دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل ششم: حل دستگاه های غیرمربعی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ حل دستگاه های مستطیلی(غیر مربعی)

در فصل‌های قبل دیدیم که بسیاری از مسائل کاربردی به مسأله $AX = b$ که A ماتریسی $n \times n$ ، مربعی است منجر می‌شود. اما ممکن است در برخی از مسائل به دستگاهی به صورت $AX = b$ برخورد کنیم که در آن A ماتریسی مستطیلی (غیر مربعی) $m \times n$ ، X برداری $n \times ۱$ و b برداری $m \times ۱$ باشد.

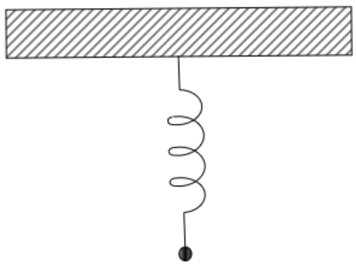
بنابراین نیاز است برای چنین مسائلی مواردی مهم چون

۱- تعداد جوابهای یک دستگاه غیر مربعی

۲- نحوه‌ی به دست آمدن جوابها

بررسی گردند.

در این فصل به این دو موضوع خواهیم پرداخت. ابتدا به یک مسأله که در فیزیک پیش می‌آید توجه کنید. شکل زیرنشان دهنده‌ی یک فنر است که از یک سقف آویزان شده و در حالت تعادل قرار دارد.



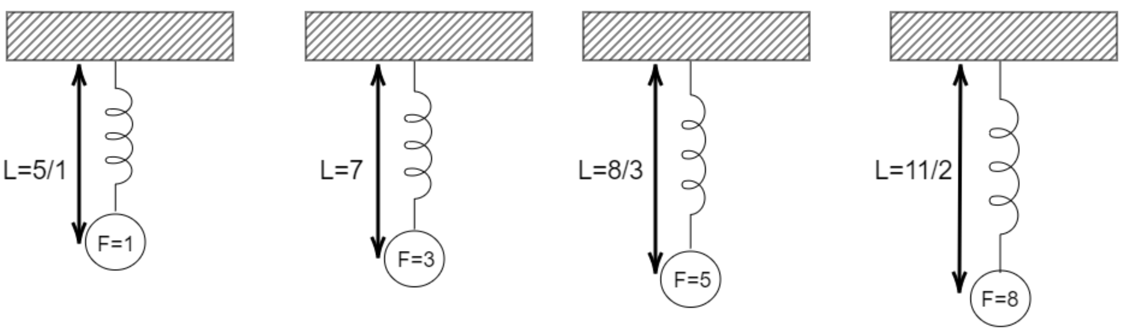
در فیزیک قانونی به نام قانون هوک $(Hooke's\ Law)$ وجود دارد که می‌گوید :

وقتی نیرویی بر فنر اعمال شود، طول فنر یک تابع خطی از نیروی وارده خواهد بود.

بر طبق این قانون اگر L نشان‌دهنده‌ی طول فنر فوق و F نشان دهنده‌ی نیروی وارد بر فنر باشد، آنگاه می‌بایست ثابت‌هایی چون p, q موجود باشند به طوری‌که: $L = p + qF$ که در واقع معادله‌ی یک خط می‌باشد.

هدف پیدا کردن مقادیر p, q می‌باشد تا بتوان پس از آن به ازای هر نیروی دلخواه F طول فنر را پیش‌بینی نمود.

فرض کنیم به ازای نیروهای مختلف که بر فنر وارد می‌شود طول آنها به صورت زیر باشد.



توجه کنید که در اینجا می توان واحد نیرو را نیوتن و واحد طول را سانتی‌متر در نظر گرفت اما آنچه مهم است در هر آزمایشی از واحد های یکسانی استفاده کنیم.

با توجه به شکلهای داده‌شده جدول زیر را برای جفت‌های (F, L) داریم :

F	۱	۳	۵	۸
L	۵/۱	۷	۸/۳	۱۱/۲

حال با استفاده از قانون هوک داریم :

$$\begin{cases} ۵/۱ = p + q \\ ۷ = p + ۳q \\ ۸/۳ = p + ۵q \\ ۱۱/۲ = p + ۸q \end{cases} \tag{۱}$$

در حالت فرم ماتریسی_برداری داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۱ & ۵ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵/۱ \\ ۷ \\ ۸/۳ \\ ۱۱/۲ \end{bmatrix}$$

که یک دستگاه غیر مربعی با ماتریس ضرایب ۴×۲ است. به علاوه از معادله اول و دوم در رابطه‌ی (۱) داریم :

$$۷ - ۵/۱ = p + ۳q - p - q \Rightarrow ۲q = ۱/۹ \Rightarrow q = ۰/۹۵$$

در حالی‌که از معادله‌ی اول و سوم در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت :

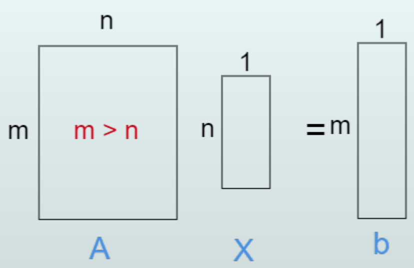
$$۸ - ۵/۱ = p + ۵q - p - q \Rightarrow ۴q = ۳/۲ \Rightarrow q = ۰/۸$$

و این تناقض است.

بنابراین دستگاه (۱) دارای جواب نمی‌باشد. این امر در حالت کلی نیز درست است یعنی در عمل دستگاه هایی مستطیلی که در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است جواب ندارند. دستگاه (۱) را که در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد را یک دستگاه فرامعین (Overdetermined) گویند.

تعریف ۶.۱

دستگاه $AX = b$ را که در آن A ماتریسی $m \times n$ باشد را فرامعین گوییم هرگاه $m > n$. شمای کلی یک دستگاه فرا معین به صورت زیر است.



به مثالی دیگر از یک دستگاه معادلات غیر مربعی توجه کنید.

مثال ۶.۱

شخصی می‌خواهد با بن کتاب ۲۷۰ هزار تومان کتاب بخرد اگر این بن‌ها ۵۰ هزار تومانی و ۳۰ هزار تومانی باشند، چند بن ۵۰ هزار تومانی و چند بن ۳۰ هزار تومانی باید بپردازد ؟

حل: کافی‌است اعداد صحیح $x_۱, x_۲$ به قسمی محاسبه شوند که :

$$۳۰x_۱ + ۵۰x_۲ = ۲۷۰$$

یا

$$۳x_۱ + ۵x_۲ = ۲۷$$

و یا به شکل ماتریسی داریم :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۲۷$$

که یک دستگاه با یک معادله و دو مجهول است یعنی تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است. چنین دستگاه‌هایی را دستگاه فرومعین (Underdetermined) می‌نامند.

به یک نمونه مثال دیگر توجه کنید.

مثال ۶.۲

داده‌های جدولی زیر مفروض است .

x_i	-۱	۱	۲
f_i	۲	۱	۳

می‌خواهیم یک تابع درجه سوم به صورت $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ به قسمی به دست آوریم که بتواند به بهترین نحو داده‌های جدولی فوق را برازش نماید. چنین تابعی باید از حل معادلات زیر تعیین گردد.

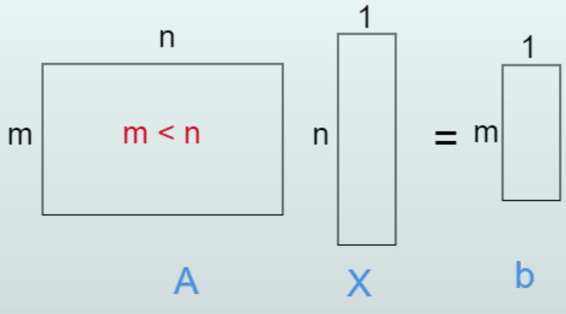
$$\begin{cases} f(-۱) = ۲: & -a + b - c + d = ۲ \\ f(۱) = ۱: & a + b + c + d = ۱ \\ f(۲) = ۳: & ۸a + ۴b + ۲c + d = ۳ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۸ & ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

واضح است که دستگاه فوق یک دستگاه فرومعین است.

تعریف ۶.۲

دستگاه $AX = b$ را که در آن A ماتریسی $n \times m$ باشد را فرومعین گوییم هرگاه $m < n$. شمای کلی یک دستگاه فرومعین به صورت زیر است.



۱.۱ تعداد جواب‌های دستگاه‌های غیر مربعی

قضیه زیر در حالت کلی در باره جواب‌های دستگاه‌های غیر مربعی بحث می کند. منظور از $\text{Rank}(A)$ رتبه ماتریس A می‌باشد.

قضیه ۶.۱

دستگاه خطی $AX = b$ را با $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, X \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید.

۱- اگر $\text{Rank}(A) = \text{Rank}\left([A|\, b]\right) = n$ جواب دستگاه یکتاست.

۲- اگر $\text{Rank}(A) = \text{Rank}\left([A|\, b]\right) < n$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۳- اگر $\text{Rank}(A) \neq \text{Rank}\left([A|\, b]\right)$ دستگاه جواب ندارد.

