چنین ماتریس‌هایی را ماتریس نیمه همگرا می‌نامیم.

از مواردی که این ماتریس در آن نقش ایفا می کند می‌توان به آنالیز همگرایی روش‌های تکراری برای دستگاه‌های با ماتریس ضرایب منفرد(وارون ناپذیر) اشاره کرد.

مثال ۰.۸۱

ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 0.5556 & 0 & 0.4444 \\ 0.0556 & 0.4444 & 0.2222 \\ 0.4444 & 0 & 0.5556 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.5185 & 0 & 0.4815 \\ 0.1111 & 0.2963 & 0.2407 \\ 0.4815 & 0 & 0.5185 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 0.5062 & 0 & 0.4938 \\ 0.1543 & 0.1975 & 0.2469 \\ 0.4938 & 0 & 0.5062 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \neq 0$$

پس A ماتریسی نیمه همگراست.

مثال ۰.۸۲

نشان دهید که ماتریس‌های زیر همگرا نیستند.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to A_1^2 = \begin{bmatrix} 17 & 23 & 29 \\ 24 & 33 & 42 \\ 38 & 53 & 68 \end{bmatrix} \to A_1^3 = \begin{bmatrix} 179 & 248 & 317 \\ 258 & 357 & 456 \\ 416 & 575 & 734 \end{bmatrix}$$

اگر به مقادیر بدست آمده دقت کنیم، می‌بینیم $\lim_{k\to\infty} A_1^k = \infty$

توجه: نیز برای ماتریس A_1 داریم $\rho(A_1) = 10.8310 > 1$ لذا طبق قضیه قبلی واگرا می‌باشد.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \to A_2^2 = \begin{bmatrix} 1.3611 & 0.7500 & 0.5250 \\ 0.7500 & 0.4236 & 0.3000 \\ 0.5250 & 0.3000 & 0.2136 \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 1.9111 & 1.0618 & 0.7462 \\ 1.0618 & 0.5912 & 0.4159 \\ 0.7462 & 0.4159 & 0.2927 \end{bmatrix} \to A_2^{10} = \begin{bmatrix} 20.9927 & 11.6726 & 8.2062 \\ 11.6726 & 6.4904 & 4.5629 \\ 8.2062 & 4.5629 & 3.2079 \end{bmatrix}$$

اگر به مقادیر بدست آمده دقت کنیم، می‌بینیم $\lim_{k\to\infty} A_2^k = \infty$

برای ماتریس A_2 داریم $\rho(A_2) = 1.4083 > 1$ لذا طبق قضیه قبلی واگرا می‌باشد. بررسی دو ماتریس دیگر به عنوان تمرین رها می‌شود.

۲۲ نرم برای ماتریس‌های غیر مربعی

تعریف نرم ماتریسی برای ماتریس‌های مربعی را باکمی تغییر می‌توان به ماتریس‌های مستطیلی $m \times n$ تعمیم داد. بخصوص نرم‌های القایی(طبیعی) می‌توانند در این حالت مفید باشند. بدیهی است هرگاه $m = n$ آنگاه روابط بررسی شده در این بخش همچنان برای ماتریس‌های مربعی معتبرند.

نکته ۰.۱۲

اگر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ آنگاه برای نرم طبیعی تولید شده توسط یک نرم برداری خواهیم داشت

$$||A||_۱ = \max_{||X||_۱=۱} ||AX||_۱ = \max_{۱\le j\le n} \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_{||X||_\infty=۱} ||AX||_\infty = \max_{۱\le i\le m} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$$

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}|^۲} = \sqrt{\text{trace}(A^TA)} = \sqrt{\text{trace}(AA^T)}$$

مثال ۰.۸۳

برای ماتریس‌های غیر مربعی زیر ۴ نرم گفته شده بالا را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ \\ ۵ & -۶ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & -۵ \\ \frac{۱}{۳} & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ۱)

$$||A||_۱ = \max\{|۱|+|-۳|+|۵|, |۲|+|۴|+|-۶|\} = ۱۲$$
$$||A||_\infty = \max\{|۱|+|۲|, |-۳|+|۴|, |۵|+|-۶|\} = ۱۱$$

