دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل سوم: روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ روش های تکراری برای حل دستگاه های معادلات خطی ۲
۱.۱ روش تکراری ژاکوبی ۲
۲.۱ روش تکراری ژاکوبی برای یک دستگاه با ماتریس ضرایب $n \times n$ ۵
۳.۱ محک توقف ۸
۴.۱ روش گاوس - سیدل ۹
۵.۱ روش گاوس_سیدل برای دستگاه $n \times n$ ۱۱
۶.۱ مقایسه سرعت همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس_سیدل ۱۴
۷.۱ فرم فشرده روش ژاکوبی ۱۶
۸.۱ فرم فشرده روش گاوس - سیدل ۱۷
۹.۱ برتری روش ژاکوبی نسبت به روش گاوس_سایدل در موازی‌سازی ۱۸
۱۰.۱ روش فوق تخفیف متوالی ۲۰
۱۱.۱ روش SOR برای دستگاه $n \times n$ ۲۷

۲ فرم ماتریسی روش‌های تکراری ۲۸
۱.۲ فرم ماتریسی روش ژاکوبی ۲۹
۲.۲ فرم ماتریسی روش گاوس_سیدل ۳۴
۳.۲ فرم ماتریسی روش SOR ۳۸

۳ آنالیز همگرایی روش های تکراری ۴۰

۴ همگرایی روش ژاکوبی ۴۹
۱.۴ همگرایی روش ژاکوبی برای ماتریس های قطر غالب ۴۹
۲.۴ همگرایی روش ژاکوبی برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت ۲ × ۲ ۵۱

۵ همگرایی روش گاوس_سیدل ۵۳
۱.۵ همگرایی روش گاوس_سیدل برای ماتریس های غالب قطر ۵۳
۲.۵ همگرایی روش گاوس_سیدل برای ماتریس های متقارن معین مثبت ۵۳

۶ همگرایی روش SOR ۵۴

۷ محاسبه حداقل تکرار ۵۹

۸ الگوریتم گرادیان(تندترین کاهش) ۶۲

۹ فرم بلوکی روش های تکراری ۶۸

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۱

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۷۳

۱ روش های تکراری برای حل دستگاه های معادلات خطی

در فصل قبل با روش‌های مستقیم جهت حل دستگاه معادلات خطی $AX = b$ آشنا شدیم. همان طور که دیدیم در صورتی که در روش‌های مستقیم خطای گرد کردن نداشته باشیم بعد از طی مراحلی محدود به جواب دقیق دستگاه یعنی $X = A^{-1}b$ دست می‌یابیم. افزون بر این به محاسبه‌ی حجم عملیات آنها پرداخته و دیدیم که از $O(n^3)$ می‌باشد. بنابراین وقتی n به قدر کافی بزرگ است از کارایی این روش‌ها کم شده و هزینه محاسباتی بالایی برای حل دستگاه را می‌بایست متحمل شد. از طرفی در عمل نیازی نیست که جواب دقیق دستگاه محاسبه شود و تنها یک تقریب به قدر کافی دقیق می‌تواند راهگشا باشد. لذا اگر روش‌هایی موجود باشند که تنها با یک دقت از پیش تعیین شده جواب دستگاه را محاسبه کنند می‌توانند برای محاسبات کاربردی و عملی کفایت نمایند. روش‌های تکراری می‌توانند برای این هدف مناسب باشند چرا که اینها روش‌هایی هستند که در هر گام جواب قبلی را بهبود داده و با افزایش تعداد گام به جوابی که دقت آن برای ما کفایت نماید را محاسبه نمایند. هر چند این روشها هم ممکن است از ضعف هائی برخوردار باشند اما تجربه نشان داده است که غالبا می توانند کار گشا باشند.

در این فصل به طور مفصل در مورد روش‌های تکراری بحث خواهد شد. روش‌های تکراری متداول برای حل دستگاه $AX = b$ به صورت زیر اند:

۱ـ روش ژاکوبی
۲ـ روش گاوس - سیدل
۳ـ روش فوق تخفیف متوالی (SOR)

۱.۱ روش تکراری ژاکوبی

برای بیان این روش با یک مثال شروع می‌کنیم. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 - 11x_2 + x_3 = -18 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 34 \end{cases}$$

از معادله اول x_1 را به دست می‌آوریم، از معادله دوم x_2 را و از معادله سوم x_3 را. پس

$$\begin{cases} 2x_1 = 13 - x_2 - 3x_3 \\ -11x_2 = -18 - x_1 - x_3 \\ 8x_3 = 34 - 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(13 - x_2 - 3x_3) \\ x_2 = \frac{-1}{11}(-18 - x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{8}(34 - 4x_1 - 3x_2) \end{cases}$$

دستگاه اخیر را به صورت تکراری زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(13 - x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{-1}{11}(-18 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{8}(34 - 4x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

توجه کنید به ازای $k=0$ داریم

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(13 - x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{-1}{11}(-18 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{8}(34 - 4x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)}) \end{cases} \tag{2}$$

به بردار $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T$ بردار اولیه و یا حدس اولیه و یا بردار شروع اولیه گفته می‌شود. چرا که اگر مقادیر $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ مشخص باشند آنگاه طبق (۲) مقادیر $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ معلوم می‌گردد و با داشتن $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ و طبق رابطه (۱) برای $k=1$ می‌توان مقادیر $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ و غیره را محاسبه نمود. انتظار داریم تحت شرایطی مناسب برای ماتریس A دنباله‌ی برداری

$$X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}]^T$$

به جواب دقیق $X^\star = [x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star]^T$ همگرا گردد.

ابتدا فرض کنید $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T = [0,0,0]^T$ بنابراین داریم

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(13 - x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(13 - 0 - 0) = \frac{13}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{-1}{11}(-18 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{-1}{11}(-18 - 0 - 0) = \frac{18}{11} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{8}(34 - 4x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{8}(34 - 0 - 0) = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} \end{cases}$$

بنابراین جواب تقریبی جدید $X^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]^T = [\frac{13}{2}, \frac{18}{11}, \frac{17}{4}]^T$ حاصل شده است.

با داشتن این جواب می‌توان $X^{(2)}$ را محاسبه کرد و جواب تقریبی را بهبود داد

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(13 - x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(13 - \frac{18}{11} - 3 \times \frac{17}{4}) = -\frac{61}{88} \\ x_2^{(2)} = \frac{-1}{11}(-18 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{-1}{11}(-18 - \frac{13}{2} - \frac{17}{4}) = \frac{115}{44} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{8}(34 - 4x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{8}(34 - 4 \times \frac{13}{2} - 3 \times \frac{18}{11}) = \frac{17}{44} \end{cases}$$

با ادامه این روند داریم (تمامی محاسبات در نرم افزار متلب با حساب ۱۶ رقمی اعشار انجام شده است هر چند برای راحتی کار محاسبات را با ۴ رقم بعد از اعشار نمایش داده ایم)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(13 - x_2^{(2)} - 3x_3^{(2)}) = 4/6136 \\ x_2^{(3)} = \frac{-1}{11}(-18 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) = 1/6085 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{8}(34 - 4x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}) = 3/6165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0/2710 \\ x_2^{(4)} = 2/3846 \\ x_3^{(4)} = 1/3400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۱}^{(۵)} = ۳/۲۹۷۷ \\ x_{۲}^{(۵)} = ۱/۷۸۲۸ \\ x_{۳}^{(۵)} = ۳/۲۲۰۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۱}^{(۶)} = ۰/۷۷۸۲ \\ x_{۲}^{(۶)} = ۲/۲۲۸۹ \\ x_{۳}^{(۶)} = ۱/۹۳۲۶ \end{cases}$$

با ادامه این روند داریم

$$\begin{cases} x_{۱}^{(۲۸)} = ۱/۰۳۴۸ \\ x_{۲}^{(۲۸)} = ۲/۰۰۲۰ \\ x_{۳}^{(۲۸)} = ۲/۹۷۶۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۱}^{(۲۹)} = ۱/۰۳۳۹ \\ x_{۲}^{(۲۹)} = ۲/۰۰۱۰ \\ x_{۳}^{(۲۹)} = ۲/۹۸۱۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{۱}^{(۳۰)} = ۱/۰۲۶۷ \\ x_{۲}^{(۳۰)} = ۲/۰۰۱۴ \\ x_{۳}^{(۳۰)} = ۲/۹۸۲۶ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که دنباله اعداد $x_{۱}^{(k)}, x_{۲}^{(k)}, x_{۳}^{(k)}$ همگرا و به صورت زیر هستند:

$$\lim_{k\to\infty} x_{۱}^{(k)} = ۱$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{۲}^{(k)} = ۲$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{۳}^{(k)} = ۳$$

بعلاوه می‌توان دید که اختلاف اعضای دنباله به ازای $k = ۳۰$ و $k = ۲۹$ به صورت زیر است

$$|x_{۱}^{(۳۰)} - x_{۱}^{(۲۹)}| = ۰/۰۰۷۲$$
$$|x_{۲}^{(۳۰)} - x_{۲}^{(۲۹)}| = ۰/۰۰۰۴$$
$$|x_{۳}^{(۳۰)} - x_{۳}^{(۲۹)}| = ۰/۰۰۰۸$$

توجه کنید که دنباله به جواب دقیق دستگاه همگراست زیرا اولا

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۴۵}\begin{bmatrix} ۹۱ & -۱ & -۳۴ \\ ۴ & -۴ & -۱ \\ -۴۷ & ۲ & ۲۳ \end{bmatrix}$$

ثانیا جواب دقیق به صورت زیر است

$$X^{\star} = A^{-۱}b = \frac{۱}{۴۵}\begin{bmatrix} ۹۱ & -۱ & -۳۴ \\ ۴ & -۴ & -۱ \\ -۴۷ & ۲ & ۲۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۳ \\ -۱۸ \\ ۳۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

آنچه دیدیم روش تکراری ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ نام دارد.

۲.۱ روش تکراری ژاکوبی برای یک دستگاه با ماتریس ضرایب $n \times n$

در ادامه این روش را برای یک دستگاه با ماتریس ضرایب $n \times n$ بیان می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

از معادله اول x_1، از معادله دوم x_2، ...، از معادله n ام x_n را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases} \tag{3}$$

توجه کنید طبق معادلات فوق لازم است $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots a_{nn} \neq 0$ در صورتی که چنین نباشد نیاز است تا سطرهای A را تعویض کنیم طوری که عناصر روی قطر اصلی ماتریس جدید ناصفر گردند که البته این کار ممکن است زیرا فرض می کنیم ماتریس ضرائب نا منفرد است.

معادلات (۳) در فرم تکراری به صورت زیرند:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases} \tag{4}$$

فرض کنید تقریب اولیه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$ موجود است. آنگاه با داشتن $X^{(0)}$ تقریب بعدی $X^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}]^T$ از معادلات (۴) قابل محاسبه است. سپس با داشتن $X^{(1)}$ تقریب بعدی $X^{(2)}$ را می‌توان محاسبه کرد و غیره.

مثال ۳.۱

دستگاه معادلات خطی داده شده را با روش ژاکوبی و تقریب اولیه‌ی $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ حل کنید

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 25 \end{cases}$$

حل: معادلات روش ژاکوبی را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} 10x_1 = 9 - x_2 + x_3 \\ -5x_2 = 5 - 3x_1 - 4x_3 \\ 10x_3 = 25 - x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}(9 - x_2 + x_3) \\ x_2 = -\frac{1}{5}(5 - 3x_1 - 4x_3) \\ x_3 = \frac{1}{10}(25 - x_1 + 3x_2) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1 = 0/9 - 0/1x_2 + 0/1x_3 \\ x_2 = -1 + 0/6x_1 + 0/8x_3 \\ x_3 = 2/5 - 0/1x_1 + 0/3x_2 \end{cases}$$

یا در فرم تکراری داریم

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0/9 - 0/1x_2^{(k)} + 0/1x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -1 + 0/6x_1^{(k)} + 0/8x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2/5 - 0/1x_1^{(k)} + 0/3x_2^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

پس برای $k = 0$ داریم

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0/9 - 0/1x_2^{(0)} + 0/1x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = -1 + 0/6x_1^{(0)} + 0/8x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 2/5 - 0/1x_1^{(0)} + 0/3x_2^{(0)} \end{cases}$$

چون $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T = [0, 0, 0]^T$ پس

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0/9 \\ x_2^{(1)} = -1 \\ x_3^{(1)} = 2/5 \end{cases}$$

یعنی $X^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}] = [0/9, -1, 2/5]^T$. سپس برای $k = 1$ داریم

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0/9 - 0/1x_2^{(1)} + 0/1x_3^{(1)} \\ x_2^{(2)} = -1 + 0/6x_1^{(1)} + 0/8x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 2/5 - 0/1x_1^{(1)} + 0/3x_2^{(1)} \end{cases}$$

و با داشتن $X^{(1)}$ می‌توان $X^{(2)} = [x_1^{(2)} x_2^{(2)}, x_3^{(2)}]^T$ را محاسبه نمود.

$$x_1^{(2)} = 0/9 - 0/1x_2^{(1)} + 0/1x_3^{(1)} = 0/9 - 0/1(-1) + 0/1(2/5) = 1/2500$$

و

$$x_2^{(2)} = -1 + 0/6x_1^{(1)} + 0/8x_3^{(1)} = -1 + 0/6(0/9) + 0/8(2/5) = 1/5400$$

و

$$x_3^{(2)} = ۲/۵ - ۰/۱x_1^{(1)} + ۰/۳x_2^{(1)} = ۲/۵ - ۰/۱(۰/۹) + ۰/۳(-۱) = ۲/۱۱۰۰$$

برای راحتی کار نتایج بعدی در جدول زیر نمایش داده شده است. (تمامی محاسبات در نرم افزار متلب با حساب ۱۶ رقمی اعشار انجام شده است هر چند برای راحتی کار محاسبات را با ۴ رقم بعد از اعشار نمایش داده ایم)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱	۰/۹۰۰۰	−۱/۰۰۰۰	۲/۵۰۰۰
۲	۱/۲۵۰۰	۱/۵۴۰۰	۲/۱۱۰۰
۳	۰/۹۵۷۰	۱/۴۳۸۰	۲/۸۳۷۰
۴	۱/۰۳۹۹	۱/۸۴۳۸	۲/۸۳۵۷
۵	۰/۹۹۹۲	۱/۸۹۲۵	۲/۹۴۹۲
۶	۱/۰۰۵۷	۱/۹۵۸۸	۲/۹۶۷۸
۷	۱/۰۰۰۹	۱/۹۷۷۷	۲/۹۸۷۱
۸	۱/۰۰۰۹	۱/۹۹۰۲	۲/۹۹۳۲
۹	۱/۰۰۰۳	۱/۹۹۵۱	۲/۹۹۷۰
۱۰	۱/۰۰۰۲	۱/۹۹۷۸	۲/۹۹۸۵
۱۱	۱/۰۰۰۱	۱/۹۹۸۹	۲/۹۹۹۳
۱۲	۱/۰۰۰۰	۱/۹۹۹۵	۲/۹۹۹۷
۱۳	۱/۰۰۰۰	۱/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۸
۱۴	۱/۰۰۰۰	۱/۹۹۹۹	۲/۹۹۹۹
۱۵	۱/۰۰۰۰	۱/۹۹۹۹	۳/۰۰۰۰
۱۶	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰
۱۷	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰
۱۸	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰

نتایج جدول فوق به خوبی نشان می‌دهند که روش ژاکوبی به جواب دقیق $X^\star = [۱, ۲, ۳]^T$ همگراست.

سوال: آیا حدس اولیه در روش ژاکوبی هرچه می‌تواند باشد؟

پاسخ: دیدیم که برای $X^{(0)} = [۰, ۰, ۰]^T$ روش ژاکوبی همگراست. اما اگر حدس اولیه را تغییر دهیم همچنان این روش همگرا خواهد بود؟

البته برای پاسخ دادن به این سوال می‌بایست نتایج تئوری را برای هر حدس اولیه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T$ بررسی و مطالعه نمود. اما در این مرحله نتایج عددی این روش را برای حدس اولیه $X^{(0)} = [۱۰۰, -۲۰۰, ۵۰۰]^T$ (توجه کنید حدس اولیه طوری انتخاب شده است که کاملا از جواب دقیق فاصله داشته باشد) محاسبه می‌کنیم:

(تمامی محاسبات در نرم افزار متلب با حساب ۱۶ رقمی اعشار انجام شده است هر چند برای راحتی کار محاسبات را با ۴ رقم بعد از اعشار نمایش داده ایم)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۰	۱۰۰	−۲۰۰	۵۰۰
۱	۷۰/۹۰۰۰	۴۵۹/۰۰۰۰	−۶۷/۵۰۰۰
۲	−۵۱/۷۵۰۰	−۱۲/۴۶۰۰	۱۳۳/۱۱۰۰
۳	۱۵/۴۵۷۰	۷۴/۴۳۸۰	۳/۹۳۷۰
۴	−۶/۱۵۰۱	۱۱/۴۲۳۸	۲۳/۲۸۵۷
⋮	⋮	⋮	⋮
۲۱	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۱	۳/۰۰۰۰
۲۲	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰
۲۳	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰

نتایج جدول اخیر قابل توجه است چرا که با وجود اینکه حدس اولیه به طور نامناسبی انتخاب شده اما همچنان روش به جواب دقیق همگراست و تنها به تعداد تکرار بیشتری نیاز شده است.

توجه ۳.۱

در ادامه خواهیم دید که اگر یک روش تکراری همگرا باشد آنگاه انتخاب حدس اولیه تاثیری در همگرایی آن ندارد و انتخاب نامناسب حدس اولیه تنها می‌تواند باعث افزایش تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به یک دقت مطلوب گردد.

۳.۱ محک توقف

سوال: در صورتی که روش ژاکوبی همگرا باشد تعداد تکرارها تا کجا می‌باست ادامه یابد؟
پاسخ:به طور معمول برای جواب این سوال ۲ راهکار وجود دارد:
۱ــ تعداد تکرار های لازم توسط کاربر مشخص می‌گردد. برای مثال ۱۰۰۰ تکرار روش ژاکوبی را محاسبه می‌کنیم.
توجه کنید در این حالت هیچ تضمینی وجود ندارد که به اندازه کافی به جواب دقیق نزدیک شده باشیم.
۲ــ از یک محک توقف استفاده نماییم که به طور معمول به یکی از صورت های زیر می‌تواند مطرح گردد.

محک توقف مطلق
$$\max_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|\le\varepsilon$$

محک توقف نسبی
$$\max_{1\le i\le n}\frac{|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k)}|}\le\varepsilon$$

محک توقف باقی مانده
$$\|b-Ax^{(k)}\|\le\varepsilon$$

محک توقف نسبی
$$\frac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|b\|}\le\varepsilon$$

به طوری که ε به عنوان تولرانس (Tolerance) یعنی حداکثر خطای قابل قبول توسط کاربر مشخص می‌گردد.
توجه: در برخی مواقع از ۲ راهکار فوق به صورت ترکیبی استفاده می‌کنیم. برای مثال ممکن است در صورت محقق شدن شرط

$$\|b-AX^{(k)}\|\le\varepsilon \qquad Or \qquad k\ge 100 \tag{۵}$$

استفاده کنیم. توضیح اینکه شرط (۵) بیان می‌دارد وقتی که جواب تقریبی $X^{(k)}$ در

$$\|b-AX^{(k)}\|\le\varepsilon \tag{۶}$$

صدق می‌کند توقف نماییم یا اینکه چنین شرطی تا تکرار ۱۰۰ ام برقرار شد ادامه عملیات متوقف شود زیرا ممکن است شرط (۶) برای k های بزرگ برقرار گردد که ممکن است برای ما مقرون به صرفه نباشد چنین تکرارهای بالایی را محاسبه نماییم.

مثال ۳.۲

دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}12x_1-6x_2+7x_3+x_4=25\\ x_1+10x_2+x_3+x_4=28\\ 2x_1+x_2-11x_3+3x_4=-17\\ 3x_1+2x_2+x_3+13x_4=62\end{cases}$$

با حدس اولیه بردار صفر $X^{(0)} = 0$ شروع کنید و نتایج روش ژاکوبی را تا جایی ادامه دهید که جواب تقریبی

$$X^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}]^T$$

در محک توقف

$$\max_{1\le i\le 4} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon = 5 \times 10^{-4}$$

صادق باشد.

