دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل دوم: روش های مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ مقدمه

قبلاً دیدیم که یک دستگاه معادلات خطی در حالت کلی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

یا در حالت ماتریسی - برداری $AX = b$ خواهد بود که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

که A را ماتریس ضرایب، b را بردار سمت راست و X را بردار مجهولات می‌نامیم.

توجه ۱.۲

توجه کنید A ماتریسی مربعی $n \times n$ است و در حالتی که A ماتریس غیرمربعی $m \times n$ با $m \neq n$ باشد بررسی آن را به فصلهای بعد موکول خواهیم کرد.

نکته ۱.۲

به طور کلی حل دستگاه (۱) با ۲ رویکرد

- روشهای مستقیم
- روشهای تکراری

انجام می شود. یک روش مستقیم برای حل دستگاه $AX = b$ به طور معمول با تعداد متناهی اعمال حسابی جواب دقیق دستگاه را می دهد. در حالی که یک روش تکراری با تعداد نامتناهی اعمال حسابی به جواب دقیق (در حد بینهایت) می رسد. از این رو تنها میتوانند تقریبی قابل قبول از جواب دقیق را در تعداد متناهی اعمال حسابی بدهند. در این فصل بررسی روشهای مستقیم مورد توجه قرار می گیرد.

توجه ۲.۲

در بسیاری از مسائل کاربردی در علوم ریاضی و علوم مهندسی نیاز است یک دستگاه معادلات خطی به شکل (۱) حل شود.
قبل از بیان روشهای مستقیم برای حل دستگاه (۱) به بیان مقدمه‌ای مختصر از این که چنین دستگاه هایی در عمل چطور به وجود می‌آیند در پیوست فصل اول تحت عنوان کاربردهایی از دستگاه های معادلات خطی پرداخته شده است تا خواننده از انگیزه‌ی کافی برای بررسی این موضوع مهم برخوردار باشد.

توجه ۲.۳

حال به حل دستگاه معادلات خطی $AX = b$ با روش های مستقیم می‌پردازیم. قبل از آن به معرفی برخی مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱

دستگاه معادلات خطی سازگار: یک دستگاه معادلات خطی را سازگار $(Consistent)$ می‌گوییم هرگاه حداقل یک جواب داشته باشد.
همچنین، دستگاه معادلات خطی ناسازگار $(Inconsistent)$ است هرگاه هیچ جوابی نداشته باشد.

۱.۱ تعداد جواب دستگاه معادلات خطی ۲ × ۲

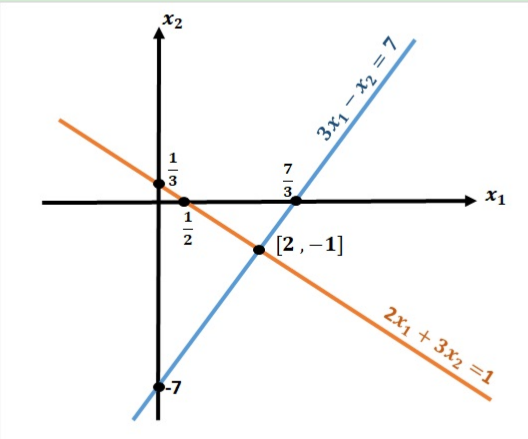
مثال ۲.۱

دستگاه معادلات خطی روبه‌رو را با دو متغیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۳x_۱ - x_۲ = ۷ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۱ \end{cases}$$

در این مثال $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = -۱$ یک جواب برای دستگاه معادلات است، زیرا در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} ۳(۲) - (-۱) = ۷ \\ ۲(۲) + ۳(-۱) = ۱ \end{cases}$$



همانطور که مشاهده می‌شود، جواب دستگاه متناظر با نقطه‌ای است که دو خط یکدیگر را قطع می‌کند.

مثال ۲.۲

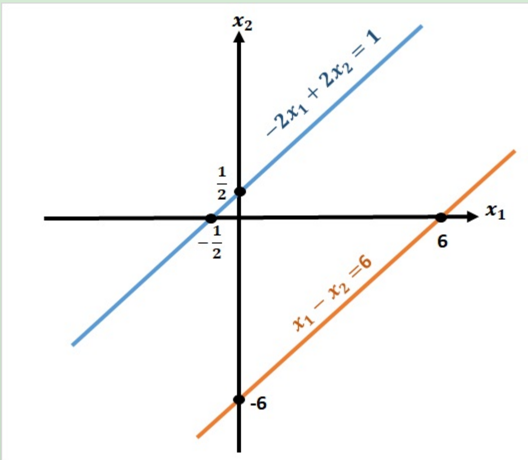
دستگاه معادلات خطی روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ = ۶ \\ -۲x_۱ + ۲x_۲ = ۱ \end{cases}$$

با حل این دستگاه داریم:

$$-۲x_۱ + ۲x_۲ = ۱ \Rightarrow -۲(۶ + x_۲) + ۲x_۲ = ۱ \Rightarrow -۱۲ - ۲x_۲ + ۲x_۲ = ۱ \Rightarrow -۱۲ = ۱$$

واضح است که تساوی اخیر متناقض است. حال دو خط فوق را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



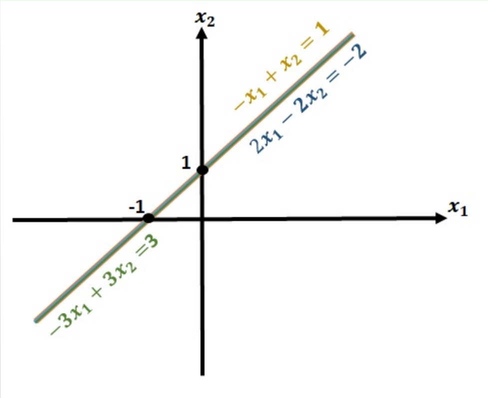
از نمودار فوق مشخص است که دو خط موازی هستند و می‌دانیم که دو خط موازی هیچ‌گاه یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. بنابراین، دستگاه معادلات فوق، جوابی ندارند.

مثال ۲.۳

دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -x_۱ + x_۲ = ۱ \\ ۲x_۱ - ۲x_۲ = -۲ \\ -۳x_۱ + ۳x_۲ = ۳ \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، سه خط دستگاه فوق بر یک‌دیگر منطبق هستند.
بنابراین نمودار این دستگاه به صورت زیر می‌باشد:



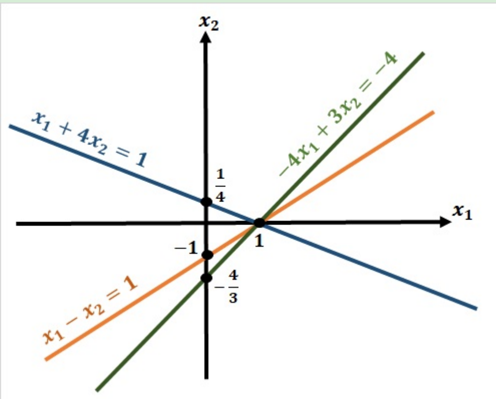
این دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

مثال ۲.۴

دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

نمودار این دستگاه به صورت زیر می‌باشد:

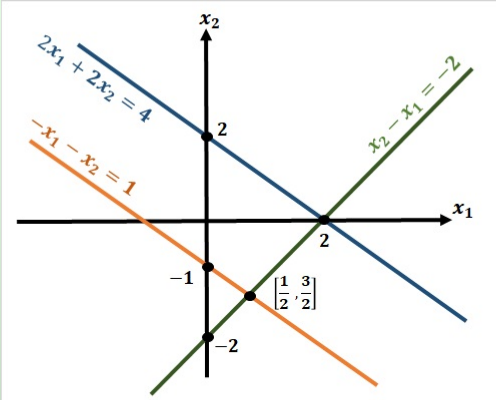


این دستگاه جواب یکتا دارد.

مثال ۲.۵

دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_1 = -2 \\ 2x_2 + 2x_1 = 4 \end{cases}$$

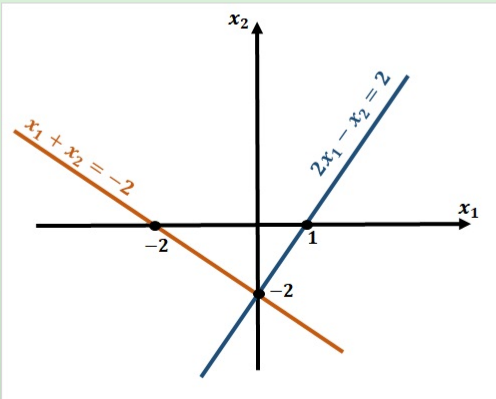


این دستگاه فاقد جواب می‌باشد.

مثال ۲.۶

دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ = ۲ \\ x_۱ + x_۲ = -۲ \end{cases}$$

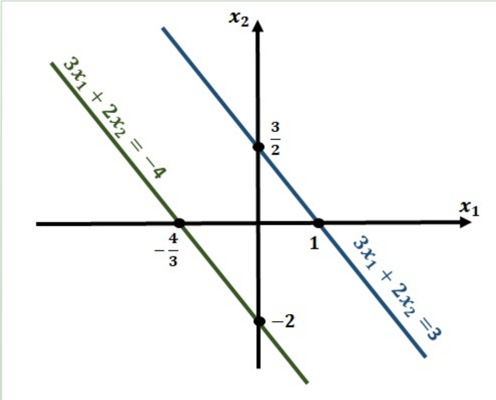


دستگاه فوق دارای یک جواب است.

مثال ۲.۷

دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ = ۳ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۲ = -۳x_۱ + ۳ \\ ۲x_۲ = -۳x_۱ - ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۲ = \frac{-۳}{۲}x_۱ + \frac{۳}{۲} \\ x_۲ = \frac{-۳}{۲}x_۱ - ۲ \end{cases}$$

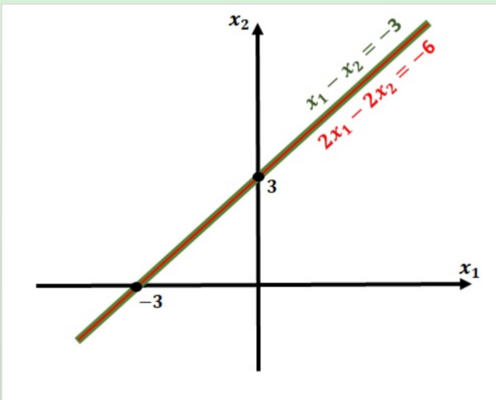


دستگاه فوق فاقد جواب است.

