دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

استاد درس: مهدی دهقان

بهار ۱۴۰۳

تحلیل و بررسی ویژگی‌های ماتریس‌های پنج‌قطری

درس جبرخطی عددی

امیرعطا غفاریان

شماره دانشجویی: ۹۹۲۶۰۷۳

پروژه نهایی

چکیده

در این مقاله، ما به بررسی و تحلیل مفصل ماتریس‌های پنج‌قطری پرداخته‌ایم که در بسیاری از مسائل مهندسی و علمی، به ویژه در حل معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی کاربرد دارند. این تحقیق شامل استخراج فرمول‌های عمومی برای محاسبه چندجمله‌ای‌های مشخصه و بردارهای ویژه مربوط به این دسته از ماتریس‌ها می‌باشد. علاوه بر این، یک الگوریتم محاسباتی جدید و بهینه برای تعیین دترمینان ماتریس‌های پنج‌قطری ارائه شده است که نه تنها دقت بالایی دارد، بلکه از نظر محاسباتی نیز بسیار کارآمد است.

کلمات کلیدی: ماتریس‌های پنج‌قطری؛ چندجمله‌ای مشخصه؛ دترمینان؛ مقادیر ویژه؛ بردارهای ویژه

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

۱ مقدمه

از دیدگاه عملی، ماتریس‌های پنج‌قطری اغلب از مسائل مقدار مرزی که شامل مشتقات مرتبه چهارم هستند، نشأت می‌گیرند و فرمول‌های محاسباتی سریع برای دترمینان ها لازم است تا به طور مؤثر وجود راه‌حل‌های منحصر به فرد برای معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) را آزمایش کنند. این مشکل در بسیاری از کاربردها مانند گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی در ۲ بعد یا ۳ بعد با استفاده از تفاضل محدود یا المان محدود رخ می‌دهد. در این مقاله، ما فرمول‌های کلی برای چندجمله‌ای‌های ویژه و بردارهای ویژه مربوط به ماتریس‌های پنج‌قطری را استخراج کرده و الگوریتم جدیدی برای یافتن دترمینان ماتریس‌های پنج‌قطری عمومی توسعه می‌دهیم.

۱.۱ شرح مسأله

ماتریس‌های پنج‌قطری بخش مهمی از تحلیل‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی هستند که درکاربردهای مهندسی و علمی به کرات دیده می‌شوند. این نوع ماتریس‌ها، به دلیل ساختار منحصر به فرد خود، چالش‌های خاصی را در محاسبات عددی ایجاد می‌کنند. یکی از اصلی‌ترین چالش‌ها، پیدا کردن روش‌های محاسباتی کارآمد برای تعیین دترمینان و بردارهای ویژه است که در این مقاله به آن پرداخته شده است. توسعه الگوریتم‌های جدید که قادر به انجام این محاسبات با دقت و سرعت بالا هستند، می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر روی کاربرد این ماتریس‌ها در مدل‌سازی‌های پیچیده داشته باشد.

۲ پیش نیاز ها

دنباله‌های چندجمله‌ای $\{A_i\}_{i\geq 0}$ و $\{B_i\}_{i\geq 0}$ که با یک رابطه بازگشتی پنج‌ترمی مشخص شده‌اند، در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} xA_0(x) &= c_1A_2(x) + b_1A_1(x) + a_1A_0(x), \\ xA_1(x) &= c_2A_3(x) + b_2A_2(x) + a_2A_1(x) + \alpha_2A_0(x), \\ xA_{i-1}(x) &= c_iA_{i+1}(x) + b_iA_i(x) + a_iA_{i-1}(x) + \alpha_iA_{i-3}(x) + \beta_iA_{i-4}(x) \quad \text{for } i \geq 3. \end{aligned} \tag{۱}$$

با شرایط اولیه $A_0(x) = 0$ و $A_1(x) = 1$، و:

$$\begin{aligned} xB_0(x) &= c_1B_2(x) + b_1B_1(x) + a_1B_0(x), \\ xB_1(x) &= c_2B_3(x) + b_2B_2(x) + a_2B_1(x) + \alpha_2B_0(x), \\ xB_{i-1}(x) &= c_iB_i(x) + b_iB_{i-1}(x) + a_iB_{i-2}(x) + \alpha_iB_{i-3}(x) + \beta_iB_{i-4}(x) \quad \text{for } i \geq 3. \end{aligned} \tag{۲}$$