توجه ۶.۱

علاقمندان برای دیدن اثبات قضیه به پیوست فصل ششم مراجعه نمایند.

در ادامه برای هریک از حالتهای قضیه مثال هایی ارائه شده است.

مثال ۶.۳

در مورد تعداد جواب های دستگاه مقابل بحث کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

حل: داریم :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه قبل باید رتبه ماتریس ضرایب و همچنین رتبه ماتریس افزوده را پیدا کنیم . برای محاسبه رتبه A ابتدا فرم سطری پلکانی A را می‌یابیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to R_۲ + ۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳ \to R_۳ - ۳R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to -\frac{۱}{۲} R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۱ \to R_۱ - R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه دوسطر غیر صفر در فرم سطری‌پلکانی A وجود دارد پس $\text{Rank}(A) = ۲$
حال برای محاسبه رتبه‌ی ماتریس افزوده داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۲ & -۶ \\ ۳ & ۱ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to R_۲ + ۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳ \to R_۳ - ۳R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Rank}([A|\, b]) = ۲$$

این نشان می‌دهد که $\text{Rank}(A) = \text{Rank}([A|\, b]) = ۲ = n$. پس طبق حالت اول قضیه، دستگاه داده‌شده جواب یکتا دارد.

از آنجاییکه فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس افزوده به صورت $\left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$ است، می‌توان دید که این جواب یکتا به صورت زیر است :

$$x_1 = \frac{۳}{۲} \quad , \quad x_2 = \frac{۳}{۲}$$

توجه ۶.۲

به دستگاهی که جواب نداشته باشد دستگاه ناسازگار (inconsistent) گوییم. در غیراینصورت گوییم دستگاه سازگار است.

مثال ۶.۴

در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات داده شده بحث کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۴ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

حل: محاسبه‌ی رتبه A :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۴ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - ۲R_1} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - ۳R_1} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Rank}(A) = ۱$$

از طرفی برای محاسبه‌ی رتبه‌ی $[A|\, b]$ داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ & -۲ \\ ۳ & -۶ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - ۲R_1} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۶ & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - ۳R_1} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Rank}([A|\, b]) = ۱$$

لذا داریم :

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}([A|\, b]) = ۱ < n = ۲$$

پس طبق حالت دوم قضیه دستگاه داده‌شده بی‌شمار جواب دارد، در واقع با توجه به فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس افزوده می توان دریافت که جواب دستگاه داده شده معادل با جوابهای معادله‌ی $x_1 - ۲x_2 = -۱$ است که اگر $x_2 = t \in \mathbb{R}$ دلخواه فرض شود آنگاه $x_1 = ۲t - ۱$ خواهد بود. لذا مجموعه جواب‌های دستگاه داده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\{[۲t - ۱, t]^T \mid t \in \mathbb{R}\}$$

توجه کنید در حالت کلی دستگاه های فرامعین ناسازگارند یعنی جواب ندارند زیرا تعداد مجهولات این دستگاه ها کمتر از تعداد معادلات است اما مثال فوق نشان می دهد که چنین دستگاه هایی ممکن است بی نهایت جواب نیز داشته باشند.

مثال ۶.۵

در مورد جوابهای دستگاه زیر بحث کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ \\ -۲ & ۵ & -۸ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -۷ \\ ۱۴ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا رتبه‌ی A را محاسبه می کنیم. داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ \\ -۲ & ۵ & -۸ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to R_۲ + ۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to -R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۱ \to R_۱ + ۳R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Rank}(A) = ۲$$

حال برای رتبه‌ی $[A|\, b]$ داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ & -۷ \\ -۲ & ۵ & -۸ & ۱۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to R_۲ + ۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ & -۷ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to -R_۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۴ & -۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۱ \to R_۱ + ۳R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ & -۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Rank}\left([A|\, b]\right) = ۲$$

این نتیجه می‌دهد که :

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}\left([A|\, b]\right) = ۲ < n = ۳$$

پس طبق حالت دوم قضیه در اینجا نیز دستگاه داده شده بی‌شمار جواب خواهد داشت. با توجه به فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس افزوده داریم :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۴ & -۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ + ۴x_۳ = -۷ \\ x_۲ = ۰ \end{cases}$$

اگر $x_۳ = t \in \mathbb{R}$ انتخاب کنیم آنگاه $x_۱ = -۷ - ۴t$ خواهد بود و لذا مجموعه جواب‌های دستگاه به صورت زیر است :

$$\left\{[-۷ - ۴t, ۰, t]^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

توجه کنید این یک دستگاه فرومعین است و بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۶.۶

در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات داده شده بحث کنید:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & -۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا به محاسبه رتبه ماتریس A می پردازیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & -۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۲ \to R_۲ - R_۱]{R_۱ \to \frac{۱}{۵}R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۵} \\ ۰ & -\frac{۲۳}{۵} \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳ \to R_۳ - ۲R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۵} \\ ۰ & -\frac{۲۳}{۵} \\ ۰ & \frac{۳۹}{۵} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۲ \to -\frac{۵}{۲۳}R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۵} \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & \frac{۳۹}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۱\to R_۱-\frac{۳}{۵}R_۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & \frac{۳۹}{۵} \end{bmatrix}\xrightarrow{R_۳\to R_۳-\frac{۳۹}{۵}R_۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که $Rank(A)=۲$. اما

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۴ & ۷ \\ ۲ & ۹ & -۶ \end{bmatrix}\xrightarrow[R_۲\to R_۲-R_۱]{R_۱\to\frac{۱}{۵}R_۱}\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ ۰ & -\frac{۲۳}{۵} & \frac{۳۴}{۵} \\ ۲ & ۹ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_۲\to-\frac{۵}{۲۳}R_۲]{R_۳\to R_۳-۲R_۱}\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۳۴}{۲۳} \\ ۰ & \frac{۳۹}{۵} & -\frac{۳۲}{۵} \end{bmatrix}\xrightarrow[R_۳\to R_۳-\frac{۳۹}{۵}R_۲]{R_۱\to R_۱-\frac{۳}{۵}R_۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۲۵}{۲۳} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۳۴}{۲۳} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۱۸}{۲۳} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_۱\to R_۱-\frac{۲۵}{۲۳}R_۳]{R_۳\to\frac{۲۳}{۱۱۸}R_۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۳۴}{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\xrightarrow{R_۲\to R_۲+\frac{۳۴}{۲۳}R_۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که $Rank([A\,|\,b])=۳$ پس

$$۲=Rank(A)\neq Rank([A\,|\,b])=۳$$

لذا طبق حالت سوم قضیه، دستگاه داده شده جواب ندارد. این را می‌توان از فرم سطری پلکانی ماتریس افزوده دریافت:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases} x_۱=۰ \\ x_۲=۰ \\ ۰=۱ \end{cases}$$

آخرین تساوی یک تناقض است لذا دستگاه جواب ندارد.

توجه ۶.۳

با توجه به حالت سوم قضیه ، اگر $Rank(A)\neq Rank([A\,|\,b])$ آنگاه دستگاه $AX=b$ ناسازگار است.

تمرین ۶.۱

در مورد تعداد جواب‌های دستگاه‌های زیر

$$(a):\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۲ \\ ۶ & ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix},\qquad (b):\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$(c):\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} -۶ \\ -۲ \\ -۱۲ \end{bmatrix}$$

به وسیله‌ی قضیه ۶.۱ بحث کنید.

۲ روش‌های حل دستگاه فرامعین

همانطور که قبلا ذکر کردیم دستگاه $AX = b$ را که

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

با شرط $m > n$ باشد یک دستگاه فرامعین می‌نامیم. اگرچه در مثال‌های قبل دیدیم که یک دستگاه فرامعین ممکن است دارای جواب باشد اما به طور کلی در مسائل واقعی یک دستگاه فرامعین ناسازگار است به این معنی که ممکن است جواب نداشته باشد. وقتی که دستگاه فرامعین $AX = b$ ناسازگار باشد یعنی هیچ برداری در $\mathbb{R}^n$ نمی‌توان یافت که $AX = b$ برقرار باشد. در واقع برای هر عضو دلخواه X از $\mathbb{R}^n$ خواهیم داشت

$$AX \neq b$$

در این حالت بردار باقی مانده $r = b - AX$ مخالف صفر می‌باشد. با توجه به اینکه یک دستگاه از یک مساله کاربردی ناشی می‌شود بنابراین باید سعی شود جوابی برای آن ساخته شود. شاید در این حالت بهترین کاری که می‌شود انجام داد این است که برداری چون X^* بیابیم که بردار AX^* به b نزدیک باشد یا به عبارتی مقدار نرم $||b - AX^*||$ کمترین مقدار را داشته باشد. بنابراین در حالت ناسازگاری یک دستگاه مساله کمینه سازی زیر را حل می‌کنیم.