برای محاسبه $||A||_۲$ داریم

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۳۵ & -۴۰ \\ -۴۰ & ۵۶ \end{bmatrix} \to \rho(A^TA) = ۸۶٫۸۵۵۲$$

$$||A||_۲ = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{۸۶٫۸۵۵۲} = ۹٫۳۱۹۶$$
$$||A||_F = \sqrt{\text{trace}(A^TA)} = \sqrt{۳۵+۵۶} = \sqrt{۹۱}$$

۲)

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۵ \\ \frac{۱}{۳} & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||B||_۱ = \max\{\frac{۴}{۳}, ۱۰\} = ۱۰ \\ ||B||_\infty = \max\{۶, \frac{۷}{۳}, ۳\} = ۶ \end{cases}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} \frac{۱۰}{۹} & \frac{-۱۳}{۳} \\ \frac{-۱۳}{۳} & ۳۸ \end{bmatrix} \to \begin{cases} \lambda_۱ \approx ۳۸٫۵ \\ \lambda_۲ \approx ۰٫۶۰۸ \end{cases} \to \rho(B^TB) = ۳۸٫۵$$

$$||B||_۲ = \sqrt{\rho(B^TB)} = \sqrt{۳۸٫۵} \approx ۶٫۲$$
$$||B||_F = \sqrt{tr(B^TB)} = \sqrt{۳۹٫۱۱} \approx ۶٫۲۵$$

۳)

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to \begin{cases} ||C||_۱ = \max\{۲, ۳, ۹, ۷\} = ۹ \\ ||C||_\infty = \max\{۶, ۹, ۶\} = ۹ \end{cases}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۱ & ۸ \\ ۲۱ & ۳۵ & ۹ \\ ۸ & ۹ & ۱۰ \end{bmatrix} \to \begin{cases} \lambda_۱ \approx ۰/۳۷۶ \\ \lambda_۲ \approx ۷/۲۳۸ \\ \lambda_۳ \approx ۵۱/۳۸۵ \end{cases} \to \rho(CC^T) = ۵۱/۳۸۵$$

$$||C||_۲ = \sqrt{\rho(CC^T)} = \sqrt{۵۱/۳۸۵} \approx ۷/۱۶۸$$

$$||C||_F = \sqrt{\text{trace}(CC^T)} = \sqrt{۱۴ + ۳۵ + ۱۰} = \sqrt{۵۹}$$

تمرین ۰.۱۰

نرم‌های $||.||_۱$ ، $||.||_\infty$ ، $||.||_۲$ و $||.||_F$ را برای ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & -۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

نکته ۰.۱۳

برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با رتبه r، نامساوی‌های زیر برقرار است:

۱. $||A||_۲ \leq ||A||_F \leq \sqrt{r}||A||_۲$

۲. $\frac{۱}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_۲ \leq \sqrt{m}||A||_\infty$

۳. $\frac{۱}{\sqrt{m}}||A||_۱ \leq ||A||_۲ \leq \sqrt{n}||A||_۱$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Accuracy .... دقت
Algorithm .... الگوریتم
Approximation .... تقریب
Array .... آرایه

B

Backward substitution .... جایگزینی پسرو

C

Characteristic equation .... معادله مشخصه
Characteristic polynomial .... چندجمله‌ای مشخصه
Column .... ستون
Column vector .... بردار ستونی
convergence .... همگرایی
Convergent matrix .... ماتریس همگرا

D

Decomposition .... تجزیه
Determinant .... دترمینان
Diagonal .... قطری
Dimension .... بعد

E

Euclidean norm .... نرم اقلیدسی
Eigenvalue .... مقدار ویژه
Eigenvector .... بردار ویژه
Elementary row operations .... اعمال سطری مقدماتی