با شرایط اولیه $B_0(x) = 1$ و $B_1(x) = 0$، که در آنها $\{a_i\}_{i=1}^n$، $\{b_i\}_{i=1}^n$، $\{c_i\}_{i=1}^n$، $\{\alpha_i\}_{i=2}^n$ و $\{\beta_i\}_{i=3}^n$ دنباله‌هایی از اعداد مختلط هستند به گونه‌ای که $c_i \neq 0$، $c_n = c_{n-1} = 1$، و $b_n = 0$. ما می‌توانیم فرم ماتریسی زیر را به این دنباله‌های بازگشتی پنج‌ترمی نسبت دهیم:

$$x\mathbf{A}_{n-1}(x) = \mathbf{P}\mathbf{A}_{n-1}(x) + A_n(x)\mathbf{e}_{n-1} + A_{n+1}(x)\mathbf{e}_n, \tag{۳}$$

$$x\mathbf{B}_{n-1}(x) = \mathbf{P}\mathbf{B}_{n-1}(x) + B_n(x)\mathbf{e}_{n-1} + B_{n+1}(x)\mathbf{e}_n, \tag{۴}$$

که در آن $\mathbf{A}_{n-1}(x) = [A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{n-1}(x)]^T$ و $\mathbf{B}_{n-1}(x) = [B_0(x), B_1(x), \ldots, B_{n-1}(x)]^T$.

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\
\beta_3 & \alpha_3 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\
\vdots & \ddots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\
0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n & a_n
\end{bmatrix}
$$

$\mathbf{e}_{n-1} = [0, \ldots, 0, 1, 0]^T$ و $\mathbf{e}_n = [0, \ldots, 0, 1]^T$.

لم ۱.۲

دنباله‌های چندجمله‌ای $\{A_i\}_{i=0}^{n+1}$ و $\{B_i\}_{i=0}^{n+1}$ به گونه‌ای هستند که:

- $\deg(A_{2i+1}(x)) = i$ و ضریب پیشروی A_{2i+1} برابر با $\prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k}}$ است.
- $\deg(B_{2i}(x)) = i$ و ضریب پیشروی B_{2i} برابر با $\prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k-1}}$ است.
- $\deg(A_{2i}(x)) < i$ و $\deg(B_{2i+1}(x)) = i$.

اثبات: اثبات با استقراء بر روی i انجام می‌شود.

برای $i = 0$: $A_0(x) = 0$، $B_0(x) = 1$.

برای $i = 1$: $A_1(x) = 1$، $B_1(x) = 0$.

برای $i = 2$: $A_2(x) = -\frac{b_1}{c_1}$، $B_2(x) = \frac{x-a_1}{c_1}$.

برای $i = 3$: $A_3(x) = \frac{x}{c_2} + \frac{b_1 b_2 - a_2 c_1}{c_1 c_2}$، $B_3(x) = -\frac{b_2(x-a_1)}{c_1 c_2} - \frac{\alpha_2}{c_2}$.

فرض کنید فرمول برای $k \leq p$ برقرار است، ما آن را برای $p+1$ ثابت می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
xA_p(x) &= c_p A_{p+1}(x) + b_p A_p(x) + a_p A_{p-1}(x) + \alpha_p A_{p-2}(x) + \beta_p A_{p-3}(x), \\
xB_p(x) &= c_p B_{p+1}(x) + b_p B_p(x) + a_p B_{p-1}(x) + \alpha_p B_{p-2}(x) + \beta_p B_{p-3}(x).
\end{aligned}
$$

اگر $p = 2i$ باشد:

$$xA_{2i-1}(x) = c_{2i}A_{2i+1}(x) + b_{2i}A_{2i}(x) + a_{2i}A_{2i-1}(x) + \alpha_{2i}A_{2i-2}(x) + \beta_{2i}A_{2i-3}(x),$$
$$xB_{2i-1}(x) = c_{2i}B_{2i+1}(x) + b_{2i}B_{2i}(x) + a_{2i}B_{2i-1}(x) + \alpha_{2i}B_{2i-2}(x) + \beta_{2i}B_{2i-3}(x).$$