مثال ۲.۸

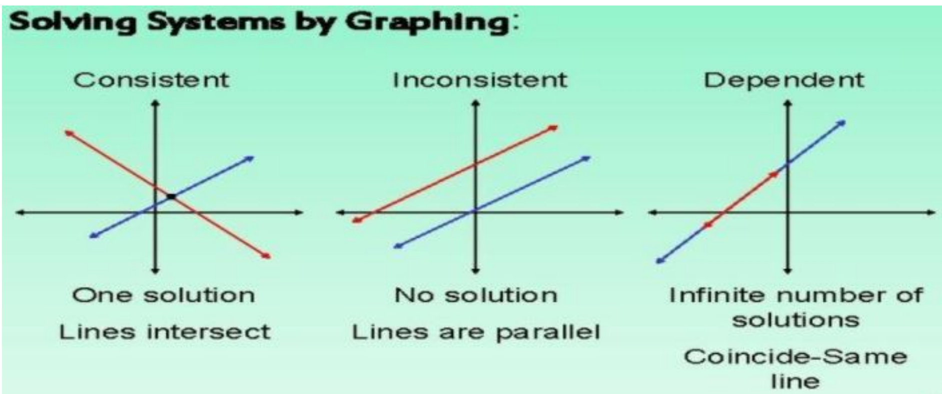
دستگاه روبه‌رو را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = -x_1 - 3 \\ -2x_2 = -2x_1 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + 3 \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases}$$



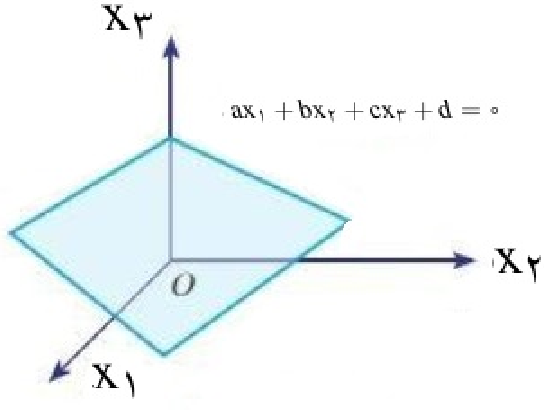
دستگاه فوق دارای بی‌نهایت جواب است.

نتیجه گیری کلی



۲.۱ تعداد جواب دستگاه معادلات خطی ۳ × ۳

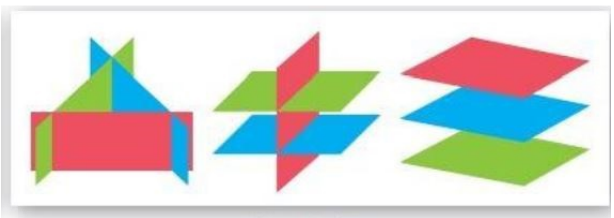
توجه کنید یک معادله به صورت $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ در حالت کلی نشان دهنده‌ی یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ خواهد بود.



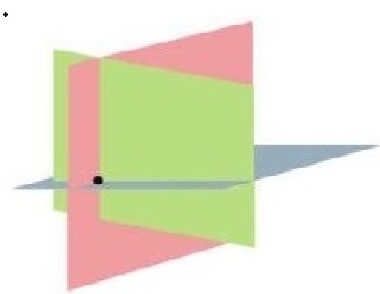
بنابراین بسته به اینکه ۳ صفحه در دستگاه

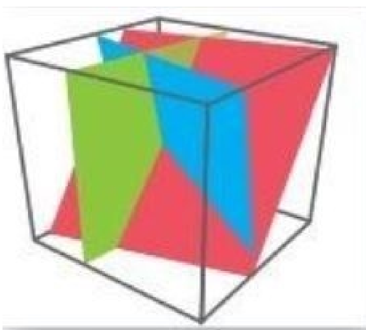
$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

نسبت به هم چه وضعیتی دارند دستگاه می‌تواند جواب نداشته باشد، جواب یکتا داشته باشد و یا شامل بی‌نهایت جواب باشد.
وقتی صفحات در چنین وضعیتی هستند یعنی همزمان یکدیگر را قطع نمی‌کنند آنگاه دستگاه جواب ندارد.

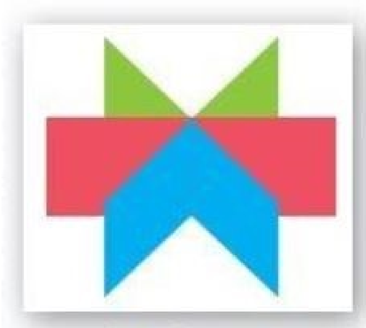


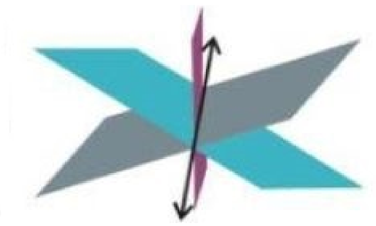
و اگر در چنین وضعی باشد یعنی همزمان هم را در یک نقطه قطع کنند گوییم دستگاه جواب یکتا دارد.





و در نهایت در چنین وضعیتی گوییم بی‌نهایت جواب موجود است.





۳.۱ تعداد جواب دستگاه معادلات خطی $n \times n$

همانطور که دیدید تعیین تعداد جواب‌های دستگاه از طریق هندسی دشوار است و در ابعاد $n \geq ۴$ عملا ناممکن است. به همین دلیل است که به ابزارهای جبری مانند دترمینان و رتبه ماتریس متوصل می‌شویم. قضیه زیر در مورد تعداد جواب یک دستگاه خطی $AX = b$ که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، و $X, b \in \mathbb{R}^n$ اطلاعات مفیدی به ما می‌دهد.

قضیه ۲.۱

دستگاه خطی $AX = b$ را با $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، و $X, b \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید.

- اگر $Rank(A) = Rank([A|b]) = n$ آنگاه دستگاه جوابی یکتا دارد.
- اگر $Rank(A) = Rank([A|b]) < n$ آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.
- اگر $Rank(A) \neq Rank([A|b])$ آنگاه دستگاه جوابی ندارد.

در قضیه فوق $Rank(A)$ نشان دهنده‌ی رتبه‌ی ماتریس A و نماد $[A|b]$ ماتریس افزوده را نشان می‌دهند.
توجه کنید از اثبات این قضیه در اینجا اجتناب ورزیده و اثبات آن را در حالت کلی $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $X \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ در فصل‌های آینده بیان می‌کنیم زیرا $m = n$ حالت خاصی خواهد بود که در بالا ذکر شد.

توجه ۲.۴

توجه کنید در کل این فصل فرض بر این است که دستگاه $AX = b$ جواب یکتا دارد.

۲ حل دستگاه‌ها با ماتریس ضرایب خاص

- قطری
- بالا مثلثی
- پایین مثلثی

۱.۲ حل دستگاه های قطری

شاید به جرات بتوان گفت آسان‌ترین دستگاه‌هایی که ممکن است با آنها سر و کار داشته باشیم، دستگاه‌های قطری هستند یعنی دستگاه $AX = b$ وقتی که A ماتریس قطری باشد.

مثال ۲.۹

دستگاه قطری داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

حل: این دستگاه همزمان به صورت زیر حل می‌شود:

$$x_۱ = \frac{۱۲}{۳} = ۴, \quad x_۲ = \frac{۴}{-۱} = -۴, \quad x_۳ = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

مثال ۲.۱۰

دستگاه قطری داده شده را حل کنید

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸ \\ ۳ \\ ۷ \\ ۲۲ \end{bmatrix}$$

حل: این دستگاه همزمان به صورت زیر حل می‌شود:

$$x_۱ = \frac{۱۸}{۶} = ۳, \quad x_۲ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵, \quad x_۳ = \frac{۷}{-۵} = -۱/۴, \quad x_۴ = \frac{۲۲}{۱۱} = ۲$$

باتوجه به مثال‌های گفته شده واضح است که یک دستگاه قطری $n \times n$ به صورت زیر حل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & \dots & ۰ \\ \vdots & ۰ & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{b_۱}{a_{۱۱}} \\ x_۲ = \frac{b_۲}{a_{۲۲}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

واضح است که جواب دستگاه از $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = ۱, ۲, \dots, n$ حاصل می شود.
بنابراین لازم است که $a_{ii} \neq ۰, i = ۱, ۲, \dots, n$

توجه ۲.۵

همانطور که دیده می‌شود در روش بالا ترتیب حل دستگاه مهم نیست و می‌توان مجهولات را موازی محاسبه کرد.

۲.۲ حل دستگاه‌های پایین مثلثی:

دستگاه $AX = b$ را وقتی که ماتریس A پایین مثلثی باشد یک دستگاه پایین مثلثی می‌گوییم. مثلا یک دستگاه پایین مثلثی 3×3 در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

یا در فرم ماتریسی_برداری داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad a_{11}, a_{22}, a_{33} \neq 0$$

واضح است ماتریس ضرایب پایین مثلثی است. برای حل این دستگاه ابتدا از معادله اول (۲) مجهول x_1 را بدست می‌آوریم:

$$a_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \tag{3}$$

سپس از معادله دوم (۲) مجهول x_2 را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \tag{4}$$

در این مرحله چون x_1 را از قبل حساب کرده‌ایم پس صورت کسر فوق موجود است. در نهایت از معادله آخر (۲) مجهول x_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \Rightarrow x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \tag{5}$$

با توجه به (۳)،(۴)،(۵) واضح است که باید $a_{ii} \neq 0, i = \{1, 2, 3\}$
همانطور که دیدیم برای حل یک دستگاه پایین مثلثی ابتدا x_1 سپس x_2 و نهایتا x_3 محاسبه شد لذا به روند حل یک دستگاه پایین مثلثی معمولا جایگذاری پیشرو (Forward Substitution) و یا جایگذاری از بالا می‌گویند.

مثال ۲.۱۱

دستگاه پایین مثلثی داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

حل: مطابق توضیحات داده شده داریم:

$$\begin{cases} 3x_1 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \\ 6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = -7 \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{3} = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3+x_1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = -7 \Rightarrow x_3 = \frac{-7-6x_1-7x_2}{-9} = \frac{-7-6(1)-7(2)}{-9} = 3 \end{cases}$$

با توجه به بحث‌های فوق می‌توان دید که حل یک دستگاه پایین مثلثی $n \times n$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j}{a_{nn}} \end{cases}$$

پس دستگاه فوق با الگوریتم زیر حل می‌گردد:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

همانطور که قبلا گفتیم روش بالا به جایگذاری پیشرو شهرت دارد.

مثال ۲.۱۲

دستگاه پایین مثلثی داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

حل: مطابق توضیحات داده شده داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{13-11x_1}{1} = 13 - 11(1) = 2 \\ x_3 = \frac{21+3x_1-5x_2}{7} = \frac{21+3(1)-5(2)}{7} = \frac{14}{7} = 2 \\ x_4 = \frac{9-4x_1+x_2-3x_3}{1} = 9 - 4(1) + 2 - 3(2) = 1 \end{cases}$$

۳.۲ حل دستگاه‌های بالا مثلثی

دستگاه $AX = b$ را وقتی که ماتریس A بالا مثلثی باشد یک دستگاه بالا مثلثی می‌گوییم.
یک دستگاه بالا مثلثی 3×3 در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{6}$$

و یا در فرم ماتریسی_ برداری داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

واضح است که ماتریس ضرایب بالا مثلثی است. برای حل این دستگاه ابتدا از معادله آخر (۶) مجهول x_3 را به دست می‌آوریم:

$$a_{33}x_3 = b_3 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}. \tag{8}$$

سپس از معادله یکی به آخر مجهول x_2 را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}}. \tag{9}$$

توجه کنید در این مرحله چون x_3 را از قبل حساب کرده‌ایم، صورت کسر فوق موجود است. در نهایت از معادله (۶) مجهول x_1 را حساب می‌کنیم:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}. \tag{10}$$

با توجه به (۸)، (۹) و (۱۰) واضح است که باید: $a_{33} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{11} \neq 0,$
همان‌طور که دیدیم برای حل یک دستگاه بالا مثلثی، ابتدا x_3 سپس x_2 و در نهایت x_1 محاسبه شد. لذا روند حل یک دستگاه بالا مثلثی را معمولا جایگذاری پسرو (Backward Substitution) و یا جایگذاری از پایین می‌گویند.