حل: نتایج در جدول زیر قرار داده شده اند. همانطور که مشاهده می‌شود برای تحقق شرط توقف بالا حداقل به ۱۳ تکرار نیاز داریم (تمامی محاسبات در نرم افزار متلب با حساب ۱۶ رقمی اعشار انجام شده است هر چند برای راحتی کار محاسبات را با ۶ رقم بعد از اعشار نمایش داده ایم)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۲/۰۸۳۳۳۳	۲/۸۰۰۰۰	۱/۵۴۵۴۵۵	۴/۷۶۹۲۳۱
۲	۲/۱۸۴۳۸۲	۱/۹۶۰۱۹۸	۳/۴۷۹۴۸۷	۳/۷۳۸۸۱۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۱	۰/۹۹۹۶۲۴۶	۲/۰۰۰۲۲۹	۲/۹۹۹۳۸۸۸	۴/۰۰۰۴۳۸
۱۲	۱/۰۰۰۴۳۵	۲/۰۰۰۰۵۵	۳/۰۰۰۰۷۲	۴/۰۰۰۰۹۸
۱۳	۰/۹۹۹۹۷۷۳	۱/۹۹۹۹۳۹	۳/۰۰۰۱۱۱	۳/۹۹۹۸۸۶

۴.۱ روش گاوس - سیدل

روش ژاکوبی برای یک دستگاه 4×4 کلی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{a_{44}}(b_4 - a_{41}x_1^{(k)} - a_{42}x_2^{(k)} - a_{43}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

در محاسبه‌ی $x_2^{(k+1)}$ مقدار $x_1^{(k)}$ ظاهر شده است اما این مقدار در گام قبلی بهبود یافته است یعنی مقدار $x_1^{(k+1)}$. لذا اگر به جای $x_1^{(k)}$ از مقدار بهبود یافته آن یعنی $x_1^{(k+1)}$ استفاده کنیم آنگاه انتظار داریم مقدار $x_2^{(k+1)}$ دارای دقت بهتری نسبت به وضع فعلی باشد.
به طور مشابه اگر در محاسبه‌ی $x_3^{(k+1)}$ از مقادیر بهبود یافته‌ی $x_1^{(k)}$ و $x_2^{(k)}$ که دقیقا در مرحله‌ی قبل بهبود یافته اند یعنی $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$، استفاده کنیم انتظار داریم $x_3^{(k+1)}$ دارای دقت بهتری نسبت به وضع فعلی باشد. همچنین اگر در محاسبه‌ی

$x_۴^{(k+۱)}$ از مقادیر بهبود یافته‌ی $x_۱^{(k)}$ ، $x_۲^{(k)}$ و $x_۳^{(k)}$ که دقیقا در مرحله‌ی قبل بهبود یافته اند یعنی $x_۱^{(k+۱)}$ و $x_۲^{(k+۱)}$، $x_۳^{(k+۱)}$ استفاده کنیم انتظار داریم $x_۴^{(k+۱)}$ دارای دقت بهتری نسبت به وضع فعلی باشد. بنابراین روش ژاکوبی فوق به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\begin{cases} x_۱^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۱۱}}(b_۱ - a_{۱۲}x_۲^{(k)} - a_{۱۳}x_۳^{(k)} - a_{۱۴}x_۴^{(k)}) \\ x_۲^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۲۲}}(b_۲ - a_{۲۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{۲۳}x_۳^{(k)} - a_{۲۴}x_۴^{(k)}) \\ x_۳^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۳۳}}(b_۳ - a_{۳۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{۳۲}x_۲^{(k+۱)} - a_{۳۴}x_۴^{(k)}) \\ x_۴^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۴۴}}(b_۴ - a_{۴۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{۴۲}x_۲^{(k+۱)} - a_{۴۳}x_۳^{(k+۱)}) \end{cases}$$

به روش فوق، روش تکراری گاوس_سیدل گفته می‌شود که در اکثر مواقع از روش ژاکوبی سریعتر همگرا خواهد بود.

مثال ۳.۳

دستگاه داده شده را با روش گاوس_سیدل حل کنید و تعداد تکرار ها را تا جایی ادامه دهید که جواب تقریبی $X^{(k)}$ در شرط

$$\|b - AX^{(k)}\|_\infty \le ۱۰^{-۶}$$

صدق نماید

$$A = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۶ & ۷ & ۱ \\ ۱ & ۱۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱۳ \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۲۸ \\ -۱۷ \\ ۶۲ \end{bmatrix}$$

حل: از تقریب اولیه $X^{(۰)} = [۰, ۰, ۰, ۰]^T$ استفاده خواهیم کرد. تکرارها به صورت زیرند:
در تکرار اول داریم:

$$\begin{cases} x_۱^{(۱)} = \dfrac{۱}{۱۲}(۲۵ + ۶x_۲^{(۰)} - ۷x_۳^{(۰)} - x_۴^{(۰)}) = ۲/۰۸۳۳۳۳ \\ x_۲^{(۱)} = \dfrac{۱}{۱۰}(۲۸ - x_۱^{(۱)} - x_۳^{(۰)} - x_۴^{(۰)}) = ۲/۵۹۱۶۶۷ \\ x_۳^{(۱)} = -\dfrac{۱}{۱۱}(-۱۷ - ۲x_۱^{(۱)} - x_۲^{(۱)} - ۳x_۴^{(۰)}) = ۲/۱۵۹۸۴۸ \\ x_۴^{(۱)} = \dfrac{۱}{۱۳}(۶۲ - ۳x_۱^{(۱)} - ۲x_۲^{(۱)} - x_۳^{(۱)}) = ۳/۷۲۳۶۰۱ \end{cases}$$

در تکرار دوم داریم:

$$\begin{cases} x_۱^{(۲)} = \dfrac{۱}{۱۲}(۲۵ + ۶x_۲^{(۱)} - ۷x_۳^{(۱)} - x_۴^{(۱)}) = ۱/۸۰۸۹۵۵ \\ x_۲^{(۲)} = \dfrac{۱}{۱۰}(۲۸ - x_۱^{(۲)} - x_۳^{(۱)} - x_۴^{(۱)}) = ۲/۰۳۰۷۶۰ \\ x_۳^{(۲)} = -\dfrac{۱}{۱۱}(-۱۷ - ۲x_۱^{(۲)} - x_۲^{(۲)} - ۳x_۴^{(۱)}) = ۳/۰۷۴۴۹۸ \\ x_۴^{(۲)} = \dfrac{۱}{۱۳}(۶۲ - ۳x_۱^{(۲)} - ۲x_۲^{(۲)} - x_۳^{(۲)}) = ۳/۸۰۲۸۵۵ \end{cases}$$

در تکرار سوم داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{12}(25 + 6x_2^{(2)} - 7x_3^{(2)} - x_4^{(2)}) = 2.083333 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{10}(28 - x_1^{(3)} - x_3^{(2)} - x_4^{(2)}) = 2.591667 \\ x_3^{(3)} = -\frac{1}{11}(-17 - 2x_1^{(3)} - x_2^{(3)} - 3x_4^{(2)}) = 2.159848 \\ x_4^{(3)} = \frac{1}{13}(62 - 3x_1^{(3)} - 2x_2^{(3)} - x_3^{(3)}) = 3.723601 \end{cases}$$

در تکرار چهارم داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{12}(25 + 6x_2^{(3)} - 7x_3^{(3)} - x_4^{(3)}) = 1.808955 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{10}(28 - x_1^{(4)} - x_3^{(3)} - x_4^{(3)}) = 2.030760 \\ x_3^{(4)} = -\frac{1}{11}(-17 - 2x_1^{(4)} - x_2^{(4)} - 3x_4^{(3)}) = 3.074498 \\ x_4^{(4)} = \frac{1}{13}(62 - 3x_1^{(4)} - 2x_2^{(4)} - x_3^{(4)}) = 3.802855 \end{cases}$$

باقی نتایج این روش را در جدول زیر قرار می‌دهیم. مشاهده می‌شود که حداقل به ۱۴ تکرار برای رسیدن به دقت مطلوب نیاز می‌باشد.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۲/۰۸۳۳۳۳	۲/۵۹۱۶۶۷	۲/۱۵۹۸۴۸	۳/۷۲۳۶۰۱
۲	۱/۸۰۸۹۵۵	۲/۰۳۰۷۶۰	۳/۰۷۴۴۹۸	۳/۸۰۲۸۵۵
۳	۰/۹۸۸۳۵۱۶	۲/۰۱۳۴۳۰	۲/۹۴۵۳۳۶	۴/۰۰۴۸۲۷
۴	۱/۰۳۸۲۰۰	۲/۰۰۱۱۶۴	۳/۰۰۸۳۶۸	۳/۹۹۰۳۶۲
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۱	۰/۹۹۹۹۹۸۳	۲/۰۰۰۰۰۰	۲/۹۹۹۹۹۹	۴/۰۰۰۰۰۰
۱۲	۱/۰۰۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰۰۰
۱۳	۰/۹۹۹۹۹۹۹	۲/۰۰۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰۰۰
۱۴	۱/۰۰۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰۰۰

۵.۱ روش گاوس-سیدل برای دستگاه $n \times n$

یکبار دیگر روش ژاکوبی را برای حل یک دستگاه با ماتریس ضرایب $n \times n$ به یاد آورید(با فرض مخالف صفر بودن اعضای قطری ماتریس ضرائب)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k)} - a_{n-1,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k)} - a_{n-1,n}x_n^{(k)}) \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k)} - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

در محاسبه‌ی $x_۲^{(k+۱)}$ می‌توانیم به جای $x_۱^{(k)}$ از مقدار بهبود یافته آن در گام قبلی یعنی $x_۱^{(k+۱)}$ استفاده کنیم. همینطور برای محاسبه‌ی $x_۳^{(k+۱)}$ می‌توان از مقادیر جدید $x_۱^{(k+۱)}$ و $x_۲^{(k+۱)}$ استفاده کرد و... و برای محاسبه‌ی $x_{n-۱}^{(k)}$ می‌توان از مقادیر جدید $x_۱^{(k+۱)}$، $x_۲^{(k+۱)}$، ... $x_{n-۲}^{(k+۱)}$ کمک گرفت و در نهایت برای محاسبه‌ی $x_n^{(k)}$ از مقادیر جدید $x_۱^{(k+۱)}$، $x_۲^{(k+۱)}$، ... $x_{n-۱}^{(k+۱)}$ استفاده نمود. لذا می‌توان روش ژاکوبی را به صورت زیر اصلاح کرد که همان روش گاوس_سیدل در حالت $n \times n$ می‌باشد:

$$\begin{cases} x_۱^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۱۱}}(b_۱ - a_{۱۲}x_۲^{(k)} - a_{۱۳}x_۳^{(k)} - a_{۱۴}x_۴^{(k)} - \cdots - a_{۱n}x_n^{(k)}) \\ x_۲^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۲۲}}(b_۲ - a_{۲۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{۲۳}x_۳^{(k)} - a_{۲۴}x_۴^{(k)} - \cdots - a_{۲n}x_n^{(k)}) \\ x_۳^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{۳۳}}(b_۳ - a_{۳۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{۳۲}x_۲^{(k+۱)} - a_{۳۴}x_۴^{(k)} - \cdots - a_{۳n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-۱}^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{n-۱,n-۱}}(b_{n-۱} - a_{n-۱,۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{n-۱,۲}x_۲^{(k+۱)} - \cdots - a_{n-۱,n-۲}x_{n-۲}^{(k+۱)} - a_{n-۱,n}x_n^{(k)}) \\ x_n^{(k+۱)} = \dfrac{۱}{a_{nn}}(b_n - a_{n۱}x_۱^{(k+۱)} - a_{n۲}x_۲^{(k+۱)} - \cdots - a_{n,n-۲}x_{n-۲}^{(k+۱)} - a_{n,n-۱}x_{n-۱}^{(k+۱)}) \end{cases}$$

که در آن $k = ۰, ۱, \ldots$ می‌باشد. توجه کنید با داشتن تقریب اولیه $X^{(۰)} = [x_۱^{(۰)}, x_۲^{(۰)}, \ldots, x_n^{(۰)}]^T$ تقریب بعدی

$$X^{(۱)} = [x_۱^{(۱)}, x_۲^{(۱)}, \ldots, x_n^{(۱)}]^T$$

از روابط بالا به ازای $k = ۰$ حاصل می‌شود. سپس با داشتن $X^{(۱)}$ تقریب بعدی

$$X^{(۲)} = [x_۱^{(۲)}, x_۲^{(۲)}, \ldots, x_n^{(۲)}]^T$$

از روابط بالا برای $k = ۱$ حاصل می‌شود و غیره. در ادامه به حل چند مثال با این روش می‌پردازیم.

مثال ۳.۴

دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۳ & -۵ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۷ & ۱۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲۸ \\ ۷۶ \end{bmatrix}$$

را با روش گاوس_سیدل با شرط اولیه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱^{(۰)} \\ x_۲^{(۰)} \\ x_۳^{(۰)} \end{bmatrix}$ حل کنید.

$$x_۱^{(۱)} = \frac{۱ - ۳x_۲^{(۰)} + ۵x_۳^{(۰)}}{۱۲} = \frac{۱ - ۳(۰) + ۵(۱)}{۱۲} = ۰/۵۰۰۰۰$$

$$x_۲^{(۱)} = \frac{۲۸ - x_۱^{(۱)} - ۳x_۳^{(۰)}}{۵} = \frac{۲۸ - ۰/۵ - ۳(۱)}{۵} = ۴/۹۰۰۰$$

$$x_۳^{(۱)} = \frac{۷۶ - ۳x_۱^{(۱)} - ۷x_۲^{(۱)}}{۱۳} = \frac{۷۶ - ۳(۰/۵۰۰۰۰) - ۷(۴/۹۰۰۰)}{۱۳} = ۳/۰۹۲۳$$

درصد خطای نسبی مطلق

$$|\epsilon_x|_1 = |\frac{0/50000 - 1/0000}{0/50000}| \times 100 = 100\%$$
$$|\epsilon_x|_2 = |\frac{4/9000 - 0}{4/9000}| \times 100 = 100\%$$
$$|\epsilon_x|_3 = |\frac{3/0923 - 1/0000}{3/0923}| \times 100 = 67/662\%$$

ماکزیمم مقدار خطای نسبی مطلق بعد از تکرار اول برابر است با ٪۱۰۰.
در تکرار اول:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5000 \\ 4/9000 \\ 3/0923 \end{bmatrix}$$

با استفاده از مقادیر فوق داریم

$$x_1^{(2)} = \frac{1 - 3(4/9000) + 5(3/0923)}{12} = 0/14679$$
$$x_2^{(2)} = \frac{28 - (0/14679) - 3(3/0923)}{5} = 3/7153$$
$$x_3^{(2)} = \frac{76 - 3(0/14679) - 7(4/9000)}{13} = 3/8118$$

در تکرار دوم:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/14679 \\ 3/7153 \\ 3/8118 \end{bmatrix}$$

درصد خطای نسبی مطلق

$$|\epsilon_x|_1 = |\frac{0/14679 - 0/50000}{0/14679}| \times 100 = 240/62\%$$
$$|\epsilon_x|_2 = |\frac{3/7153 - 4/9000}{3/7153}| \times 100 = 31/887\%$$
$$|\epsilon_x|_3 = |\frac{3/8118 - 3/0923}{3/8118}| \times 100 = 18/876\%$$

ماکزیمم مقدار خطای نسبی مطلق بعد از تکرار دوم برابر است با ٪۲۴۰/۶۲.

با تکرارهای بیشتر نتایج زیر به‌دست می‌آید:

k	$x_1^{(k)}$	$\|\epsilon_x\|_1$	$x_2^{(k)}$	$\|\epsilon_x\|_2$	$x_3^{(k)}$	$\|\epsilon_x\|_3$
۱	۰/۵۰۰۰۰	۱۰۰/۰۰	۴/۹۰۰	۱۰۰/۰۰	۳/۰۹۲۳	۶۷/۶۶۲
۲	۰/۱۴۶۷۹	۲۴۰/۶۲	۳/۷۱۵۳	۳۱/۸۸۷	۳/۸۱۱۸	۱۸/۸۷۶
۳	۰/۷۴۲۷۵	۸۰/۲۳	۳/۱۶۴۴	۱۷/۴۰۹	۳/۹۷۰۸	۴/۰۰۴۲
۴	۰/۹۴۶۷۵	۲۱/۵۴۷	۳/۰۲۸۱	۴/۵۰۱۲	۳/۹۹۷۱	۰/۶۵۷۹۸
۵	۰/۹۹۱۷۷	۴/۵۳۹۴	۳/۰۰۳۴	۰/۸۲۲۴۰	۴/۰۰۰۱	۰/۰۷۴۹۹
۶	۰/۹۹۹۱۹	۰/۷۴۲۶۰	۳/۰۰۰۱	۰/۱۱۰۰۰	۴/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰

و جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۹۱۹ \\ ۳/۰۰۰۱ \\ ۴/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

که بسیار نزدیک است به جواب دقیق

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۵

مثال: دستگاه

$$\begin{cases} ۳x_1 + ۷x_2 + ۱۳x_3 = ۷۶ \\ x_1 + ۵x_2 + ۳x_3 = ۲۸ \\ ۱۲x_1 + ۳x_2 - ۵x_3 = ۱ \end{cases}$$

را با شرط اولیه $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ با روش گاوس - سیدل حل کنید.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{۷۶ - ۷x_2^{(k)} - ۱۳x_3^{(k)}}{۳}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{۲۸ - x_1^{(k+1)} - ۳x_3^{(k)}}{۵}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{۱ - ۱۲x_1^{(k+1)} - ۳x_2^{(k+1)}}{-۵}$$

k	$x_1^{(k)}$	$\lvert\epsilon_x\rvert_1$	$x_2^{(k)}$	$\lvert\epsilon_x\rvert_2$	$x_3^{(k)}$	$\lvert\epsilon_x\rvert_3$
۱	۲۱/۰۰۰	۱۱۰/۷۱	۰/۸۰۰۰۰	۱۰۰/۰۰	۵/۰۶۸۰	۹۸/۰۲۷
۲	$-$۱۹۶/۱۵	۱۰۹/۸۳	۱۴/۴۲۱	۹۴/۴۵۳	$-$۴۶۲/۳۰	۱۱۰/۹۶
۳	$-$۱۹۹۵/۰	۱۰۹/۹۰	$-$۱۱۶/۰۲	۱۱۲/۴۳	۴۷۱۸/۱	۱۰۹/۸۰
۴	$-$۲۰۱۴۹	۱۰۹/۸۹	۱۲۰۴/۶	۱۰۹/۶۳	$-$۴۷۶۳۶	۱۰۹/۹۰
۵	۲/۰۳۶۴ $\times$ ۱۰	۱۰۹/۹۰	$-$۱۲۱۴۰	۱۰۹/۹۲	۴/۸۱۴۴ $\times$ ۱۰۵	۱۰۹/۸۹
۶	$-$۲/۰۵۷۹ $\times$ ۱۰۵	۱۰۹/۹۰	۱/۲۲۷۲ $\times$ ۱۰۵	۱۰۹/۸۹	$-$۴/۸۶۵۳ $\times$ ۱۰۶	۱۰۹/۸۹

همانطور که می بینید مقادیر جدول همگرا نمی‌باشند. آیا بدین معنی است که روش گاوس_سیدل کارا نمی‌باشد؟

۶.۱ مقایسه سرعت همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس_سیدل

در حالت کلی اگر هر دو روش ژاکوبی و گاوس_سیدل همگرا باشند آنگاه به طور معمول روش گاوس - سیدل سریعتر همگرا خواهد بود و به تعداد تکرار های کمتری نیاز دارد. بویژه این موضوع در حالت های خاصی مثلا وقتی که ماتریس ضرایب A متقارن معین مثبت باشد اثبات گردیده است. این موضوعات به طور جدی تر در مطالب بعدی بررسی می‌شوند. اکنون

می‌خواهیم سرعت همگرایی این دو روش را برای دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} ۶x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ = ۱۷ \\ -x_۱ + ۷x_۲ + ۲x_۳ = ۱۹ \\ ۲x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ = ۱۵ \end{cases}$$

با جواب دقیق $X^\star = [۱, ۲, ۳]^T$ مقایسه کنیم وقتی که جواب تقریبی حاصل از این روش‌ها در محک توقف زیر صدق نماید

$$\|X^{(k+۱)} - X^{(k)}\|_\infty \leq ۵ \times ۱۰^{-۴}, \qquad X^{(۰)} = [۰, ۰, ۰]^T$$

نتایج در جداول زیر گزارش شده است. طبق نتایج این جداول روش گاوس–سیدل سریعتر از روش ژاکوبی است زیرا برای رسیدن به محک توقف بالا به ۹ تکرار نیاز دارد در صورتی که روش ژاکوبی برای رسیدن به چنین دقتی به ۱۲ تکرار نیاز دارد.