بنابراین،

$$\deg(A_{2i+1}(x)) = \deg(xA_{2i-1}(x)) = i.$$

و همچنین، ضریب پیشروی A_{2i+1} برابر است با $\frac{1}{c_{2i}}$ ضرب در (ضریب پیشروی A_{2i-1})، که برابر است با:

$$\frac{1}{c_{2i}} \times \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1}{c_{2k}} = \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k}}.$$

$$\deg(B_{2i+1}(x)) = \deg(xB_{2i-1}(x) - b_{2i}B_{2i}(x)) \leq i,$$

اگر $p = 2i - 1$ باشد:

$$xA_{2i-2}(x) = c_{2i-1}A_{2i}(x) + b_{2i-1}A_{2i-1}(x) + a_{2i-1}A_{2i-2}(x) + \alpha_{2i-1}A_{2i-3}(x) + \beta_{2i-1}A_{2i-4}(x),$$
$$xB_{2i-2}(x) = c_{2i-1}B_{2i}(x) + b_{2i-1}B_{2i-1}(x) + a_{2i-1}B_{2i-2}(x) + \alpha_{2i-1}B_{2i-3}(x) + \beta_{2i-1}B_{2i-4}(x).$$

بنابراین،

$$\deg(A_{2i}(x)) < i, \quad \deg(B_{2i}(x)) = \deg(xB_{2i-2}(x)) = i,$$

و ضریب پیشروی B_{2i} برابر است با:

$$B_{2i} = \frac{1}{c_{2i-1}} \times (\text{ضریب پیشروی } B_{2i-2}) = \frac{1}{c_{2i-1}} \times \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1}{c_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k-1}}.$$

اثبات کامل شد. □

۳ چندجمله‌ای ویژه و بردارهای ویژه برای ماتریس‌های پنج‌قطری

یک ماتریس $P = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ماتریس پنج‌قطری نامیده می‌شود اگر $a_{ij} = 0$ برای $|i-j| > 2$. مجموعه تمام ماتریس‌های پنج‌قطری روی $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. ما می‌توانیم یک هم‌ریختی تعریف کنیم:

$$\Psi : \left(\mathbb{C}^{5n-6} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), (\beta, \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \to P\right)$$

که در آن $\beta = (\beta_3, \dots, \beta_n)$، $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$، $a = (a_1, \dots, a_n)$، $b = (b_1, \dots, b_{n-1})$، $c = (c_1, \dots, c_{n-2})$ و

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \beta_3 & \alpha_3 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n & a_n \end{bmatrix}.$$

همچنین مجموعه $\mathcal{P}$ را تعریف کنید به صورت:

$$\mathcal{P} = \left\{ P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \beta_3 & \alpha_3 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), \quad \prod_{i=1}^{n-2} c_i \neq 0 \right\}, \tag{۵}$$

تعریف ۱.۳. برای هر ماتریس پنج‌قطری P از مرتبه n، مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها به صورت $(Q_i(P))_{0\leq i\leq n+1}$ تعریف می‌شود که توسط

$$Q_i = \det \begin{pmatrix} A_n & A_i \\ B_n & B_i \end{pmatrix} \tag{۶}$$

مشخص می‌شود.

لم ۱.۳. با استفاده از بیانات (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$xQ_{n-1}(x) = PQ_{n-1}(x) + Q_n(x)e_{n-1} + Q_{n+1}(x)e_n = PQ_{n-1}(x) + Q_{n+1}(x)e_n, \qquad (۷)$$

که در آن $Q_n(x) = [Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)]^T$، $e_{n-1} = [0, 0, \dots, 0, 1, 0]^T$ و $e_n = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ است.

لم ۲.۳. چندجمله‌ای Q_{n+1} درجه n دارد و ضریب پیشروی Q_{n+1} برابر است با $(-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{c_k}$.

اثبات. $Q_{n+1} = \det \begin{pmatrix} A_n & A_{n+1} \\ B_n & B_{n+1} \end{pmatrix} = A_n B_{n+1} - A_{n+1} B_n$ اگر $n = 2i$ آنگاه:

$$Q_{2i+1} = A_{2i} B_{2i+1} - A_{2i+1} B_{2i},$$

بنابر لم ۱.۲،

$$\deg(Q_{2i+1}) = \deg(A_{2i+1} B_{2i}) = 2i = n$$

و

$$Q_{2i+1} \text{ ضریب پیشروی} = -(A_{2i+1}B_{2i} \text{ ضریب پیشروی}) = -\left(\prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k}} \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k-1}}\right) = -\prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{c_k}.$$

اگر $n = 2i - 1$: آنگاه

$$Q_{2i} = A_{2i-1} B_{2i} - A_{2i} B_{2i-1},$$

بنابراین

$$\deg(Q_{2i}) = \deg(A_{2i-1} B_{2i}) = 2i - 1 = n$$

و

$$Q_{2i} \text{ ضریب پیشروی} = A_{2i-1}B_{2i} \text{ ضریب پیشروی} = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1}{c_{2k}} \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{c_k}.$$

اثبات پایان یافته است. □

لم ۳.۳. اگر λ یک صفر از چندجمله‌ای Q_{n+1} باشد، آنگاه λ یک مقدار ویژه از ماتریس P است.