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||b - AX|| = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||r|| \tag{۲}$$

که $||.||$ یک نرم برداری دلخواه است. با توجه اینکه اگر نرم را نرم یک یا بینهایت بگیریم در مساله ی بهینه سازی فوق به یک مساله ی مینی ماکس خواهیم رسید که در حالت کلی حل آن دشوار است اما اگر در (۲) از نرم۲ برداری استفاده کنیم مساله به حالت خاص زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||b - AX||_2 = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||r||_2$$

از طرفی با توجه به تعریف نرم ۲ برداری داریم

$$||r||_2 = \sqrt{r^T r}$$

بنابراین باید مساله زیر حل شود

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} \sqrt{r^T r} \tag{۳}$$

اما واضح است که اگر $||r||_2^2$ کمینه شود آنگاه $||r||_2$ نیز کمینه خواهد بود پس در عمل به جای حل مساله (۳) مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||b - AX||_2^2 = \min_{X\in\mathbb{R}^n} ||r||_2^2 = \min_{X\in\mathbb{R}^n} r^T r \tag{۴}$$

بنابراین وقتی دستگاه $AX = b$ ناسازگار باشد آنگاه مساله‌ی زیر را حل می‌کنیم

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} r^T r, \quad r = b - AX \tag{۵}$$

توجه کنید که عبارت $r^T r$ را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$\begin{aligned} r^T r &= (b - AX)^T (b - AX) = (b^T - X^T A^T)(b - AX) \\ &= b^T b - b^T AX - X^T A^T b + X^T A^T AX \end{aligned}$$

چون $(b^T AX)^T = X^T A^T b$ و $b^T AX$ یک اسکالر است پس $(b^T AX)^T = b^T AX$ و از آن $b^T AX = X^T A^T b$ نتیجه می‌شود لذا

$$r^T r = b^T b - 2b^T AX + X^T A^T AX \tag{۶}$$

قبل از بیان روش‌های حل مساله کمینه سازی (۵) به برخی مقدمات و یادآوری ها از فصل ۱ نیاز داریم که در اینجا آورده شده است.

یادآوری ۶.۱

عمود بودن و فضای برد و فضای پوچ

دو بردار X و Y را برهم عمود گوییم هرگاه $X^T Y = 0$ یا $Y^T X = 0$. توجه کنید وقتی گفته می شود X بر Y عمود است معادل با این است که Y بر X عمود باشد. البته باید هردو تعداد مولفه های برابر داشته باشند.
برای هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ دو زیر فضای وابسته مهم وجود دارد: برد A ، که توسط $\mathrm{R}(A)$ ، و فضای پوچ A که توسط $\mathrm{N}(A)$ نمایش داده می‌شوند.

$$\mathrm{R}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m |\ b = AX,\ X \in \mathbb{R}^n \text{به ازای برداری مانند}\}, \qquad \text{Range Space}$$
$$\mathrm{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n |\ AX = 0\}, \qquad \text{Null Space}$$

بعد فضای $\mathrm{R}(A)$ رتبه A نامیده می‌شود و توسط $\mathrm{Rank}(A)$ نمایش داده می‌شود. بعد فضای $\mathrm{N}(A)$ پوچی A نامیده می‌شود و توسط $\dim(\mathrm{N}(A))$ نمایش داده می‌شود.

توجه کنید که این فضاها برای ماتریس A^T به طور مشابه تعریف می گردند:

$$\mathrm{R}(A^T) = \{b \in \mathbb{R}^n |\ b = A^T X,\ X \in \mathbb{R}^m \text{به ازای برداری مانند}\},$$
$$\mathrm{N}(A^T) = \{X \in \mathbb{R}^m |\ A^T X = 0\}$$

نکته ۶.۱

زیرفضاهای $\mathrm{N}(A)$ و $\mathrm{R}(A^T)$ بر هم عمودند. یعنی هر بردار که عضو یکی از این زیر فضاها باشد، بر هر بردار در زیر فضای دیگر عمود است.

اثبات. فرض کنید $X \in \mathrm{R}(A^T)$ آنگاه $p \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $X = A^T p$. حال اگر $Y \in \mathrm{N}(A)$ دلخواه باشد آنگاه $AY = 0$ لذا:

$$X^T Y = (A^T p)^T Y = p^T AY = p^T \times 0 = 0$$

این یعنی اینکه عضوی دلخواه از $\mathrm{R}(A^T)$ بر عضوی دلخواه از $\mathrm{N}(A)$ عمود است پس این دو فضا بر هم عمودند:

$$\mathrm{R}(A^T) \perp \mathrm{N}(A)$$

□

نکته ۶.۲

زیر فضاهای $\mathrm{N}(A^T)$ و $\mathrm{R}(A)$ بر هم عمودند.

اثبات. فرض کنید $X \in \mathrm{R}(A)$ آنگاه $p \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که $X = Ap$. حال اگر $Y \in \mathrm{N}(A^T)$ دلخواه باشد آنگاه $A^TY = ۰$ لذا:

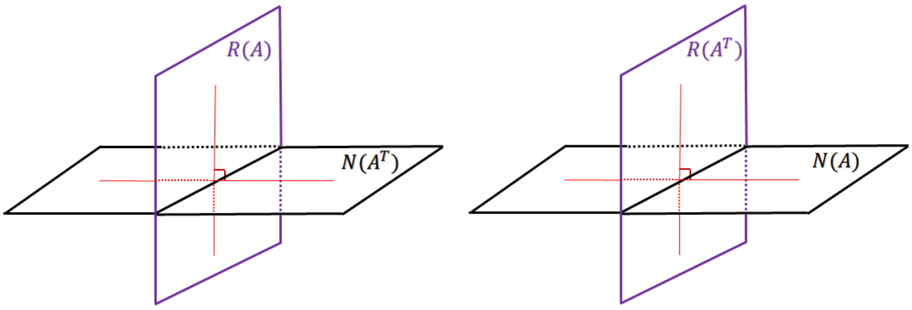
$$X^TY = (Ap)^TY = p^TA^TY = p^T \times ۰ = ۰$$

این یعنی اینکه عضوی دلخواه از $\mathrm{R}(A)$ بر عضوی دلخواه از $\mathrm{N}(A^T)$ عمود است پس این دو فضا بر هم عمودند:

$$\mathrm{R}(A) \perp \mathrm{N}(A^T)$$

□

شکل‌های زیر عمود بودن $\mathrm{R}(A)$ بر $\mathrm{N}(A^T)$ و $\mathrm{R}(A^T)$ بر $\mathrm{N}(A)$ را نشان می‌دهند. برای مثال شکل سمت راست نشان دهنده ی عمود بودن $\mathrm{N}(A)$ بر $\mathrm{R}(A^T)$ است.



لم ۶.۱

برای دو بردار دلخواه $X, Y \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$||X+Y||_۲^۲ = ||X||_۲^۲ + ۲X^TY + ||Y||_۲^۲ \tag{۷}$$

اثبات.

$$||X+Y||_۲^۲ = (X+Y)^T(X+Y) = (X^T+Y^T)(X+Y)$$
$$= X^TX + X^TY + Y^TX + Y^TY \tag{۸}$$

اما X^TY یک اسکالر است و ترانهاده‌اش با خودش برابر است یعنی $(X^TY)^T = X^TY$ لذا $Y^TX = (X^TY)^T = X^TY$. از (۸) داریم

$$||X+Y||_۲^۲ = X^TX + ۲X^TY + Y^TY$$

اما

$$X^TX = ||X||_۲^۲, \qquad Y^TY = ||Y||_۲^۲$$

پس

$$||X+Y||_۲^۲ = ||X||_۲^۲ + ۲X^TY + ||Y||_۲^۲$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

□

تمرین ۶.۲

نشان دهید
$$||X-Y||_۲^۲ = ||X||_۲^۲ - ۲X^TY + ||Y||_۲^۲$$
وقتی $n=۱$ ، این روابط شما را یاد کدام اتحادها می‌آورد؟

در ادامه ی درس جهت حل مساله ی مینیمم سازی یاد شده نیاز است تا گرادیان تابعی به صورت
$$f(X) = X^TA^TAX - ۲b^TAX + b^Tb$$
محاسبه شود.

لم ۶.۲

اگر A ماتریسی $n\times m$ ، b برداری $m\times ۱$ و X برداری $n\times ۱$ باشد آنگاه گرادیان
$$f(X) = X^TA^TAX - ۲b^TAX + b^Tb$$
به صورت زیر است:
$$\nabla f(X) = ۲A^TAX - ۲A^Tb$$

اثبات.
$$\nabla f(X) = \nabla(X^TA^TAX) - ۲\nabla(b^TAX) + \nabla(b^Tb)$$
حال تک تک گرادیان‌های فوق را محاسبه می‌کنیم. البته برای راحتی کار با ابعاد پایین محاسبات را انجام می‌دهیم.
اگر $m=n=۳$ و B ماتریسی ۳×۳ باشد و $B=A^TA=(b_{ij})$ واضح است که B متقارن است و
$$\nabla(X^TA^TAX) = \nabla(X^TBX)$$
اما
$$X^TBX = [x_۱, x_۲, x_۳]\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳\end{bmatrix}$$
$$= b_{۱۱}x_۱^۲ + ۲b_{۱۲}x_۱x_۲ + ۲b_{۱۳}x_۱x_۳ + b_{۲۲}x_۲^۲ + ۲b_{۲۳}x_۲x_۳ + b_{۳۳}x_۳^۲$$
لذا
$$\nabla(X^TBX) = (۲b_{۱۱}x_۱ + ۲b_{۱۲}x_۲ + ۲b_{۱۳}x_۳, ۲b_{۱۲}x_۱ + ۲b_{۲۲}x_۲ + ۲b_{۲۳}x_۳, ۲b_{۱۳}x_۱ + ۲b_{۲۳}x_۲ + ۲b_{۳۳}x_۳)^T$$
$$= ۲(b_{۱۱}x_۱ + b_{۱۲}x_۲ + b_{۱۳}x_۳, b_{۱۲}x_۱ + b_{۲۲}x_۲ + b_{۲۳}x_۳, b_{۱۳}x_۱ + b_{۲۳}x_۲ + b_{۳۳}x_۳)^T$$
اما
$$BX = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{۱۱}x_۱ + b_{۱۲}x_۲ + b_{۱۳}x_۳ \\ b_{۱۲}x_۱ + b_{۲۲}x_۲ + b_{۲۳}x_۳ \\ b_{۱۳}x_۱ + b_{۲۳}x_۲ + b_{۳۳}x_۳\end{bmatrix}$$
پس داریم
$$\nabla(X^TBX) = ۲BX = ۲A^TAX$$

