۱

موازنه

$$x_1\, C_6H_6 + x_2\, O_2 \longrightarrow x_3\, C + x_4\, H_2O$$

$$\begin{cases} C: \; 6x_1 = x_3 \\ H: \; 6x_1 = 2x_4 \\ O: \; 2x_2 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow 6x_1 = 4x_2 = 2x_4 = x_3$$

۴ مجهول داریم و ۳ معادله که بنابراین یک معادله برای حل دقیق و رسیدن به جواب یکتا کم داریم ولی می‌توانیم برای موازنه کردن یک معادله شیمیایی کوچکترین مجهول را یک درنظر بگیریم و بقیه مجهولات را براساس آن بدست بیاوریم

برای مثال در این معادله x_1 کوچکترین مجهول است و فرض می‌کنیم $x_1=1$ و داریم:

$$x_1=1 \;,\; x_2=1.5 \;,\; x_3=6 \;,\; x_4=3$$

و چون x_2 صحیح نیست و می‌خواهیم همه ضرایب صحیح باشند کل ضرایب را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\boxed{x_1=2 \;,\; x_2=3 \;,\; x_3=12 \;,\; x_4=6}$$

۲

ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم:

و سپس از روش حذفی گاوس-جردن استفاده می‌کنیم به این شکل که ابتدا دستگاه را بالامثلثی و سپس پایین مثلثی می‌کنیم یا بالعکس.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$

$R_4 \leftarrow R_4 - R_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2$

$R_4 \leftarrow R_4 - 9R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 14 & -1 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$

ص بعدی

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow -\frac{1}{2}R_4]{R_2 \leftarrow 2R_2,\; R_3 \leftarrow \frac{1}{12}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

حال باید سعی کنیم ماتریس بدست آمده را قطری کنیم:

$$R_3 \leftarrow R_3 - \tfrac{2}{3}R_4$$
$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_4$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - \tfrac{1}{2}R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & -5 & 0 & \frac{29}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{17}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \tfrac{3}{2}R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

حال به یک ماتریس قطری رسیده‌ایم و می‌توانیم مجهولات را به راحتی بدست بیاوریم:

$$\boxed{x_1 = \tfrac{1}{3},\quad x_2 = \tfrac{7}{6},\quad x_3 = -\tfrac{8}{3},\quad x_4 = \tfrac{9}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0.3333 \\ x_2 &= 1.1667 \\ x_3 &= -2.6667 \\ x_4 &= 4.5 \end{aligned}}$$

۳) الف) با توجه به این که این دستگاه یک دستگاه همگن است و $b=[0,0,0]^T$ در نتیجه در هر حالت این دستگاه جواب بدیهی $\boxed{x_1=x_2=x_3=0}$ را خواهد داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & p & 0 \end{array}\right]$$

در نتیجه این دستگاه همواره سازگار خواهد بود و ممکن نیست ناسازگار باشد.

ب) قضیه: دستگاه خطی $AX=b$ را با $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $X,b\in\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید:

- اگر $Rank(A)=Rank([A|b])=n$ آنگاه دستگاه جوابی یکتا دارد.
- اگر $Rank(A)=Rank([A|b])<n$ آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.
- اگر $Rank(A)\neq Rank([A|b])$ آنگاه دستگاه جوابی ندارد.

برای پیدا کردن Rank می‌توانیم ماتریس را به شکل سطری پلکانی تحویل یافته درآوریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & p & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3+R_1]{R_2 \leftarrow R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & p+1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3-3R_2]{R_1 \leftarrow R_1-2R_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \end{array}\right]$$

حال اگر در سطر سوم $\boxed{p=2}$ باشد در این صورت کل درایه‌های سطر سوم صفر می‌شوند و

$$Rank(A)=Rank([A|b])=2<3$$

و با توجه به قضیه بالا در این صورت این دستگاه بی‌نهایت جواب خواهد داشت.

در غیر این صورت اگر $\boxed{p\neq 2}$ به ماتریس سطری پلکانی تحویل یافته زیر می‌رسیم:

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{p-2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow Rank(A)=Rank([A|b])=3=n$$

و با توجه به قضیه در این حالت دستگاه جواب یکتا خواهد داشت.

if $p=2$ بی‌نهایت جواب

if $p\neq 2$ جواب یکتا

④ فرض کنیم دستگاه خطی ما به شکل مقابل باشد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn} = b_n \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{ماتریس افزوده}} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] = [A\,|\,b]$$

الف) حال فرض کنیم که می‌خواهیم جای دو ستون A_i و A_j را عوض کنیم. اگر بخواهیم جواب این دستگاه عوض نشود بوضوح مشخص است که باید جای متغیرهای x_i و x_j را نیز عوض کنیم تا جواب تغییری نکند. فرض کنیم $i<j$:

$$a_{K1}x_1 + \cdots + \underbrace{a_{Kj}\,x_j}_{} + \cdots + \underbrace{a_{Ki}x_i}_{} + a_{Kn}x_n = b_K \qquad 1 \leq K \leq n$$

فقط جای این دو عوض شده ولی کلیت معادله تغییری نکرده است

بنابراین اگر جای دو ستون A_i و A_j عوض شود ولی جای x_i و x_j عوض نشود معادلات تغییر پیدا می‌کنند و در نهایت جواب x_i و x_j عوض می‌شوند (زیرا در کل باید معادلات ثابت بمانند)

و جواب نهایی به شکل زیر در می‌آید:

جواب اولیه : $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$

جواب جدید : $X' = [\underbrace{x_1}_{1}, \underbrace{x_2}_{2}, \cdots, \underbrace{x_j}_{i}, \cdots, \underbrace{x_i}_{j}, \cdots, x_n]$ $\quad i<j$