اثبات. فرض کنید λ یک صفر از چندجمله‌ای Q_{n+1} باشد. با استفاده از معادله (۷) داریم:

$$PQ_{n-1}(\lambda) = \lambda Q_{n-1}(\lambda).$$

سه حالت مختلف را باید بررسی کنیم:

حالت اول. فرض کنید $A_n(\lambda) \neq 0$ یا $B_n(\lambda) \neq 0$. از آنجایی که $Q_0(\lambda) = A_n(\lambda)$ و $Q_1(\lambda) = -B_n(\lambda)$، بنابراین $Q_{n-1}(\lambda)$ یک بردار ویژه متناظر غیرصفر از P است. نتیجه می‌گیریم که λ یک مقدار ویژه از ماتریس P است.

حالت دوم. فرض کنید $A_n(\lambda) = B_n(\lambda) = B_{n+1}(\lambda) = 0$. از آنجایی که $\lambda B_{n-1}(\lambda) = PB_{n-1}(\lambda) + B_n(\lambda)e_{n-1} + B_{n+1}(\lambda)e_n$، بنابراین $B_{n-1}(\lambda)$ یک بردار ویژه متناظر غیرصفر از P است. نتیجه می‌گیریم که λ یک مقدار ویژه از ماتریس P است.

حالت سوم. فرض کنید $A_n(\lambda) = B_n(\lambda) = 0$ و $B_{n+1}(\lambda) \neq 0$. بگذارید $R_{n-1}(\lambda) = A_{n-1}(\lambda) - \frac{A_{n+1}(\lambda)}{B_{n+1}(\lambda)} B_{n-1}(\lambda)$. داریم:

$$PR_{n-1}(\lambda) = \lambda R_{n-1}(\lambda),$$

که $R_{n-1}(\lambda)$ یک بردار ویژه متناظر غیرصفر از P است. نتیجه می‌گیریم که λ یک مقدار ویژه از ماتریس P است. اثبات کامل شد. □

تذکر ۱. ما همچنین بردارهای ویژه P را محاسبه کرده‌ایم.

قضیه ۱.۳. ماتریس پنج‌قطری P و چندجمله‌ای متناظر Q_{n+1} را در نظر بگیرید. فرض کنید Q_{n+1} دارای صفرهای ساده باشد، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه P دقیقاً برابر است با $(-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}$، که در آن $\rho = \prod_{k=1}^{n-2} c_k$ است، یعنی

$$\det(xI_n - P) = (-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}(x),$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n را نشان می‌دهد.

اثبات. فرض کنید $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صفرهای چندجمله‌ای $R = (-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}(x)$ باشند. بنابر لم ۳.۳، $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه P هستند و در نتیجه صفرهای چندجمله‌ای مشخصه $\chi_P = \det(xI_n - P)$ هستند. □

چندجمله‌ای‌های R و χ_P درجه و صفرهای یکسانی دارند و هر دو مونیک هستند، بنابراین $R = \chi_P$.

مثال ۱.۳. ماتریس پنج‌قطری به فرم $S = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ را در نظر بگیرید:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \tag{۸}$$

داریم:

$$\chi_S = \det(xI_n - S) = \prod_{i=1}^{n}(x-i).$$

از طرفی، با محاسبه ساده به دست می‌آوریم که:

$$A_{2p} = 0 \quad \text{و} \quad A_{2p+1} = \prod_{i=1}^{p}(x-2i),$$

$$B_{2p} = \prod_{i=1}^{p}(x-(2i-1)) \quad \text{و} \quad B_{2p+1} = 0.$$

داریم:

اگر $n = 2p$ باشد آنگاه: $Q_{2p+1} = A_{2p}B_{2p+1} - A_{2p+1}B_{2p} = \prod_{i=1}^{p}(x-2i)\prod_{i=1}^{p}(x-(2i-1))$.

بنابراین $\chi_S = \det(xI_{2p} - S) = \prod_{i=1}^{2p}(x-i) = -Q_{2p+1}(x)$.

اگر $n = 2p-1$ باشد آنگاه: $Q_{2p} = A_{2p-1}B_{2p} - A_{2p}B_{2p-1} = \prod_{i=1}^{p-1}(x-2i)\prod_{i=1}^{p}(x-(2i-1))$،

بنابراین $\chi_S = \det(xI_{2p-1} - S) = \prod_{i=1}^{2p-1}(x-i) = Q_{2p}(x)$.