F

Factorization .... تجزیه
Fundamental theorem of algebra .... قضیه اساسی جبر
Finite .... متناهی
Frobenius norm .... نرم فروبنیوس

G

Gram-Schmidt process .... فرآیند گرام‌ـ‌اشمیت

H

Hermitian .... هرمیتی
Hilbert matrix .... ماتریس هیلبرت

I

Identity .... همانی
Inverse .... وارون یا معکوس
Invertible .... وارون پذیر
Iteration .... تکرار

L

Linear system .... دستگاه خطی
Linearly independent .... مستقل خطی
Lower triangular .... پایین مثلثی

M

Matrix .... ماتریس
Method .... روش
Minor .... کهاد

N

Nonsingular .... ناتکین (وارون پذیر)
Norm .... نرم
Norm of vector .... نرم یک بردار
Norm of matrix .... نرم یک ماتریس

O

Orthogonal .... متعامد

P

Permutation .... جایگشت
Positive definite .... معین مثبت

R

Radius .... شعاع همگرایی
Rank .... رتبه
Row .... سطر
Row vector .... بردار سطری

S

Scalar .... اسکالر
Symmetric .... متقارن
Singular .... منفرد یا تکین
Spectral .... طیفی
Spectral radius .... شعاع طیفی
Step .... گام

T

Trace .... اثر
Transpose .... ترانهاده
Triangular .... مثلثی
Tridiagonal .... سه قطری

U

Upper triangular .... بالا مثلثی

V

Vector .... بردار
Vector space .... فضای برداری

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آرایه .... Array
اثر .... Trace
اسکالر .... Scalar
اعمال سطری مقدماتی .... Elementary row operations
الگوریتم .... Algorithm

ب

بالا مثلثی .... Upper triangular
بردار .... Vector
بردار ستونی .... Column vector
بردار سطری .... Row vector
بردار ویژه .... Eigenvector
بعد .... Dimension

پ

پایین مثلثی .... Lower triangular

ت

تجزیه .... Decomposition
ترانهاده .... Transpose
تقریب .... Approximation
تکرار .... Iteration

ج

جایگزینی پسرو .... Backward substitution
جایگشت .... Permutation

چ

چندجمله‌ای مشخصه .... Characteristic polynomial

د

دترمینان .... Determinant
دستگاه خطی .... Linear system
دقت .... Accuracy

ر

رتبه .... Rank
روش .... Method

س

ستون .... Column
سطر .... Row
سه قطری .... Tridiagonal

ش

شعاع طیفی .... Spectral radius
شعاع همگرایی .... Radius

ط

طیفی .... Spectral

ف

فرآیند گرام-اشمیت .... Gram-Schmidt process
فضای برداری .... Vector space

ق

قضیه اساسی جبر .... Fundamental theorem of algebra
قطری .... Diagonal

ک

کهاد .... Minor

گ

گام .... Step

م

ماتریس .... Matrix
ماتریس هیلبرت .... Hilbert matrix
ماتریس همگرا .... Convergent matrix

متعامد .... Orthogonal
متقارن .... Symmetric
متناهی .... Finite
مثلثی .... Triangular
مستقل خطی .... Linearly independent
معادله مشخصه .... Characteristic equation
معین مثبت .... Positive definite
مقدار ویژه .... Eigenvalue
منفرد یا تکین .... Singular

ن

ناتکین (وارون پذیر) .... Nonsingular
نرم .... Norm
نرم اقلیدسی .... Euclidean norm
نرم فروبنیوس .... Frobenius norm
نرم یک بردار .... Norm of vector
نرم یک ماتریس .... Norm of matrix

و

وارون پذیر .... Invertible
وارون یا معکوس .... Inverse

ه

هرمیتی .... Hermitian
همانی .... Identity
همگرایی .... convergence

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل صفر: پیشنیازها در جبرخطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