بنابراین

$$\nabla(X^TA^TAX) = 2A^TAX$$

اکنون گرادیان توابع b^TAX و b^Tb را محاسبه می‌کنیم

$$b^TAX = [b_1, b_2, b_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= (b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31})x_1 + (b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32})x_2 + (b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33})x_3$$

پس

$$\nabla(b^TAX) = \nabla((b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31})x_1 + (b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32})x_2 + (b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33})x_3)$$

$$= (b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31}, b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32}, b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33})^T \tag{9}$$

اما

$$A^Tb = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31} \\ b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32} \\ b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

اکنون با قرار دادن (۱۰) در (۹) داریم:

$$\nabla(b^TAX) = A^Tb$$

در نهایت چون b^Tb مستقل از x_1, x_2, x_3 است پس

$$\nabla(b^Tb) = 0$$

بنابراین

$$\nabla f(x) = \nabla(X^TA^TAX) - 2\nabla(b^TAX) + \nabla(b^Tb) = 2A^TAX - 2A^Tb$$

□

اکنون آماده‌ایم نحوه‌ی به دست آوردن جواب مساله زیر را بررسی کنیم:

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} ||b - AX||_2^2 = \min_{X\in\mathbb{R}^n} r^Tr \tag{11}$$

قضیه ۶.۲

بردار X^* جواب مساله (۱۱) است اگر و تنها اگر $r^* = b - AX^*$ بر $\mathrm{R}(A)$ عمود باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنید X^* جواب مساله (۱۱) باشد طبق رابطه (۶) تابع

$$g(X) = ||b - AX||_2^2 = r^Tr = b^Tb - 2b^TAX + X^TA^TAX$$

می‌بایست در X^* کمینه باشد. پس باید گرادیان g در X^* صفر باشد. اما طبق لم قبلی می‌توان نوشت

$$\nabla g(X^*) = 2A^TAX^* - 2A^Tb = 0 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} A^TAX^* - A^Tb = 0$$

یا

$$A^Tb - A^TAX^* = 0 \tag{12}$$

یا

$$A^T(b - AX^*) = 0$$

یا

$$A^Tr^* = 0 \tag{13}$$

این نشان می‌دهد که r^* در $\mathrm{N}(A^T)$ قرار دارد و از آنجایی که $\mathrm{N}(A^T)$ بر $\mathrm{R}(A)$ عمود است پس r^* بر $\mathrm{R}(A)$ عمود است.

$(\Rightarrow)$ اکنون فرض کنیم که $r^* = b - AX^*$ بر $\mathrm{R}(A)$ عمود باشد. فرض کنید $w = Y - X^*$ که $Y \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است.
اولا Aw عضوی از $\mathrm{R}(A)$ است، ثانیا r^* بر هر عضو $\mathrm{R}(A)$ عمود است پس بر عضوی چون Aw نیز باید عمود باشد یعنی می‌بایست داشته باشیم $(Aw)^Tr^* = 0$ یا $(r^*)^TAw = 0$ یعنی

$$0 = (r^*)^TAw = (b - AX^*)^TA(Y - X^*) = (b - AX^*)^T(AY - AX^*)$$

در نتیجه

$$(b - AX^*)^T(AX^* - AY) = 0 \tag{14}$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$||b - AY||_2^2 = ||\underbrace{b - AX^*}_{V_1} + \underbrace{AX^* - AY}_{V_2}||_2^2$$

اما قبلا دیدیم که برای هر دو بردار دلخواه چون V_1 و V_2 داریم

$$||V_1 + V_2||_2^2 = ||V_1||_2^2 + 2V_1^TV_2 + ||V_2||_2^2$$

پس

$$||b - AY||_2^2 = ||b - AX^* + AX^* - AY||_2^2 = ||b - AX^*||_2^2 + \underbrace{2(b - AX^*)^T(AX^* - AY)}_{\text{طبق (14)}=0} + ||AX^* - AY||_2^2$$

$$= ||b - AX^*||_2^2 + ||AX^* - AY||_2^2 \geq ||b - AX^*||_2^2$$

از اینرو $||b - AX^*||_2 \geq ||b - AY||_2$. این نشان می‌دهد که برای هر Y دلخواه مقدار $||b - AX^*||_2$ از $||b - AY||_2$ کمتر و یا مساوی است که نشان می‌دهد X^* جواب مساله (11) است و اثبات تمام است. □

اگرچه قضیه‌ی فوق به طور مستقیم جواب مساله (11) را مشخص نمی‌نماید اما با توجه به شرایطی که برای X^* تعیین می‌کند می‌توان X^* را یافت.
در واقع طبق قضیه قبل از رابطه ی (12) داریم

$$A^Tb - A^TAX^* = 0$$

از اینجا باید داشته باشیم

$$A^TAX^* = A^Tb \qquad (۱۵)$$

بنابراین X^* در یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب A^TA و بردار سمت راست A^Tb صدق می‌کند.

به دستگاه (۱۵) معادلات نرمال گفته می‌شود که از حل آن X^* یعنی جواب مساله کمینه سازی (۱۱) به دست می‌آید.

۱.۲ الگوریتم حل دستگاه های فرامعین

طبق قضیه ی قبل برای یافتن جواب کمترین مربعات دستگاه فرامعین $AX = b$ لازم است تنها دستگاه مربعی $A^TAX^* = A^Tb$ را برای X^* حل کنیم. بنابراین طی چند گام می‌توان جواب کمترین مربعات یک مساله فرامعین $AX = b$ را یافت:
گام ۱: ماتریس $B = A^TA$ را تشکیل می‌دهیم.
گام ۲: بردار $c = A^Tb$ را تشکیل می‌دهیم.
گام ۳: دستگاه $BX^* = c$ را جهت به دست آوردن X^* حل می‌کنیم.

توجه ۶.۴

به X^* جواب کمترین مربعات دستگاه فرامعین می‌گوییم.

در ادامه به حل چند مساله‌ی فرامعین می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم که معادلات نرمال همیشه و بدون هیچ شرطی سازگار است. بنابراین همواره برای دستگاه فرامعین جواب کمترین مربعات وجود خواهد داشت.

توجه ۶.۵

دستگاه مربعی $BX^* = c$ در گام سوم با هریک از روش های تکراری یا مستقیم که در فصل های قبل بحث شد می تواند حل گردد.

مثال ۶.۷

دستگاه فرامعین زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۷ & ۹ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

ابتدا نشان دهید این دستگاه سازگار است سپس جواب کمترین مربعات آن را بیابید.

حل: ابتدا توجه کنید که $Rank(A) = Rank([A\,|\,b]) = ۲ = n$ لذا طبق حالت اول قضیه دستگاه دارای جواب یکتا است پس سازگار نیز هست. برای به دست آوردن جواب کمترین مربعات داریم.
گام ۱: ابتدا ماتریس $B = A^TA$ را تشکیل می دهیم

$$B = A^TA = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ & ۳ \\ -۳ & ۹ & -۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۷ & ۹ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸۳ & ۳۰ \\ ۳۰ & ۱۲۶ \end{bmatrix}$$

گام ۲: بردار $c = A^T b$ را تشکیل می دهیم

$$c = A^T b = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ & ۳ \\ -۳ & ۹ & -۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۳ \\ -۹۶ \end{bmatrix}$$

گام ۳:

$$BX^* = c \Rightarrow \begin{bmatrix} ۸۳ & ۳۰ \\ ۳۰ & ۱۲۶ \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} ۵۳ \\ -۹۶ \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه داریم $X^* = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ که یکتا جواب دستگاه اصلی نیز هست به علاوه باید باقی مانده صفر باشد

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۷ & ۹ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۶.۸

دستگاه فرامعین داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا توجه کنید که $\operatorname{Rank}(A) = ۲ \neq \operatorname{Rank}([A|\, b]) = ۳$ پس طبق قضیه دستگاه ناسازگار است.

گام ۱: ابتدا ماتریس $B = A^T A$ را تشکیل می دهیم

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

گام ۲: بردار $c = A^T b$ را تشکیل می دهیم

$$c = A^T b = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

گام ۳:

$$BX^* = c \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۲۹ \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۶}{۲۹} \end{bmatrix}$$

.