تعریف ۲.۳. می‌توانیم نگاشت زیر را تعریف کنیم:

$$\Gamma : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[x],$$

$$P \mapsto (-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}(x),$$

که در آن $\beta = (\beta_3, \ldots, \beta_n)$، $\alpha = (\alpha_2, \ldots \alpha_n)$، $a = (a_1, \ldots, a_n)$، $b = (b_1 \ldots b_{n-1})$، $c = (c_1 \ldots c_{n-2})$ و

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \beta_3 & \alpha_3 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n & a_n \end{pmatrix}.$$

هدف ما در اینجا بررسی رابطه بین چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای Q_{n+1} در حالت کلی است.

برای راحتی خواننده یادآوری می‌کنیم که مُبَیِّن چندجمله‌ای عمومی

$$p(x) = \delta_n x^n + \delta_{n-1}x^{n-1} + \delta_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \delta_1 x + \delta_0 = \delta_n \prod_{i=1}^{n}(x - r_j),$$

که در آن $r_1, \ldots, r_n$ ریشه‌های مختلط (با شمارش تکرارها) هستند، تا یک فاکتور، برابر با دترمینان ماتریس سیلوستر $(2n-1)\times(2n-1)$ است. دترمینان این ماتریس با عنوان حاصل $p(x)$ و $p'(x)$ شناخته می‌شود که با $R(p, p')$ نمایش داده می‌شود. مُبَیِّن $D(p)$ از $p(x)$ با فرمول زیر داده می‌شود:

$$D(p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\delta_n} R(p, p') = \delta_n^{2n-2} \prod_{i<j} (r_i - r_j)^2.$$

مُبَیِّن یک چندجمله‌ای داده شده، چندجمله‌ای از چندین متغیر مختلط از ضرایب آن چندجمله‌ای است که تنها در صورتی صفر می‌شود که آن چندجمله‌ای یک یا چند ریشه مضاعف داشته باشد.

مجموعه $\mathcal{P}_1$ را تعریف کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_1 = \{P \in \mathcal{P} / \text{چندجمله‌ای } \Gamma(P) \text{ ریشه‌های متمایز دارد}\}. \qquad (۹)$$

لم ۴.۳. مجموعه $\mathcal{P}$ در $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ باز است.

اثبات. Ψ یک تابع پیوسته دوسویی از $\mathcal{P}$ به $(\mathbb{C}^*)^{n-2} \times \mathbb{C}^{4n-4}$ است. از آنجا که $(\mathbb{C}^*)^{n-2} \times \mathbb{C}^{4n-4}$ در $\mathbb{C}^{5n-6}$ باز است، بنابراین مجموعه $\mathcal{P}$ در $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ باز است. اثبات کامل شد. □

لم ۵.۳. مجموعه $\mathcal{P}_1$ در مجموعه $\mathcal{P}$ متراکم است.

اثبات. می‌توانیم $\mathcal{P}$ را با $(\mathbb{C}^*)^{n-2} \times \mathbb{C}^{4n-4}$ هم‌ارز در نظر بگیریم. اگر $\mathcal{B}(\mathcal{P}, \varepsilon) \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$ برای برخی $\varepsilon > 0$ باشد، $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ و $\mathcal{B}(\mathcal{P}, \varepsilon)$ توپ باز $\mathcal{P}$ است، آنگاه $D(\Gamma(S))$ برابر صفر است برای تمام $S \in \mathcal{P}$.

از آنجا که $D(\Gamma(S))$ چندجمله‌ای از چندین متغیر مختلط است، این یک تابع هولومورفیک است. با استفاده از قضیه همانی [۳]، نتیجه می‌گیریم که $D(\Gamma(S))$ برای تمام $S \in \mathcal{P}$ برابر صفر است، که این تناقض است (نگاه کنید به مثال ۱.۳). اثبات کامل شد.
□

قضیه ۲.۳. ماتریس پنج‌قطری $P \in \mathcal{P}$ و چندجمله‌ای Q_{n+1} متناظر را در نظر بگیرید (6). آنگاه، چندجمله‌ای مشخصه P دقیقاً برابر است با $(-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}$، که در آن $\rho = \prod_{k=1}^{n-2} c_k$ است، یعنی

$$\det(xI_n - P) = (-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}(x), \qquad (۱۰)$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n را نشان می‌دهد.