مثال ۲.۱۳

دستگاه بالا مثلثی داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 1 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -43 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

حل: مطابق توضیحات داده شده، داریم:

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + x_3 = 9, \\ \qquad 11x_2 + 7x_3 = -43, \\ \qquad\qquad 5x_3 = -15, \end{cases}$$

پس

$$\blacktriangleright\ x_3 = -\frac{15}{5} = -3,$$

$$11x_2 + 7x_3 = -43 \Longrightarrow x_2 = \frac{-43 - 7x_3}{11} = \frac{-43 + 21}{11} = \frac{-22}{11} = -2,$$

$$6x_1 - 9x_2 + x_3 = 9, \quad \Rightarrow x_1 = \frac{9 + 9x_2 - x_3}{6}$$

$$\blacktriangleright\ x_1 = \frac{9 + 9(-2) - (-3)}{6} = \frac{9 - 18 + 3}{146} = \frac{-6}{6} = -1.$$

مثال ۲.۱۴

دستگاه بالا مثلثی داده شده را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ -۱۹ \\ -۵ \end{bmatrix}.$$

حل: مطابق توضیحات داده شده، داریم:

- $x_۴ = -\frac{۵}{۵} = -۱, \qquad x_۳ = \frac{-۱۹ - ۷x_۴}{۶} = \frac{-۱۹ + ۷}{۶} = \frac{-۱۲}{۶} = -۲,$
- $x_۲ = \frac{۲ - x_۳ - ۲x_۴}{۳} = \frac{۲ + ۲ - ۲(-۱)}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲,$
- $x_۱ = \frac{۵ - x_۲ - ۲x_۳ + x_۴}{۶} = \frac{۵ - ۲ - ۲(-۲) - ۱}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱.$

با توجه به مثال‌های فوق می‌توان دید که یک دستگاه بالا مثلثی $n \times n$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} a_{۱,۱}x_۱ + a_{۱,۲}x_۲ + \quad \cdots \quad + a_{۱,n}x_n = b_۱ \\ a_{۲,۲}x_۲ + \quad \cdots \quad + a_{۲,n}x_n = b_۲ \\ \vdots \\ a_{n-۱,n-۱}x_{n-۱} + a_{n-۱,n}x_n = b_{n-۱} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{b_۱ - a_{۱۲}x_۲ - \ldots - a_{۱,n}x_n}{a_{۱۱}}, \\ \vdots \\ x_{n-۱} = \frac{b_{n-۱} - a_{n-۱,n}x_n}{a_{n-۱,n-۱}} \\ x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{cases}$$

پس جواب دستگاه فوق از الگوریتم زیر به‌دست می‌آید:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+۱}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-۱, n-۲, \ldots, ۱.$$

همانطور که قبلا گفتیم روش بالا به جایگذاری پسرو شهرت دارد.

توجه ۲.۶

توجه کنید که ضعف روش‌های پیشرو و پسرو برای حل چنین دستگاههایی، به دلیل لزوم رعایت ترتیب در یافتن مجهول، عدم اجرای محاسبات به صورت موازی است.

کد متلب حل دستگاه های بالامثلثی

```
function [xU]=solu(U, b)
U=[U b];
[n J]=size(U);
xu(n)=U(n, J)/U(n,n);
for i=n-1:-1:1
xu(i)=(U(i,J)-U(i,i+1:n)*xu(i+1:n).')/U (i,i);
end
xU=xu.';
end
```

```
  U =
  2 3 3 6
  0 1 4 -2
  0 0 2 1
  0 0 0 -1

  b=
  41
  6
  10
  -4
[xU]=solu(U,b)
xU=
1
2
3
4
```

یکی از روش های مستقیم برای حل دستگاه های معادلات خطی روش کرامر است که بر مبنای دترمینان ماتریس ضرایب می باشد. علاقمندان برای مطالعه این روش به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۳ روش حذفی گاوس

این روش از آشناترین روش‌ها برای حل دستگاه معادلات خطی $AX = b$ است. ایده اصلی این روش این است که دستگاه $AX = b$ را به دستگاه بالا مثلثی $UX = b'$ تبدیل کند و سپس آن را با روش جایگذاری پسرو حل کند(هرچند با کمی تغییر می‌توان از دستگاه $AX = b$ به دستگاه پایین مثلثی $LX = b''$ رسید و آن را با جایگذاری پیشرو حل کرد).
در واقع دستگاه اصلی را به یک دستگاه هم ارز بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم. این کار می تواند توسط تبدیلاتی که قبلا به آن‌ها اشاره کردیم یعنی اعمال سطری مقدماتی انجام شود.

تعریف ۲.۲

اعمال سطری مقدماتی

۱. تعویض دو سطر یک ماتریس
۲. ضرب یک سطر در یک عدد ناصفر
۳. افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

۱.۳ روش حذفی گاوس در حالت خاص ۳ × ۳

اکنون برای شروع روش حذفی گاوس را در حالت خاص ۳ × ۳ توضیح داده و سپس آن را در حالت کلی بیان می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 = b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 = b_3^{(0)} \end{cases}$$

توجه کنید $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ و $b_i^{(0)} = b_i$ و علامت (۰) نشان دهنده‌ی گام صفر است. ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$[A|b] = [A^{(0)}|b^{(0)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right]$$

توجه ۲.۷

در این مرحله فرض کنیم $a_{11}^{(0)} = a_{11} \neq 0$ (و اگر چنین نباشد در مطالب بعدی نحوه‌ی برطرف کردن این مشکل را توضیح می‌دهیم). به درایه‌ی $a_{11}^{(0)}$ درایه محور (یا عضو لولا یا عضو پاشنه) (Pivotal element) گام صفر گفته می‌شود. باید بتوانیم به کمک عملیات سطری مقدماتی درایه‌های زیر $a_{11}^{(0)}$ (یعنی $a_{21}^{(0)}$ و $a_{31}^{(0)}$) را صفر کنیم.

برای این کار بر روی سطرهای دوم و سوم عملیات سطری مقدماتی زیر را اعمال می‌کنیم

$$R_2 \to R_2 + m_{21}^{(0)} R_1,$$
$$R_3 \to R_3 + m_{31}^{(0)} R_1$$

که منظور از R_1، R_2 و R_3، سطرهای ماتریس افزوده است و $m_{21}^{(0)}$ و $m_{31}^{(0)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

که معمولا به آنها ضریبگر (Multiplier) گفته می‌شود.
با اعمال این عملیات سطری مقدماتی داریم:

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

توجه ۲.۸

در گام جدید پاشنه $a_{22}^{(1)}$ است که باز هم فرض می‌شود ناصفر باشد.

توجه ۲.۹

در دستگاه معادلات بالا در سطر اول بالای ضرایب نماد (۰) قرار داده شده است، این بدین معناست که این ضرایب تغییر نکرده‌اند. لیکن به علت انجام عملیات مقدماتی سطری در سطرهای دوم تا آخر، اعضای ماتریس ممکن است تغییر کرده باشند. لذا آنها با نماد (۱) نشان داده شده‌اند. البته این کار را برای جلوگیری از اشتباهات احتمالی در محاسبات دستی انجام می‌دهیم. ولی طبیعی است که در محاسبات کامپیوتر جهت استفاده بهینه از حافظه ماشین مورد استفاده، لزومی ندارد که فضای جدیدی را برای این ضرایب اشغال کنیم. بلکه آنها را در همان محل قبلی ذخیره می‌کنیم.

اکنون اگر مشابه روندی که انجام دادیم و ستون اول دستگاه بالا را صفر کردیم، انجام می‌دهیم یعنی عضو سطر دوم و ستون دوم را به عنوان عضو لولایی انتخاب می‌کنیم و سطر دوم این دستگاه را به عنوان سطر محوری در نظر می‌گیریم و مشابه قبل ضرایب مربوطه را پیدا کرده (منظور m_{ij} ها هست) و از عملیات مقدماتی سطری زیر استفاده می‌کنیم

$$R_3 \to R_3 + m_{32}^{(1)} R_2$$

که در آن

$$m_{۳۲}^{(۱)} = -\frac{a_{۳۲}^{(۱)}}{a_{۲۲}^{(۱)}}.$$

اکنون با اعمال این عملیات سطری مقدماتی داریم:

$$[A^{(۲)}|b^{(۲)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{۱۱}^{(۰)} & a_{۱۲}^{(۰)} & a_{۱۳}^{(۰)} & b_{۱}^{(۰)} \\ ۰ & a_{۲۲}^{(۱)} & a_{۲۳}^{(۱)} & b_{۲}^{(۱)} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳}^{(۲)} & b_{۳}^{(۲)} \end{array}\right]$$

توجه ۲.۱۰

در این مرحله فقط اعضای سطر سوم تغییر می‌کنند. همانطور که می بینید، دستگاه $AX = b$ به یک دستگاه بالا مثلثی $UX = b'$ تبدیل شده است که در آن

$$U = \begin{bmatrix} a_{۱۱}^{(۰)} & a_{۱۲}^{(۰)} & a_{۱۳}^{(۰)} \\ ۰ & a_{۲۲}^{(۱)} & a_{۲۳}^{(۱)} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳}^{(۲)} \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} b_{۱}^{(۰)} \\ b_{۲}^{(۱)} \\ b_{۳}^{(۲)} \end{bmatrix}$$

و لذا به راحتی از طریق جایگذاری پسرو قابل حل خواهد بود.

مثال ۲.۱۵

دستگاه داده شده را به روش حذفی گاوس حل کنید:

$$\begin{cases} ۵x_{۱} + ۲x_{۲} - x_{۳} = ۶, \\ ۳x_{۱} - ۶x_{۲} + ۷x_{۳} = ۱۲, \\ x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۶. \end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$[A|b] = [A^{(۰)}|b^{(۰)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۲ & -۱ & ۶ \\ ۳ & -۶ & ۷ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۶ \end{array}\right]$$

عضو پاشنه $a_{۱۱}^{(۰)} = a_{۱۱} = ۵$ است که مخالف صفر بوده و لذا عملیات حذفی گاوس می‌تواند شروع شود. ابتدا ضربگرهای $m_{۲۱}^{(۰)}$ و $m_{۳۱}^{(۰)}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$m_{۲۱}^{(۰)} = -\frac{a_{۲۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}} = -\frac{a_{۲۱}}{a_{۱۱}} = -\frac{۳}{۵}, \qquad m_{۳۱}^{(۰)} = -\frac{a_{۳۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}} = -\frac{a_{۳۱}}{a_{۱۱}} = -\frac{۱}{۵}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - \frac{3}{5}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{5}R_1 \end{array}$$

با اعمال این عملیات سطری مقدماتی داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{38}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{24}{5} \end{array}\right]$$

توجه ۲.۱۱

در این مرحله $a_{22}^{(1)} = -\frac{36}{5} \neq 0$ پاشنه است.