این جواب کمترین مربعات دستگاه است. توجه کنید که X^* در دستگاه اصلی صدق نمی کند.

$$AX^* = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۶}{۲۹} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۸۷} \\ \frac{۶۵}{۸۷} \\ -\frac{۱۰۱}{۸۷} \end{bmatrix} \neq b = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که دستگاه اصلی ناسازگار است اگرچه جواب کمترین مربعات دارد. به علاوه X^* بهترین جوابی است که باقی مانده $r^* = b - AX^*$ را در نرم ۲ کمینه کرده است.

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-۴}{۸۷} \\ \frac{۶۵}{۸۷} \\ \frac{-۱۰۱}{۸۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۸۷} \\ \frac{۲۲}{۸۷} \\ \frac{۱۴}{۸۷} \end{bmatrix}$$

به علاوه نرم باقی‌مانده برابر است با

$$\|r^*\|_۲ = \|[\frac{۴}{۸۷}, \ \frac{۲۲}{۸۷}, \ \frac{۱۴}{۸۷}]^T\|_۲ = ۰/۳۰۳۲$$

مثال قبل نشان می‌دهد که اگر چه دستگاه اصلی ناسازگار است اما جواب کمترین مربعات وجود دارد.

در ادامه خواهید دید که جواب کمترین مربعات همیشه وجود دارد چه دستگاه اصلی سازگار باشد چه ناسازگار باشد.

مثال ۶.۹

برای دستگاه فرامعین داده شده جواب کمترین مربعات را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \\ ۸ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

حل: گام ۱:

$$B = A^TA = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & -۴ & -۵ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸ & -۲۱ & ۲۵ \\ -۲۱ & ۹۹ & -۲۳ \\ ۲۵ & -۲۳ & ۵۳ \end{bmatrix}$$

گام ۲:

$$c = A^Tb = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & -۴ & -۵ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \\ ۸ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۱ \\ -۱۱۴ \\ ۵۱ \end{bmatrix}$$

گام ۳:

$$BX^* = c \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۸ & -۲۱ & ۲۵ \\ -۲۱ & ۹۹ & -۲۳ \\ ۲۵ & -۲۳ & ۵۳ \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} ۴۱ \\ -۱۱۴ \\ ۵۱ \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه فوق داریم

$$X^* = [\frac{۷۳}{۵۷}, \ \frac{-۱۰۱}{۱۱۴}, \ \frac{-۱}{۳۸}]^T$$

که جواب کمترین مربعات دستگاه داده شده است. به علاوه توجه کنید که

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \\ ۸ \\ ۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۷۳}{۵۷} \\ \frac{-۱۰۱}{۱۱۴} \\ \frac{-۱}{۳۸} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-۷}{۶} \\ ۰ \\ \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$$

چون $r^* \neq ۰$ پس دستگاه اصلی نیز ناسازگار است. بنابراین کمترین مقدار نرم باقی‌مانده‌ای که می‌توان به دست آورد برابر است با

$$\|r^*\|_۲ = \|[\frac{-۷}{۶},\ \ ۰,\ \ \frac{۲}{۳},\ \ \frac{۱}{۶}]^T\|_۲ = ۱/۳۵۴۰$$

به عنوان تمرین $\mathrm{Rank}(A)$ و $\mathrm{Rank}\,([A|\ b])$ را محاسبه کرده و در مورد تعداد جواب های دستگاه بحث کنید.

قضیه ۶.۳

معادلات نرمال همیشه جواب دارند (همواره سازگارند).

اثبات. معادلات نرمال به صورت

$$A^TAX = A^Tb$$

هستند. اگر نشان دهیم $A^Tb \in R(A^TA)$ آنگاه طبق تعریف z ای وجود دارد که $A^TAz = A^Tb$ یعنی دستگاه فوق سازگار خواهد بود. اما

$$R(A^TA) = \{y;\ \ y = A^TAz,\ z \in \mathbb{R}^n\} = \{y;\ \ y = A^Tw\} = R(A^T)$$

که $w = Az \in \mathbb{R}^m$. حال اگر به عضوهای $R(A^T)$ دقت کنیم به صورت A^Tw هستند اما A^Tb نیز اینچنین است پس

$$A^Tb \in R(A^T) = R(A^TA)$$

این نشان می‌دهد که معادلات نرمال $A^TAX = A^Tb$ برای هر A و b همیشه جواب دارند (همواره سازگارند).

$\square$

تا به اینجای کار دستگاه‌های فرامعینی که بررسی کردیم دارای ماتریس ضرایب با رتبه‌ی کامل بودند یعنی

$$Rank(A) = \min\{m, n\} = n$$

علت این که اصرار داریم این شرط برقرار باشد این است که تحت چنین شرطی ماتریس $B = A^TA$ متقارن معین مثبت خواهد بود (اثبات این موضوع به عهده خواننده است) و لذا B وارون‌پذیر خواهد بود. بنابراین دستگاه $BX^* = c$ که در گام سوم تشکیل می‌شود دارای جواب یکتای X^* خواهد بود. در صورتی که A رتبه کامل نباشد آنگاه ماتریس $B = A^TA$ منفرد خواهد بود و لذا باید دستگاه با ماتریس ضرایب منفرد $BX^* = c$ حل گردد. به علاوه چون نشان دادیم این دستگاه سازگار است پس بی نهایت جواب خواهد داشت یعنی در این حالت بی نهایت جواب کمترین مربعات موجود است بنابراین می توان گفت:

نکته ۶.۳

اگر A رتبه ناقص باشد آنگاه بی‌نهایت جواب کمترین مربعات داریم.

به طور کلی بررسی حل دستگاه فرامعین $AX = b$ وقتی که A رتبه ناقص است از اهداف این درس نمی‌باشد و لذا در اینجا به بررسی آن نمی‌پردازیم. اگرچه در مثال بعدی مختصرا به این موضوع پرداخته شده است.

مثال ۶.۱۰

در مورد تعداد جواب های دستگاه مقابل بحث کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

حل: در گام ۱ داریم:

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix}$$

واضح است که $\det(B) = 0$ لذا B منفرد است. از طرفی در گام ۲ ام داریم

$$c = A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

در گام ۳ باید دستگاه منفرد زیر را حل کنیم

$$BX^* = c \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} -14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده این دستگاه را تشکیل می‌دهیم

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -28 & -14 \\ -28 & 56 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -28 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{14} R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

اگر $X^* = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ آنگاه طبق

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

دستگاه $BX^* = c$ معادل است با

$$\alpha - 2\beta = -1$$

پس اگر $\beta = t \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد آنگاه $\alpha = 2t - 1$. لذا هر بردار به صورت

$$X^* = \begin{bmatrix} 2t - 1 \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

جواب کمترین مربعات دستگاه $AX = b$ است. به علاوه چون

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t - 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس دستگاه $AX = b$ سازگار است و هر جواب کمترین مربعات آن یک جواب دستگاه نیز هست. به طور معمول وقتی تعداد جواب‌های کمترین مربعات بی‌شمار باشد علاقمندیم آن جوابی را که نسبت به مبدا کمترین فاصله را دارد را محاسبه کنیم معادلا یافتن جوابی که کمترین نرم ۲ را داشته باشد مطلوب است. اما به راحتی می‌توان دید که

$$\|X^*\|_2^2 = (2t-1)^2 + t^2 = 5t^2 - 4t + 1$$

واضح است که $\|X^*\|_2$ کمترین مقدار خود را دارد اگر مشتق $5t^2 - 4t + 1$ نسبت به t برابر صفر گردد یعنی $10t - 4 = 0$ یا $t = \frac{2}{5}$. به ازای این مقدار t جواب X^* برابر است با

$$X^* = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که در این حالت

$$\|X^*\|_2 = \sqrt{(\frac{-1}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

به دست می‌آید. بنابراین می‌توان گفت که دستگاه اولیه داده شده بی شمار جواب کمترین مربعات (که جواب دستگاه نیز هستند) دارد که در بین همه‌ی آنها جواب

$$X^* = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

با فاصله ی $\frac{1}{\sqrt{5}}$ نزدیک‌ترین آنها به مبدا است. اگر این دستگاه را به کمک نرم افزار متلب نیز حل کنید خواهید دید که جواب

$$X^* = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

را به دست می دهد. به نظر شما این نرم افزار از چه روشی برای محاسبه ی این جواب (یعنی جواب کمترین نرم در بین بیشمار جواب کمترین مربعات) بهره می برد؟

مثال ۶.۱۱

در مورد تعداد جواب‌های کمترین مربعات دستگاه زیر بحث کنید

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل: در گام ۱ داریم

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 30 & 9 & 60 \\ 9 & 98 & 18 \\ 60 & 18 & 120 \end{bmatrix}$$

که ماتریسی منفرد است (چرا؟). در گام ۲ام داریم

$$c = A^T b = \begin{bmatrix} 3 \\ 27 \\ 6 \end{bmatrix}$$

در گام ۳ باید دستگاه منفرد زیر را حل کنیم

$$\begin{bmatrix} 30 & 9 & 60 \\ 9 & 98 & 18 \\ 60 & 18 & 120 \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 27 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده این دستگاه به صورت زیر است