اثبات. توابع پیوسته f و g از $\mathcal{P}$ به $\mathbb{C}[x]$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}[X] \quad \text{و} \quad g : \mathcal{P} \to \mathbb{C}[X],$$

$$P \mapsto \det(xI_n - P) \quad \text{و} \quad P \mapsto \Gamma(P).$$

از آنجا که $f = g$ بر روی $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_1$ در $\mathcal{P}$ متراکم است، بنابراین $f = g$ بر روی $\mathcal{P}$. اثبات کامل شد. □

تذکر ۲. در صورتی که $c_i = 0$ باشد، می‌توانیم c_i را با $\varepsilon > 0$ جایگزین کنیم. چندجمله‌ای $(-1)^{n+1}\rho Q_{n+1}(x)$ ضرایب چندجمله‌ای در ε دارد، بنابراین با میل کردن ε به صفر، چندجمله‌ای مشخصه P را به دست می‌آوریم.

۴ مثال

یکی از مهم‌ترین چندجمله‌ای‌های متعامد، چندجمله‌ای‌های چبیشف از نوع دوم است، $\{U_n\}_{n\geq 0}$، که روابط بازگشتی سه‌جمله‌ای را برآورده می‌کند:

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad \text{برای تمام } n = 1, 2, \dots,$$

با شرایط اولیه $U_0(x) = 1$ و $U_1(x) = 2x$. همچنین به خوبی معلوم است [4] که هر U_n نیز رابطه زیر را برآورده می‌کند:

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta \quad (0 \leq \theta < \pi).$$

ما ماتریس پنج‌قطری به فرم $P = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ را در نظر می‌گیریم:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

داریم:

$$\begin{aligned} xA_0(x) &= A_2(x), \\ xA_1(x) &= A_3(x), \\ xA_{i-1}(x) &= A_{i+1}(x) + A_{i-3}(x), \quad \text{for} i \geq 3, \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با شرایط اولیه $A_0(x) = 0$ و $A_1(x) = 1$، و

$$\begin{aligned} xB_0(x) &= B_2(x), \\ xB_1(x) &= B_3(x), \\ xB_{i-1}(x) &= B_{i+1}(x) + B_{i-3}(x), \quad \text{برای } i \geq 3 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با شرایط اولیه $B_0(x) = 1$ و $B_1(x) = 0$. از طرفی، با محاسبه به دست می‌آوریم که:

$$A_{2p} = 0 \quad \text{و} \quad xA_{2p+1}(x) = A_{2p+3}(x) + A_{2p-1}(x)$$

$$B_{2p+1} = 0 \quad \text{و} \quad xB_{2p}(x) = B_{2p+2}(x) + B_{2p-2}(x).$$

این چندجمله‌ای‌ها $A_{2p+1} = \hat{A}_p$ و $B_{2p} = \hat{B}_p$ روابط بازگشتی سه‌جمله‌ای زیر را برآورده می‌کنند:

$$xA_{2p}(x) = \hat{A}_{p+1}(x) + \hat{A}_{p-1}(x), \quad \text{با شرایط اولیه } \hat{A}_0(x) = 1, \quad \hat{A}_1(x) = x,$$

$$xB_p(x) = \hat{B}_{p+1}(x) + \hat{B}_{p-1}(x), \quad \text{با شرایط اولیه } \hat{B}_0(x) = 1, \quad \hat{B}_1(x) = x.$$

بنابراین:

$$A_{2p} = 0 \quad \text{و} \quad A_{2p+1}(x) = U_p\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$B_{2p} = U_p\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{و} \quad B_{2p+1} = 0.$$

داریم:

$$\det(xI_n - P) = (-1)^{n+1} Q_{n+1}(x).$$

اگر $n = 2p$: آنگاه $\det(xI_{2p} - P) = Q_{2p+1} = -A_{2p}B_{2p+1} + A_{2p+1}B_{2p}$، بنابراین

$$\det(xI_{2p} - P) = \left(U_p\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

اگر $n = 2p+1$: آنگاه $\det(xI_{2p+1} - P) = Q_{2p+2} = A_{2p+1}B_{2p+2} - A_{2p+2}B_{2p+1}$، بنابراین

$$\det(xI_{2p+1} - P) = U_p\left(\frac{x}{2}\right) \times U_{p+1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

۵ الگوریتم محاسبه دترمینان ماتریس پنج‌قطری

از قضیه ۲.۳ الگوریتمی برای محاسبه دترمینان ماتریس پنج‌قطری P استخراج می‌کنیم. با قرار دادن $x = 0$ داریم:

$$\det P = -\rho Q_{n+1}(0). \tag{۱۴}$$

الگوریتم. الگوریتم محاسباتی جدید و کارآمد برای محاسبه دترمینان ماتریس پنج‌قطری P.