نتایج روش ژاکوبی:

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۲/۸۳۳۳۳	۲/۷۱۴۲۹	۳/۰۰۰۰۰
۲	۰/۵۲۳۸۱	۲/۲۶۱۹۰	۲/۴۰۹۵۲
۳	۰/۹۲۳۸۱	۲/۱۰۰۶۸	۳/۲۴۲۸۶
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۰	۱/۰۰۰۰۳	۱/۹۹۹۰۵	۳/۰۰۰۵۳
۱۱	۱/۰۰۰۵۴	۱/۹۹۹۸۵	۲/۹۹۹۸۰
۱۲	۱/۰۰۰۱۳	۲/۰۰۰۱۴	۲/۹۹۹۷۵

نتایج روش گاوس–سیدل:

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۲/۸۳۳۳۳	۳/۱۱۹۰۵	۲/۴۹۰۴۸
۲	۰/۳۳۸۸۸۹	۲٫۰۵۱۱۱۳	۳/۲۷۴۶۷
۳	۰/۹۲۰۱۳۲	۱/۹۱۰۱	۳/۰۱۳۹۷
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۷	۱/۰۰۰۳۴	۱/۹۹۹۵۹	۲/۹۹۹۷۸
۸	۱/۰۰۰۳۱	۲/۰۰۰۱۱	۲/۹۹۹۹۰
۹	۰/۹۹۹۹۴۶	۲/۰۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۳

۷.۱ فرم فشرده روش ژاکوبی

روش ژاکوبی را به یاد آورید

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k)} - a_{n-1,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k)} - a_{n-1,n}x_n^{(k)}) \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k)} - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

واضح است که می‌توان نوشت

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum\limits_{j=1,\ j\neq 1}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - \sum\limits_{j=1,\ j\neq 2}^{n} a_{2j}x_j^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - \sum\limits_{j=1,\ j\neq 3}^{n} a_{3j}x_j^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - \sum\limits_{j=1,\ j\neq n}^{n} a_{nj}x_j^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

روابط فوق به شکل فشرده‌تر زیر نیز قابل نمایش هستند

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

به عبارت فوق فرم فشرده روش ژاکوبی می‌گوییم(به علت استفاده از نمایش فرم سری). اغلب فرم فشرده فوق می‌تواند در نوشتن برنامه‌ی کامپیوتری این روش مفید باشد. دستورات زیر در متلب نشان می‌دهند که چطور بر اساس فرم فشرده فوق می‌توان به راحتی روش ژاکوبی را کد نویسی کرد:

```
clc
clear all
close all
format short
A-[10 1 -1;3 5 4;1 -3 10]; b=[9;5;25];
a=A; n=length(A); x0=zeros(n,1); Iteration=10;
for i = 1 : n
x(i)=((b(i)-a(i,[1:i-1, i+1:n])*x0([1:i-1,i+1:n]))/a (i,i));
end
x1=x';

for k=1:Iteration
```

```
        for i=1:n
        xx(i)=((b(i)-a(i,[1:i-1,i+1:n])*x1([1:i-1,i+1:n]))/a(i,i));
        end
        x1=xx';
        end
```

۸.۱ فرم فشرده روش گاوس - سیدل

روش گاوس_سیدل را بخاطر آورید

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k+1)} - a_{n-1,2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} - a_{n-1,n}x_n^{(k)}) \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

واضح است که می‌توان نوشت

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \sum_{j=4}^{n} a_{3j}x_j^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - \sum_{j=n+1}^{n} a_{nj}x_j^{(k)})$$

یا

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum\limits_{j=1}^{0} a_{1j}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - \sum\limits_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - \sum\limits_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=4}^{n} a_{3j}x_j^{(k)}) \\ \vdots \\ x_p^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{pp}}(b_p - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{pj}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=p+1}^{n} a_{pj}x_j^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - \sum\limits_{j=1}^{n-2} a_{n-1,j}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=n}^{n} a_{n-1,j}x_j^{(k)}) \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=n+1}^{n} a_{nj}x_j^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

به طوری که در روابط فوق تعریف می‌کنیم

$$\sum_{j=1}^{0} a_{1j}x_j^{(k+1)} = 0, \qquad \sum_{j=n+1}^{n} a_{nj}x_j^{(k)} = 0$$

در این صورت روابط فوق به شکل فشرده زیر قابل نمایش اند

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),\ i = 1, 2, \dots, n\ ,\ k = 0, 1, 2, \dots}$$

به عبارت فوق فرم فشرده روش گاوس_سیدل می‌گوییم. اغلب فرم فشرده فوق می‌تواند در نوشتن برنامه کامپیوتری این روش مفید باشد.

۹.۱ برتری روش ژاکوبی نسبت به روش گاوس_سایدل در موازی‌سازی

روش ژاکوبی برای یک دستگاه ۳ × ۳ را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}] \end{cases}$$

برای این دستگاه روش گاوس سایدل نیز به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}] \end{cases}$$

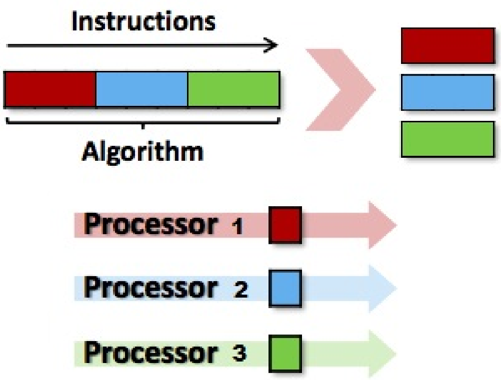
همانطور که می‌بینید. در روش ژاکوبی محاسبه‌ی $x_1^{(k+1)}$ به $x_2^{(k+1)}$ و $x_3^{(k+1)}$ وابسته نیست و هر ۳ مقدار جدید $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ و $x_3^{(k+1)}$ می‌توانند به طور مجزا محاسبه شوند به عبارتی می‌توانند به صورت موازی محاسبه شوند و قطعا اینکار می‌تواند بر سرعت این روش بی‌افزاید. درحالی که در روش گاوس‌ـسایدل این امکان وجود ندارد زیرا مثلا در محاسبه $x_2^{(k+1)}$ نیاز است تا $x_1^{(k+1)}$ از قبل محاسبه گردد. همچنین در محاسبه $x_3^{(k+1)}$ نیاز است تا $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ را از قبل محاسبه کرده باشیم. بنابراین می‌توان گفت:

اگر امکان پردازش موازی در دسترس باشد روش ژاکوبی به گاوس‌ـسایدل ارجحیت دارد اگر امکان پردازش موازی در دسترس نباشد روش گاوس‌ـسایدل به ژاکوبی ارجحیت دارد.

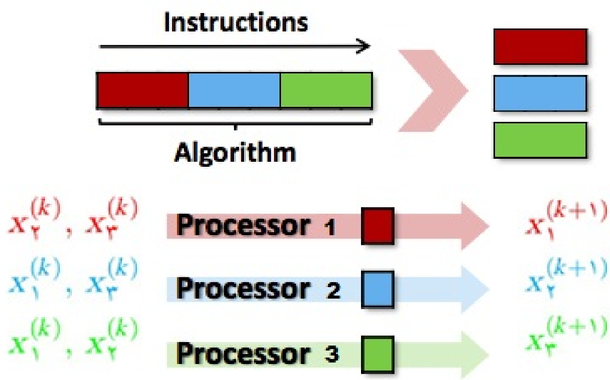
تمرین ۳.۱

در صورت فراهم بودن پردازشگر های موازی، استفاده از ایده محاسبات موازی و توجه به برنامه نویسی موازی را بررسی کنید.

یک فرآیند پردازش موازی برای یک الگوریتم در حالت کلی(با ۳ پردازنده) به صورت زیر است:



بنابراین برای ژاکوبی داریم:



۱۰.۱ روش فوق تخفیف متوالی

روش فوق تخفیف متوالی (Successive Over-Relaxation) به اختصار روش (SOR) جهت تسریع سرعت همگرایی روش گاوس_سایدل می‌باشد. قبلا مشاهده شد که روش گاوس_سایدل به چه صورت باعث بهبود سرعت همگرایی روش ژاکوبی شد. حال سوالی که مطرح است این است که آیا روش گاوس_سایدل نیز می‌تواند بهبود یابد و سرعت همگرایی‌اش افزایش یابد؟

برای اینکه روش SOR را بیان کنیم. ابتدا آن را برای یک دستگاه 3×3 به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

بیان کرده و سپس نتایج حاصله را برای حالت $n \times n$ بسط می‌دهیم.

روش گاوس_سایدل را برای این دستگاه بخاطر آورید.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}] \\ \\ x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\ \\ x_3^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}] \end{cases}$$

حال در معادله اول $a_{11}x_1^{(k)}$ را کم و زیاد کرده، در معادله دوم $a_{22}x_2^{(k)}$ و در معادله سوم $a_{33}x_3^{(k)}$ را کم و زیاد می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ \\ x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{22}}(a_{22}x_2^{(k)} + b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ \\ x_3^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{33}}(a_{33}x_3^{(k)} + b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases} \tag{7}$$

چنانچه در بحث محک‌های توقف دیدیم هرگاه عبارت

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$$

یعنی اختلاف دو جمله متوالی به صفر میل کند روش همگراست و بعلاوه هر چه سریع‌تر به صفر میل کند روش سریع‌تر همگرا خواهد بود. از طرفی طبق معادلات قبل اختلاف دو جملات متوالی $x_1^{(k+1)}$ از $x_1^{(k)}$ و $x_2^{(k+1)}$ از $x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k+1)}$ از $x_3^{(k)}$ به صورت زیر است.

$$x_1^{(k)} \text{از} x_1^{(k+1)} \text{اختلاف} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k)} \text{از} x_2^{(k+1)} \text{اختلاف} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k)} \text{از} x_3^{(k+1)} \text{اختلاف} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)})$$

و چنانچه این عبارات سریع‌تر کوچک شوند باعث افزایش سرعت روش گاوس-سایدل می‌گردد. بنابراین اگر آنها در یک پارامتر مثبت ω ضرب شوند به قسمی که این اختلاف‌ها سریع‌تر کوچک شوند و درنتیجه باعث افزایش سرعت همگرایی روش گاوس-سایدل گردند:

$$\begin{cases} \frac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ \frac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ \frac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases} \tag{8}$$

فاصله‌ی $x_i^{(k)}$ و $x_i^{(k+1)}$ در روش گاوس-سایدل $\longrightarrow$

فاصله‌ی $x_i^{(k)}$ و $x_i^{(k+1)}$ در روش SOR $\longrightarrow$

شکل فوق به طور نمادین میزان افزایش فاصله ی (اختلاف) دو جمله ی متوالی را برای گاوس-سیدل و SOR نشان می دهد. در واقع امکان افزایش سرعت گاوس-سایدل را نشان می‌دهد.
با قرار دادن مقادیر جدید (۸) در سمت راست (۷) داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} &= \dfrac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} &= \dfrac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)} &= \dfrac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases} \tag{۹}$$

به روش جدید (۹) روش SOR گفته می‌شود و چنانچه در روش SOR فرض کنیم $\omega = 1$ آنگاه این روش به گاوس-سایدل تقلیل می‌یابد. به طور کلی در روش SOR هدف این است که:

وقتی روش گاوس-سایدل کند است باید ωای را بیابیم تا به ازای آن سرعت روش SOR نسبت به گاوس-سیدل افزایش یابد.

پارامتر ω باید طوری انتخاب شود که در روند همگرایی روش گاوس-سایدل اختلالی وارد نکند لذا نیاز است محدوده‌ایی برای آن مشخص کنیم تا روش همگرا باشد. بعلاوه در اینجا یک بحث مهم مقدار بهینه‌ی ω مطرح خواهد بود. به هر حال از نظر تئوری امکان یافتن پارامتری $\omega > 0$ وجود دارد که باعث شود سرعت روش گاوس-سایدل افزایش پیدا کند. چنانچه هیچ ωایی با شرط فوق وجود نداشته باشد کافی است $\omega = 1$ انتخاب کرده و به همان روش گاوس-سایدل بسنده کنیم. بحث‌های دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی انتخاب پارامتر ω در مطالب بعدی آورده شده است.

مثال ۳.۶

دستگاه داده شده را با روش SOR به ازای $\omega = 0/8$ حل کنید و نتیجه را با روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل مقایسه کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 23 \\ -4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 11 \end{cases}$$

حل:
ابتدا بردار حدس اولیه را $X^{(0)} = 0$ در نظر می‌گیریم تکرارهای ژاکوبی به صورت زیرند.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = ۲/۰۰۰۰ \\ x_2^{(1)} = ۳/۲۸۵۷ \\ x_3^{(1)} = ۳/۶۶۶۷ \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = ۴/۹۰۴۸ \\ x_2^{(2)} = ۲/۱۹۰۵ \\ x_3^{(2)} = -۱/۳۳۳۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = ۷/۷۱۴۳ \\ x_2^{(3)} = ۲/۰۷۴۸ \\ x_3^{(3)} = ۵/۰۹۵۲ \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1^{(4)} = ۱/۰۵۴۴ \\ x_2^{(4)} = ۰/۳۵۳۷ \\ x_3^{(4)} = ۹/۱۱۱۱ \end{cases}$$

با ادامه‌ی این روند می‌توان دید که در روش ژاکوبی همگرایی رخ نداده است. حال تکرارهای روش گاوس_سایدل را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = ۲/۰۰۰۰ \\ x_2^{(1)} = ۲/۷۱۴۳ \\ x_3^{(1)} = ۰/۰۰۰۰ \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = ۷/۴۲۸۶ \\ x_2^{(2)} = ۱/۱۶۳۳ \\ x_3^{(2)} = ۱۰/۸۵۷۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -۶/۵۳۰۶ \\ x_2^{(3)} = ۳/۶۰۰۶ \\ x_3^{(3)} = -۱۳/۴۴۲۲ \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1^{(4)} = ۲۲/۱۷۴۰ \\ x_2^{(4)} = -۱/۲۶۳۵ \\ x_3^{(4)} = ۳۶/۸۰۶۰ \end{cases}$$

در این روش نیز می‌توان دید که همگرایی رخ نداده است! (در مطالب بعدی نشان می دهیم که حدس اولیه در همگرایی یا واگرایی یک روش تکراری هیچ تاثیری ندارد)

حال روش SOR را می‌آزماییم. ابتدا معادلات روش SOR را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{۱}(۲ - x_1^{(k)} + ۲x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{۷}(۲۳ - ۲x_1^{(k+1)} - ۷x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{۳}(۱۱ + ۴x_1^{(k+1)} - ۷x_2^{(k+1)} - ۳x_3^{(k)}) \end{cases}$$

چون $\omega = ۰/۸$ داریم:

$$\begin{cases} x_۱^{(k+۱)} &= x_۱^{(k)} + \frac{۰/۸}{۱}(۲ - x_۱^{(k)} + ۲x_۲^{(k)} - x_۳^{(k)}) \\ x_۲^{(k+۱)} &= x_۲^{(k)} + \frac{۰/۸}{۷}(۲۳ - ۲x_۱^{(k+۱)} - ۷x_۲^{(k)} - x_۳^{(k)}) \\ x_۳^{(k+۱)} &= x_۳^{(k)} + \frac{۰/۸}{۳}(۱۱ + ۴x_۱^{(k+۱)} - ۷x_۲^{(k+۱)} - ۳x_۳^{(k)}) \end{cases}$$

داریم $X^{(۰)} = [x_۱^{(۰)}, x_۲^{(۰)}, x_۳^{(۰)}]^T = [۰, ۰, ۰]^T$ پس

$$x_۱^{(۱)} = ۱/۶۰۰۰$$

و

$$\begin{aligned} x_۲^{(۱)} &= x_۲^{(۰)} + \frac{۰/۸}{۷}(۲۳ - ۲x_۱^{(۱)} - ۷x_۲^{۰} - x_۳^{(۰)}) \\ &= ۰ + \frac{۰/۸}{۷}(۲۳ - ۲(۱/۶) - ۷ \times ۰ - ۰) = ۲/۲۶۲۹ \end{aligned}$$

و

$$x_۳^{(۱)} = x_۳^{(۰)} + \frac{۰/۸}{۳}(۱۱ + ۴x_۱^{(۱)} - ۷x_۲^{(۱)} - ۳x_۳^{(۰)}) \quad = ۰ + \frac{۰/۸}{۳}(۱۱ + ۴(۱/۶) - ۷(۲/۲۶۲۹) - ۳ \times ۰) = ۰/۴۱۶۰$$

پس جواب تقریبی $X^{(۱)} = [x_۱^{(۱)}, x_۲^{(۱)}, x_۳^{(۱)}]^T = [۱/۶۰۰۰, ۲/۲۶۲۹, ۰/۴۱۶۰]^T$ حاصل می‌شود. در تکرار دوم داریم:

$$\begin{aligned} x_۱^{(۲)} &= x_۱^{(۱)} + ۰/۸(۲ - x_۱^{(۱)} - x_۳^{(۱)}) = ۱/۶ + ۰/۸(۲ - ۱/۶ + ۲(۲/۲۶۲۹) - ۰/۴۱۶۰) = ۵/۲۰۷۸ \\ x_۲^{(۲)} &= x_۲^{(۱)} + \frac{۰/۸}{۷}(۲۳ - ۲x_۱^{(۲)} - ۷x_۲^{(۱)} - x_۳^{(۱)}) \\ &= ۲/۲۶۲۹ + \frac{۰/۸}{۷}(۲۳ - ۲(۵/۲۰۷۸) - ۷(۲/۲۶۲۹) - ۰/۴۱۶۰) = ۱/۸۴۳۳ \\ x_۳^{(۲)} &= x_۳^{(۱)} + \frac{۰/۸}{۳}(۱۱ + ۴x_۱^{(۲)} - ۷x_۲^{(۲)} - ۳x_۳^{(۱)}) \\ &= ۰/۴۱۶۰ + \frac{۰/۸}{۳}(۱۱ + ۴(۵/۲۰۷۸) - ۷(۱/۸۴۳۳) - ۳(۰/۴۱۶۰)) = ۵/۱۳۰۸ \end{aligned}$$

برای راحتی کار ادامه محاسبات را در جدول زیر یادداشت می‌کنیم.

نتایج روش SOR با $\omega = ۰/۸$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۱/۶۰۰۰۰	۲/۲۶۲۹	۰/۴۱۶۰
۲	۵/۲۰۷۸	۱/۸۴۳۳	۵/۱۳۰۸
۳	۱/۴۸۶۲	۲/۰۷۱۲	۱/۶۷۸۶
⋮	⋮	⋮	⋮
۱۴	۳/۰۰۰۶	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۵
۱۵	۲/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۰	۲/۹۹۹۸
۱۶	۳/۰۰۰۱	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۱

نتایج جدول فوق جالب است زیرا علی‌رغم اینکه روش‌های ژاکوبی و گاوس_سایدل قادر به حل دستگاه داده شده نیستند، روش SOR در تکرار ۱۶ام به دقت قابل قبولی رسیده چرا که براحتی می‌توان دید که جواب دستگاه $X^* = [۳, ۲, ۳]^T$ است.

مثال ۳.۷

دستگاه داده شده را با روش SOR و برای $\omega = ۰/۱, ۰/۵, ۱, ۱/۵, ۱/۹$ حل کنید تا دنباله جواب‌ها در محک توقف زیر صدق نماید.

$$\mu := \max_{۱\leq i\leq ۳} |x_i^{(k+۱)} - x_i^{(k)}| \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱۱ & ۱ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix}$$

حل

جزئیات حل با روش SOR را برای $\omega = ۰/۱$ می‌نویسیم و برای مقادیر دیگر تنها به چند جدول بسنده می‌کنیم.
ابتدا معادلات روش SOR را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_1^{(k+۱)} &= x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{۵}(۱۶ - ۵x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - ۳x_3^{(k)}) \\[2ex] x_2^{(k+۱)} &= x_2^{(k)} - \dfrac{\omega}{۱۱}(-۱۸ - x_1^{(k+۱)} + ۱۱x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\[2ex] x_3^{(k+۱)} &= x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{۸}(۲۷ + ۳x_1^{(k+۱)} - ۳x_2^{(k+۱)} - ۸x_3^{(k)}) \end{cases}$$

برای $k = ۰$، $\omega = ۰/۱$ و $x_1^{(۰)} = x_2^{(۰)} = x_3^{(۰)} = ۰$ معادلات بالا چنین‌اند:

$$\begin{cases} x_1^{(۱)} &= \dfrac{\omega}{۵} \times ۱۶ = \dfrac{۰/۱}{۵} \times ۱۶ = ۰/۳۲۰۰۰۰ \\ x_2^{(۱)} &= -\dfrac{\omega}{۱۱} \times (-۱۸ - ۰/۳۲) = ۰/۱۶۶۵۴ \\ x_3^{(۱)} &= \dfrac{\omega}{۸} \times (۲۷ + ۳(۰/۳۲) - ۳(۰/۱۶۶۵۴)) = ۰/۳۴۳۲۵ \end{cases}$$

با داشتن مقادیر فوق و ادامه محاسبات به نتایج جدول زیر می‌رسیم

نتایج روش SOR با $\omega =$ ۰/۱

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$	μ
۰	۰	۰	۰	—
۱	۰/۳۲	۱/۶۶۵۴۴۵	۰/۳۴۳۲۵۵	۰/۳۴۳۳
۲	۰٫۶۵۶۲۵۸	۰/۳۲۱۹۵۸	۰/۵۸۴۰۷۴	۰/۳۱۳
۳	۰/۷۹۹۸۵۲	۰/۴۶۶۶۳۶	۰/۹۴۰۶۲۸	۰/۲۸۴۴
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۸۸	۰/۹۹۹۴۹۹	۱/۹۹۹۸۷	۲/۹۹۹۹۸	۵/۹۴۵ $\times$ ۱۰$^{-۵}$
۸۹	۰/۹۹۹۵۵۳	۱/۹۹۹۸۸	۲/۹۹۹۹۷	۵/۴۰۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$
۹۰	۰/۹۹۹۶۰۲	۱/۹۹۹۸۸	۲/۹۹۹۹۶	۴/۹۰۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$

مشاهده می‌شود که در این حالت SOR به تعداد ۹۰ تکرار برای رسیدن به محک توقف ذکر شده نیاز دارد.
حال محاسبات را برای پارامتر ۰/۵ $= \omega$ انجام داده و در جدول زیر یادداشت می‌نماییم:

نتایج روش SOR با $\omega =$ ۰/۵

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$	μ
۰	۰	۰	۰	—
۱	۱/۶	۰/۸۹۰۹۰۹	۱/۸۲۰۴۵	۱/۸۲
۲	۱/۷۶۴۷۷	۱/۴۲۶۶	۲/۶۶۱۱۳	۰/۸۴۰۷
۳	۱/۵۴۱۳۹	۱/۷۲۲۵۱	۲/۹۸۴۱۱	۰/۳۲۳
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۵	۰/۹۹۹۸۴۳	۱/۹۹۹۹۵	۲/۹۹۹۹۳	۰/۰۰۰۲۳۴۵
۱۶	۰/۹۹۹۹۴۹	۱/۹۹۹۹۷	۲/۹۹۹۹۶	۰/۰۰۰۱۰۵۲
۱۷	۰/۹۹۹۹	۱/۹۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸	۴/۰۹۸ $\times$ ۱۰$^{-۵}$

مشاهده می‌شود که تعداد تکرار به طور قابل توجهی کاهش یافته است درواقع از ۹۰ تکرار به ۱۷ تکرار. بنابراین نتایج دو جدول قبلی نشان می‌دهند که نحوه انتخاب پارامتر ω بسیار مهم است.