برای صفر کردن زیر ستون دوم یعنی درایه $\frac{3}{5}$، ابتدا ضریبگر $m_{32}^{(1)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{36}{5}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی $R_3 \to R_3 + \frac{1}{12}R_2$ داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{38}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{24}{5} \end{array}\right] R_3 \to R_3 + \frac{1}{12}R_2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{38}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{11}{2} \end{array}\right]$$

اکنون با حل دستگاه بالا مثلثی فوق داریم:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{2} = 3, \\ x_2 &= \frac{\frac{42}{5} - \frac{38}{5}x_3}{-\frac{36}{5}} = \frac{\frac{42-114}{5}}{-\frac{36}{5}} = \frac{72}{36} = 2, \\ x_1 &= \frac{6 - 2x_2 + x_3}{5} = \frac{6 - 2(2) + 3}{5} = \frac{5}{5} = 1. \end{aligned}$$

و لذا جواب به صورت $X = [x_1, x_2, x_3]^T = [1, 2, 3]^T$ محاسبه می‌گردد.
کد ساده متلب زیر مراحل حذفی گاوس را برای مثال حل شده قبل نشان می دهد

```
A=[5 2 -1;3 -6 7;1 1 1];
b=[6;12;6];
A=[A b]
A =
5 2 -1  6
3 -6 7 12
1  1 1 6
```

گام اول حذفی گاوس

```
m21=-A(2,1)/A(1,1)
m31=-A(3,1)/A(1,1)
A(2,:)=A(2,:)+m21*A(1,:)
A(3,:)=A(3,:)+m31*A(1,:)
```

خروجی گام اول

```
m21 =
-3/5
m31 =
-1/5
A =
5 2      -1    6
0 -36/5 38/5 42/5
1 1      1     6
A =
5 2     -1     6
0 -36/5 38/5 42/5
0 3/5    6/5   24/5
```

گام دوم حذفی گاوس

```
m32=-A(3,2)/A(2,2)
A(3,:)=A(3,:)+m32*A(2,:)
```

خزوجی گام دوم

```
m32 =
1/12
A =
5   2       -1     6
0   -36/5  38/5    42/5
0    0    11/6     11/2
```

۲.۳ روش حذفی گاوس در حالت خاص $n \times n$

اکنون آماده‌ایم تا روند حذفی گاوس را برای یک دستگاه معادلات خطی $n \times n$ به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

بیان کنیم. ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$[A|b] = [A^{(0)}|b^{(0)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & \ldots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \ldots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

فرض کنیم $a_{11}^{(0)} = a_{11} \neq 0$. در گام اول باید عناصر زیر $a_{11}^{(0)}$ در ستون اول را صفر کنیم. لذا می‌بایست عملیات سطری مقدماتی زیر را روی ماتریس افزوده فوق اعمال کنیم:

$$R_2 \to R_2 + m_{21}^{(0)} R_1, \quad R_3 \to R_3 + m_{31}^{(0)} R_1, \quad \dots \quad , R_n \to R_n + m_{n1}^{(0)} R_1,$$

به‌طوری که

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad \dots \quad , m_{n1}^{(0)} = -\frac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},$$

یا در حالت کلی

$$m_{k1}^{(0)} = -\frac{a_{k1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی فوق داریم:

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

واضح است که سطرهای دوم تا n ام ماتریس افزوده فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شوند (که در واقع بعد از اعمال عملیات سطری مقدماتی فوق تغییر یافته‌اند)

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(1)} &= a_{kj}^{(0)} + m_{k1}^{(0)} a_{1j}^{(0)}, \quad k = 2, \dots, n, \; j = 2, \dots, n, \\ b_k^{(1)} &= b_k^{(0)} + m_{k1}^{(0)} b_1^{(0)}, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

در گام بعدی اگر $a_{22}^{(1)} \neq 0$ آنگاه باید عناصر زیر $a_{22}^{(1)}$ در ستون دوم ماتریس جدید را صفر کنیم. یعنی از سطر سوم تا n ام ستون دوم می بایست صفر گردند. این کار می‌تواند توسط عملیات سطری مقدماتی زیر انجام شود:

$$R_3 \to R_3 + m_{32}^{(1)} R_2, \quad R_4 \to R_4 + m_{42}^{(1)} R_2, \quad \dots, \quad R_n \to R_n + m_{n2}^{(1)} R_2,$$

به‌طوری که

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad m_{42}^{(1)} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad \dots, \quad m_{n2}^{(1)} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

یا در حالت کلی

$$m_{k2}^{(1)} = -\frac{a_{k2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad k = 3, 4, \dots, n.$$

با اعمال سطری مقدماتی فوق داریم:

$$[A^{(2)}|b^{(2)}]=\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} & b_4^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

واضح است که سطرهای سوم تا n ام ماتریس افزوده فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شوند (که در واقع بعد از اعمال عملیات سطری مقدماتی فوق تغییر یافته‌اند)

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(2)} &= a_{kj}^{(1)} + m_{k2}^{(1)}a_{2j}^{(1)}, \quad k=3,\dots,n,\ j=3,\dots,n, \\ b_k^{(2)} &= b_k^{(1)} + m_{k2}^{(1)}b_2^{(1)}, \quad k=3,4,\dots,n. \end{aligned}$$

در نهایت با ادامه روند فوق، بعد از $(n-1)$ گام، به ماتریس افزوده زیر می‌رسیم که ماتریس ضرایب به شکل بالا مثلثی تبدیل شده است:

$$[A^{(n-1)}|b^{(n-1)}]=\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

حال این دستگاه را به صورت جایگذاری پسرو حل می‌کنیم

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \tag{11}$$

$$x_j = \frac{b_j^{(j-1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}^{(j-1)}x_k}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad j=n-1,n-2,\dots,2,1. \tag{12}$$

مثال ۲.۱۶

دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - x_4 = 38 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس افزوده زیر را تشکیل می دهیم.

$$[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{9} & 1 & 0 & -1 & 38 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

چون $a_{۱۱}^{(۰)} = a_{۱۱} = ۹ \neq ۰$ پس عملیات حذفی گاوس بدون هیچ مشکلی می تواند شروع شود. ابتدا ضرب گر ها را در اولین گام محاسبه می کنیم:

$$m_{۲۱}^{(۰)} = -\frac{a_{۲۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}} = -\frac{-۱}{۹} = \frac{۱}{۹}$$
$$m_{۳۱}^{(۰)} = -\frac{a_{۳۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}} = -\frac{۱}{۹}$$
$$m_{۴۱}^{(۰)} = -\frac{a_{۴۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}} = -\frac{۰}{۹} = ۰$$

واضح است که سطر آخر هیچ تغییری نمی کند. با اعمال عملیات سطری مقدماتی زیر داریم:

$$R_۲ + \frac{۱}{۹}R_۱ \to R_۲, \qquad R_۳ - \frac{۱}{۹}R_۱ \to R_۳$$

$$[A^{(۱)}|b^{(۱)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} ۹ & ۱ & ۰ & -۱ & ۳۸ \\ ۰ & \boxed{\frac{۱}{۹}} & -۱ & \frac{۸}{۹} & -\frac{۷}{۹} \\ ۰ & \frac{۸}{۹} & ۱ & \frac{۱۹}{۹} & \frac{۶۱}{۹} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۲ \end{array}\right]$$

در این مرحله عنصر محوری $a_{۲۲}^{(۱)} = \frac{۱}{۹} \neq ۰$ است و باید درایه های زیر آن در ستون دوم صفر شوند. ضربگر ها در این گام به صورت زیرند:

$$m_{۳۲}^{(۱)} = -\frac{a_{۳۲}^{(۱)}}{a_{۲۲}^{(۱)}} = -\frac{\frac{۸}{۹}}{\frac{۱}{۹}} = -۸, \qquad m_{۴۲}^{(۱)} = -\frac{a_{۴۲}^{(۱)}}{a_{۲۲}^{(۱)}} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۹}} = -۹$$

بنابراین با اعمال عملیات سطری مقدماتی زیر بر روی ماتریس افزوده فوق داریم:

$$R_۳ - ۸R_۲ \to R_۳, \qquad R_۴ - ۹R_۲ \to R_۴$$

$$[A^{(۲)}|b^{(۲)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} ۹ & ۱ & ۰ & -۱ & ۳۸ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} & -۱ & \frac{۸}{۹} & -\frac{۷}{۹} \\ ۰ & ۰ & \boxed{۹} & -۵ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۹ & -۹ & ۹ \end{array}\right]$$

در گام سوم باید زیر درایه محوری $a_{۳۳}^{(۲)} = ۹ \neq ۰$ را صفر کنیم. کافی است ضربگر $m_{۴۳}^{(۲)}$ را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$m_{۴۳}^{(۲)} = -\frac{a_{۴۳}^{(۲)}}{a_{۳۳}^{(۲)}} = -\frac{۹}{۹} = -۱$$

لذا با اعمال عملیات سطری مقدماتی $R_۴ - R_۳ \to R_۴$ بر روی ماتریس افزوده $[A^{(۲)}|b^{(۲)}]$ داریم:

$$[A^{(۳)}|b^{(۳)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} ۹ & ۱ & ۰ & -۱ & ۳۸ \\ ۰ & \frac{۱}{۹} & -۱ & \frac{۸}{۹} & -\frac{۷}{۹} \\ ۰ & ۰ & ۹ & -۵ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \boxed{-۴} & -۴ \end{array}\right]$$

با حل دستگاه اخیر به صورت پسرو داریم:

$$x_4 = \frac{-4}{-4} = 1$$
$$x_3 = \frac{13 + 5x_4}{9} = \frac{13+5}{9} = \frac{18}{9} = 2$$
$$x_2 = \frac{\frac{-7}{9} - \frac{8}{9}x_4 + x_3}{\frac{1}{9}} = -7 - 8x_4 + 9x_3 = -7 - 8 + 18 = 3$$
$$x_1 = \frac{38 + x_4 - x_2}{9} = \frac{38 + 1 - 3}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

لذا جواب دستگاه به صورت $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [4, 3, 2, 1]^T$ تعیین می گردد.

مثال ۲.۱۷

روش حذفی گاوس را روی ماتریس افزوده زیر اعمال کنید.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{R_2-3R_1\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -4 \end{array}\right]$$

اکنون با جایگذاری پسرو جواب مساله را می یابیم:

$$x_3 = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_2 = \frac{-4 + 2x_3}{-1} = \frac{-4+2}{-1} = 2, \qquad x_1 = \frac{1 - x_3 - x_2}{2} = \frac{1 - 1 - 2}{2} = -1.$$

۳.۳ پیچیدگی محاسباتی روش حذفی گاوس

اکنون قصد داریم حجم عملیات روش حذفی گاوس را برآورد کنیم. قبل از آن به معرفی نماد O بزرگ می پردازیم.

تعریف ۲.۳

نماد O بزرگ برای توصیف رفتار حد یک تابع در بی نهایت استفاده می شود و نشان دهنده مرتبه رشد (Order of growth) یک تابع است. به صورت تعریف دقیق ریاضی وقتی توصیف تابع f در بی نهایت مد نظر است می نویسیم:

$$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists\, c, n_0 \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

که g تابعی فرضی است. به عبارت ساده تر از یک جایی به بعد رشد تابع f همانند تابع g خواهد بود.