ورودی: بعد n؛ $\beta = (\beta_3, \dots, \beta_n)$، $\alpha = (\alpha_2, \dots \alpha_n)$، $a = (a_1, \dots a_n)$، $b = (b_1 \dots b_{n-1})$ و $c = (c_1 \dots c_{n-2})$؛ $(c_n = c_{n-1} = 1 b_n = 0)$.

خروجی: $\det P$.

گام ۱

$$\begin{aligned}
c_1A_2(0) + b_1A_1(0) + a_1A_0(0) &= 0,\\
c_2A_3(0) + b_2A_2(0) + a_2A_1(0) + \alpha_2A_0(0) &= 0,\\
c_iA_{i+1}(0) + b_iA_i(0) + a_iA_{i-1}(0) + \alpha_iA_{i-2}(0) + \beta_iA_{i-3}(0) &= 0, \quad \text{for} i \geq 3
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با شرایط اولیه $A_0(0) = 0$ و $A_1(0) = 1$، و

$$\begin{aligned}
c_1B_2(0) + b_1B_1(0) + a_1B_0(0) &= 0,\\
c_2B_3(0) + b_2B_2(0) + a_2B_1(0) + \alpha_2B_0(0) &= 0,\\
c_iB_{i+1}(0) + b_iB_i(0) + a_iB_{i-1}(0) + \alpha_iB_{i-2}(0) + \beta_iB_{i-3}(0) &= 0, \quad \text{for} i \geq 3
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با شرایط اولیه $B_0(0) = 1$ و $B_1(0) = 0$.

گام ۲

$$Q_{n+1}(0) = A_n(0)B_{n+1}(0) - A_{n+1}(0)B_n(0)$$

$$\det(P) = -\rho Q_{n+1}(0).$$

تذکر ۳. ما یک الگوریتم عددی برای محاسبه دترمینان ماتریس پنج‌قطری استخراج کردیم و نشان دادیم که هزینه محاسباتی آن بسیار کمتر از دو الگوریتم معروف [1]، یعنی الگوریتم‌های Sweet و Evans است. بنابراین، کل عملیات‌ها کمتر از الگوریتم‌های Sweet و Evans است. مقایسه میان آن‌ها در جدول ۱ نشان داده شده است (نگاه کنید به جدول ۲).

ملاحظات عددی:

مثال: ماتریس A را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جدول ۱.۵: تعداد کل عملیات‌ها برای دترمینان ماتریس پنج‌قطری، که در آن $n \geq 3$ نشان‌دهنده مرتبه ماتریس است

الگوریتم‌ها	تعداد عملیات‌ها
الگوریتم Sweet	$24n - 59$
الگوریتم Evans	$22n - 50$
الگوریتم Sogabe Tomohiro	$14n - 28$
الگوریتم ما	$19n - 11$

جدول ۲.۵: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A

بردار ویژه متناظر A	مقدار ویژه
$\begin{bmatrix} -0.4135829258 \\ 0.2295212080 \\ 0.5157294730 \\ -0.5157294731 \\ -0.2295212079 \\ 0.4135829257 \end{bmatrix}$	-0.8019377358
$\begin{bmatrix} 0.1651586910 \\ -0.8733578629 \\ 0.6110257453 \\ 0.6110257444 \\ -0.8733578643 \\ 0.1651586915 \end{bmatrix}$	-0.5883639907
$\begin{bmatrix} 0.4373351062 \\ -0.05819813940e-1 \\ -0.2013949467 \\ -0.2013949460 \\ -0.05819814018e-1 \\ 0.4373351067 \end{bmatrix}$	0.4064206546
$\begin{bmatrix} -0.09485077380e-1 \\ 0.2131277546 \\ -0.1709151891 \\ 0.1709151889 \\ -0.2131277546 \\ 0.09485077421e-1 \end{bmatrix}$	0.5549581321
$\begin{bmatrix} -25.49156631 \\ -20.44264898 \\ -11.34481428 \\ 11.34481426 \\ 20.44264900 \\ 25.4915663 \end{bmatrix}$	2.246979604
$\begin{bmatrix} -124.6024938 \\ -177.0684440 \\ -219.4096308 \\ -219.4096308 \\ -177.068444 \\ -124.602493 \end{bmatrix}$	4.181943336