حال محاسبات را به ازای ۱ $= \omega$ که متناظر با روش گاوس–سایدل است پی می‌گیریم.

نتایج روش SOR با $\omega =$ ۱ (روش گاوس–سایدل)

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$	μ
۰	۰	۰	۰	—
۱	۳/۲	۱/۹۲۷۲۷	۳/۸۵۲۲۷	۳/۸۵۲
۲	۰/۵۰۳۱۸۲	۲/۰۳۲۳۱	۲/۸۰۱۵۸	۲/۶۹۷
۳	۱/۱۱۲۵۹	۱/۹۹۲۲	۳/۰۴۵۱۵	۰/۶۰۹۴
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۸	۰/۹۹۹۹۳۳	۲/۰	۲/۹۹۹۹۷	۰/۰۰۰۳۶۵۱
۹	۱/۰۰۰۰۲	۲/۰	۳/۰۰۰۰۱	۸/۲۷۹ $\times$ ۱۰$^{-۵}$
۱۰	۰/۹۹۹۹۹۷	۲/۰	۳/۰	۱/۸۷۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$

طبق نتایج این جدول تعداد تکرارنسبت به ۰/۵ $= \omega$ کاهش داشته و از ۱۷ به ۱۰ تکرار رسیده.
جدول زیر نتایج را برای ۱/۹ $= \omega$ نشان می‌دهد.

نتایج روش SOR با $\omega =$ ۱/۹

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	μ
۰	۰	۰	۰	—
۱	۶/۰۸	۴/۱۵۹۲۷	۷/۷۸۱۰۲	۷/۷۸۱
۲	−۹/۸۴۲۸۸	−۰/۹۹۰۳۹۵	−۶/۸۹۷۸۱	۱۵/۹۲
۳	۲۳/۱۷۸۵	۶/۸۱۲۵۶	۲۴/۲۸۱۲	۳۳/۰۲
۴	−۴۵/۰۵	−۶/۵۰۹۵۴	−۴۲/۸۲۹۴	۶۸/۲۳
۵	۹۷/۹۶۲۲	۱۸/۵۸۰۶	۱۰۱/۵۱۸	۱۴۴/۳
۶	−۲۰۴/۸۷۸	−۳۱/۴۶۶۴	−۲۰۸/۵۰۹	۳۱۰/۰
۷	۴۴۰/۱۲۸	۷۱/۴۳۵۶	۴۵۶/۷۶۴	۶۶۵/۳

مشخص است که دنباله جواب‌های $\{x_1^{(k)}\}$, $\{x_2^{(k)}\}$, $\{x_3^{(k)}\}$ واگرا می‌باشند بخصوص به ستون آخر جدول توجه کنید! مقدار μ که می‌بایست در شرط توقف $\mu \leq 5 \times 10^{-5}$ در حال افزایش است و این یعنی اختلاف هر دو جمله متوالی از $x_i^{(k+1)}$, $x_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$ با افزایش k در حال زیاد شدن است در نتیجه $\omega = 1/9$ اصلا نمی‌تواند انتخاب مناسبی باشد.

۱۱.۱ روش SOR برای دستگاه $n \times n$

اکنون آماده‌ایم تا روش SOR را در حالتی که دستگاه $n \times n$ است بیان کنیم. برای اینکار از فرم فشرده روش گاوس‌ـ‌سایدل استفاده می‌کنیم. فرم فشرده روش گاوس‌ـ‌سایدل را درنظر بگیرید:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \tag{10}$$

چون

$$\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k)} \tag{11}$$

پس با قرار دادن (۱۱) در (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} =& \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ =& x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \tag{12}$$

چنانچه در بحث محک‌های توقف دیدیم هرگاه عبارت

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$$

یعنی اختلاف دو جمله متوالی به صفر میل کند روش همگراست و هرچه سریع‌تر به صفر میل کند روش سریع‌تر همگرا خواهد بود.

از طرفی طبق سمت چپ رابطه (۱۲) اختلاف دو جمله متوالی برابر

$$\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

می‌باشد و چنانچه این عبارت سریع‌تر کوچک شود باعث افزایش سرعت روش گاوس_سیدل می‌گردد. بنابراین اگر آن را در یک پارامتر مثبت ω ضرب کنیم ممکن است مقادیری برای ω یافت شوند که باعث شوند این اختلاف سریع‌تر کوچک شود.

$$\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right) \tag{۱۳}$$

حال با قرار دادن مقدار جدید (۱۳) در سمت راست (۱۲) داریم:

$$x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}=\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\quad 1\le i\le n$$

یا

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\quad 1\le i\le n.$$

براستی محدوده همگرایی ω چیست؟ و مهم‌تر از آن انتخاب پارامتر بهینه به چه صورت انجام می‌شود؟ در مطالب بعدی به همه سوالات فوق پاسخ خواهیم داد.

توجه ۳.۲

یک روش برای افزایش سرعت همگرایی روش ژاکوبی و در عین حال حفظ کردن خاصییت موازی سازی آن روش JOR است. علاقمندان برای دیدن روش JOR به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۲ فرم ماتریسی روش‌های تکراری

تا اینجای این فصل برای حل دستگاه معادلات خطی $AX=b$ ، ۳ روش معرفی شدند:

۱. روش ژاکوبی

۲. روش گاوس_سیدل

۳. روش SOR

همه‌ی این روش‌ها در هر تکرار خود تقریب‌هایی از درایه‌های $x_1,x_2,\cdots,x_n$ (فرض کنید $X=[x_1,\cdots,x_n]^T$ جواب دقیق دستگاه باشد) تعیین می‌کردند. این روش‌ها در صورت همگرایی در تعداد تکرارهای بی‌نهایت به جواب واقعی می‌رسند

$$x_i=\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

بعلاوه دیدیم که این روش به طور مستقیم با درایه‌های ماتریس A سر و کار داشته و خود ماتریس A درگیر محاسباتی نظیر ضرب و جمع نمی‌شود از این رو به این نسخه از این روش‌ها، روش‌های تکراری نقطه‌ای ($point\ iterative\ methods$) گفته می‌شود. فرم دیگری از این روش‌ها وجود دارد که آن را با نام فرم ماتریسی می‌شناسیم. برای آنالیز همگرایی روش‌های تکرار ذکر شده می‌توان هم از فرم نقطه‌ای و هم از فرم ماتریسی استفاده کرد که به طور معمول کار با فرم ماتریسی راحت‌تر می‌باشد.

۱.۲ فرم ماتریسی روش ژاکوبی

روش ژاکوبی(نقطه‌ای) را برای حالت 3×3 در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}] \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \end{cases} \tag{14}$$

حال ماتریس A را به صورت زیر می‌شکافیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{U}}$$

که D ماتریس قطری حاصل از قطر اصلی A، L قسمت پایین قطر A و U قسمت بالای قطر A می‌باشد.(توجه کنید L و U در اینجا با عامل‌های تجزیه LU ماتریس A متفاوت اند!) حال اگر تعریف کنیم

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

آنگاه داریم

$$DX^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k+1)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} \\ a_{33}x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

و

$$-(L+U)X^{(k)} + b = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \\ a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \\ b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \\ b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

با مقایسه (۱۴) ، (۱۵) و (۱۶) مشاهده می‌کنیم که (۱۴) را می‌توان از تساوی (۱۵)=(۱۶) به دست آورد یعنی (۱۴) معادل رابطه ماتریسی زیر است:

$$DX^{(k+1)} = -(L+U)X^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{17}$$

به (۱۷) فرم ماتریسی روش ژاکوبی گفته می‌شود که در آن D, L, U در بالا مشخص شده‌اند. با تعمیم استدلال بالا می‌توان دید که روش ژاکوبی برای هر دستگاه $n \times n$ به صورت (۱۷) است.

توجه کنید که در حالت $n \times n$ ، ماتریس‌های D, L, U زیر هستند:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

توجه: در برخی منابع به رابطه (۱۷) فرم ماتریسی_ برداری نیز گفته می شود.

حال به رابطه (۱۷) برمی‌گردیم:

$$DX^{(k+1)} = -(L+U)X^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \dots \tag{۱۸}$$

بر طبق این رابطه به ازای $k = 0$ بردار حدس اولیه

$$X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}]^T$$

را جایگذاری کرده و بدست می‌آوریم:

$$DX^{(1)} = -(L+U)X^{(0)} + b$$

که $X^{(1)}$ تقریب بعدی جواب است که به صورت زیر می‌باشد

$$X^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}]^T$$

حال با داشتن $X^{(1)}$ تقریب بعدی $X^{(2)}$ را از رابطه‌ی زیر بدست می‌آوریم

$$DX^{(2)} = -(L+U)X^{(1)} + b$$

و همینطور ادامه خواهیم داد. آن چیزی که بسیار مهم است این است که در روش ژاکوبی برای بدست آوردن تقریب $X^{(1)}$ می‌بایست دستگاه زیر را حل کنیم:

$$DX^{(1)} = b^{(0)}, \qquad b^{(0)} = -(L+U)X^{(0)} + b$$

خوشبختانه دستگاه $DX^{(1)} = b^{(0)}$ به سادگی قابل حل است زیرا ماتریس ضرایبش ماتریس قطری D است و ما قبلا متذکر شدیم که حل یک دستگاه قطری می‌تواند براحتی و بدون هیچ مشکلاتی حل گردد. همینطور برای محاسبه‌ی $X^{(2)}$ نیز نیاز است دستگاه قطری

$$DX^{(2)} = b^{(1)}, \quad b^{(1)} = -(L+U)X^{(1)} + b$$

حل گردد و الی آخر.

توجه: چون در عمل محاسبه‌ی D^{-1} براحتی انجام می‌پذیرد (قطر باید غیر صفر باشد) پس می‌توانیم رابطه‌ی تکراری (۱۸) را به صورت زیر نیز نوشت

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{۱۹}$$

مثال ۳.۸

دستگاه داده شده را با فرم ماتریس ژاکوبی حل کنید.

$$\begin{cases} ۶x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ = ۱۰ \\ ۴x_۱ + ۹x_۲ + x_۳ = ۲۵ \\ x_۱ + x_۲ - ۴x_۳ = -۹ \end{cases} \quad , \quad X^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

می‌توان دید که جواب دقیق به صورت $X = [۱, ۲, ۳]^T$ می‌باشد. حال ماتریس $-D^{-۱}(L+U)$ و بردار $D^{-۱}b$ را تشکیل می‌دهیم. داریم :

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۹ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۴ \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۵ \\ -۹ \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$L = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

از اینرو خواهیم داشت :

$$-D^{-۱}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۴}{۹} & ۰ & -\frac{۱}{۹} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix}$$

بعلاوه داریم :

$$D^{-۱}b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۵ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۹}{۴} \end{bmatrix}$$

بنابراین رابطه‌ی تکراری (۱۹) به صورت زیر خواهد بود :

$$X^{(k+۱)} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۴}{۹} & ۰ & -\frac{۱}{۹} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix} X^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۹}{۴} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

از اینرو به دست می آید (تمامی محاسبات در نرم افزار متلب با حساب ۱۶ رقمی اعشار انجام شده است هر چند برای راحتی کار محاسبات را با ۴ رقم بعد از اعشار نمایش داده ایم)

$$X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۴}{۹} & ۰ & -\frac{۱}{۹} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix} X^{(۰)} + \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۹}{۴} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۴}{۹} & ۰ & -\frac{۱}{۹} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۹}{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۲۵}{۹} \\ \frac{۹}{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix}$$

بعلاوه با قرار دادن $k = ۱$ در (۲۰) داریم :

$$X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} X^{(۱)} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۳۷۹۶ \\ ۱/۷۸۷۰ \\ ۳/۳۶۱۱ \end{bmatrix}$$

برای تکرار های بعدی داریم :

$$X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} X^{(۲)} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۳۷۹۶ \\ ۱/۷۸۷۰ \\ ۳/۳۶۱۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸۴۴۱ \\ ۱/۷۹۱۲ \\ ۳/۰۴۱۷ \end{bmatrix}$$

$$X^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۸۴۴۱ \\ ۱/۷۹۱۲ \\ ۳/۰۴۱۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹۵۱۳ \\ ۲/۰۶۴۶ \\ ۲/۹۰۸۸ \end{bmatrix}$$

$$X^{(۵)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۹۵۱۳ \\ ۲/۰۶۴۶ \\ ۲/۹۰۸۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۴۱۲ \\ ۲/۰۳۱۸ \\ ۳/۰۰۴۰ \end{bmatrix}$$

$$X^{(۶)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۰۴۱۲ \\ ۲/۰۳۱۸ \\ ۳/۰۰۴۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۴۰ \\ ۱/۹۸۱۳ \\ ۳/۰۱۸۲ \end{bmatrix}$$

$$X^{(۷)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۰۰۴۰ \\ ۱/۹۸۱۳ \\ ۳/۰۱۸۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۰۸ \\ ۱/۹۹۶۲ \\ ۲/۹۹۶۳ \end{bmatrix}$$

$$X^{(۸)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱۶۶۷ & -۰/۳۳۳۳ \\ -۰/۴۴۴۴ & ۰ & -۰/۱۱۱۱ \\ ۰/۲۵۰۰ & ۰/۲۵۰۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۹۹۰۸ \\ ۱/۹۹۶۲ \\ ۲/۹۹۶۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱/۶۶۶۷ \\ ۲/۷۷۷۸ \\ ۲/۲۵۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۶ \\ ۲/۰۰۴۵ \\ ۲/۹۹۶۸ \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که دنباله‌ی $\{X^{(k)}\}$ به جواب دقیق $X^* = [۱, ۲, ۳]^T$ همگراست.

تعریف ۳.۱

همانطور که در مثال قبل دیدیم ماتریس $-D^{-۱}(L+U)$ و بردار $D^{-۱}b$ در تمامی مراحل ثابت بوده و تکرار می‌شدند، از اینرو شایسته است برای آنها یک نام و نماد انتخاب کنیم

$$M_J = -D^{-۱}(L+U) \ , \ c_J = D^{-۱}b$$

به ماتریس M_J ماتریس تکرار روش ژاکوبی می‌گوییم.

توجه ۳.۳

چنانچه بعداً خواهیم دید ماتریس تکرار M_J نقش بسیار مهمی در همگرایی یا واگرایی و سرعت همگرایی روش ژاکوبی ایفا می کند.

دستورات متلب برای شکافت ماتریس

```
A=D+L+U
A=[7 1 2 2;5 18 6 3;-2 -6 10 -1;3 4 1 8]
A =
7 1 2 2
5 18 6 3
-2 -6 10 -1
3 4 1 8

L=tril(A,-1)
L =
0 0 0 0
5 0 0 0
-2 -6 0 0
3 4 1 0

U=triu(A,1)
U =
0 1 2 2
0 0 6 3
0 0 0 -1
0 0 0 0

D=diag(diag(A))
D =
7 0 0 0
0 18 0 0
0 0 10 0
0 0 0 8
```

کد متلب فرم ماتریسی روش ژاکوبی

```
clear all
clc
format short
A=[7 1 2 2;5 18 6 3;-2 -6 10 -1;3 4 1 8];
b=[23;71;12;46];
n=length(A);
L=tril (A, -1);
U=triu (A, 1);
D=diag(diag (A));
X0=zeros(n, 1);
MJ= -D\(L+U);
CJ=D\b;
k=0;
while 1>0
k=k+1;
X=MJ*X0+CJ;
u= norm (X-X0, inf);
if u<5e-3
break
else
```

```
X0=X;
end
end
```

۲.۲ فرم ماتریسی روش گاوس_سیدل

ابتدا روش گاوس_سیدل(نقطه ای) را در حالت 3×3 به یاد آورید.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}] \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

با انتقال جملات شامل تکرار $(k+1)$ به سمت چپ داریم

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{23}x_3^{(k)} \\ a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k+1)} = b_3 \end{cases}$$

معادلات بالا را می توان به صورت زیر نیز نمایش داد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

واضح است که طبق تعریف برای ماتریس های L و U و D داریم

$$L + D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین (۲۱) به صورت زیر نوشته می شود

$$(L+D)X^{(k+1)} = b - UX^{(k)}, \qquad k = 0, 1, \cdots \qquad (۲۲)$$

به رابطه ی (۲۲) فرم ماتریسی روش گاوس_سیدل برای دستگاه 3×3 بحث شده گفته می شود و بعلاوه می توان دید که برای هر دستگاه $n \times n$ نیز فرم ماتریسی روش گاوس_سیدل به شکل (۲۲) خواهد بود.

مطابق (۲۲) اگر $X^{(0)}$ در دسترس باشد باید $X^{(1)}$ از حل دستگاه

$$(L+D)X^{(1)} = b - UX^{(0)}$$

تعیین گردد. اگر تعریف کنیم

$$b^{(0)} = b - UX^{(0)}$$

سپس به دست می آوریم

$$(L+D)X^{(1)} = b^{(0)}$$

واضح است که ماتریس دستگاه بالا، پایین مثلثی است لذا $X^{(1)}$ را می توان با جایگذاری پیشرو محاسبه نمود. به همین دلیل به این نسخه از روش گاوس‌ـ‌سیدل، گاوس‌ـ‌سیدل پیشرو نیز می گویند. با محاسبه $X^{(1)}$ تقریب بعدی $X^{(2)}$ از حل دستگاه پایین مثلثی زیر به دست می آید

$$(L+D)X^{(2)} = b - UX^{(1)}$$
$$(L+D)X^{(2)} = b^{(1)}, \qquad b^{(1)} = b - UX^{(1)}$$

و همینطور می توان تکرار ها را ادامه داد.

توجه همانطور که ملاحظه گردید هر تکرار روش گاوس‌ـ‌سیدل با فرم ماتریسی نیاز به بکارگیری یک روش مستقیم(حل دستگاه پایین مثلثی با جایگذاری پیشرو) دارد.

با فرض اینکه $L+D$ وارون پذیر باشد از رابطه تکراری

$$(L+D)X^{(k+1)} = b - UX^{(k)}$$

می توان نوشت(ضرب رابطه بالا از چپ در $(L+D)^{-1}$)

$$(L+D)^{-1}(L+D)X^{(k+1)} = (L+D)^{-1}b - (L+D)^{-1}UX^{(k)}$$

یا

$$X^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}UX^{(k)} + (L+D)^{-1}b \tag{۲۳}$$

در رابطه (۲۳) اگر قرار دهیم

$$M_{GS} = -(L+D)^{-1}U, \qquad c_{GS} = (L+D)^{-1}b$$

آنگاه داریم

$$X^{(k+1)} = M_{GS}X^{(k)} + c_{GS}$$

به ماتریس M_{GS} ماتریس تکرار روش گاوس‌ـ‌سیدل گفته می شود و در مطالب بعدی خواهیم دید که نقش اساسی در همگرایی یا واگرایی این روش ایفا می نماید.