مثال ۲.۱۸

فرض کنید $f(n) = \frac{1}{2}n^2 + n$ آنگاه می نویسیم $f \in O(n^2)$، یعنی از جایی به بعد رشد تابع f همانند تابع $g(n) = n^2$ خواهد بود.

توجه ۲.۱۲

رایج است که از بین نماد های

$$O(\frac{1}{2}n^3), \qquad O(\frac{1}{2}n^3+2n^2), \qquad O(n^3)$$

تنها از $O(n^3)$ استفاده کنیم چون برای وقتی که n خیلی بزرگ است تنها عامل n^3 است که رشد اصلی تابع را نشان می دهد و جملات مرتبه پایین در عمل مغلوب آن خواهند شد.

قضیه ۲.۲

پیچیدگی محاسباتی روش حذفی گاوس برای حل دستگاه $AX=b$ که A ماتریسی $n\times n$ است $O(n^3)$ است.

اثبات: برای بررسی پیچیدگی محاسباتی روش های حذفی گاوس باید تعداد عملیات ریاضی را که انجام داده ایم برآورد کنیم. به طور کلی، روش حذفی گاوس دارای دو مرحله می باشد.

۱. مرحله حذفی

$$\text{جمع} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}((n-k)(n-k+1)) = \frac{n^3-n}{3}$$

$$\text{ضرب} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}((n-k)(n-k+1)) = \frac{n^3-n}{3}$$

$$\text{تقسیم} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}((n-k)\times 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

۲. مرحله جایگذاری

$$\text{جمع} \qquad 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{ضرب} \qquad 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{تقسیم} \qquad 1+1+\cdots+1 = n$$

۳. طرف راست

$$\text{تقسیم} \quad 0 \qquad \text{ضرب}, \quad \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{جمع}, \quad \frac{n(n-1)}{2}$$

کل عملیات عبارتست از:

$$\text{جمع} \qquad \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n^3-n}{3}+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3+3n^2-4n}{3}$$

$$\text{ضرب} \qquad \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n^3-n}{3}+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3+3n^2-4n}{3}$$

$$\text{تقسیم} \qquad n+\frac{n(n-1)}{2}+0 = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{کل عملیات} = \text{کل جمع} + \text{کل ضرب} + \text{کل تقسیم} = \frac{n^3+3n^2-4n}{3} \times 2 + \frac{n^2+n}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{13}{6}n$$

با توجه به موارد بالا میتوان دید که پیچیدگی محاسباتی روش حذفی گاوس $O(n^3)$ است.
نشان دهید کل عملیات مربوط به جمع یعنی $\frac{n^3+3n^2-4n}{3}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ عددی صحیح است.

۴.۳ مقایسه زمان اجرای عملیات در دو روش حذفی گاوس و کرامر

فرض کنید کامپیوتری داریم که در هر ثانیه ۱ میلیارد عملیات را انجام می دهد.

n	روش حذفی گاوس	قاعده کرامر
۲	$1/1 \times 10^{-8}(s)$	$3/2 \times 10^{-8}(s)$
۱۰	$8/95 \times 10^{-7}(s)$	$0/52(s)$
۲۰	$6/29 \times 10^{-6}(s)$	۳۷۲۶۲ سال
۱۰۰	$6/91 \times 10^{-4}(s)$	3×10^{143} قرن

برتری روش حذفی گاوس نسبت به روش کرامر مشهود است.

۵.۳ تبدیل دستگاه $AX = b$ به یک دستگاه پایین مثلثی

همانطور که مشاهده کردید روش حذفی گاوس توسط یک سری عملیات سطری مقدماتی ماتریس ضرایب A را به یک ماتریس بالامثلثی U تبدیل کرده و سپس دستگاه جدید $UX = b'$ را با جایگذاری پسرو حل می کند. سوالی که مطرح می شود این است که چرا دستگاه اصلی را به یک دستگاه پایین مثلثی $LX = b''$ تبدیل نکنیم؟
البته باید توجه داشت که:

۱. رایج است که با روش حذفی گاوس دستگاه را به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل کنند.

۲. در حالت کلی تبدیل دستگاه $AX = b$ به یک دستگاه $LX = b''$ دارای مزیت خاصی نسبت به حالت قبلی نیست.

بنابراین می توان گفت که در حالت کلی چه دستگاه تبدیل به دستگاه بالا مثلثی یا پایین مثلثی گردد تاثیری در حجم عملیات روش حذفی گاوس ندارد.

۶.۳ تبدیل یک دستگاه 3×3 به یک دستگاه پایین مثلثی

اما برای نمونه تنها تبدیل یک دستگاه $AX = b$ را به یک دستگاه پایین مثلثی در حالت 3×3 بیان می کنیم و سپس یک مثال ارائه می دهیم. می توانید این بحث را به حالت $n \times n$ تعمیم دهید.
دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

در گام صفر داریم:

$$[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & \boxed{a_{33}^{(0)}} & b_3^{(0)} \end{array}\right]$$

برای اینکه ماتریس ضرایب را به یک ماتریس پایین مثلثی تبدیل کنیم باید بالای عضو محوری $a_{33}^{(0)}$ را به صفر تبدیل کنیم. برای این کار از عملیات سطری مقدماتی زیر استفاده می کنیم:

$$R_2 + m_{23}^{(0)} R_3 \to R_2, \qquad R_1 + m_{13}^{(0)} R_3 \to R_1$$

که در آن

$$m_{23}^{(0)} = -\frac{a_{23}^{(0)}}{a_{33}^{(0)}}, \qquad m_{13}^{(0)} = -\frac{a_{13}^{(0)}}{a_{33}^{(0)}}$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی فوق در ماتریس افزوده $[A^{(0)}|b^{(0)}]$ داریم:

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & 0 & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & \boxed{a_{22}^{(1)}} & 0 & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right]$$

واضح است که دو سطر یک و دو دچار تغییر شده اند از این رو از نماد (۱) استفاده کرده ایم تا به تغییر آن ها تاکید کنیم. به علاوه درایه های تغییر یافته در این مرحله بر اساس عملیات سطری مقدماتی اعمال شده به صورت زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= a_{11}^{(0)} + m_{13}^{(0)} a_{31}^{(0)}, \qquad & a_{12}^{(1)} &= a_{12}^{(0)} + m_{13}^{(0)} a_{32}^{(0)} \\ a_{21}^{(1)} &= a_{21}^{(0)} + m_{23}^{(0)} a_{31}^{(0)}, \qquad & a_{22}^{(1)} &= a_{22}^{(0)} + m_{23}^{(0)} a_{32}^{(0)} \\ b_1^{(1)} &= b_1^{(0)} + m_{13}^{(0)} b_3^{(0)}, \qquad & b_2^{(1)} &= b_2^{(0)} + m_{23}^{(0)} b_3^{(0)} \end{aligned}$$

در گام بعدی عضو محوری $a_{22}^{(1)}$ است که فرض می شود صفر نباشد در این صورت باید درایه های بالای این عضو محوری در ستون دوم را صفر کنیم یعنی درایه $a_{12}^{(1)}$ می بایست صفر گردد. در اینصورت نیاز است یک عملیات سطری مقدماتی به صورت زیر اعمال گردد.

$$R_1 + m_{12}^{(1)} R_2 \to R_1$$

به طوری که ضربگر m_{12} از رابطه زیر حاصل می شود

$$m_{12}^{(1)} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

با اعمال این عملیات سطری مقدماتی داریم:

$$[A^{(2)}|b^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{a_{11}^{(2)}} & 0 & 0 & b_1^{(2)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & 0 & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right]$$

به طوری که درایه های جدید در سطر اول ماتریس افزوده $[A^{(2)}|b^{(2)}]$ به صورت زیر هستند:

$$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} + m_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)}, \qquad b_1^{(2)} = b_1^{(1)} + m_{12}^{(1)} b_2^{(1)}$$

مشاهده می شود دستگاه اخیر پایین مثلثی است و به راحتی با جایگذاری پیشرو قابل حل است.

مثال ۲.۱۹

قبلا دستگاه

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ - \quad x_۳ = ۶ \\ ۳x_۱ - ۶x_۲ + ۷x_۳ = ۱۲ \\ \ \ x_۱ + \ \ x_۲ + \ \ x_۳ = ۶ \end{cases}$$

را با روش حذفی گاوس و تبدیل آن به یک دستگاه بالامثلثی حل کردیم. در اینجا میخواهیم این دستگاه را به یک دستگاه پایین مثلثی مطابق توضیحات قسمت قبل تبدیل کنیم.

حل: ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم:

$$[A^{(۰)}|b^{(۰)}] = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۲ & -۱ & ۶ \\ ۳ & -۶ & ۷ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ & \boxed{۱} & ۶ \end{array}\right]$$

عضو محوری $a^{(۰)}_{۳۳} = a_{۳۳} = ۱$ مخالف صفر بوده و لذا روش حذفی گاوس می تواند شروع شود. در این گام می بایست عناصر بالای عضو محوری در ستون سوم را به صفر تبدیل کنیم.

لذا ضربگر های زیر را تعریف می کنیم:

$$m^{(۰)}_{۱۳} = -\frac{a^{(۰)}_{۱۳}}{a^{(۰)}_{۳۳}} = -\frac{-۱}{۱} = ۱, \qquad m^{(۰)}_{۲۳} = -\frac{a^{(۰)}_{۲۳}}{a^{(۰)}_{۳۳}} = -\frac{۷}{۱} = -۷$$

حال با اعمال عملیات سطری مقدماتی زیر داریم:

$$R_۲ - ۷R_۳ \to R_۲, \qquad R_۱ + R_۳ \to R_۱$$

$$[A^{(۱)}|b^{(۱)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۶ & ۳ & ۰ & ۱۲ \\ -۴ & \boxed{-۱۳} & ۰ & -۳۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۶ \end{array}\right]$$

در این مرحله عضو محوری $a^{(۱)}_{۲۲} = -۱۳$ بوده که مخالف صفر است. باید عضو بالای، عضو محوری را صفر کنیم یعنی باید ۳ را تبدیل به صفر کنیم. برای این کار عملیات سطری مقدماتی زیر مورد نیاز است

$$R_۱ + m^{(۱)}_{۱۲} R_۲ \to R_۱$$

که در آن $m^{(۱)}_{۱۲} = -\frac{a^{(۱)}_{۱۲}}{a^{(۱)}_{۲۲}} = -\frac{۳}{-۱۳} = \frac{۳}{۱۳}$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی قبل داریم:

$$[A^{(۲)}|b^{(۲)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\frac{۶۶}{۱۳}} & ۰ & ۰ & \frac{۶۶}{۱۳} \\ -۴ & -۱۳ & ۰ & -۳۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۶ \end{array}\right]$$

مشاهده می شود که دستگاه اخیر پایین مثلثی است و براحتی به صورت جایگذاری پیشرو حل خواهد شد:

$$x_۱ = \frac{\frac{۶۶}{۱۳}}{\frac{۶۶}{۱۳}} = ۱$$

$$x_۲ = \frac{-۳۰ + ۴x_۱}{-۱۳} = \frac{-۳۰ + ۴}{-۱۳} = \frac{-۲۶}{-۱۳} = ۲$$

$$x_۳ = \frac{۶ - x_۱ - x_۲}{۱} = ۶ - ۲ - ۱ = ۳$$

و لذا جواب دستگاه به صورت $X = [x_۱, x_۲, x_۳]^T = [۱,۲,۳]^T$ حاصل می شود. توجه داشته باشید که قبلا این جواب را از روش حذفی گاوس و با تبدیل دستگاه اصلی به یک دستگاه بالامثلثی نیز به دست آورده بودیم.