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 30 & 9 & 60 & 3 \\ 9 & 98 & 18 & 27 \\ 60 & 18 & 120 & 6 \end{array}\right]$$

که دارای فرم سطری پلکانی زیر است(به کمک نرم افزار متلب)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0/0178 \\ 0 & 1 & 0 & 0/2739 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{16}$$

حال فرض کنید $X^* = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix}$ آنگاه دستگاه (۱۶) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} \alpha + 2\theta = 0/0178 \\ \beta = 0/2739 \end{cases}$$

یعنی هرجواب کمترین مربعات باید به صورت زیر باشد

$$X^* = \begin{bmatrix} 0/0178 - 2\theta \\ 0/2739 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

اکنون مشابه مثال قبلی θ را به قسمی به دست می‌آوریم که $||X^*||_2$ کمینه گردد. نشان دهید که برای اینکار باید $\theta = 0/0071$ باشد. از آنجا

$$X^* = \begin{bmatrix} 0/0036 \\ 0/2739 \\ 0/0071 \end{bmatrix}$$

که دارای طولی به صورت زیر است

$$||X^*||_2 = 0/2740$$

۳ یک تعبیر هندسی برای به دست آوردن معادلات نرمال

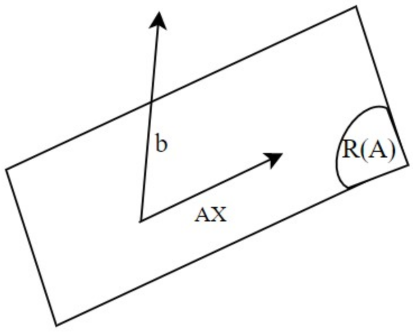
قبلا نشان دادیم که جواب کمترین مربعات مساله $AX = b$ که از حل مساله ی کمینه سازی

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} ||b - AX||_2^2 \tag{17}$$

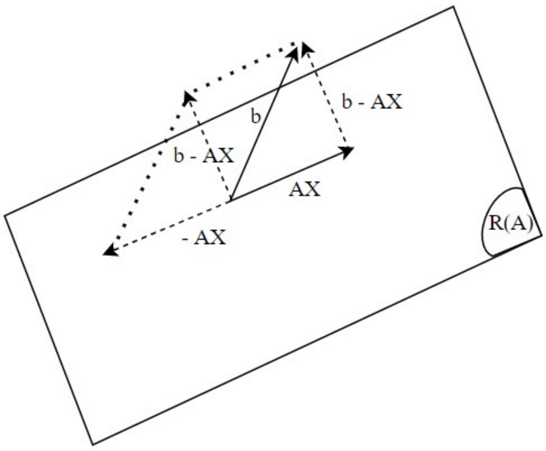
به دست می آید می تواند با حل دستگاه زیر (موسوم به معادلات نرمال) تعیین گردد.

$$A^T AX = A^T b \tag{18}$$

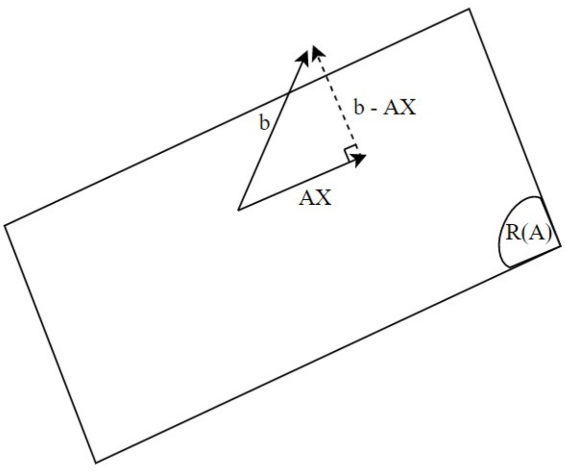
در ادامه به کمک یک تعبیر هندسی معادلات نرمال (۱۸) را جهت حل مساله (۱۷) به دست می آوریم. اگر دستگاه $AX = b$ ناسازگار باشد یعنی هیچ بردار X ای وجود نداشته باشد که تساوی $AX = b$ برقرار گردد آنگاه $b \notin R(A)$ زیرا اعضای $R(A)$ همگی به صورت AX هستند. بنابراین b خارج $R(A)$ قرار می گیرد (به شکل زیر دقت کنید.)



چون هدف از حل مساله مینیمم سازی (۱۷) کمینه کردن طول $b - AX$ است پس ابتدا $b - AX$ که درواقع تفاضل دو بردار AX و b است را تشکیل می دهیم(به شکل زیر دقت کنید.)



با توجه به شکل فوق واضح است که طول $b - AX$ کمینه است اگر $b - AX$ بر $R(A)$ عمود باشد(به شکل زیر دقت کنید)



لذا جواب مساله (۱۷) مثلا X^* باید به قسمی باشد که $r = b - AX$ بر $R(A)$ عمود باشد یعنی

$$r = b - AX^* \perp R(A)$$

اما قبلا دیدیم که زیر فضای $N(A^T)$ بر $R(A)$ عمود است. چون r نیز بر $R(A)$ عمود است پس r باید عضوی از $N(A^T)$ باشد و این یعنی این که

$$A^T r = 0 \tag{۱۹}$$

زیرا تمامی عضوهای $N(A^T)$ به صورت y ای هستند که $A^T y = 0$. اکنون از (۱۹) داریم $A^T(b - AX^*) = 0$ یا $A^T b - A^T AX^* = 0$ یا

$$A^T AX^* = A^T b \tag{۲۰}$$

تساوی (۲۰) نشان می دهد که X^* می بایست از حل معادلات نرمال تعیین گردد. همان نتیجه ای که قبلا نیز به آن دست یافته بودیم.

کد متلب حل با روش معادلات نرمال

```
%Matlab
A = [5, -3; 7, 9; 3, -6];
b = [8; -2; 9];
AT = A';
B = AT * A;
c = AT * b;
X_star = B\c;
r = b - A*X_star;

disp('The solution X* is:');
disp(X_star);
disp('r is ');
disp(r);
```

کد پایتون حل با روش معادلات نرمال

```
#Python
import numpy as np

A = np.array([[5, -3], [7, 9], [3, -6]])
b = np.array([8, -2, 9])
AT = np.transpose(A)
B = np.dot(AT, A)
c = np.dot(AT, b)
X_star = np.linalg.solve(B,c)
r = b - A@X_star

print("The solution X* is:", X_star)
print("r is ",r)
```

۴ یک روش دیگر برای محاسبه‌ی جواب کمترین مربعات

در ادامه یک روش دیگر برای محاسبه‌ی جواب کمترین مربعات معرفی می گردد که البته تنها وقتی که دستگاه دارای ابعاد پایینی است توصیه می گردد. علت این امر را خواهید دید.

دستگاه فرا معین

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. قبلا با حل معادلات نرمال دیدیم که جواب کمترین مربعات این دستگاه به صورت $X^* = [\frac{-۱}{۳}, \quad \frac{۶}{۲۹}]^T$ می‌باشد. اکنون می‌خواهیم با یک روش دیگر به محاسبه‌ي این جواب بپردازیم. فرض کنید $X^* = [s, t]^T$ جواب کمترین مربعات این دستگاه باشد. به ازای این بردار می‌بایست باقی مانده کمترین مقدار خود را داشته باشد اما

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲s - ۳t \\ s - ۲t + ۱ \\ ۴t - s - ۱ \end{bmatrix}$$

لذا

$$\|r^*\|_۲^۲ = (-۲s - ۳t)^۲ + (s - ۲t + ۱)^۲ + (۴t - s - ۱)^۲$$

با فرض اینکه $f(s,t) := \|r^*\|_۲^۲$ داریم

$$f(s,t) = ۶s^۲ + ۴s + ۲۹t^۲ - ۱۲t + ۲$$

پس

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} f = ۱۲s + ۴ = ۰ \\ \\ \frac{\partial}{\partial t} f = ۵۸t - ۱۲ = ۰ \end{cases}$$

لذا $s = -\frac{۱}{۳}$ و $t = \frac{۶}{۲۹}$ حاصل می‌شود و از آنجا $X^* = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۶}{۲۹} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید که همان جواب به دست آمده از معادلات نرمال است.

مثال ۶.۱۲

جواب کمترین مربعات دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ = ۴ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۳ \end{cases}$$

حل: فرض کنید $X^* = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ جواب کمترین مربعات باشد، آنگاه

$$r^* = b - AX^* = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - s + ۱ \\ -۲s - ۳t \\ ۴ - t - s \\ ۳ - ۲t - s \end{bmatrix}$$

پس

$$f(s,t) = \|r^*\|_۲^۲ = (t - s + ۱)^۲ + (-۲s - ۳t)^۲ + (۴ - t - s)^۲ + (۳ - ۲t - s)^۲$$

یا

$$f(s,t) = ۷s^۲ + ۱۶st - ۱۶s + ۱۵t^۲ - ۱۸t + ۲۶$$

بنابراین

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} f = 14s + 16t - 16 = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial t} f = 16s + 30t - 18 = 0 \end{cases}$$

بنابرین (s, t) بهینه از دستگاه زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} 14s + 16t = 16 \\ 16s + 30t = 18 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 7s + 8t = 8 \\ 8s + 15t = 9 \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم $t = -\frac{1}{41}$ و $s = \frac{48}{41}$. پس

$$X^* = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{41} \\ -\frac{1}{41} \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات دستگاه اصلی است. به علاوه توجه کنید که

$$r^* = b - AX^* = [\frac{-8}{41}, \ \frac{-93}{41}, \ \frac{117}{41}, \ \frac{77}{41}]^T \neq 0$$

پس دستگاه اصلی نیز ناسازگار است. توجه کنید چنانچه از معادلات نرمال برای حل این مساله استفاده کنیم داریم

$$A^TAX^* = A^Tb \Longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 15 \end{bmatrix} X^* = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

که دارای جواب $X^* = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{41} \\ -\frac{1}{41} \end{bmatrix}$ می باشد. همان نتیجه ی قبلی.