توجه ۳.۴

در عمل در محاسبه تکرارهای گاوس‌ـ‌سیدل از شکل ماتریسی (۲۳) استفاده نمی شود زیرا نیاز به محاسبه صریح $(L+D)^{-1}$ دارد. در واقع می توان از فرم ماتریسی (۲۲) استفاده نمود و همانطور که قبلا متذکر شدیم تنها لازم است

یک دستگاه پایین مثلثی از طریق جایگذاری پیشرو حل گردد.

مثال ۳.۹

دستگاه داده شده را با فرم ماتریسی گاوس_سیدل حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ & ۱ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$L = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

بنابراین از

$$(L+D)X^{(k+۱)} = b - UX^{(k)}$$

به ازای $k = ۰$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} X^{(۰)}$$

اگر $X^{(۰)} = [۰, ۰, ۰]^T$ فرض کنیم آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱^{(۱)} \\ x_۲^{(۱)} \\ x_۳^{(۱)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix}$$

با جایگذاری پیشرو داریم

$$x_۱^{(۱)} = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲۰۰۰$$

$$x_۲^{(۱)} = \frac{-۱۸ - x_۱^{(۱)}}{-۱۱} = \frac{-۱۸ - ۳/۲}{-۱۱} = ۱/۹۲۷۳$$

$$x_۳^{(۱)} = \frac{۲۷ + ۳x_۱^{(۱)} - ۳x_۲^{(۱)}}{۸} = \frac{۲۷ + ۳(۳/۲) - ۳(۱/۹۲۷۳)}{۸} = ۳/۸۵۲۳$$

لذا $X^{(۱)} = [۳/۲۰۰۰, ۱/۹۲۷۳, ۳/۸۵۲۳]^T$ به دست می آید. برای تقریب بعدی $X^{(۲)}$ داریم

$$(L+D)X^{(۲)} = b - UX^{(۱)}$$

یا

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱^{(۲)} \\ x_۲^{(۲)} \\ x_۳^{(۲)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۲۰۰۰ \\ ۱/۹۲۷۳ \\ ۳/۸۵۲۳ \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱^{(۲)} \\ x_۲^{(۲)} \\ x_۳^{(۲)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۵۱۵۹ \\ -۲۱/۸۵۲۳ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه پایین مثلثی فوق داریم

$$X^{(۲)} = \begin{bmatrix} x_۱^{(۲)} \\ x_۲^{(۲)} \\ x_۳^{(۲)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵۰۳۲ \\ ۲/۰۳۲۳ \\ ۲/۸۰۱۶ \end{bmatrix}$$

با ادامه این روند داریم

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۵/۵۶۳۰ \\ -۲۰/۸۰۱۶ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۱/۱۱۲۶ \\ ۱/۹۹۲۲ \\ ۳/۰۴۵۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۴/۸۷۲۴ \\ -۲۱/۰۴۵۱ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۰/۹۷۴۵ \\ ۲/۰۰۱۸ \\ ۲/۹۸۹۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۵)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۲۸۹ \\ -۲۰/۹۸۹۸ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۵)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۵۸ \\ ۱/۹۹۹۶ \\ ۳/۰۰۲۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۶)} = \begin{bmatrix} ۴/۹۹۳۴ \\ -۲۱/۰۰۲۳ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۶)} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۸۷ \\ ۲/۰۰۰۱ \\ ۲/۹۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۷)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۰۱۵ \\ -۲۰/۹۹۹۵ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۷)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۳ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۸)} = \begin{bmatrix} ۴/۹۹۹۷ \\ -۲۱/۰۰۰۱ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۸)} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۹۹ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۹)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۱ \\ -۲۱/۰۰۰۰ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۹)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱۱ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} X^{(۱۰)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ \\ -۲۱/۰۰۰۰ \\ ۲۷/۰۰۰۰ \end{bmatrix} \rightarrow X^{(۱۰)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که دنباله تکرار های روش گاوس‌ـ‌سیدل به جواب دقیق $X^* = [۱, ۲, ۳]^T$ همگرا است.
کد متلب فرم ماتریسی روش گاوس‌ـ‌سیدل

```
clear all
clc;
format short
A=[5 1 3;1 -11 1;-3 3 8];
b=[16;-18;27];
n=length(A);
X0=zeros(n,1);
D=diag(diag(A));
L=tril(A,-1);
U=triu(A,1);
Iteration=10;
for k=1:Iteration
Xgs=(-(D+L)\U)*X0+((D+L)\b);
X0=Xgs;
end
```

۳.۲ فرم ماتریسی روش SOR

با عملیاتی مشابه آنچه در مورد روش گاوس_سیدل انجام دادیم می توان نشان داد که فرم ماتریسی روش SOR به صورت زیر است

$$(D+\omega L)X^{(k+1)} = -((\omega-1)D+\omega U)X^{(k)} + \omega b \tag{۲۴}$$

با توجه به رابطه فوق ω هر چه باشد ماتریس $D+\omega L$ ماتریسی پایین مثلثی است لذا در هر تکرار روش SOR نیاز به حل یک دستگاه پایین مثلثی خواهد بود. با فرض اینکه $D+\omega L$ وارون پذیر باشد آنگاه رابطه تکراری (۲۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$X^{(k+1)} = -(D+\omega L)^{-1}((\omega-1)D+\omega U)X^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}b$$

بنابراین با تعریف

$$M_{SOR} = -(D+\omega L)^{-1}((\omega-1)D+\omega U), \qquad c_{SOR} = \omega(D+\omega L)^{-1}b$$

داریم

$$X^{(k+1)} = M_{SOR}X^{(k)} + c_{SOR}$$

توجه کنید که M_{SOR} ماتریس تکرار روش SOR خواهد بود.

توجه ۳.۵

به این شکل از رابطه تکراری SOR، SOR پیشرو می گوییم و اگر نقش ماتریس های L و U را عوض کنیم آنگاه SOR پسرو به صورت زیر حاصل می شود

$$(D+\omega U)X^{(k+1)} = -((\omega-1)D+\omega L)X^{(k)} + \omega b \tag{۲۵}$$

واضح است که در (۲۵) برای بدست آوردن تکرار جدید $X^{(k+1)}$ نیاز به حل یک دستگاه بالامثلثی با جایگذاری پسرو داریم از این رو اغلب به رابطه تکراری (۲۵) روش SOR پسرو نیز می گوییم.

توجه ۳.۶

در بیشتر کتب جبرخطی عددی منظور از روش SOR همان SOR پیشرو است.

مثال ۳.۱۰

دستگاه داده شده را به ازای $\omega = ۰/۹$ و با روش SOR (پیشرو) حل کنید.

$$\begin{cases} ۵x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ = ۱۶ \\ x_۱ - ۱۱x_۲ + x_۳ = -۱۸ \\ -۳x_۱ + ۳x_۲ + ۸x_۳ = ۲۷ \end{cases}$$

حل: داریم

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ & ۱ \\ -۳ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۸ \\ ۲۷ \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

بنابراین طبق رابطه تکراری SOR یعنی

$$(D+\omega L)X^{(k+۱)} = -((\omega-۱)D+\omega U)X^{(k)} + \omega b, \qquad k = ۰, ۱, \cdots$$

داریم $(\omega = ۰/۹)$

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(k+۱)} = \begin{bmatrix} ۰/۵۰۰۰ & -۰/۹۰۰۰ & -۲/۷۰۰۰ \\ ۰ & -۱/۱۰۰۰ & -۰/۹۰۰۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۸۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(k)} + \begin{bmatrix} ۱۴/۴۰۰۰ \\ -۱۶/۲۰۰۰ \\ ۲۴/۳۰۰۰ \end{bmatrix}$$

اگر حدس اولیه $X^{(۰)} = [۰, ۰, ۰]^T$ باشد آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱۴/۴۰۰۰ \\ -۱۶/۲۰۰۰ \\ ۲۴/۳۰۰۰ \end{bmatrix}$$

که از حل با جایگذاری پیشرو داریم

$$X^{(۱)} = [۲/۸۸۰۰, ۱/۷۰۸۴, ۳/۴۳۲۹]^T$$

در تکرار های بعدی داریم

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۳۳۶ \\ -۲۱/۱۶۸۸ \\ ۲۷/۰۴۶۳ \end{bmatrix} \to X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۶۷ \\ ۲/۰۰۶۸ \\ ۳/۰۴۳۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۴/۸۸۰۴ \\ -۲۱/۱۴۶۴ \\ ۲۶/۷۳۴۶ \end{bmatrix} \to X^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۰/۹۷۶۱ \\ ۲/۰۰۲۳ \\ ۲/۹۹۵۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۴/۹۹۸۲ \\ -۲۱/۰۹۸۴ \\ ۲۶/۶۹۶۴ \end{bmatrix} \to X^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۹۶ \\ ۱/۹۹۹۸ \\ ۲/۹۹۵۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۵)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۰۱۴ \\ -۲۱/۰۹۹۳ \\ ۲۶/۶۹۹۶ \end{bmatrix} \to X^{(۵)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۳ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰/۹۰۰۰ & -۱۱/۰۰۰ & ۰ \\ -۲/۷۰۰۰ & ۲/۷۰۰۰ & ۸/۰۰۰۰ \end{bmatrix} X^{(۶)} = \begin{bmatrix} ۵/۰۰۰۰ \\ -۲۱/۱۰۰۰ \\ ۲۶/۷۰۰۰ \end{bmatrix} \to X^{(۶)} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که تکرار های SOR خیلی سریع تر از روش گاوس_سیدل (مثال حل شده با روش_ گاوس سیدل را ببینید) به جواب دقیق دستگاه همگرایند.

تمرین ۳.۲

دستگاه داده شده را با روش SOR پسرو و با $\omega = ۰/۷$ حل کنید.

کد متلب فرم ماتریسی روش SOR

```
clear all clc:
format short
A=[5 1 3:1-11 1:-3 3 8];
b=[16:-18:27];
n=length(A): X0=zeros(n.1);
D=diag(diag(A)):
L-tril(A,-1);
U=triu(A,1);
Iteration=10;
w=0.9;
for k=1:Iteration
Xsor=(-(D+w*L) \((w-1)*D+w*U))*X0+w*(((D+w*L))\b);
X0=Xsor;
end
```

۳ آنالیز همگرایی روش های تکراری

مثال ۳.۱۱

سرعت صعود یک موشک در سه زمان مختلف داده شده است.

سرعت،v	زمان،t
m/s	s
۱۰۶/۸	۵
۱۷۷/۲	۸
۲۷۹/۲	۱۲

هدف تقریب داده های سرعت با یک چند جمله ای درجه دوم است

$$v(t) = x_1 t^2 + x_2 t + x_3, \quad 5 \leq t \leq 12$$

می توان نوشت

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات روبه‌رو به ساخته می‌شود: $\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106/8 \\ 177/2 \\ 279/2 \end{bmatrix}$

یا

$$\begin{cases} 25x_1 + 5x_2 + x_3 = 106/8 \\ 64x_1 + 8x_2 + x_3 = 177/2 \\ 144x_1 + 12x_2 + x_3 = 279/2 \end{cases}$$

حل:

فرض کنید هدف حل دستگاه با روش گاوس_سیدل است. حدس اولیه: فرض کنید $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

داریم

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106/8 \\ 177/2 \\ 279/2 \end{bmatrix} \to \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{106/8 - 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{25} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{177/2 - 64x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{8} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{279/2 - 144x_1^{(k+1)} - 12x_2^{(k+1)}}{1} \end{aligned}$$

حدس اولیه را اعمال کرده و به دست می‌آوریم:

$$x_{۱}^{(۱)} = \frac{۱۰۶/۸ - ۵(۲) - (۵)}{۲۵} = ۳/۶۷۲۰,$$
$$x_{۲}^{(۱)} = \frac{۱۷۷/۲ - ۶۴(۳/۶۷۲۰) - (۵)}{۸} = -۷/۸۵۱۰$$
$$x_{۳}^{(۱)} = \frac{۲۷۹/۲ - ۱۴۴(۳/۶۷۲۰) - ۱۲(-۷/۸۵۱۰)}{۱} = -۱۵۵/۳۶$$

یافتن خطای نسبی:

$$|e_x|_i = \left|\frac{x_i^{(k+۱)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+۱)}}\right| \times ۱۰۰$$
$$|e_x|_۱ = \left|\frac{۳/۶۷۲۰ - ۱/۰۰۰۰}{۳/۶۷۲۰}\right| \times ۱۰۰ = ۷۲/۷۶\%$$
$$|e_x|_۲ = \left|\frac{-۷/۸۵۱۰ - ۲/۰۰۰۰}{-۷/۸۵۱۰}\right| \times ۱۰۰ = ۱۲۵/۴۷\%$$
$$|e_x|_۳ = \left|\frac{-۱۵۵/۳۶ - ۵/۰۰۰۰}{-۱۵۵/۳۶}\right| \times ۱۰۰ = ۱۰۳/۲۲\%$$

و پس از اولین تکرار خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_۱^{(۱)} \\ x_۲^{(۱)} \\ x_۳^{(۱)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۶۷۲۰ \\ -۷/۸۵۱۰ \\ -۱۵۵/۳۶ \end{bmatrix}$$

و ماکزیمم خطای نسبی ٪۱۲۵/۴۷ است.
در تکرار دوم داریم:

$$\begin{bmatrix} x_۱^{(۱)} \\ x_۲^{(۱)} \\ x_۳^{(۱)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۶۷۲۰ \\ -۷/۸۵۱۰ \\ -۱۵۵/۳۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_۱^{(۲)} = \dfrac{۱۰۶/۸ - ۵(-۷/۸۵۱۰) + ۱۵۵/۳۶}{۲۵} = ۱۲/۰۵۶ \\ x_۲^{(۲)} = \dfrac{۱۷۷/۲ - ۶۴(۱۲/۰۵۶) + ۱۵۵/۳۶}{۸} = -۵۴/۸۸۲ \\ x_۳^{(۲)} = \dfrac{۲۷۹/۲ - ۱۴۴(۱۲/۰۵۶) - ۱۲(-۵۴/۸۸۲)}{۱} = -۷۹۸/۳۴ \end{cases}$$

خطا نسبی را می‌یابیم:

$$|e_x|_۱ = \left|\frac{۱۲/۰۵۶ - ۳/۶۷۲۰}{۱۲/۰۵۶}\right| \times ۱۰۰ = ۶۹/۵۴۲\%$$
$$|e_x|_۲ = \left|\frac{-۵۴/۸۸۲ - (-۷/۸۵۱۰)}{-۵۴/۸۸۲}\right| \times ۱۰۰ = ۸۵/۶۹۵\%$$
$$|e_x|_۳ = \left|\frac{-۷۹۸/۳۴ - (-۱۵۵/۳۶)}{-۷۹۸/۳۴}\right| \times ۱۰۰ = ۸۰/۵۴\%$$

در پایان تکرار دوم داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/056 \\ -54/882 \\ -798/34 \end{bmatrix}$$

ماکزیمم خطا ٪۸۵/۶۹۵ است.
گزارش باقی تکرارها در جدول زیر آمده است:

تکرار	$x_1^{(k)}$	$\|e_x\|_1$ ٪	$x_2^{(k)}$	$\|e_x\|_2$ ٪	$x_3^{(k)}$	$\|e_x\|_3$ ٪
۱	۳/۶۷۲	۷۲/۷۶۷	−۷/۸۵۱۰	۱۲۵/۴۷	−۱۵۵/۳۶	۱۰۳/۲۲
۲	۱۲/۰۵۶	۶۷/۵۴۲	−۵۴/۸۸۲	۸۵/۶۹۵	−۷۹۸/۳۴	۸۰/۵۴۰
۳	۴۷/۱۸۲	۷۴/۴۴۸	−۲۵۵/۵۱	۷۸/۵۲۱	−۳۴۴۸/۹	۷۶/۸۵۲
۴	۱۹۳/۳۳	۷۵/۵۹۵	−۱۰۹۳/۴	۷۶/۶۳۲	−۱۴۴۴۰	۷۶/۱۱۶
۵	۸۰۰/۵۳	۷۵/۸۵۰	−۴۵۷۷/۲	۷۶/۱۱۲	−۶۰۰۷۲	۷۵/۹۶۲
۶	۳۳۲۲/۶	۷۵/۹۰۷	−۱۹۰۴۹	۷۵/۹۷۱	−۲۴۹۵۸۰	۷۵/۹۳۱

توجه ۳.۷

جدول فوق نشان می دهد که خطاهای نسبی به هیچ وجه کاهش نمی‌یابند، همچنین روش به جواب واقعی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/29048 \\ 19/690 \\ 1/0858 \end{bmatrix}$$

همگرا نمی‌شود. توجه کنید که حداقل نتایج عددی جدول نشان می دهند که روند همگرایی رخ نداده است. قطعا برای بحث دقیق می بایست از لحاظ تئوری بحث همگرایی یا واگرایی را مشخص کنیم که هدف از این قسمت پرداختن به این موضوع است.

به طور کلی هر روش تکراری برای حل دستگاه را می توان به صورت

$$X^{(k+1)} = MX^{(k)} + c \tag{26}$$

نوشت که M را ماتریس تکرار می‌نامیم (البته این موضوع برای همه روش های تکراری درست نیست. مثلا روشی به نام روش گرادیان معرفی خواهیم کرد که به این صورت نیست). مثلا دیدیم که روش تکراری ژاکوبی را می‌توان به صورت

$$X^{(k+1)} = M_J X^{(k)} + c_J$$

نوشت که در آن

$$M_J = -D^{-1}(L+U), \quad c_J = D^{-1}b$$

بعلاوه روش‌هایی چون گاوس_سیدل و SOR را نیز می‌توان از نوع (۲۶) در نظر گرفت. پس کافی است همگرایی یک رابطه تکراری کلی مثل (۲۶) را بررسی کنیم. ابتدا فرض کنید X^* جواب دقیق $AX = b$ باشد پس X^* باید در (۲۶) نیز صدق کند یعنی

$$X^* = MX^* + c \tag{27}$$

با کم کردن (۲۷) از (۲۶) داریم:

$$X^{(k+1)} - X^* = (MX^{(k)} + c) - (MX^* + c) = MX^{(k)} - MX^* = M(X^{(k)} - X^*) \qquad (۲۸)$$

اگر خطا در مرحله‌ی kام را با $e^{(k)} = X^{(k)} - X^*$ تعریف کنیم آنگاه $e^{(k+1)} = X^{(k+1)} - X^*$ و از رابطه‌ی (۲۸) داریم

$$X^{(k+1)} - X^* = M\left(X^{(k)} - X^*\right) \Rightarrow e^{(k+1)} = Me^{(k)} \qquad (۲۹)$$

از رابطه (۲۹) داریم

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= Me^{(k)} = M\left(Me^{(k-1)}\right) = M^{2}e^{(k-1)} = M^{2}\left(Me^{(k-2)}\right) = M^{3}e^{(k-2)} \\ &= \cdots = M^{k+1}e^{(0)} \Rightarrow e^{(k+1)} = M^{k+1}e^{(0)} \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

به طوری که $e^{(0)} = X^{(0)} - X^*$ و $X^{(0)}$ حدس اولیه است.
برای اینکه دنباله تقریب‌های $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ همگرا باشد لازم است که با افزایش k خطا به سمت صفر میل کند یعنی

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k+1)} = 0 \qquad (۳۱)$$

که منظور از 0 بردار صفر است. با قرار دادن (۳۰) در (۳۱) داریم

$$\lim_{k\to\infty} M^{k+1}e^{(0)} = 0 \qquad (۳۲)$$

دو حالت زیر را در نظر بگیرید:
حالت اول: $e^{(0)} = 0$ ، یعنی اینکه $X^{(0)} = X^*$ و این یعنی حدس اولیه را برابر با جواب دقیق X^* فرض کنیم(توجه کنید چنین حالتی در عمل به ندرت می‌تواند پیش می آید) آنگاه (۳۲) برای هر k برقرار است و درواقع چیزی برای اثبات نداریم.
حالت دوم: $e^{(0)} \neq 0$. در این صورت یک راه برای تحقق (۳۲) این است که

$$\lim_{k\to\infty} M^{k+1} = 0 \qquad (\text{ماتریس صفر}) \qquad (۳۳)$$

در این صورت همواره (۳۲) برقرار بوده و دنباله $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ همگرا خواهد بود.
اما ماتریس تکرار M در چه شرایطی صدق نماید تا (۳۳) برقرار باشد؟! قبلا دیدیم که یک ماتریس B را همگرا گوییم هر گاه

$$\lim_{k\to\infty} B^{k} = 0 \qquad (\text{ماتریس صفر}) \qquad (۳۴)$$

پس می‌توان گفت اگر M ماتریسی همگرا باشد آنگاه حتما (۳۳) برقرار است. اما قبلاً دیدیم که:

$$\text{ماتریس } B \text{ همگراست} \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

بنابراین یک شرط لازم و کافی برای همگرایی دنباله $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

قضیه ۳.۱

شرط لازم و کافی:
روش تکراری $X^{(k+1)} = MX^{(k)} + c$ همگراست $\Longleftrightarrow \rho(M) < ۱$

اثبات: به کتاب زیر مراجعه نمایید
W. Ford, Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB, Elsevier, 2015.
چون محاسبه‌ی شعاع طیفی یک ماتریس در عمل امکان‌پذیر نیست لذا شاید قضیه‌ی فوق برای وقتی که ابعاد دستگاه بسیار بزرگ است نتواند قابل به کار گیری باشد لذا ممکن است بخواهیم از قضیه‌ی زیر کمک بگیریم:

قضیه ۳.۲

شرط کافی:
روش تکراری $X^{(k+1)} = MX^{(k)}+c$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\|.\|$ یک نرم ماتریسی سازگار باشد. اگر $\|M\| < ۱$ آنگاه این روش تکراری همگراست.