۴ روش حذفی گاوس- جردن

در روش حذفی گاوس دیدیم که $AX = b$ یا به دستگاه بالامثلثی $UX = b'$ و یا به دستگاه پایین مثلثی $LX = b''$ تبدیل می‌گردد. از طرفی قبلا یادآور شدیم که راحت ترین دستگاهی که می‌توان متصور شد یک دستگاه قطری $DX = b'''$ است. لذا سوالی که مطرح است این است که چرا دستگاه $AX = b$ را به یک دستگاه قطری تبدیل نکنیم؟ روش حذفی گاوس-جردن در واقع چنین کاری را انجام می‌دهد و دستگاه $AX = b$ را به یک دستگاه قطری $DX = b'''$ که در آن D یک ماتریس قطری است تبدیل می‌کند. به طور کلی این کار را در دو مرحله انجام می‌دهد. ابتدا دستگاه را به بالامثلثی و سپس پایین مثلثی تبدیل می‌کند (هر چند می توان برعکس نیز عمل کرد).

واضح است که برای چنین تبدیلی می‌بایست عملیات بیشتری نسبت به روش حذفی گاوس انجام شود که در ادامه دقیق‌تر خواهیم دید. از این رو در عمل استفاده از روش حذفی گاوس مرسوم‌تر از روش حذفی گاوس-جردن است. در ادامه نحوه‌ی بکارگیری روش حذفی گاوس-جردن را برای دستگاه۳×۳ کلی

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ &= b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ &= b_۳ \end{cases}$$

بیان کرده و سپس به حل چند مثال می‌پردازیم. نحوه‌ی اجرای روش حذفی گاوس-جردن در حالتی که دستگاه $n \times n$ است به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

ابتدا ماتریس افزوده‌ی دستگاه فوق را می‌نویسیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & b_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & b_۲ \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & b_۳ \end{array}\right]$$

چون در گام صفر هستیم، قرار می‌دهیم $b^{(۰)} = b, A^{(۰)} = A$ و لذا

$$\left[A^{(۰)} \,\middle|\, b^{(۰)}\right] = \left[A \,\middle|\, b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{a_{۱۱}^{(۰)}} & a_{۱۲}^{(۰)} & a_{۱۳}^{(۰)} & b_۱^{(۰)} \\ a_{۲۱}^{(۰)} & a_{۲۲}^{(۰)} & a_{۲۳}^{(۰)} & b_۲^{(۰)} \\ a_{۳۱}^{(۰)} & a_{۳۲}^{(۰)} & a_{۳۳}^{(۰)} & b_۳^{(۰)} \end{array}\right]$$

در اولین گام درایه‌ی محوری $a_{۱۱}^{(۰)} = a_{۱۱}$ است که فرض می‌شود مخالف صفر است. باید ابتدا ماتریس ضرایب را بالامثلثی کنیم. برای این‌کار نیاز است که در مرحله‌ی اول درایه‌های$a_{۲۱}^{(۰)}, a_{۳۱}^{(۰)}$ را به صفر تبدیل کنیم. این کار توسط عملیات سطری مقدماتی زیر انجام می‌شود.

$$R_۲ \to R_۲ + m_{۲۱}^{(۰)} R_۱$$

$$R_۳ \to R_۳ + m_{۳۱}^{(۰)} R_۱$$

که در آن ضربگرهای $m_{۲۱}^{(۰)}, m_{۳۱}^{(۰)}$ چنین اند:

$$m_{۲۱}^{(۰)} = \frac{a_{۲۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}}, \qquad m_{۳۱}^{(۰)} = \frac{a_{۳۱}^{(۰)}}{a_{۱۱}^{(۰)}}$$

بعد از اعمال چنین عملیات سطری مقدماتی‌ای خواهیم داشت:

$$
\left[A^{(1)} \,\middle|\, b^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_{1}^{(0)} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(1)}} & a_{23}^{(1)} & b_{2}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_{3}^{(1)} \end{array}\right]
$$

در این مرحله عضو محوری $a_{22}^{(1)}$ است که فرض می‌کنیم مخالف صفر است. با اعمال عملیات سطری مقدماتی

$$
m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}
$$

و

$$
R_3 \to R_3 + m_{32}^{(1)} R_2
$$

درایه زیر عضو محوری صفر خواهد شد، یعنی

$$
\left[A^{(2)} \,\middle|\, b^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_{1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_{2}^{(1)} \\ 0 & 0 & \boxed{a_{33}^{(2)}} & b_{3}^{(2)} \end{array}\right]
$$

در این مرحله دستگاه حاصل را به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل کنیم. به بیانی دیگر در این مرحله می بایست با کمک عملیات سطری مقدماتی عناصر بالای قطر اصلی ماتریس در دستگاه فوق را تبدیل به صفر کنیم. برای این کار ابتدا $a_{32}^{(2)}$ را به عنوان عضو لولا در نظر گرفته و درایه های بالای آن را به صفر تبدیل می کنیم. یعنی $a_{23}^{(1)}$ و $a_{13}^{(0)}$ را. از این رو عملیات سطری مقدماتی زیر می بایست اعمال گردد:

$$
R_1 \longrightarrow R_1 + m_{13}^{(2)} R_3, \qquad R_2 \longrightarrow R_2 + m_{23}^{(2)} R_3
$$

به قسمی که

$$
m_{13}^{(2)} = -\frac{a_{13}^{(0)}}{a_{33}^{(2)}}, \qquad m_{23}^{(2)} = -\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{13}^{(2)}}
$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی فوق داریم:

$$
\left[A^{(3)} \,\middle|\, b^{(3)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & 0 & b_{1}^{(3)} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(1)}} & 0 & b_{2}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_{3}^{(2)} \end{array}\right]
$$

واضح است که $a_{11}^{(0)}$، $a_{12}^{(0)}$ و $a_{22}^{(1)}$ از گام قبلی بدون تغییر می‌ماند؛ زیرا همان‌طور که در ماتریس افزوده $[A^{(2)}|b^{(2)}]$ دیده می‌شود، در پایین این درایه‌ها فقط صفر قرار دارد و لذا عملیات سطری مقدماتی فوق روی این دو تاثیری نخواهد داشت.
در گام بعدی برای اینکه ماتریس ضرایب به یک ماتریس قطری تبدیل شود، تنها کافی ست به کمک عضو محوری $a_{22}^{(3)}$ عضو بالای آن یعنی $a_{12}^{(0)}$ را صفر کنیم. برای این کار عملیات سطری مقدماتی زیر لازم است:

$$
R_1 \to R_1 + m_{12}^{(3)} R_2, \qquad m_{12}^{(3)} = -\frac{a_{12}^{(0)}}{a_{22}^{(1)}}
$$

با اعمال آن داریم:

$$[A^{(4)} \,|\, b^{(4)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & 0 & 0 & b_1^{(4)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & b_2^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

که نشان می‌دهد توانسته‌ایم دستگاه اصلی را به یک دستگاه هم ارز قطری قطری تبدیل کنیم. از حل همزمان این دستگاه قطری جواب دستگاه $AX = b$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$x_1 = \frac{b_1^{(4)}}{a_{11}^{(0)}}, \qquad x_2 = \frac{b_2^{(3)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

مثال ۲.۲۰

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس_جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$[A^{(0)} \,|\, b^{(0)}] = [A \,|\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

عضو پاشنه $a_{11}^{(0)} = a_{11} = 5$ است که مخالف صفر بوده و لذا عملیات حذفی گاوس می‌تواند شروع شود. ابتدا ضربگرهای $m_{21}^{(0)}$ و $m_{31}^{(0)}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{3}{5}, \qquad m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{5}$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی زیر داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{1}{5}R_1]{R_2 \to R_2 - \frac{3}{5}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{-\frac{36}{5}} & \frac{38}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{باید صفر شود}} & \frac{6}{5} & \frac{24}{5} \end{array}\right]$$

در این مرحله $a_{22}^{(1)} = -\frac{36}{5} \neq 0$ عضو پاشنه است. برای صفر کردن زیر ستون دوم یعنی درایه $\frac{3}{5}$ ابتدا ضربگر $m_{32}^{(1)}$ را محاسبه می‌کنیم

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{36}{5}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

با اعمال عملیات سطری مقدماتی داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۲ & -۱ & ۶ \\ ۰ & -\frac{۳۶}{۵} & \frac{۳۸}{۵} & \frac{۴۲}{۵} \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۶}{۵} & \frac{۲۴}{۵} \end{array}\right] \xrightarrow{R_۳ \to R_۳ + \frac{۱}{۱۲} R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۲ & -۱ & ۶ \\ ۰ & -\frac{۳۶}{۵} & \frac{۳۸}{۵} & \frac{۴۲}{۵} \\ ۰ & ۰ & \boxed{\frac{۱۱}{۶}} & \frac{۱۱}{۲} \end{array}\right]$$

اکنون باید درایه‌های واقع در بالای عضو محوری، یعنی $\frac{۱۱}{۶}$ را صفر کنیم. برای این کار می‌توان از عملیات سطری مقدماتی زیر کمک گرفت:

$$\begin{aligned} m_{۱۳}^{(۲)} &= \frac{۶}{۱۱}, \quad R_۱ \to R_۱ + m_{۱۳}^{(۲)} R_۳ \\ m_{۲۳}^{(۲)} &= -\frac{۲۲۸}{۵۵}, \quad R_۲ \to R_۲ + m_{۲۳}^{(۲)} R_۳ \end{aligned}$$

که به دست می‌آوریم:

$$\left[A^{(۳)} \,\middle|\, b^{(۳)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۲ & ۰ & ۹ \\ ۰ & \boxed{-\frac{۳۶}{۵}} & ۰ & -\frac{۷۲}{۵} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۱}{۶} & \frac{۱۱}{۲} \end{array}\right]$$

در این مرحله پاشنه $-\frac{۳۶}{۵} \neq ۰$ است که درایه بالای آن می‌بایست صفر گردد که با عملیات سطری مقدماتی زیر قابل انجام است:

$$m_{۱۲}^{(۳)} = -\frac{۲}{-\frac{۳۶}{۵}} = \frac{۵}{۱۸}, \quad R_۱ \to R_۱ + m_{۱۲}^{(۳)} R_۲ \to \left[A^{(۴)} \,\middle|\, b^{(۴)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & -\frac{۳۶}{۵} & ۰ & -\frac{۷۲}{۵} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۱}{۶} & \frac{۱۱}{۲} \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه حاصل به شکل قطری است که به صورت زیر حل می‌گردد:

$$x_۳ = \frac{\frac{۱۱}{۲}}{\frac{۱۱}{۶}} = ۳, \quad x_۲ = \frac{-\frac{۷۲}{۵}}{-\frac{۳۶}{۵}} = ۲, \quad x_۱ = \frac{۵}{۵} = ۱$$

لذا جواب دستگاه به صورت $X = [x_۱, x_۲, x_۳]^T = [۱, ۲, ۳]^T$ حاصل می‌شود.