$\boxed{\text{جای } x_i \text{ و } x_j \text{ عوض می‌شود}}$

ب) اگر بخواهیم ستون A_i را با αA_i جایگزین کنیم و بخواهیم جواب معادلات تغییر نکند باید جواب متغیر x_i در یک $1/\alpha$ ضرب شود تا معادلات ثابت بمانند و همان دستگاه قبلی را داشته باشیم

$$a_{K1}x_1 + \cdots + \alpha a_{Ki}\,x_i\times\frac{1}{\alpha} + \cdots + a_{Kn}x_n = b_K \qquad K = 1,2,\ldots,n$$

در این حالت پاسخ تغییری نمی‌کند اما اگر این کار را نکنیم x_i در $1/\alpha$ ضرب می‌شود و بنابراین به این شکل در می‌آید:

جواب اولیه : $X = [x_1, \cdots, x_n]$

جواب جدید : $X' = [x_1, \cdots, \frac{1}{\alpha}x_i, \cdots x_n]$

$$\boxed{x_{i_{new}} = \frac{1}{\alpha}x_{i_{old}}}$$

ج) در این حالت معادلات به شکل مقابل تغییر می‌کنند:

$$a_{K1}x_1 + \cdots + (a_{Ki} + \alpha a_{Kj})x_i + \cdots + \underbrace{a_{Kj}x_j}_{} + \cdots + a_{Kn}x_n = b_K \qquad K=1,\ldots,n$$

$$\cdots + a_{Ki}x_i + \cdots + a_{Kj}\underbrace{(\alpha x_i + x_{j_{new}})}_{x_{j_{old}}} + \cdots$$

در نتیجه در این حالت داریم:

$$\boxed{x_{j_{new}} = x_{j_{old}} - \alpha x_i}$$

$\boxed{x_i \text{ تغییر نمی‌کند}}$

۵) الف) تجزیه کروت

$$V_2=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix}l_{11} & 0\\ l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}l_{11} & l_{11}u_{12}\\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22}\end{bmatrix}\Longrightarrow \begin{array}{ll} l_{11}=1 & u_{12}=t_1\\ l_{21}=1 & l_{22}=t_2-t_1\end{array}$$

$$V_3=\begin{bmatrix}1 & t_1 & t_1^2\\ 1 & t_2 & t_2^2\\ 1 & t_3 & t_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13}\\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}\\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} l_{11}=1 & u_{12}=t_1 & u_{13}=t_1^2\\ l_{21}=1 & l_{22}=t_2-t_1 & u_{23}=t_2+t_1\\ l_{31}=1 & l_{32}=t_3-t_1 & l_{33}=(t_3-t_1)(t_3-t_2)\end{array}$$

$$V_4=\begin{bmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3\\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3\\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3\\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24}\\ 0 & 0 & 1 & u_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14}\\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14}+l_{22}u_{24}\\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+l_{33}u_{34}\\ l_{41} & l_{41}u_{12}+l_{42} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+l_{44}\end{bmatrix}$$

پس از محاسبات بسیار به نتایج صفحه بعدی می‌رسیم

$l_{11}=1$	$u_{12}=t_1$	$u_{13}=t_1^2$	$u_{14}=t_1^3$
$l_{21}=1$	$l_{22}=(t_2-t_1)$	$u_{23}=t_2+t_1$	$u_{24}=t_2^2+t_1^2+t_1t_2$
$l_{31}=1$	$l_{32}=t_3-t_1$	$l_{33}=(t_3-t_1)(t_3-t_2)$	$u_{34}=t_1+t_2+t_3$
$l_{41}=1$	$l_{42}=t_4-t_1$	$l_{43}=(t_4-t_1)(t_4-t_2)$	$l_{44}=(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)$

الگوی مدنظر روی عناصر قطر اصلی ماتریس L در تجزیه کروت مشهود است. (البته روی بقیه عناصر هم الگوها موجودند)

$$l_{11}=1 \quad , \quad l_{22}=(t_2-t_1) \quad , \quad l_{33}=(t_3-t_1)(t_3-t_2), \; l_{44}=(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)$$

$$l_{nn}=(t_n-t_1)(t_n-t_2)\cdots(t_n-t_{n-1})=\prod_{i=1}^{n-1}(t_n-t_i)$$

ب) با توجه به الگوی عناصر روی قطر اصلی L که در مرحله قبل پیدا کردیم می‌توان نوشت:

$$V_n = LU$$

$$\det(V_n)=\det(L_n)\underbrace{\det(U_n)}_{1} = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn} = \boxed{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}(t_i-t_j)}$$

۶) الف) شرط وجود تجزیه چولسکی برای یک ماتریس این است که متقارن و معین مثبت باشد. متقارن که بوضوح هست و برای معین مثبت بودن باید برای هر بردار ستونی غیر صفر z با n سطر حاصل z^TMz یک مقدار عددی مثبت باشد.

$$M \text{ positive definite} \iff z^TMz>0 \quad \text{for all } z\in\mathbb{R}^n\setminus 0$$

یک ماتریس معین مثبت است هرگاه متقارن باشد و تمام مقادیر ویژه های آن مثبت باشند که این شرط برای A برقرار است. (می‌توانیم در متلب چک کنیم)

پیاده سازی این قسمت در notebook

ب) notebook

ج) زمان اجراهای این الگوریتم ها در notebook موجود است و الگوریتم های تخصصی استفاده شده در کتابخانه های python و یا Matlab با سرعت بسیار بیشتری این مسائل را حل می‌کنند زیرا از محاسبات موازی و الگوریتم‌های تخصصی و پیاده سازی های بهینه در آن ها استفاده شده است.