اثبات: دیدیم که $e^{(\circ)} = X^{(\circ)} - X^*$ و $e^{(k+1)} = M^{k+1}e^{(\circ)}$ جایی که X^* جواب دقیق دستگاه $AX = b$ است. از رابطه فوق داریم:

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| = \left\|M^{k+1}e^{(\circ)}\right\| \leq \left\|M^{k+1}\right\| \cdot \left\|e^{(\circ)}\right\| \leq \|M\|^{k+1} \left\|e^{(\circ)}\right\|$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left\|e^{(k+1)}\right\| \leq \left(\lim_{k\to\infty} \|M\|^{k+1}\right) \cdot \left\|e^{(\circ)}\right\|$$

چون $\|M\| < ۱$ پس $\lim_{k\to\infty} \|M\|^{k+1} = \circ$ و این نشان می‌دهد که می‌بایست

$$\lim_{k\to\infty} \left\|e^{(k+1)}\right\| \leq \circ \times \left\|e^{(\circ)}\right\| = \circ$$

یا به عبارتی باید

$$\lim_{k\to\infty} \left\|e^{(k+1)}\right\| = \circ \Rightarrow \lim_{k\to\infty} e^{(k+1)} = \circ \tag{۳۵}$$

توجه کنید از خاصیت اول نرم ($\|X\| = \circ \Leftrightarrow X = \circ$) و پیوسته بودن نرم استفاده شده است. از طرفی $e^{(k+1)} = X^{(k+1)} - X^*$ پس (۳۵) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{k\to\infty} \left(X^{(k+1)} - X^*\right) = \circ \Rightarrow \lim_{k\to\infty} X^{(k+1)} - \lim_{k\to\infty} X^* = \circ$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k+1)} = X^*$$

و این نشان می‌دهد که دنباله $\{X^{(k)}\}_{k=\circ}^{\infty}$ به X^* همگرا خواهد بود و اثبات تمام است.

توجه ۳.۸

در قضیه شرط کافی، برای راحتی کار از نرم ۱ یا نرم بینهایت می‌توان استفاده نمود (زیرا مثلا $\|A^k\|_۱ \leq \|A\|_۱^k$) یعنی اگر هر یک از شرایط $\|M\|_\infty < ۱$ یا $\|M\|_۱ < ۱$ برقرار باشد آنگاه روش تکراری $X^{(k+1)} = MX^{(k)} + c$ همگرا خواهد بود.

تذکر ۳.۱

قضیه شرط لازم و کافی شرط لازم و کافی برای همگرایی را ارائه می‌دهد در صورتی که قضیه شرط کافی، تنها شرط کافی را ارائه می‌دهد. بنابراین ممکن است برای یک روش تکراری شرط $\|M\| < ۱$ برقرار نباشد اما روش همگرا باشد.

توجه ۳.۹

یک روش همگرا برای هر حدس اولیه $X^{(۰)}$ همگراست لذا $X^{(۰)}$ تاثیری در همگرایی یا واگرایی ندارد.

مثال ۳.۱۲

دستگاه زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۶}{۵} \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

همگرایی روش های ژاکوبی و گاوس_سیدل را بررسی نمایید.

حل: همگرایی روش ژاکوبی: داریم

$$M_J = -D^{-۱}(L+U) = -\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۶}{۵} \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۶}{۵} \\ -\frac{۲}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\|M_J\|_۱ = \frac{۶}{۵} > ۱, \quad \|M_J\|_\infty = \frac{۶}{۵} > ۱$$

بعلاوه خواهیم دید که

$$M_J M_J^T = \begin{bmatrix} \frac{۳۶}{۲۵} & ۰ \\ ۰ & \frac{۴}{۹} \end{bmatrix} \to \lambda\left(M_J M_J^T\right) = \left\{\frac{۳۶}{۲۵}, \frac{۴}{۹}\right\}$$

پس $\rho\left(M_J M_J^T\right) = \frac{۳۶}{۲۵}$ لذا

$$\|M_J\|_۲ = \sqrt{\rho\left(M_J M_J^T\right)} = \sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}} = \frac{۶}{۵} > ۱$$

لذا قضیه شرط کافی هیچ اطلاعاتی از همگرایی روش ژاکوبی نمی‌دهد. برای استفاده از قضیه شرط لازم و کافی می‌بایست شعاع طیفی M_J را محاسبه می‌کنیم. اما چندجمله‌ای ویژه M_J به صورت زیر است:

$$P_{M_J}(\lambda) = \lambda^۲ + \frac{۴}{۵} \Rightarrow \lambda\left(M_J\right) = \left\{\frac{۲}{\sqrt{۵}}i, \quad -\frac{۲}{\sqrt{۵}}i\right\}$$

پس $\rho\left(M_J\right)=\frac{۲}{\sqrt{۵}}<۱$ و لذا روش ژاکوبی طبق قضیه شرط لازم و کافی همگراست.
همگرایی روش گاوس_سیدل: داریم

$$M_{GS}=-(L+D)^{-۱}U=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۶}{۵} \\ ۰ & -\frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

واضح است که

$$\|M_{GS}\|_۱=۲>۱,\quad \|M_{GS}\|_\infty=\frac{۶}{۵}>۱,\quad \|M_{GS}\|_۲=۱/۴۴۲۲>۱ \qquad (۳۶)$$

لذا طبق قضیه شرط کافی، نمی‌توانیم تصمیمی درمورد همگرایی یا واگرایی روش گاوس_سیدل بگیریم از طرفی

$$\lambda\left(M_{GS}\right)=\left\{۰,-\frac{۴}{۵}\right\}\rightarrow\rho\left(M_{GS}\right)=\frac{۴}{۵}<۱$$

و لذا طبق قضیه شرط لازم و کافی روش گاوس_سیدل همگراست.

توجه ۳.۱۰

همان‌طور که می‌بینید اگرچه به کار گیری قضیه شرط کافی نسبتاً ساده می‌باشد اما در خیلی از مواقع نمی توانیم تصمیمی درمورد همگرایی یک روش تکراری بر پایه‌ی اطلاعات این قضیه بگیریم.

مثال ۳.۱۳

دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۶ & ۹ \\ ۴ & ۵ & -۴ \\ -۷ & -۳ & ۸ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۴۴ \\ ۱۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

همگرایی روش ژاکوبی را بررسی کنید

حل: داریم

$$L=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ -۷ & -۳ & ۰ \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} ۰ & ۶ & ۹ \\ ۰ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

حال ماتریس تکرار روش ژاکوبی را به دست می‌آوریم

$$M_J=-D^{-۱}(L+U)=\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۶}{۷} & -\frac{۹}{۷} \\ -\frac{۴}{۵} & ۰ & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۷}{۸} & \frac{۳}{۸} & ۰ \end{bmatrix}$$

داریم

$$\|M_J\|_1 = \frac{73}{35} > 1, \qquad \|M_J\|_\infty = \frac{15}{7} > 1$$

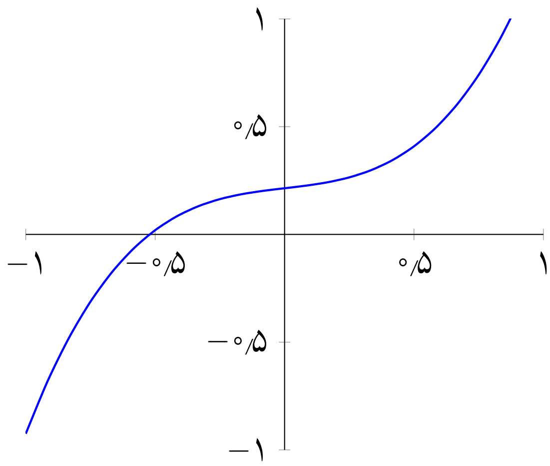
لذا قضیه شرط کافی، اطلاعات مفیدی نمی‌تواند بدهد. بعلاوه می‌توان دید که $\|M_J\|_2 = 1/7337 > 1$ (هرچند استفاده از $\|.\|_2$ در ابعاد بالا امکان‌پذیر نیست).
اکنون شعاع طیفی ماتریس M_J را محاسبه می‌کنیم. ابتدا چندجمله‌ای ویژه M_J را محاسبه می‌کنیم

$$P_{M_J}(\lambda) = \lambda^3 + \frac{39}{280}\lambda + \frac{3}{14}$$

می‌بایست ریشه‌های چند جمله ای درجه سوم فوق را محاسبه کنیم. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ریشه‌های P_{M_J} باشد آنگاه شعاع طیفی ماتریس تکرار M_J برابر است با

$$\rho(M_J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$$

شکل زیر موقعیت ریشه‌های P_{M_J} را نشان می‌دهد.



درواقع می‌توان دید که چندجمله‌ای درجه سوم فوق تنها یک ریشه‌ی حقیقی دارد و دو ریشه‌ی دیگر آن مختلط مقدار هستند. ریشه‌های این چندجمله‌ای به صورت زیرند(در ادامه نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها را بیان خواهیم کرد).

$$\lambda_1 = -0/5213, \quad \lambda_{2,3} = 0/2607 \pm 0/5858i$$

بنابراین

$$|\lambda_1| = 0/5213, \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{(0/2607)^2 + (0/5858)^2} = 0/6411$$

بنابراین

$$\rho(M_J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{0/5213, 0/6411\} = 0/6411$$

این نشان می‌دهد که $\rho(M_J) = 0/6411 < 1$ پس روش ژاکوبی برای این دستگاه همگراست.

مثال ۳.۱۴

دستگاه $AX = b$ را با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. داریم:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جدول زیر نرم های ۱ و ۲ و بینهایت ماتریس تکرار را برای هر روش نشان می‌دهد. همانطور که می بینید برای هر روش حداقل یک نرم وجود دارد که نرم ماتریس تکرار کمتر از ۱ باشد پس همگرایی برای آن روش تضمین شده است. برای روش SOR مقدار $\omega = 1/2$ استفاده شده است. در مورد نتایج این جدول بحث کنید.

Method	M	$\|M\|_1$	$\|M\|_\infty$	$\|M\|_2$
Jacobi	$\begin{bmatrix} 0 & 0/2000 & -0/4000 \\ 0/2500 & 0 & -0/2500 \\ 0/1429 & 0/8571 & 0 \end{bmatrix}$	۱/۰۵۷۱	۱/۰۰۰۰	۰/۸۹۹۷
Gauss-Seidel	$\begin{bmatrix} 0 & 0/2000 & -0/4000 \\ 0 & 0/0500 & -0/3500 \\ 0 & 0/0714 & -0/3571 \end{bmatrix}$	۱/۱۰۷۱	۰/۶۰۰۰	۰/۶۶۹۲
$SOR(\omega = 1/2)$	$\begin{bmatrix} -0/2000 & 0/2400 & -0/4800 \\ -0/0600 & -0/1280 & -0/4440 \\ -0/0960 & -0/0905 & -0/7390 \end{bmatrix}$	۱/۶۶۳۰	۰/۹۲۵۵	۱/۰۰۶۳

- اما روش‌های تکراری که در این فصل مورد بررسی قرار گرفتند چه وقت همیشه همگرایند؟

۴ همگرایی روش ژاکوبی

۱.۴ همگرایی روش ژاکوبی برای ماتریس های قطر غالب

قضیه ۳.۳

اگر ماتریس A غالب قطر سطری اکید باشد آنگاه روش ژاکوبی برای هر حدس اولیه $X^{(0)}$ همگراست.

اثبات: ماتریس تکرار روش ژاکوبی به صورت زیر است:

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_{11}} & & & 0 \\ & -\frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

یا

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

تو جه کنید چون ماتریس داده شده غالب قطری سطری اکید است پس اعضای قطر ان غیر صفرند لذا محا سبات بالا بدرستی انجام شده است. بنابراین

$$\|M_J\|_\infty = \max\Big\{\frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\dots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|+|a_{23}|+\dots+|a_{2n}|}{|a_{22}|}, \dots, \frac{|a_{n1}|+|a_{n2}|+\dots+|a_{n,n-1}|}{|a_{nn}|}\Big\} \tag{37}$$

چون A غالب قطر سطری اکید است پس طبق تعریف باید

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}|+|a_{13}|+\dots+|a_{1n}| \\ |a_{22}| > |a_{21}|+|a_{23}|+\dots+|a_{2n}| \\ \vdots \\ |a_{nn}| > |a_{n1}|+|a_{n2}|+\dots+|a_{n,n-1}| \end{cases} \tag{38}$$

طبق معادلات (۳۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\dots+|a_{1n}|}{|a_{11}|} < 1 \\ \frac{|a_{21}|+|a_{23}|+\dots+|a_{2n}|}{|a_{22}|} < 1 \\ \vdots \\ \frac{|a_{n1}|+|a_{n2}|+\dots+|a_{n,n-1}|}{|a_{nn}|} < 1 \end{cases} \tag{39}$$

طبق معادلات (۳۹) همه جمله‌ها در (۳۷) کمتر از یک خواهند بود، بنابراین ماکزیمم آن‌ها نیز کمتر از یک خواهد بود. لذا $\|M_J\|_\infty < ۱$. چون یک نرم سازگار یافته‌ایم که به ازای آن نرم، نرم ماتریس تکرار روش ژاکوبی کمتر از یک شده است پس طبق قضیه شرط کافی، روش ژاکوبی همگرا خواهد بود و اثبات تمام است.

تذکر ۳.۲

ممکن است یک ماتریس وجود داشته باشد که غالب قطر سطری اکید نباشد اما روش ژاکوبی همگرا باشد.

مثال ۳.۱۵

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۶}{۵} \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

واضح است که A غالب قطری سطری اکید نیست زیرا $\frac{۶}{۵} > ۱$ اما قبلاً دیدیم که برای این ماتریس $\rho(M_J) = \frac{۲}{\sqrt{۵}} < ۱$ و لذا A غالب قطر سطری اکید نمی‌باشد اما روش ژاکوبی همگراست.

توجه ۳.۱۱

علاقمندان برای دیدن همگرایی روش ژاکوبی برای ماتریس های قطر غالب ستونی به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

تمرین ۳.۳

آیا ماتریس A وجود دارد که غالب قطری نباشد(چه سطری و چه ستونی) اما روش ژاکوبی برای دستگاه $AX = b$ همگرا باشد؟

همان‌طور که دیدیم روش ژاکوبی برای دسته‌ای بزرگ از ماتریس‌ها چون غالب قطری بدون هیچ قید و شرط دیگری همگراست و چون این ماتریس‌ها اغلب در حل مسائل واقعی و کاربردی به وجود می‌آیند این موضوع بسیار حائز اهمیت است. اما یک دسته دیگر از ماتریس‌ها که به وفور در بحث کاربردهای ریاضی در مسائل مختلف پدید می‌آیند ماتریس‌های متقارن معین مثبت می‌باشند. سوال این است که آیا روش ژاکوبی برای چنین ماتریس‌هایی همگراست؟ در پاسخ می‌بایست گفت همگرایی روش ژاکوبی تنها برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت ۲×۲ تضمین شده است.

۲.۴ همگرایی روش ژاکوبی برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت ۲×۲

قضیه ۳.۴

فرض کنید A ماتریسی متقارن معین مثبت ۲×۲ باشد. آنگاه روش ژاکوبی بدون هیچ قید و شرطی همگراست.

اثبات:

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \to det(A)=ab-c^2>0 \quad \to c^2<ab$$

برای حل دستگاه 2×2 از روش ژاکوبی داریم:

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \qquad U=\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$M_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{a} \\ -\frac{c}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(M_J)=\left\{\frac{c}{\sqrt{ab}},-\frac{c}{\sqrt{ab}}\right\} \overset{c^2<ab}{\Longrightarrow} |\lambda(M_J)|<1 \quad \to \quad \rho(M_J)<1$$

این اثبات را کامل می کند.
توجه کنید برای ماتریس متقارن معین مثبت A، $n\times n$ با $n\geq 3$ هیچ تضمینی برای همگرایی روش ژاکوبی وجود ندارد.
برای مثال فرض کنید A به صورت زیر باشد (نشان دهید که این ماتریس متقارن معین مثبت است)

مثال ۳.۱۶

ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A=\begin{bmatrix} 29 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow M_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{29} & \frac{1}{29} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

می توان دید که

$$\rho(M_J)=1.0661>1$$

پس اگرچه ماتریس A متقارن معین مثبت است اما روش ژاکوبی واگراست.

اما علاوه بر معین مثبت بودن A چه شرایط دیگری لازم است تا روش ژاکوبی همگرا گردد؟ پاسخ این سوال در قضایای زیر آمده است.

قضیه ۳.۵

اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد آنگاه $\lambda(M_J)<1$

قضیه ۳.۶

اگر A معین مثبت و همچنین $2D-A$ هم معین مثبت باشد(البته D قطر A است) آنگاه روش تکراری ژاکوبی برای حل $AX=b$ همگراست.

توجه ۳.۱۲

علاقمندان برای دیدن اثبات این قضایا به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۵ همگرایی روش گاوس_سیدل

۱.۵ همگرایی روش گاوس_سیدل برای ماتریس های غالب قطر

خوشبختانه این روش نیز برای ماتریس‌های غالب قطری اکید (سطری و ستونی) و متقارن معین مثبت بدون هیچ قید و شرطی همگراست.

قضیه ۳.۷

فرض کنید A ماتریسی غالب قطر سطری اکید باشد آنگاه روش گاوس_سیدل برای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$ همگرا به جواب دقیق $AX = b$ است.

قضیه ۳.۸

فرض کنید A ماتریس غالب قطر ستونی اکید است. آنگاه روش گاوس_سیدل برای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$ همگرا به جواب دقیق $AX = b$ است.

توجه ۳.۱۳

علاقمندان برای دیدن اثبات این قضایا به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۲.۵ همگرایی روش گاوس_سیدل برای ماتریس های متقارن معین مثبت

در ادامه نشان می دهیم که روش گاوس_سیدل بدون هیچ قید و شرطی به جواب دستگاه $AX = b$ وقتی A متقارن معین مثبت است همگراست و این مزیت بسیار مهم این روش است. توجه دارید که روش ژاکوبی چنین نبود.

قضیه ۳.۹

فرض کنید A یک ماتریس متقارن معین مثبت باشد. آنگاه روش گاوس_سیدل به‌ازای هر انتخاب دلخواه از تقریب اولیه $X^{(0)}$ همگرا می‌گردد.

توجه ۳.۱۴

علاقمندان برای دیدن اثبات این قضایا به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۶ همگرایی روش SOR

روش SOR از یک پارامتر مانند ω برای بالا بردن سرعت روش گاوس_سیدل بهره می‌گیرد و بنابراین نیاز است تا یک محدوده برای همگرایی آن مشخص گردد. در ادامه نشان خواهیم داد که یک شرط لازم(و نه کافی) برای همگرایی روش SOR این است که ω در بازه $(۰, ۲)$ جای گیرد.
انتخاب ω در همگرایی تکرار SOR طبیعی است که برد ω که برای آن SOR همگرا می‌گردد و انتخاب بهینه ω مورد توجه باشد. برای پی بردن به این مطلب ابتدا نتیجه مهم زیر را که اثر ویلیام کاهان (William Kahan) می‌باشد ، ثابت می کنیم.

قضیه ۳.۱۰

کاهان: اگر ω خارج بازه $(۰, ۲)$ قرار گیرد، آنگاه روش SOR همگرا نخواهد بود.