مثال ۲.۲۱

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس_جردن حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۲x_۲ + ۷x_۳ &= -۷ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۱ \\ ۴x_۱ + ۹x_۲ - ۳x_۳ &= ۱۶ \end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$\left[A^{(۰)} \,\middle|\, b^{(۰)}\right] = \left[A \,\middle|\, b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{۲} & -۲ & ۷ & -۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۹ & -۳ & ۱۶ \end{array}\right]$$

عملیات سطری مقدماتی زیر را اعمال می‌کنیم:

$$R_3 \to R_3 - 2R_1, \qquad R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1$$

داریم:

$$\left[A^{(1)} \,\middle|\, b^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 13 & -17 & 30 \end{array}\right]$$

عضو پاشنه $0 \neq 2$ است. لازم است عضو پایین آن یعنی ۱۳صفر گردد.

$$R_3 \to R_3 - \frac{13}{2}R_2$$

پس

$$\left[A^{(2)} \,\middle|\, b^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{3}{4}} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

در این جا عضو محوری $-\frac{3}{4}$ بوده که مخالف صفر است. باید درایه‌های بالای آن را به صفر تبدیل کنیم که این کار توسط عملیات سطری مقدماتی زیر انجام می‌شود .

$$R_1 \to R_1 + \frac{28}{3}R_3, \qquad R_2 \to R_2 - \frac{10}{3}R_3$$

پس داریم:

$$\left[A^{(3)} \,\middle|\, b^{(3)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

در آخرین گام همانطور که می‌بینید عضو محوری برابر ۲ است که مخالف صفر بوده و لازم است درایه‌ی بالای آن یعنی -2 صفر گردد. پس کافی است عملیات سطری مقدماتی زیر را روی ماتریس افزوده‌ی فوق اعمال کنیم:

$$R_1 \to R_1 + R_2$$

که در این صورت داریم:

$$\left[A^{(4)} \,\middle|\, b^{(4)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

که به یک ماتریس قطری تبدیل شده است، پس

$$x_3 = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} = -1, \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

و جواب دستگاه به صورت $X = [x_1, x_2, x_3]^T = [1, 1, -1]^T$ حاصل می‌شود.
گاهی اوقات می‌توان در هر مرحله سطری که عضو محوری را شامل می‌شود بر عضو محوری تقسیم کرد تا عضو محوری به یک تبدیل شود. اگر چه این کار ضرورت ندارد اما در مثال زیر این شیوه استفاده شده است.

مثال ۲.۲۲

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس–جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 6 \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 &= -1 \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 4R_2]{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{5}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - 4R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

و جواب دستگاه به صورت $X = [x_1, x_2, x_3]^T = [0, -1, 1]^T$ حاصل می‌شود.
در ادامه یک دستگاه 4×4 را با روش حذفی گاوس–جردن حل می‌کنیم. روند حل نشان می‌دهد که عملیات کلی این روش برای یک دستگاه $n \times n$ می‌تواند به راحتی استخراج گردد.

مثال ۲.۲۳

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس–جردن حل کنید

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 24 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 7x_4 &= 23 \\ 11x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 15 \\ -6x_1 + 8x_2 + 15x_3 - x_4 &= 30 \end{cases}$$

حل:

ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$\left[A^{(0)}\,\middle|\,b^{(0)}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{3} & -1 & 9 & 2 & 24\\ 5 & 6 & -1 & 7 & 23\\ 11 & -2 & 2 & 1 & 15\\ -6 & 8 & 15 & -1 & 30\end{array}\right]$$

زیرستون اول را با استفاده از عملیات سطری مقدماتی زیر تبدیل به صفر می‌کنیم.

$$\left\{\begin{array}{l}R_2\to R_2-\frac{5}{3}R_1\\ R_3\to R_3-\frac{11}{3}R_1\\ R_4\to R_4+2R_1\end{array}\right.\Rightarrow\left[A^{(1)}\,\middle|\,b^{(1)}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 9 & 2 & 24\\ 0 & \boxed{\frac{23}{3}} & -16 & \frac{11}{3} & -17\\ 0 & \frac{5}{3} & -31 & -\frac{19}{3} & -73\\ 0 & 6 & 33 & 3 & 78\end{array}\right]$$

در این گام عضو محوری $\frac{23}{3}$ است و لازم است درایه‌های پایین آن صفر شوند.

$R_3\to R_3-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{23}{3}}R_2$ یا $R_3\to R_3-\frac{5}{23}R_2$
$R_4\to R_4-\frac{6}{\frac{23}{3}}R_2$ یا $R_4\to R_4-\frac{18}{23}R_2$

که به دست می‌آوریم:

$$\left[A^{(2)}\,\middle|\,b^{(2)}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 9 & 2 & 24\\ 0 & \frac{23}{3} & -16 & \frac{11}{3} & -17\\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{633}{23}} & -\frac{164}{23} & -\frac{1594}{23}\\ 0 & 0 & \frac{1047}{23} & \frac{3}{23} & \frac{2100}{23}\end{array}\right]$$

در ادامه داریم

$$R_4\to R_4+\frac{349}{211}R_3\quad \text{یا}\quad R_4\to R_4-\frac{\frac{1047}{23}}{-\frac{633}{23}}R_3$$

پس:

$$\left[A^{(3)}\,\middle|\,b^{(3)}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 9 & 2 & 24\\ 0 & \frac{23}{3} & -16 & \frac{11}{3} & -17\\ 0 & 0 & -\frac{633}{23} & -\frac{164}{23} & -\frac{1594}{23}\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{2461}{211}} & -\frac{4922}{211}\end{array}\right]$$

همانطور که می‌بینید دستگاه به یک دستگاه بالامثلثی تبدیل شده است. در این مرحله می‌بایست درایه‌های بالای قطر اصلی صفر گردند. در اینجا عضو محوری $-\frac{2461}{211}$ است که درایه‌های بالای آن می‌بایست صفر گردند. این عملیات توسط

$$R_1\to R_1+\frac{422}{2461}R_4,\quad -\frac{2}{-\frac{2461}{211}}=\frac{422}{2461}$$

$$R_2\to R_2+\frac{2321}{7383}R_4,\quad -\frac{\frac{11}{3}}{-\frac{2461}{211}}=\frac{2321}{7383}$$

$$R_3\to R_3-\frac{1013}{1657}R_4,\quad -\frac{-\frac{164}{23}}{-\frac{2461}{211}}=-\frac{1013}{1657}$$

به راحتی امکان پذیر است.

$$\left[A^{(4)}\,\middle|\,b^{(4)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 9 & 0 & 20 \\ 0 & \frac{23}{3} & -16 & 0 & -\frac{73}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{633}{23}} & 0 & -\frac{1266}{23} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2461}{211} & -\frac{4922}{211} \end{array}\right]$$

با ادامه‌ی این روند داریم

$$\begin{cases} R_1 \to R_1 + \frac{69}{211} R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{368}{633} R_3 \end{cases} \Rightarrow \left[A^{(5)}\,\middle|\,b^{(5)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{\frac{23}{3}} & 0 & 0 & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{633}{23} & 0 & -\frac{1266}{23} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2461}{211} & -\frac{4922}{211} \end{array}\right]$$

آخرین مرحله با صفر کردن درایه بالای $\frac{23}{3}$ به اتمام می‌رسد.

$$R_1 \to R_1 + \frac{3}{23} R_2 \to \left[A^{(6)}\,\middle|\,b^{(6)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{23}{3} & 0 & 0 & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{633}{23} & 0 & -\frac{1266}{23} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2461}{211} & -\frac{4922}{211} \end{array}\right]$$

در اینجا مراحل حذفی گاوس-جردن به اتمام رسیده، زیرا به یک دستگاه قطری دست یافته‌ایم. با حل آن داریم:

$$x_4 = \frac{-\frac{4922}{211}}{-\frac{2461}{211}} = 2, \quad x_3 = \frac{-\frac{1266}{23}}{-\frac{633}{23}} = 2, \quad x_2 = \frac{\frac{23}{3}}{\frac{23}{3}} = 1, \quad x_1 = \frac{3}{3} = 1$$

لذا جواب دستگاه به صورت $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [1, 1, 2, 2]^T$ حاصل می‌گردد.

۵ برآورد تعداد اعمال حسابی در روش گاوس-جردن

همانطور که دیدیم روش گاوس-جردن ابتدا دستگاه را بالامثلثی می‌کند (مرحله۱) سپس آن را قطری می‌کند (مرحله۲) و در نهایت دستگاه قطری را حل می‌کند. (مرحله۳)
واضح است که مرحله ۱ این روش با مرحله ۱ روش حذفی گاوس یکی است و قبلا دیدیم که روش حذقی گاوس برای این کار به عملیات زیر نیاز دارد:

$$\text{تعداد جمع} = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$
$$\text{تعداد ضرب} = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$
$$\text{تعداد تقسیم} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

در مرحله ۲ که باید دستگاه را قطری کنیم باید از عناصر بالای ستون آخر شروع کنیم درایه‌ها را صفر کنیم.(فعلا سمت راست را در نظر نمی‌گیریم) برای صفر کردن عناصر بالای ستون آخر (یعنی $n-۱$ درایه که باید صفر شوند) عملیاتی مشابه آنچه در روش حذفی گاوس انجام دادیم نشان می‌دهد که تعداد ضرب و تقسیم در این مرحله برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n-۱}(n-k+k(n-k)) = \frac{n^۳}{۶} + \frac{n^۲}{۲} - \frac{۲}{۳}n$$

و تعداد جمع برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{n-۱}k(n-k) = \frac{n^۳}{۶} - \frac{n}{۶}$$

و چون تعداد عملیات لازم برای سمت راست نیز از $O(n^۲)$ است، پس:

$$\text{تعداد جمع کل} = \frac{n^۳}{۳} + \frac{n^۳}{۶} + O(n^۲) = \frac{n^۳}{۲} + O(n^۲)$$
$$\text{تعداد کل ضرب} = \frac{n^۳}{۳} + \frac{n^۳}{۶} + O(n^۲) = \frac{n^۳}{۲} + O(n^۲)$$

و چون برای حل دستگاه قطری n تقسیم نیاز داریم پس همچنان کل عملیات لازم برای حذفی گاوس-جردن برابر است با:

$$\text{کل تقسیم+کل ضرب+کل جمع= کل عملیات}$$
$$= \frac{n^۳}{۲} + \frac{n^۳}{۲} + O(n^۲) = n^۳ + O(n^۲)$$

قبلا ثابت کردیم که کل عملیات برای حذفی گاوس به صورت $\frac{۲}{۳}n^۳ + O(n^۲)$ است بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{\text{کل عملیات گاوس-جردن}}{\text{کل عملیات گاوس}} = \frac{n^۳ + O(n^۲)}{\frac{۲}{۳}n^۳ + O(n^۲)} \approx ۱/۵$$

رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که روش حذفی گاوس-جردن تقریبا یک و نیم برابر روش حذفی گاوس عملیات لازم دارد. (هرچند دقت کنید که هر دو روش از $O(n^۳)$ هستتند.) بنابراین معقول است که در عمل بخواهیم روش حذفی گاوس را نسبت به روش حذفی گاوس-جردن ترجیح دهیم.