۶ نتیجه‌گیری

در این پروژه، به بررسی و تحلیل ماتریس‌های پنج‌قطری پرداختیم که در بسیاری از مسائل مهندسی و علمی به ویژه در حل معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی کاربرد دارند. ما فرمول‌های عمومی برای محاسبه چندجمله‌ای‌های مشخصه و بردارهای ویژه این ماتریس‌ها را استخراج کردیم. همچنین، یک الگوریتم جدید و بهینه برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های پنج‌قطری ارائه دادیم که نسبت به الگوریتم‌های موجود دارای دقت و کارایی محاسباتی بالاتری است.

بررسی ما نشان داد که الگوریتم پیشنهادی نه تنها زمان محاسباتی کمتری نسبت به الگوریتم‌های Sweet و Evans دارد، بلکه از نظر تعداد عملیات نیز بهینه‌تر است. به‌علاوه، نتایج عددی ما نشان داد که این الگوریتم می‌تواند به طور موثری در کاربردهای واقعی مورد استفاده قرار گیرد.

از جمله کاربردهای عملی این پژوهش می‌توان به حل مسائل مقدار مرزی و گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی در دو و سه بعدی با استفاده از روش تفاضل محدود و المان محدود اشاره کرد. با توجه به نتایج به دست آمده، این الگوریتم می‌تواند در مدل‌سازی‌های پیچیده مهندسی و علمی که نیاز به محاسبات دقیق و سریع دارند، به کار گرفته شود.

۷ پیوست

```python
import numpy as np

def determinant_pentadiagonal(n, a, b, c, alpha, beta):
    # Initialize arrays A and B
    A = np.zeros(n+2)  # We need A_n+1, so allocate space accordingly
    B = np.zeros(n+2)  # Same for B

    # Initial conditions
    A[0] = 0
    A[1] = 1
    B[0] = 1
    B[1] = 0

    # Compute A_i and B_i using the recursive relations
    for i in range(2, n+2):
        # Safe access for b, c, alpha, and beta with conditions on indices
        b_val = b[i-2] if i-2 < len(b) else 0
        c_val = c[i-2] if i-2 < len(c) else 1  # assuming c_n = c_{n-1} = 1
        alpha_val = alpha[i-3] if i-3 >= 0 and i-3 < len(alpha) else 0
        beta_val = beta[i-4] if i-4 >= 0 and i-4 < len(beta) else 0

        A[i] = -(b_val * A[i-1] + a[i-2] * A[i-2] +
                 alpha_val * A[i-3] +
                 beta_val * A[i-4]) / c_val
        B[i] = -(b_val * B[i-1] + a[i-2] * B[i-2] +
                 alpha_val * B[i-3] +
                 beta_val * B[i-4]) / c_val

    # Compute determinant using Q_n+1(0) = A_n(0) * B_n+1(0) - A_n+1(0) * B_n(0)
    Q_n_plus_1 = A[n] * B[n+1] - A[n+1] * B[n]

    # Compute rho (product of all c_i for i < n, c_n and c_{n-1} are taken as 1)
    rho = np.prod(c[:max(0, n-2)]) if n > 2 else 1

    # Determinant is -rho * Q_n_plus_1(0)
    det_P = -rho * Q_n_plus_1
    return det_P

# Example usage:
n = 5
a = np.array([2, 2, 2, 2, 2])
b = np.array([1, 1, 1, 1])
c = np.array([1, 1, 1])
alpha = np.array([0.5, 0.5, 0.5, 0.5])
beta = np.array([0.2, 0.2, 0.2])

det = determinant_pentadiagonal(n, a, b, c, alpha, beta)
print("Determinant of the pentadiagonal matrix is:", det)

A = np.array([[2,1,1,0,0],
              [0.5,2,1,1,0],
              [0.2,0.5,2,1,1],
              [0,0.2,0.5,2,1],
              [0,0,0.2,0.5,2]])

print("Determinant of the pentadiagonal matrix is:(with np.linalg.det)", np.linalg.det(A))
```

۸ مراجع

[1] T. Sogabe, A fast numerical algorithm for the determinant of a pentadiagonal matrix, Appl. Math. Comput., in press, doi:10.1016/j.amc.2007.07.015.

[2] Serge Lang, Algebra, third ed., Springer Verlag, 2002, pp. 193, 204, 325.

[3] Volker Scheidemann, Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Birkhauser Verlag, 2005, p. 10.

[4] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.