اثبات: ماتریس تکرار SOR ، یعنی $M_{\mathbf{SOR}}$ به صورت

$$M_{\mathbf{SOR}} = (D + \omega L)^{-۱}[(۱ - \omega)D - \omega U]$$

ارائه می‌شود که درآن $A = L + D + U$. فرض کنید ماتریس A، $n \times n$ باشد، ماتریس $(D + \omega L)^{-۱}$ یک ماتریس پایین‌مثلثی با عناصر قطری $\frac{۱}{a_{ii}}$، $i = ۱, ..., n$، وماتریس $(۱ - \omega)D - \omega U$ یک ماتریس بالامثلثی با عناصر قطری $(۱ - \omega)a_{ii}$، $i = ۱, ..., n$، است. بنابراین

$$\begin{aligned}
&\mathbf{det}\left((D + \omega L)^{-۱}\right) = \prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_{ii}} \\
&\mathbf{det}\left((۱ - \omega)\, D - \omega U\right) = \prod_{i=۱}^{n} (۱ - \omega)\, a_{ii} = (۱ - \omega)^n \prod_{i=۱}^{n} a_{ii} \\
&\mathbf{det}\left(M_{SOR}\right) = \mathbf{det}\left((D + \omega L)^{-۱}\right) \mathbf{det}\left((۱ - \omega)\, D - \omega U\right) \\
&= \left(\prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_{ii}}\right) \left((۱ - \omega)^n \prod_{i=۱}^{n} a_{ii}\right) = (۱ - \omega)^n .
\end{aligned}$$

چون دترمینان یک ماتریس برابر حاصلضرب مقادیر ویژه آن می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$|۱ - \omega|^n = |(۱ - \omega)^n| = |\mathbf{det}\left(M_{\mathbf{SOR}}\right)| = |\lambda_۱| \, |\lambda_۲| \times \cdots \times |\lambda_n| \leq \rho^n\left(M_{\mathbf{SOR}}\right)$$

یا

$$|۱ - \omega| \leq \rho(M_{\mathbf{SOR}})$$

برای همگرایی هر روش تکراری باید شعاع طیفی ماتریس تکرار کوچکتر از ۱ باشد

$$|۱ - \omega| \leq \rho(M_{\mathbf{SOR}}) < ۱$$

نتیجه می‌گیریم که $|۱ - \omega| < ۱$ پس ω باید در بازه $(۰, ۲)$ قرار گیرد.

در اینجا نیز بررسی دسته‌ای مهم از ماتریس‌ها تا روش SOR همواره همگرا گردد مورد توجه است. قبلا دیدیم که روش گاوس_سیدل (حالت خاصی از روش SOR)بدون هیچ قید وشرطی برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت همگراست. قضیه بعدی نشان می‌دهد که این خاصیت مهم، برای روش SOR نیز درست است. قبل از بیان این قضیه نکته زیر را

اثبات می‌کنیم.

توجه ۳.۱۵

فرض کنید M ماتریس دلخواه $n \times n$ و X برداری $n \times ۱$ مختلطی باشد آنگاه عبارت $X^H M X$ لزوماً حقیقی نیست و بعلاوه قسمت حقیقی آن از

$$\mathbf{Re}(X^H M X) = \frac{۱}{۲}(X^H(M + M^T)X) \quad (۴۰)$$

حاصل می‌شود.

نکته ۳.۱

اگر A ماتریسی متقارن باشد آنگاه $X^H A X$ همواره حقیقی است.

قضیه ۳.۱۱

فرض کنید A ماتریسی متقارن و معین مثبت باشد. آنگاه برای هر $\omega \in (۰, ۲)$ و هر حدس اولیه‌ای، روش SOR همگرا به جواب دستگاه $AX = b$ است.

قضیه ی فوق نشان می دهد که وقتی ماتریس ضرایب دستگاه $AX = b$ متقارن معین مثبت است آنگاه به ازای هر $\omega \in (۰, ۲)$ روش SOR همگراست.

توجه ۳.۱۶

علاقمندان برای دیدن اثبات این قضایا به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

همانطور که دیدیم روش گاوس_سیدل برای ماتریس‌های غالب قطری اکید همواره همگراست و بعلاوه روش **SOR** برای $\omega = ۱$ به روش گاوس_سیدل تقلیل می‌یابد. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که روش **SOR** بجز $\omega = ۱$ برای سایر مقادیر $\omega \in (۰, ۲)$ وقتی که A غالب قطریست نیز همگراست؟ خودتان این موضوع را بررسی نمایید.

تعریف ۳.۲

پارامتر بهینه در روش SOR: پارامتر بهینه روش SOR را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_{\mathbf{opt}} = \min_{\omega} \{\rho(M_{\mathbf{SOR}}(\omega))\}$$

در واقع اگر $M_{\mathbf{SOR}}(\omega)$ ماتریس تکرار روش **SOR** باشد آنگاه $\omega_{\mathbf{opt}}$ همان است که باعث شود $\rho(M_{\mathbf{SOR}}(\omega))$ کمترین مقدار خود را داشته باشد و لذا انتظار می‌رود در این حالت روش با کمترین تکرار به جواب قابل قبول دستگاه $AX = b$ برسد. باید گفت که تعیین پارامتر بهینه در حالت کلی هنوز مشخص نگردیده است و یک مساله باز است و تاکنون

محاسبه آن برای ماتریس‌های خاصی امکان‌پذیر شده است. مگر در آینده که محققین بتوانند به نتایج بهتری در این موضوع دست یابند.

ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس تکرار **SOR** را برای ω محاسبه می‌کنیم.

$$M_{\mathbf{SOR}}(\omega) = -(D + \omega L)^{-۱}((\omega - ۱)D + \omega U) = \begin{bmatrix} ۱ - \omega & -\frac{۱}{۳}\omega \\ -\omega^{۲} + \omega & -\frac{۱}{۳}\omega^{۲} - \omega + ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین چندجمله‌ای ویژه ماتریس $M_{\mathbf{SOR}}(\omega)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$p(\lambda) = \lambda^{۲} + (\frac{۱}{۳}\omega^{۲} + ۲\omega - ۲)\lambda + \omega^{۲} - ۲\omega + ۱$$

.

با حل معادله درجه دوم فوق بر حسب λ داریم

$$\lambda_{۱} = -\frac{۱}{۶}\omega^{۲} - \omega + ۱ + \frac{\omega}{۶}\sqrt{\omega^{۲} + ۱۲\omega - ۱۲} \qquad (۴۱)$$

$$\lambda_{۲} = -\frac{۱}{۶}\omega^{۲} - \omega + ۱ - \frac{\omega}{۶}\sqrt{\omega^{۲} + ۱۲\omega - ۱۲} \qquad (۴۲)$$

معادلات فوق نشان می‌دهند که برای هر ω ، دو مقدار مختلف برای λ تعیین می‌شود. سوال اینست که ω چه باشد تا به ازای آن

$$\rho(M_{\mathbf{SOR}}(\omega)) = \max\{|\lambda_{۱}|, |\lambda_{۲}|\}$$

کمترین مقدار خود را داشته باشد؟ چرا که در این صورت $\rho(M_{\mathbf{SOR}}(\omega))$ به کمترین مقدار خود خواهد رسید.
حکم می‌کنیم که این اتفاق وقتی می‌افتد که عبارت زیر رادیکال صفر شود یعنی

$$\omega^{۲} + ۱۲\omega - ۱۲ = ۰ \qquad (۴۳)$$

و نشان می‌دهیم که اگر (۴۳) برقرار نباشد آنگاه $\rho(M_{\mathbf{SOR}}(\omega)) = \max\{|\lambda_{۱}|, |\lambda_{۲}|\}$ کمینه نخواهد بود. این نشان می‌دهد که $\omega_{\mathbf{opt}}$ باید از حل (۴۳) به دست آید

$$\omega^{۲} + ۱۲\omega - ۱۲ = ۰ \implies \omega_{\mathbf{opt}} = -۶ \pm ۴\sqrt{۳}$$

و چون باید $۰ < \omega < ۲$ پس تنها $\omega_{\mathbf{opt}} = -۶ + ۴\sqrt{۳}$ قابل قبول است. توجه کنید که از (۴۳) داریم

$$\omega^{۲} = -۱۲\omega + ۱۲$$

.

پس از (۴۱) و (۴۲) خواهیم داشت

$$\lambda_{۱} = \lambda_{۲} = -\frac{۱}{۶}\omega^{۲} - \omega + ۱ = -\frac{۱}{۶}(-۱۲\omega + ۱۲) - \omega + ۱ = ۲\omega - ۲ - \omega + ۱ = \omega - ۱$$

پس در این حالت $\omega_{\text{opt}} - ۱ = -۷ + ۴\sqrt{۳} < ۰$. لذا

$$\rho(M_{\text{SOR}}(\omega_{\text{opt}})) = \max\{|\lambda_۱|, |\lambda_۲|\} = \left|-۷ + ۴\sqrt{۳}\right| = ۷ - ۴\sqrt{۳} \approx ۰/۰۷۱۸$$

ادعا داریم که این کمترین مقدار ممکن برای $\rho(M_{\text{SOR}}(\omega))$ می‌باشد.
حال فرض کنید (۴۳) برقرار نباشد و $\omega^* \neq -۶ + ۴\sqrt{۳}$ موجود باشد که به ازای آن

$$\rho(M_{\text{SOR}}(\omega_{\text{opt}})) = \max\{|\lambda_۱|, |\lambda_۲|\} < ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

پس باید دو نامعادله زیر همزمان دارای جواب باشند

$$|\lambda_۱| < ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \left|-\frac{۱}{۶}\omega^{*۲} - \omega^* + ۱ + \frac{\omega^*}{۶}\sqrt{\omega^{*۲} + ۱۲\omega^* - ۱۲}\right| < ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

$$|\lambda_۲| < ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \left|-\frac{۱}{۶}\omega^{*۲} - \omega^* + ۱ - \frac{\omega^*}{۶}\sqrt{\omega^{*۲} + ۱۲\omega^* - ۱۲}\right| < ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

ابتدا نامعادله $|\lambda_۱| < ۷ - ۴\sqrt{۳}$ را در نظر می‌گیریم

$$\left|-\frac{۱}{۶}\omega^{*۲} - \omega^* + ۱ + \frac{\omega^*}{۶}\sqrt{\omega^{*۲} + ۱۲\omega^* - ۱۲}\right| < ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

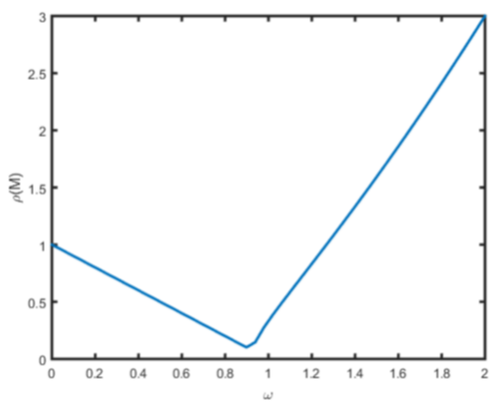
(حل با متمتیکا (MATHEMATICA)) در زیر نتایج با نرم افزار متمتیکا ارائه شده است

```
In[2]:= Reduce[Abs[-w^2/6 - w + 1 + w * Sqrt[w^2 + 12 * w - 12] / 6] < 7 - 4 * Sqrt[3] && 0 < w < 2, {w}] // N
Out[2]= 0.928203 < w < 1.26795
```

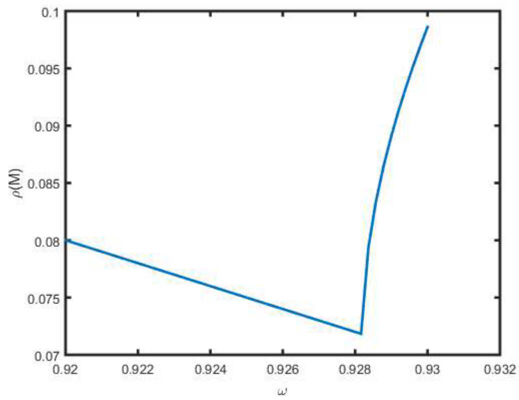
بنابراین این نامعادله برای $۰/۹۲۸۲۰۳ < \omega < ۱/۲۶۷۹۵$ دارای جواب است.
از طرفی برای نامعادله $|\lambda_۲| < ۷ - ۴\sqrt{۳}$ با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا داریم

```
In[3]:= Reduce[Abs[-w^2/6 - w + 1 - w * Sqrt[w^2 + 12 * w - 12] / 6] < 7 - 4 * Sqrt[3] && 0 < w < 2, {w}] // N
Out[3]= False
```

بنابراین این نامعادلات همزمان دارای جواب نمی‌باشند پس پارامتر بهینه همان مقدار $\omega_{\text{opt}} = -۶ + ۴\sqrt{۳} \approx ۰/۹۲۸۴$ خواهد بود.
در شکل زیر مقدار $\rho(M_{\text{SOR}}(\omega))$ را به عنوان تابعی از ω در بازه $[۰, ۲]$ رسم کرده‌ایم. مطابق این شکل نیز می‌توان دید $\rho(M_{\text{SOR}}(\omega))$ در نقطه $\omega_{\text{opt}} = -۶ + ۴\sqrt{۳}$ به کمینه خود رسیده است. (محور افقی نشان دهنده ی پارامتر ω و محور عمودی نشان دهنده ی شعاع طیفی ماتریس تکرار روش SOR است)



همچنین شکل برای اینکه موقعیت پارامتر بهینه دقیق تر مشخص شود شکل قبلی در بازه [۰/۹۲, ۰/۹۳] رسم شده است.



نکته ۳.۲

با توجه به مثال قبل ظاهرا برای هر ماتریس ۲×۲ می‌توان پارامتر بهینه را محاسبه نمود.

توجه ۳.۱۷

علاقمندان برای دیدن بحث بیشتر از پارامتر بهینه روش SOR به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

قضیه ۳.۱۲

فرض کنید A سه قطری با عناصر قطری ناصفر باشد و مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش ژاکوبی یعنی M_J همگی حقیقی باشند و

$$\mu = \rho(M_J) < ۱$$

آنگاه پارامتر بهینه روش SOR از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\omega_{\textbf{opt}} = \frac{۲}{۱ + \sqrt{۱ - \mu^{۲}}}$$

و به ازای آن داریم

$$\rho(M_{\textbf{SOR}}(\omega_{\textbf{opt}})) = \omega_{\textbf{opt}} - ۱$$

نکته ۳.۳

محاسبه پارامتر بهینه برای رده ای بزرگتر از ماتریس ها به نام ماتریس‌های مرتب سازگار یا مرتب پابرجا (Consis-tently ordered) امکان‌پذیر است. علاقمندان برای دیدن جزییات بیشتر به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۷ محاسبه حداقل تکرار

قبلا دیدیم که برای یک روش تکراری به صورت

$$X^{(k+1)} = MX^{(k)} + c \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

خطای $e^{(k)} = X^{(k)} - X^*$ در رابطه $e^{(k)} = M^k e^{(0)}$ صادق است. حال اگر $\|.\|$ یک نرم سازگار باشد داریم

$$\|e^{(k)}\| = \|M^k e^{\circ}\| \leq \|M^k\| . \|e^{\circ}\|$$

برای k به اندازه کافی بزرگ می‌دانیم که

$$\|M^k\|^{\frac{1}{k}} \approx \rho(M)$$

پس

$$\|M^k\| \approx \rho^k(M)$$

بنابراین داریم

$$\|e^{(k)}\| \leq \rho^k(M)\, \|e^{(0)}\|$$

و از آنجا

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \rho^k(M)$$

حال اگر بخواهیم خطای نسبی $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}$ کمتر از ϵ داده شده باشد کافی است k در $\rho^k(M) \leq \epsilon < 1$ یا

$$k \log \rho(M) \leq \log \epsilon < 0$$

صدق کند. در نتیجه لازم است

$$k \geq \frac{\log \epsilon}{\log \rho(M)}$$

مثال ۳.۱۷

فرض کنید هدف حل دستگاه $AX = b$ با ماتریس ضرایب

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

است به قسمی‌که خطای نسبی $\frac{\|e^{(k)}\|_2}{\|e^{(0)}\|_2}$ در $\frac{\|e^{(k)}\|_2}{\|e^{(0)}\|_2} \leq 5 \times 10^{-6}$ صدق کند؛ آنگاه حداقل تکرارهای لازم را برای روش‌های ژاکوبی و گاوس–سیدل برآورد نمایید (نیازی به حل دستگاه نیست).

حل: داریم

$$M_J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \rho(M_J) = \frac{1}{2}$$

و همچنین

$$M_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{3}{64} & \frac{7}{64} \end{bmatrix} \Longrightarrow \rho(M_{GS}) = \frac{1}{8}$$

پس برای روش ژاکوبی داریم

$$k \geq \frac{\log \epsilon}{\log \rho(M_J)} = \frac{\log 5 \times 10^{-6}}{\log \frac{1}{2}} \approx 17/61 \Longrightarrow k \geq 18$$

و برای روش گاوس_سیدل داریم

$$k \geq \frac{\log \epsilon}{\log \rho(M_{GS})} = \frac{\log 5 \times 10^{-6}}{\log \frac{1}{8}} \approx 5/87 \Longrightarrow k \geq 6$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در این مثال روش گاوس_سیدل تقریباً ۳ برابر سریع‌تر از روش ژاکوبی است.

تعریف ۳.۳

به مقدار عددی $-\log \rho(M)$ نرخ همگرایی یک روش عددی با ماتریس تکرار M گفته می‌شود و معمولا با R نمایش داده می‌شود

$$R = -\log \rho(M)$$

برای مقایسه سرعت همگرایی دو روش به طور کلی(نه همیشه زیرا در مسایل واقعی و مقالات بیشتر مبنا روشی است که تعداد تکرارهای کمتری نیاز دارد) آنکه دارای نرخ همگرایی بیشتر است دارای سرعت بیشتری است و ترجیح داده می‌شود.

برای ماتریس سه قطری A و قطر ناصفر داریم $\rho^2(M_J) = \rho(M_{GS})$ (به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه کنید) ؛ پس با گرفتن لگاریتم از طرفین داریم

$$\log \rho^2(M_J) = \log \rho(M_{GS})$$

یا

$$2 \log \rho(M_J) = \log \rho(M_{GS}) \tag{44}$$

بنابراین با محاسبه نرخ همگرایی روش گاوس_سیدل به ژاکوبی داریم

$$\frac{R_{GS}}{R_J} = \frac{-\log \rho(M_{GS})}{-\log \rho(M_J)} = \frac{2 \log \rho(M_J)}{\log \rho(M_J)} = 2$$

پس می‌توان نتیجه گرفت برای ماتریس‌های سه قطری قطر ناصفر روش گاوس_سیدل تقریباً دو برابر سریعتر از روش ژاکوبی خواهد بود و یا به تعبیری به نصف تکرارهای لازم روش ژاکوبی نیاز خواهد داشت.

مثال ۳.۱۸

ماتریس دستگاه زیر سه قطری است.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

دو روش ژاکوبی و گاوس_سیدل را مقایسه کنید. هدف حل این دستگاه با دقت زیر است

$$\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty \leq 10^{-4}, X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$$

حل: جدول زیر نشان‌دهنده نتایج روش ژاکوبی است (محاسبات با متلب و ۱۶ رقم اعشاری انجام شده است و برای سادگی تا ۴ رقم بعد اعشار نمایش داده شده است)

جدول ۱: نتایج روش ژاکوبی

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty$
۰	۰	۰	۰	–
۱	۱٫۳۳۳۳	۱٫۶۶۶۷	۱٫۳۳۳۳	۱٫۶۶۶۷
۲	۰٫۷۷۷۸	۰٫۷۷۷۸	۰٫۷۷۷۸	۰٫۸۸۸۹
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۱۳	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۰	۲×۱۰^{-۴}
۱۴	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۱٫۱ \times ۱۰^{-۴}$
۱۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۴٫۴ \times ۱۰^{-۵}$

نتایج جدول نشان می‌دهد که روش ژاکوبی به ۱۵ تکرار نیاز دارد تا شرط توقف یادشده برقرار باشد. انتظار داریم روش گاوس_سیدل تقریباً به نصف این تکرارها نیاز داشته باشد.
نتایج روش گاوس_سیدل در جدول ذیل آمده است.

جدول ۲: نتایج روش گاوس_سیدل

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty$
۰	۰	۰	۰	–
۱	۱٫۳۳۳۳	۱٫۲۲۲۲	۰٫۹۲۵۹	۱٫۳۳۳۳
۲	۰٫۹۲۵۹	۱٫۰۴۹۴	۰٫۹۸۳۵	۰٫۴۰۷۴
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۶	۰٫۹۹۹۸	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۰	$۶٫۳۲ \times ۱۰^{-۴}$
۷	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۴}$
۸	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۳٫۱۲ \times ۱۰^{-۵}$

مشاهده می‌شود که تقریبا تعداد تکرارهای لازم برای روش گاوس_سیدل به نصف تعداد تکرار روش ژاکوبی رسیده است.