تمرین ۶.۳

نشان دهید که روش گفته شده معادل با حل معادلات نرمال است.

تمرین ۶.۴

جواب با کمترین مربعات مساله داده شده را با هر دو روش بیان شده بیابید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

آیا جواب به دست آمده، جواب دستگاه اصلی نیز هست؟

۵ حل دستگاه های فرامعین از طریق تبدیل آنها به دستگاه های مربعی

در کل این بخش فرض می شود که دستگاه فرامعین مفروض سازگار و ماتریس ضرایب رتبه کامل است.
دستگاه فرامعین $AX = b$ که $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $X \in \mathbb{R}^n$، $b \in \mathbb{R}^m$ با $m > n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید این دستگاه سازگار باشد و ماتریس A رتبه کامل باشد یعنی $Rank(A) = n$. بنابراین ماتریس A دارای n سطر یا ستون مستقل خطی است. فرض کنید این n سطر همان سطر های ۱ تا n ماتریس A باشند. در صورتی که چنین نباشد نیاز است معادلات موجود در دستگاه را با یکدیگر جابجا نمود تا چنین اتفاقی رخ دهد. پس می توان A را به صورت زیر افراز نمود:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

که A_1، $n \times n$ و A_2، $(m-n) \times n$ است. چون n سطر A_1 همان n سطر مستقل خطی A اند پس A_1 ماتریسی مربعی وارون پذیر است. اکنون می توان نوشت

$$AX = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} A_1 X \\ A_2 X \end{bmatrix}$$

که A_1X برداری $n \times 1$ و A_2X برداری $(m-n) \times 1$ است. بعلاوه با افراز بردار سمت راست b به صورت

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

که b_1، $n \times 1$ و b_2، $(m-n) \times 1$ است می توان دستگاه $AX = b$ را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 X \\ A_2 X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین X باید در معادلات زیر صدق کند

$$A_1 X = b_1 \tag{۲۱}$$

$$A_2 X = b_2 \tag{۲۲}$$

واضح است که (۲۱) نشان دهنده یک دستگاه مربعی است. از طرفی چون A_1 ماتریس وارون پذیر است پس (۲۱) دارای جواب منحصر به فرد $X^* = A_1^{-1} b_1$ است که جواب دستگاه اولیه $AX = b$ نیز هست.
اکنون از آنجایی که دستگاه سازگار است حالت

$$Rank(A) \neq Rank([A|b])$$

رخ نمی دهد (زیرا طبق حالت سوم قضیه اول فصل اگر این رابطه برقرار باشد دستگاه جواب ندارد) پس حتما باید داشته باشیم

$$Rank(A) = Rank([A|b])$$

اما ماتریس A رتبه کامل است یعنی $Rank(A) = n$ پس خواهیم داشت

$$Rank(A) = Rank([A|b]) = n$$

و بنابراین طبق حالت اول قضیه اول فصل دستگاه باید جواب یکتا داشته باشد. از آنجایی که $X^* = A_1^{-1} b_1$ جواب دستگاه است پس این همان یکتا جواب دستگاه $AX = b$ است. بنابراین به طور خلاصه داریم:

دستگاه فرامعین $AX = b$ داده شده است. با این فرض که A رتبه کامل باشد و دستگاه جواب داشته باشد آنگاه یکتا جواب آن به صورت زیر بدست می آید.

- **گام ۱** - ماتریس A را به صورت زیر افراز کنید:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

که A_1 ماتریسی $n \times n$ و A_2 ماتریسی $(m-n) \times n$ است.

- **گام ۲** - بردار b را به صورت زیر افراز کنید:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

که b_1 برداری $n \times 1$ و b_2 برداری $(m-n) \times 1$ است.

- **گام ۳** - یکتا جواب دستگاه داده شده را از حل دستگاه مربعی زیر بدست آورید

$$A_1 X = b_1$$

توجه ۶.۶

در الگوریتم فوق باید ابتدا رتبه ی A را حساب کنیم و از کامل بودن رتبه ی A اطمینان داشته باشیم.

توجه ۶.۷

شرط کامل بودن رتبه ی A برای استفاده از الگوریتم فوق کافی نیست تا دستگاه جواب داشته باشد بلکه شرط

$$Rank(A) = Rank([A|b]) = n$$

نیز باید برقرار باشد.

توجه ۶.۸

دستگاه مربعی $A_1 X = b_1$ به هر طریقی (مستقیم یا تکراری) می تواند حل گردد.

در ادامه با استفاده از روش گفته شده به حل چند مسئله (دستگاه) فرامعین می پردازیم.

مثال ۶.۱۳

یکتا جواب دستگاه فرامعین داده شده را از طریق تبدیل این دستگاه به یک دستگاه مربعی تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۵ \\ -۴ & -۳ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۵ \\ -۱۵ \end{bmatrix}$$

حل_ واضح است که دو سطر اول ماتریس مستقل خطی اند. همچنین $Rank(A) = Rank([A|b]) = ۲$. پس شرایط استفاده از الگوریتم برقرار است.

گام ۱ - ماتریس A را افراز می کنیم یعنی

$$A = \left[\begin{array}{cc} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۵ \\ \hline -۴ & -۳ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_۱ \\ \hline A_۲ \end{array}\right]$$

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}, \ A_۲ = [-۴ \ \ -۳]$$

گام ۲ - بردار b را افراز می کنیم یعنی

$$b = \left[\begin{array}{c} ۷ \\ ۵ \\ \hline -۱۵ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_۱ \\ \hline b_۲ \end{array}\right]$$

$$b_۱ = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}, \ b_۲ = [-۱۵]$$

گام ۳ - دستگاه مربعی $A_۱X = b_۱$ را حل می کنیم

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow X^* = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

این بردار یکتا جواب دستگاه اصلی است. این حقیقت را می توان به صورت زیر نیز بررسی نمود.
ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ -۴ & -۳ & -۱۵ \end{array}\right]$$

سپس فرم سطری پلکانی تحویل یافته این ماتریس را پیدا می کنیم

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ -۴ & -۳ & -۱۵ \end{array}\right] \xrightarrow[R_۳ \to R_۳ + ۴R_۱]{R_۱ \to \frac{۱}{۳}R_۱} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & -\frac{۲}{۳} & \frac{۷}{۳} \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ ۰ & -\frac{۱۷}{۳} & -\frac{۱۷}{۳} \end{array}\right] \xrightarrow[R_۱ \to R_۱ + \frac{۲}{۳}R_۲]{R_۲ \to \frac{۱}{۵}R_۲} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -\frac{۱۷}{۳} & -\frac{۱۷}{۳} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+\frac{17}{3}R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=1\end{cases}$$

که همان جواب $X^*=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ است.

مثال ۶.۱۴

تنها جواب دستگاه زیر را بیابید

$$\begin{cases}6x_1+3x_2=-3\\ 2x_1+x_2=-1\\ 4x_1+7x_2=3\end{cases}$$

حل: واضح است که $Rank(A)=Rank([A|b])=2$ پس تنها یک جواب برای این دستگاه موجود است. چون سطر اول و دوم مضربی از هم هستند پس دو سطر اول ماتریس ضرایب این دستگاه مستقل خطی نبوده‌اند و لذا الگوریتم گفته شده قابل اعمال براین دستگاه نمی‌باشد.
با تعویض سطر دوم و سوم این دستگاه داریم

$$\begin{cases}6x_1+3x_2=-3\\ 4x_1+7x_2=3\\ 2x_1+x_2=-1\end{cases}$$

پس به صورت ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix}6 & 3\\ 4 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-3\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$$

در این‌جا ماتریس A و بردار b جدید چنین‌اند

$$A=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 4 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}-3\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$$

با افراز ماتریس A و بردار b داریم

$$A=\left[\begin{array}{cc}6 & 3\\ 4 & 7\\ \hline 2 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}A_1\\ \hline A_2\end{array}\right]$$

$$b=\left[\begin{array}{c}-3\\ 3\\ \hline -1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}b_1\\ \hline b_2\end{array}\right]$$

حال دستگاه مربعی $A_1X=b_1$ را حل کنیم

$$\begin{bmatrix}6 & 3\\ 4 & 7\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix}\Rightarrow X^*=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

که همان یکتا جواب دستگاه اصلی است.