می‌توان این دستگاه را با روش SOR و با پارامتر بهینه نیز حل کرد. برای این کار توجه کنید که

$$M_J = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$p(\mu) = \mu^{۳} - \frac{۲}{۹}\mu \implies \mu_۱ = ۰, \mu_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۳}, \mu_۳ = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین $\mu = \rho(M_J) = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ و

$$\omega_{opt} = \frac{۲}{۱+\sqrt{۱-\mu^۲}} = \frac{۲}{۱+\sqrt{۱-\frac{۲}{۹}}} = \frac{۶}{۳+\sqrt{۷}} \approx ۱/۰۶۲۷$$

پس $\rho(M_{SOR}(\omega_{opt})) = \omega_{opt} - ۱ \approx ۱/۰۶۲۷ - ۱ = ۰/۰۶۲۷$

نتایج روش SOR با پارامتر بهینه در جدول زیر آورده شده است. بر طبق نتایج این جدول روش SOR برای برآورده‌شدن شرط توقف داده شده حداقل به ۶ تکرار نیاز دارد.

جدول ۳: نتایج روش SOR

k	$x_۱^{(k)}$	$x_۲^{(k)}$	$x_۳^{(k)}$	$\left\|X^{(k+۱)} - X^{(k)}\right\|_\infty$
۰	۰	۰	۰	–
۱	۱٫۴۱۶۹	۱٫۲۶۹۲	۰٫۹۶۷۳	۱٫۴۱۶۹
۲	۰٫۸۷۸۵	۱٫۰۳۷۷	۰٫۹۸۸۷	۰٫۵۳۸۴
۳	۰٫۹۹۴۳	۱٫۰۰۳۷	۰٫۹۹۹۴	۰٫۱۱۵۸
۴	۰٫۹۹۹۱	۱٫۰۰۰۳	۰٫۹۹۹۹	۰٫۰۰۴۸
۵	۰٫۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۸٫۹ \times ۱۰^{-۴}$
۶	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	$۴٫۶ \times ۱۰^{-۵}$

توجه کنید نرخ همگرایی این سه روش به صورت زیر است

$$R_J = -\log(\rho(M_J)) = ۰/۳۲۶۶,$$
$$R_{GS} = -\log(\rho(M_{GS})) = ۰/۶۵۳۲,$$
$$R_{SOR} = -\log(\rho(M_{SOR})) = ۱/۱۸۰۶$$

پس $R_J < R_{GS} < R_{SOR}$. لذا در این مثال روش SOR سریعتر از روش گاوس_سیدل و روش گاوس_سیدل سریعتر از روش ژاکوبی است.

۸ الگوریتم گرادیان(تندترین کاهش)

در اینجا به معرفی مختصر یک الگوریتم تکراری برای حل دستگاه $AX = b$ می‌پردازیم که از شاخه‌ای از ریاضیات به نام بهینه‌سازی (Optimization) به جبر خطی عددی راه یافته است که روش گرادیان نام دارد. در واقع از روش گرادیان برای حل مساله مینیمم سازی

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{۴۵}$$

استفاده می شود. وقتی که تابع f به طور خاص

$$f(X) = \frac{۱}{۲}X^TAX - X^Tb \tag{۴۶}$$

انتخاب شود به طوری که A ماتریسی $n \times n$ متقارن معین مثبت و b برداری $n \times ۱$ باشد آنگاه ثابت می کنیم جواب مساله ی (۴۵) معادل یافتن جواب دستگاه $AX = b$ است. با توجه به این حقیقت بجای حل دستگاه $AX = b$ کافی است مساله ی

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{۱}{۲}X^TAX - X^Tb \right\} \tag{۴۷}$$

را حل کنیم. در ادامه نحوه ی حل مساله ی (۴۷) را بیان می کنیم. قبل از آن به برخی مقدمات ضروری می‌پردازیم.

توجه ۳.۱۸

فرض کنید $X, b \in \mathbb{R}^n$ آنگاه X^Tb یک اسکالر خواهد بود و به صورت زیر است

$$X^Tb = [x_۱, x_۲, ..., x_n] \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = x_۱b_۱ + x_۲b_۲ + ... + x_nb_n = \sum_{i=۱}^{n} x_ib_i = \sum_{i=۱}^{n} b_ix_i$$

$$\Rightarrow X^Tb = \sum_{i=۱}^{n} b_ix_i$$

توجه ۳.۱۹

فرض کنید $X, b \in \mathbb{R}^n$ و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ آنگاه X^TAX نیز یک اسکالر به صورت زیر است

$$X^TAX = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

اثبات: برای دیدن این موضوع به پیوست مراجعه کنید.

در ادامه کار به مفهوم گرادیان نیاز داریم. لذا نیاز به یادآوری آن خواهیم داشت.

تعریف ۳.۴

فرض کنید f تابعی n متغیره به صورت

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f := f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$$

باشد آنگاه گرادیان f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_۱}, \frac{\partial f}{\partial x_۲}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$$

بنابراین ∇f برداری در $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

مثال ۳.۱۹

فرض کنید

$$f(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{x_۱} - ۴x_۲$$

آنگاه بردار گرادیان تابع f به صورت زیر خواهد بود

$$\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_۱}, \frac{\partial f}{\partial x_۲}]^T$$

که در آن

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱} = \frac{\partial(\frac{۱}{x_۱} - ۴x_۲)}{\partial x_۱} = -\frac{۱}{x_۱^۲} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_۲} = \frac{\partial(\frac{۱}{x_۱} - ۴x_۲)}{\partial x_۲} = -۴$$

بنابراین داریم

$$\nabla f = [-\frac{۱}{x_۱^۲}, -۴]^T$$

دستور محاسبه گرادیان یک تابع در متلب

```
syms x1 x2 x3 x4
f=x1^2+x3-2*log(x4);
G=gradient(f, [x1,x2,x3,x4])

G =
2*x1
0
1
-2/x4
```

مثال ۳.۲۰

فرض کنید A ماتریس ۳×۳ متقارن و x برداری ۱×۳ دلخواه باشد. گرادیان تابع داده شده را محاسبه کنید.

$$f(X) = \frac{۱}{۲}X^TAX - X^Tb$$

حل: با توجه به نکات قبل داریم

$$\begin{aligned} f(X) = f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}X^T AX - X^T b \\ &= \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 \\ &+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2) - (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) \end{aligned}$$

چون A ماتریس متقارن است $a_{ij} = a_{ji}$ و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} f(X) = &\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) \\ &- (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) \end{aligned}$$

از این‌رو

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3) - b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1$$

همچنین

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3) - b_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - b_2$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{1}{2}(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3) - b_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 - b_3$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}]^T &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 - b_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مجدداً چون A متقارن است پس

$$a_{12} = a_{21} \quad , \quad a_{13} = a_{31} \quad , \quad a_{23} = a_{32}$$

پس ماتریس ضرایب نهایی در عبارت بالا همان A است یعنی

$$\nabla f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = AX - b \tag{۴۸}$$

رابطه به دست‌آمده در (۴۸) را به طور کلی زیر(برای ماتریس دلخواه متقارن $A_{n\times n}$) برقرار است:

$$f(X) = \frac{1}{2}X^T AX - X^T b \Longrightarrow \nabla f = AX - b$$

در واقع قضیه مهم زیر را داریم

قضیه ۳.۱۳

فرض کنید A ماتریس متقارن $n \times n$ و X و b برداری $n \times ۱$ باشند آنگاه گرادیان تابع n متغیره ی

$$f(X) = \frac{۱}{۲} X^T AX - X^T b$$

برابر است با

$$\nabla f = AX - b$$

رابطه ی فوق نقش بسیار مهم و اساسی در ساختن روش گرادیان دارد. در واقع چون کمینه کننده ی f باید در شرط $\nabla f = AX - b = ۰$ یا $AX = b$ صدق کند پس انگیزه ی ساختن روش گرادیان این است که با یافتن کمینه کننده ی f بتوانیم به جواب دستگاه $AX = b$ دست یابیم. در بهینه سازی روش های متنوعی برای کمینه کردن تابع

$$f(X) = \frac{۱}{۲} X^T AX - X^T b$$

وجود دارد.
روش گرادیان برای حل دستگاه $AX = b$ که A متقارن معین مثبت است به صورت زیر خلاصه می‌شود:

- مقادیر $A, b, X^{(۰)}$ را به عنوان ورودی دریافت می کند.
- برای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ (تا دستیابی به دقت مطلوب) عملیات زیر را تکرار می‌کنیم
- $$d^{(k)} = b - AX^{(k)}$$
- $$\alpha^{(k)} = \frac{{d^{(k)}}^T d^{(k)}}{{d^{(k)}}^T A d^{(k)}}$$
- $$X^{(k+۱)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$$

مثال ۳.۲۱

دستگاه داده شده را با روش گرادیان حل نمایید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad X^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حل: واضح است که A متقارن معین مثبت است، پس روش گرادیان قابل به کارگیری است. داریم (محاسبات تا ۴ رقم بعد از اعشار گرد شده اند)

$$k = ۰ \longrightarrow d^{(۰)} = b - AX^{(۰)} = b - A \times ۰ = b = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(۰)} = \frac{{d^{(۰)}}^T d^{(۰)}}{{d^{(۰)}}^T A d^{(۰)}} = \frac{[۲, ۳] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}}{[۲, ۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}} = \frac{۱۳}{۲۲} = ۰/۵۹۰۹$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \alpha^{(0)} d^{(0)} = \alpha^{(0)} d^{(0)} = 0.5909 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1818 \\ 1.7727 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 \rightarrow d^{(1)} = b - AX^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1818 \\ 1.7727 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9545 \\ 0.6364 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{d^{(1)^T} d^{(1)}}{d^{(1)^T} A d^{(1)}} = \frac{1.3161}{5.6694} = 0.2321$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \alpha^{(1)} d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9602 \\ 1.9205 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \rightarrow d^{(2)} = b - AX^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.07955 \\ 0.1193 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{d^{(2)^T} d^{(2)}}{d^{(2)^T} A d^{(2)}} = \frac{0.0206}{0.0348} = 0.5909$$

$$X^{(3)} = X^{(2)} + \alpha^{(2)} d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0072 \\ 1.9910 \end{bmatrix}$$

با ادامه این روند داریم :

$$k = 5 \rightarrow d^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.0015 \\ 0.0010 \end{bmatrix} \ , \ \alpha^{(5)} = 0.2321 \ , \ X^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ 1.9999 \end{bmatrix}$$

$$k = 6 \rightarrow d^{(6)} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.1258 \\ 0.1888 \end{bmatrix} \ , \ \alpha^{(6)} = 0.5909 \ , \ X^{(7)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که روش گرادیان به جواب دقیق دستگاه همگراست.

مثال ۳.۲۲

دستگاه داده شده را با روش گرادیان حل نمایید.

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 16 \end{bmatrix} \ , \ X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس A متقارن معین مثبت است زیرا مقادیر ویژه آن همگی مثبت‌اند.

$$\lambda_1 \approx 0.73 > 0 \ , \ \lambda_2 \approx 2.47 > 0 \ , \ \lambda_3 \approx 8.8 > 0$$

داریم :

$$d^{(0)} = b - AX^{(0)} = b = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{d^{(0)^T} d^{(0)}}{d^{(0)^T} A d^{(0)}} = \frac{429}{3662} = 0.1171$$

$$X^{(۱)} = X^{(۰)} + \alpha^{(۰)} d^{(۰)} = \alpha^{(۰)} d^{(۰)} = ۰/۱۱۷۱ \begin{bmatrix} ۱۳ \\ -۲ \\ ۱۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۵۲۲۹ \\ -۰/۲۳۴۳ \\ ۱/۸۷۴۴ \end{bmatrix}$$

در تکرار دوم داریم :

$$d^{(۱)} = b - AX^{(۱)} = [-۱/۹۹۵۱, ۱/۶۳۱۶, ۱/۸۲۵۰]^T$$

$$\alpha^{(۱)} = \frac{d^{(۱)T} d^{(۱)}}{d^{(۱)T} A d^{(۱)}} = \frac{۹/۹۷۳۰}{۲۱/۹۰۶۲} = ۰/۴۵۵۳$$

$$X^{(۲)} = X^{(۱)} + \alpha^{(۱)} d^{(۱)} = [۰/۶۱۴۷, ۰/۵۰۸۵, ۲/۷۰۵۲]^T$$

در تکرار سوم داریم :

$$d^{(۲)} = b - AX^{(۲)} = [۱/۷۰۴۹, ۰/۸۱۱۴, ۱/۱۳۸۵]^T$$

$$\alpha^{(۲)} = \frac{d^{(۲)T} d^{(۲)}}{d^{(۲)T} A d^{(۲)}} = \frac{۴/۸۶۱۲}{۳۱/۶۱۱۵} = ۰/۱۵۳۸$$

$$X^{(۳)} = X^{(۲)} + \alpha^{(۲)} d^{(۲)} = [۰/۸۷۶۸, ۰/۶۳۳۳, ۲/۸۸۰۳]^T$$

با ادامه این روند خواهیم داشت :

$$d^{(۴۳)} = ۱۰^{-۳}[-۰/۱۴۸۰, ۰/۴۱۷۷, -۰/۰۹۳۲]^T \quad , \quad \alpha^{(۴۳)} = ۰/۳۲۳۷$$

$$X^{(۴۴)} = [۰/۹۹۹۹, ۱/۹۹۹۶, ۲/۹۹۹۹]^T$$

$$d^{(۴۴)} = ۱۰^{-۳}[۰/۳۶۵۱, ۰/۲۰۴۵, ۰/۳۳۶۶]^T \quad , \quad \alpha^{(۴۴)} = ۰/۱۵۵۲$$

$$X^{(۴۵)} = [۱/۰۰۰۰, ۱/۹۹۹۷, ۳/۰۰۰۰]^T$$

$$d^{(۴۵)} = ۱۰^{-۳}[-۰/۰۹۹۸, ۰/۲۸۱۶, -۰/۰۶۲۸]^T \quad , \quad \alpha^{(۴۵)} = ۰/۳۲۳۷$$

$$X^{(۴۶)} = [۰/۹۹۹۹, ۱/۹۹۹۷, ۲/۹۹۹۹]^T$$

مشاهده می گردد که تکرارهای روش گرادیان همگرا به جواب دقیق می‌باشند.

توجه ۳.۲۰

برای دیدن جزییات بیشتر از روش گرادیان به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۹ فرم بلوکی روش های تکراری

در بیشتر موارد دستگاه هایی که در مسایل کاربردی با آنها مواجه هستیم از ابعاد بسیار بالایی برخوردار هستند. یک ایده برای حل چنین دستگاه هایی با هزینه محاسباتی مقرون به صرفه ، بلوک‌بندی دستگاه است و سپس حل آن با استفاده از روش های تکراری است که در این فصل مورد بررسی قرار گرفتند. البته نحوه ی بکارگیری این روش ها در دستگاه های بلوکی کمی متفاوت است همانطور که در ادامه خواهید دید.

مثال ۳.۲۳

دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

برای دستگاه داده شده بلوک‌بندی های زیر را می توان در نظر گرفت :

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 9 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ 4 \end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \\ \hline -1 & 4 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 4 \end{array}\right]$$

البته بلوک بندی زیر نیز می تواند در نظر گرفته شود :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 9 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ 4 \end{array}\right]$$

همان‌طور که می بینید در دو بلوک بندی اول ماتریس های بلوکی روی قطر مربعی بوده در حالی که در بلوک بندی آخر چنین نمی باشد. بنا به دلایلی که بعداً در پیاده سازی روش های تکراری خواهیم دید ، بهتر است از بلوک‌بندی ای کمک بگیریم که بلوک های قطری مربعی باشند. بنابراین در این فصل منظور از بلوک‌بندی یک بلوک‌بندی با بلوک های قطری مربعی است.

مثال ۳.۲۴

دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 11 & 6 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

آنگاه برای این دستگاه می توان ۳ نوع بلوک‌بندی به صورت زیر در نظر گرفت :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ \hline 11 & 6 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \\ \hline -3 \\ -7 \end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 1 & 9 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 7 \\ 11 & 6 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 9 \\ -3 \\ -7 \end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 11 & 6 & -7 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \\ -3 \\ \hline -7 \end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 1 & 9 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 7 \\ \hline 11 & 6 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 9 \\ \hline -3 \\ -7 \end{array}\right]$$

یا

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 5 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ \hline 11 & 6 & -7 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline x_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \\ \hline -3 \\ \hline -7 \end{array}\right]$$

به نظر شما بلوک‌بندی دیگری برای این دستگاه می توان در نظر گرفت؟
به طور کلی برای حل یک دستگاه $n \times n$ وقتی که :

۱. n زوج است چند بلوک‌بندی می توان در نظر گرفت ؟

۲. n فرد است چند بلوک‌بندی می توان در نظر گرفت؟

تذکر ۳.۳

به طور کلی با توجه به نوع مسئله باید یک بلوک‌بندی مناسب با امکانات خود انتخاب کنیم.

توجه ۳.۲۱

علاقمندان برای دیدن فرم بلوکی روش های تکراری به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Algorithm .... الگوریتم
Analytically .... تحلیلی

C

Cardano's method .... روش کاردانو
Convergence .... همگرایی
Convergence condition .... شرط همگرایی
Convergence criterion .... معیار همگرایی
Convergence Rate .... نرخ همگرایی
Consistently ordered .... مرتب سازگار

D

Diagonal component .... مولفه قطری
Directional derivative .... مشتق جهتی
Dot product .... ضرب نقطه ای

G

Gaussian elimination .... روش حذفی گاوس
Gauss–Seidel method .... روش گاوس–سیدل
Gradient method .... روش گرادیان

H

Hessian matrix .... ماتریس هسین

I

Iterative algorithm .... الگوریتم تکراری
Iterative process .... فرآیند تکراری
Iterative technique .... تکنیک تکراری/مرحله ای
Iteration matrix .... ماتریس تکرار

J

Jacobi method .... روش ژاکوبی
Jacobi Over-relaxation method .... روش فوق رهایی ژاکوبی

L

Laguerr's method .... روش لاگر
Lower triangular part .... بخش پایین مثلثی

M

Matrix iterative methods .... روش های تکراری ماتریسی
Matrix splitting .... جداسازی ماتریس
Minimum .... کمینه

N

Newton's method .... روش نیوتن
Numerical linear algebra .... جبرخطی عددی
Normalization .... نرمال سازی

O

Optimization problems .... مسائل بهینه سازی

P

Parameter .... پارامتر
Partial .... جزئی
Point iterative methods .... روش های تکراری نقطه ای

R

Right-hand side vector .... بردار سمت راست

S

Second-order partial derivatives .... مشتق جزئی مرتبه دو
Sucssesive Over-Relaxation .... روش فوق تخفیف متوالی
Sufficient condition .... شرط کافی
Symmetric Successive Over-Relaxation .... روش فوق تخفیف متقارن
Spectral radius .... شعاع طیفی

Steepest descent method .... روش تندترین کاهش

T

Taylor expansion .... بسط تیلور
The nabla symbol .... نماد نابلا
Tolerance .... تولرانس

U

Upper triangular part .... بخش بالا مثلثی

W

Weighted Jacobi method .... روش ژاکوبی وزن دار

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

الگوریتم .... Algorithm
الگوریتم تکراری .... Iterative algorithm

ب

بخش بالا مثلثی .... Upper triangular part
بخش پایین مثلثی .... Lower triangular part
بردار سمت راست .... Right-hand side vector
بسط تیلور .... Taylor expansion

پ

پارامتر .... Parameter

ت

تحلیلی .... Analytically
تکنیک تکراری/مرحله ای .... Iterative technique
تولرانس .... Tolerance

ج

جبرخطی عددی .... Numerical linear algebra
جداسازی ماتریس .... Matrix splitting
جزئی .... Partial

ر

روش تندترین کاهش .... Steepest descent method
روش حذفی گاوس .... Gaussian elimination
روش ژاکوبی .... Jacobi method
روش ژاکوبی وزن دار .... Weighted Jacobi method
روش فوق تخفیف متقارن .... Symmetric Successive Over-Relaxation
روش فوق تخفیف متوالی .... Sucssesive Over-Relaxation
روش فوق رهایی ژاکوبی .... Jacobi Over-relaxation method
روش کاردانو .... Cardano's method
روش گاوس–سیدل .... Gauss–Seidel method
روش گرادیان .... Gradient method
روش لاگر .... Laguerr's method
روش نیوتن .... Newton's method
روش های تکراری ماتریسی .... Matrix iterative methods
روش های تکراری نقطه ای .... Point iterative methods

ش

شرط کافی .... Sufficient condition
شرط همگرایی .... Convergence condition
شعاع طیفی .... Spectral radius

ض

ضرب نقطه ای .... Dot product

ف

فرآیند تکراری .... Iterative process

ک

کمینه .... Minimum

م

ماتریس تکرار .... Iteration matrix
ماتریس هسین .... Hessian matrix
مرتب سازگار .... Consistently ordered
مسائل بهینه سازی .... Optimization problems
مشتق جزئی مرتبه دو .... Second-order partial derivatives
مشتق جهتی .... Directional derivative
معیار همگرایی .... Convergence criterion
مولفه قطری .... Diagonal component

ن

نرخ همگرایی .... Convergence Rate
نرمال سازی .... Normalization
نماد نابلا .... The nabla symbol

۵

همگرایی .... Convergence

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل سوم: روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