مثال ۶.۱۵

یکتا جواب دستگاه فرامعین داده شده را از طریق تبدیل این دستگاه به یک دستگاه مربعی تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & -۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ -۶ & -۱ & ۱ \\ ۷ & ۰ & ۶ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱۹ \\ ۱۵ \\ -۲۰ \\ ۲۱ \end{bmatrix}, \qquad m = ۴, \quad n = ۳, \; Rank(A) = ۳$$

حل: **گام ۱:**

$$A = \left[\begin{array}{ccc} ۳ & ۵ & -۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ -۶ & -۱ & ۱ \\ \hline ۷ & ۰ & ۶ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_۱ \\ \hline A_۲ \end{array}\right]$$

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & -۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ -۶ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

گام ۲:

$$b = \left[\begin{array}{c} ۱۹ \\ ۱۵ \\ -۲۰ \\ \hline ۲۱ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_۱ \\ \hline b_۲ \end{array}\right]$$

$$b_۱ = \begin{bmatrix} ۱۹ \\ ۱۵ \\ -۲۰ \end{bmatrix}, \qquad b_۲ = [۲۱]$$

گام ۳:

$$A_۱ X = b_۱ \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & -۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ -۶ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱۹ \\ ۱۵ \\ -۲۰ \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه مربعی فوق داریم $X^* = [۳, ۲, ۰]^T$ که یکتا جواب دستگاه اصلی است.

تمرین ۶.۵

نشان دهید که X^* در مثال قبل یکتا جواب دستگاه داده شده است(از فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس افزوده کمک بگیرید).

مثال ۶.۱۶

یکتا جواب دستگاه فرامعین داده شده را از طریق تبدیل این دستگاه به یک دستگاه مربعی تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -10 \\ 28 \end{bmatrix}, \qquad m = 4, \quad n = 3, \quad Rank(A) = 3$$

حل: گام ۱:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ \hline 8 & 2 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right]$$

گام ۲:

$$b = \left[\begin{array}{c} 9 \\ 7 \\ -10 \\ \hline 28 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

گام ۳:

$$A_1 X = b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه بالا به دست می‌آوریم $X^* = [3, \ -2, \ -2]^T$ که یکتا جواب دستگاه اصلی است. در ادامه با یافتن فرم سطری پلکانی ماتریس افزوده خواهیم دید که واقعا X^* یکتا جواب دستگاه اصلی است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & -10 \\ 8 & 2 & -4 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & -10 \\ 8 & 2 & -4 & 28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{26}{5} \\ -2 & 2 & 0 & -10 \\ 8 & 2 & -4 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{24}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{32}{5} \\ 8 & 2 & -4 & 28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 8R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{24}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{32}{5} \\ 0 & -\frac{46}{5} & \frac{12}{5} & \frac{68}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{5}{2} R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & -13 \\ 0 & \frac{24}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{32}{5} \\ 0 & -\frac{46}{5} & \frac{12}{5} & \frac{68}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{7R_2}{5}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{17}{2}&20\\0&1&\frac{11}{2}&-13\\0&\frac{24}{5}&-\frac{8}{5}&-\frac{32}{5}\\0&-\frac{46}{5}&\frac{12}{5}&\frac{68}{5}\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{24R_2}{5}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{17}{2}&20\\0&1&\frac{11}{2}&-13\\0&0&-28&56\\0&-\frac{46}{5}&\frac{12}{5}&\frac{68}{5}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+\frac{46R_2}{5}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{17}{2}&20\\0&1&\frac{11}{2}&-13\\0&0&-28&56\\0&0&53&-106\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to-\frac{R_3}{28}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{17}{2}&20\\0&1&\frac{11}{2}&-13\\0&0&1&-2\\0&0&53&-106\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{17R_3}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&\frac{11}{2}&-13\\0&0&1&-2\\0&0&53&-106\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\frac{11R_3}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&-2\\0&0&53&-106\end{array}\right]\xrightarrow{R_4\to R_4-53R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

اکنون واضح است که از فرم سطری پلکانی بالا داریم

$$x_1=3,\qquad x_2=-2,\qquad x_3=-2,\qquad 0=0,$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلا به دست آمده بود.

تمرین ۶.۶

یکتا جواب دستگاه فرامعین

$$\begin{cases}8x_1-4x_2+7x_3=24\\-5x_1-7x_3=-28\\-6x_1-2x_2+4x_3=14\\-2x_1+8x_2-3x_3=-4\end{cases}$$

را از طریق تبدیل آن به یک دستگاه مربعی به دست آورید.

کد متلب حل با روش تبدیل به دستگاه مربعی

```
%Matlab
A = [3, -2; 0, 5; -4, -3];
b = [7; 5; -15];

[m, n] = size(A);

if rank(A) ~= n rank([A, b]) ~= n
error('Matrix A is not full rank or the rank condition is not met');
```

```
    end

    A1 = A(1:n, :);
    b1 = b(1:n);
    x = A1 \ b1;
    disp('Solution x:');
    disp(x);
```

کد پایتون حل با روش تبدیل به دستگاه مربعی

```
        #Python
        import numpy as np

        A = np.array([[3, -2], [0, 5], [-4, -3]])
        b = np.array([[7], [5], [-15]])
        m, n = A.shape

        if np.linalg.matrix_rank(A) != n or np.linalg.matrix_rank(np.hstack
            ((A, b))) != n:
        raise ValueError("Matrix A is not full rank or the rank condition
            is not met")

        A1 = A[:n, :]
        b1 = b[:n]
        x = np.linalg.solve(A1, b1)

        print("Solution x:", x)
```

۶ حل دستگاه های فرو معین

قبلا دیدیم که دستگاه $AX = b$ که در آن A ماتریسی $m \times n$ باشد را فرومعین گوییم هرگاه $m < n$. یک دستگاه فرومعین برخلاف یک دستگاه فرامعین عموما سازگار است و بعلاوه بی نهایت جواب دارد. زیرا در چنین دستگاه هایی با توجه به اینکه تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است پس برخی از مجهولات را می توان برحسب مجهولات دیگر محاسبه نمود. مثلا دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

اگر مجهولات x_1 و x_2 را برحسب x_3 حساب کنیم داریم

$$x_1 = \frac{x_3 + 3}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_3 - 1}{2}$$

پس هر عضو از مجموعه

$$\left\{ [\frac{x_3 + 3}{2}, \ \frac{x_3 - 1}{2}, \ x_3]^T \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

جوابی از دستگاه است یعنی دستگاه بینهایت جواب دارد.

اگر چه در حالت های خاصی نیز ممکن است جواب نداشته باشند یعنی ناسازگار باشد مانند دستگاه زیر که قبلا نشان دادیم ناسازگار است

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

توجه ۶.۹

در پیوست این فصل بررسی یک دستگاه فرومعین سازگار از اهداف اصلی خواهد بود. اگرچه وقتی که دستگاه فرومعین ناسازگار است نیز بحث مختصری آورده می شود. از اینرو علاقمندان برای دیدن روش های حل دستگاه های فرومعین به پیوست این فصل مراجعه نمایند.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

augmented matrix .... ماتریس افزوده

C

coefficient matrix .... ماتریس ضرایب
column echelon form .... فرم پلکانی ستونی
column rank .... رتبه ستونی
column space .... فضای ستونی
consistent .... سازگار

D

dimension .... بعد

E

elementary row operations عملیات های سطری مقدماتی

F

full rank .... رتبه کامل

I

inconsistent .... ناسازگار

K

kernel .... هسته

L

linear combination .... ترکیب خطی
linear independence .... استقلال خطی
linearly dependent .... وابسته خطی

N

null space .... فضای پوچ
normal equations .... معادلات نرمال

O

overdetermined system .... دستگاه فرامعین

R

range space .... فضای برد
rank .... رتبه
rank-deficient .... رتبه ناقص
rank–nullity theorem .... قضیه رتبه پوچی
reduced row echelon form فرم پلکانی سطری تحویل یافته
row echelon form .... فرم پلکانی سطری
row space .... فضای سطری

U

underdetermined system .... دستگاه فرومعین
unique solution .... جواب یکتا

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

استقلال خطی .... linear independence

ب

بعد .... dimension

ت

ترکیب خطی .... linear combination

ج

جواب یکتا .... unique solution

د

دستگاه فرامعین .... overdetermined system
دستگاه فرومعین .... underdetermined system

ر

رتبه .... rank
رتبه ستونی .... column rank
رتبه کامل .... full rank
رتبه ناقص .... rank-deficient

س

سازگار .... consistent

ع

عملیات های سطری مقدماتی elementary row operations

ف

فرم پلکانی ستونی .... column echelon form
فرم پلکانی سطری .... row echelon form
فرم پلکانی سطری تحویل یافته reduced row echelon form
فضای برد .... range space
فضای پوچ .... null space
فضای ستونی .... column space
فضای سطری .... row space

ق

قضیه رتبه پوچی .... rank–nullity theorem

ک

هسته .... kernel

م

ماتریس افزوده .... augmented matrix
ماتریس ضرایب .... coefficient matrix
معادلات نرمال .... normal equations

ن

ناسازگار .... inconsistent

و

وابسته خطی .... linearly dependent

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل ششم: حل دستگاه های غیرمربعی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