۶ تجزیه LU

روشی که به عنوان روش حذفی گاوس در قسمت‌های قبلی بیان شد یک شکل کلاسیک از این روش است. شکل دیگری از این الگوریتم که بر پایه‌ی محاسبات ماتریسی انجام می‌شود وجود دارد که در ادامه بیان می‌شود. بر مبنای این فرم جدید می توان نشان داد که روش حذفی گاوس تجزیه ای به صورت $A = LU$ برای ماتریس A به دست می دهد که در آن L ماتریسی پایین مثلثی و U ماتریسی بالا مثلثی است. معمولا چنین تجزیه ای را تجریه LU می نامند. برای مثال تجزیه زیر در واقع یک تجزیه LU برای ماتریس A است

$$A = \begin{bmatrix} -۱۲ & -۳ & ۰ \\ -۱۲ & -۱۸ & ۳ \\ ۴ & ۱۶ & -۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۳ & ۰ \\ -۱ & ۳ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۴ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

سوالی که مطرح می شود این است که اساسا ساختن همچنین تجزیه ای تنها با روش حذفی گاوس انجام می پذیرد؟ در ادامه به این سوال پاسخ می دهیم.

قضیه ۲.۳

اگر همه زیرماتریس های پیشرو ماتریس A نامنفرد باشند، آنگاه تجزیه یکتا A بصورت $A = LU$ وجود خواهد داشت، به طوری که اعضای قطری L یا U واحد باشد.

اثبات: استقرا روی n

$$\text{If } n = 1 \Rightarrow A = [a_{11}],\ a_{11} \neq 0 \Rightarrow a_{11} = 1 \times a_{11} = L_{11}U_{11}$$

حال فرض کنید حکم برای مقادیر تا $n-1$ درست باشد یعنی $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ برای $A = A_n$ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & U \\ V^T & a_{nn} \end{bmatrix}$$

که U و V ماتریس های ستونی $(n-1) \times 1$ فرض شده اند. حال فرض کنید A را بصورت $A = A_n = L_nU_n$ تجزیه کنیم. ادعا داریم که L_n و U_n به فرم زیر هستند:

$$U_n = \begin{bmatrix} U_{n-1} & Y \\ O & U_{nn} \end{bmatrix}, \qquad L_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ X^T & L_{nn} \end{bmatrix}$$

باید ماتریس ها و بردار های L_{nn}, U_{nn}, X, Y را بیابیم.

$$L_nU_n = A \Rightarrow \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ X^T & L_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{n-1} & Y \\ O & U_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{n-1}L_{n-1} & L_{n-1}Y \\ X^TU_{n-1} & X^TY + L_{nn}U_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & U \\ V^T & a_{nn} \end{bmatrix}$$

شرط برابری دو ماتریس را می نویسیم

$$\begin{cases} L_{n-1}Y = U \\ X^TU_{n-1} = V^T \\ X^TY + L_{nn}U_{nn} = a_{nn} \end{cases}$$

چهار مجهول داریم و سه معادله. می توانیم U_{nn} یا L_{nn} را به دلخواه ۱ انتخاب کنیم. این انتخاب، با توجه به روش استقرا در اثبات، همان واحد بودن اعضای قطری U یا L را بیان می کند. اگر $L_{nn} = 1$ آنگاه

$$Y = (L_{n-1})^{-1}U, \qquad X = (V^TU_{n-1}^{-1})^T, \qquad U_{nn} = a_{nn} - X^TY$$

قضیه ۲.۴

فرض کنید A ماتریسی وارون پذیر است. اگر در تجزیه LU ماتریس A اعضای روی قطر L یا U همگی یک باشند آنگاه این تجزیه یکتا است.

اثبات: بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنیم منظور تجزیه ای است که در آن L قطر واحد است. حال فرض کنیم تجزیه یکتا نباشد یعنی $L_1U_1 = L_2U_2 = A$. نشان می دهیم $L_1 = L_2$ و $U_1 = U_2$. طبق فرض داریم:

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$$

در تساوی فوق $U_1U_2^{-1}$ بالامثلثی و $L_1^{-1}L_2$ پایین مثلثی با درایه های روی قطر ۱ است. بنابراین

$$U_1U_2^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{a_{11}} & \hat{a_{12}} & \cdots & \hat{a_{1n}} \\ 0 & \hat{a_{22}} & \cdots & \hat{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a_{nn}} \end{bmatrix} = L_1^{-1}L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{b_{21}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b_{n1}} & \hat{b_{n2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

درایه های روی قطر هر دو ماتریس باید یکسان باشد پس $\hat{a_{ii}} = 1$ چون $U_1U_2^{-1}$ بالا مثلثی است درایه های زیرقطر آن باید صفر باشد و چون $L_1^{-1}L_2$ پایین مثلثی است درایه های بالای قطر آن باید صفر باشد. بنابراین هر دو ماتریس باید همانی باشند پس $U_1U_2^{-1} = I \Rightarrow$ $U_1 = U_2$ مشابها $L_1 = L_2$ و این اثبات را تکمیل می کند. در حالتی که اعضای قطری ماتریس U همگی یک باشند اثبات کاملا مشابه است.

مثال ۲.۲۴

تجزیه LU ماتریس زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11}u_{11} + 0 \times 0 = 4 \\ l_{11}u_{12} + 0 \times u_{22} = 3 \\ l_{21}u_{11} + l_{22} \times 0 = 6 \\ l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{if} \quad l_{11} = l_{22} = 1 \\ l_{21} = 1/5 \\ u_{11} = 4 \\ u_{12} = 3 \\ u_{22} = -1/5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix}$$

۱.۶ تجزیه دولیتل

تعریف ۲.۴

اگر در تجزیه LU درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس L همگی ۱ باشند، این تجزیه را دولیتل [a] می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

[a] Doolittle Decomposition

۲.۶ تجزیه کروت

تعریف ۲.۵

اگر در تجزیه LU درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس U همگی ۱ باشند، این تجزیه را کروت [a] می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

[a] Crout Decomposition

۳.۶ تجزیه دولیتل برای یک ماتریس 3×3

در اینجا ابتدا تجزیه دولیتل را برای یک ماتریس 3×3 بیان می کنیم:

$$\begin{aligned}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23}\\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

سطر اول U همان سطر اول A خواهد بود

$$u_{11}=a_{11},\qquad u_{12}=a_{12},\qquad u_{13}=a_{13}$$

حل یکی از سطرهای U را پیدا کرده‌ایم و به سراغ پیدا کردن یکی از ستون‌های L می‌رویم.

$$a_{21}=l_{21}u_{11}\overset{u_{11}\neq 0}{\Longrightarrow} l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}},\qquad a_{31}=l_{31}u_{11}\overset{u_{11}\neq 0}{\Longrightarrow} l_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}$$

پس ستون اول ماتریس L هم محاسبه گردید و اکنون نوبت محاسبه سطر دوم U است.

$$\begin{aligned}a_{22}&=l_{21}u_{12}+u_{22}\Longrightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}\\ a_{23}&=l_{21}u_{13}+u_{23}\Longrightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}\end{aligned}$$

حال به محاسبه ی ستون دوم L می پردازیم:

$$a_{32}=l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}\overset{u_{22}\neq 0}{\Longrightarrow} l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

حال فقط محاسبه u_{33} باقی مانده است. یعنی تنها محاسبه آخرین سطر U (سطر سوم) باقی مانده است.

$$a_{33}=l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\Longrightarrow u_{33}=a_{33}-(l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23})$$

مثال ۲.۲۵

تجزیه دولیتل ماتریس را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۷ \\ -۱۸ & ۲ & -۱۳ \\ ۹ & ۱۴ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۷ \\ -۱۸ & ۲ & -۱۳ \\ ۹ & ۱۴ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ l_{۲۱} & ۱ & ۰ \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{۱۱} & u_{۱۲} & u_{۱۳} \\ ۰ & u_{۲۲} & u_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & u_{۳۳} \end{bmatrix}$$

سطر اول U همان سطر اول A است؛ یعنی:

$$u_{۱۱} = ۹, \qquad u_{۱۲} = ۲, \qquad u_{۱۳} = ۷$$

برای ستون اول L داریم:

$$l_{۲۱} = \frac{a_{۲۱}}{u_{۱۱}} = \frac{-۱۸}{۹} = -۲, \qquad l_{۳۱} = \frac{a_{۳۱}}{u_{۱۱}} = \frac{۹}{۹} = ۱$$

سطر دوم U به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{۲۲} = a_{۲۲} - l_{۲۱}u_{۱۲} = ۲ - (-۲)(۲) = ۲ + ۴ = ۶$$
$$u_{۲۳} = a_{۲۳} - l_{۲۱}u_{۱۳} = -۱۳ - (-۲)(۷) = -۱۳ + ۱۴ = ۱$$

اکنون ستون دوم L را پیدا می‌کنیم:

$$l_{۳۲} = \frac{۱}{u_{۲۲}}(a_{۳۲} - l_{۳۱}u_{۱۲}) = \frac{۱}{۶}(۱۴ - (۱)(۲)) = ۲$$

تنها درایه باقی‌مانده $u_{۳۳}$ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{۳۳} = a_{۳۳} - (l_{۳۱}u_{۱۳} + l_{۳۲}u_{۲۳}) = ۱۲ - ((۱)(۷) + (۲)(۱)) = ۱۲ - ۹ = ۳$$

پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۷ \\ -۱۸ & ۲ & -۱۳ \\ ۹ & ۱۴ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۴.۶ تجزیه دولیتل برای یک ماتریس ۴×۴

اکنون تجزیه دولیتل را برای یک ماتریس ۴×۴ بیان می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ l_{۲۱} & ۱ & ۰ & ۰ \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & ۱ & ۰ \\ l_{۴۱} & l_{۴۲} & l_{۴۳} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{۱۱} & u_{۱۲} & u_{۱۳} & u_{۱۴} \\ ۰ & u_{۲۲} & u_{۲۳} & u_{۲۴} \\ ۰ & ۰ & u_{۳۳} & u_{۳۴} \\ ۰ & ۰ & ۰ & u_{۴۴} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{۱۱} & u_{۱۲} & u_{۱۳} & u_{۱۴} \\ l_{۲۱}u_{۱۱} & l_{۲۱}u_{۱۲} + u_{۲۲} & l_{۲۱}u_{۱۳} + u_{۲۳} & l_{۲۱}u_{۱۴} + u_{۲۴} \\ l_{۳۱}u_{۱۱} & l_{۳۱}u_{۱۲} + l_{۳۲}u_{۲۲} & l_{۳۱}u_{۱۳} + l_{۳۲}u_{۲۳} + u_{۳۳} & l_{۳۱}u_{۱۴} + l_{۳۲}u_{۲۴} + u_{۳۴} \\ l_{۴۱}u_{۱۱} & l_{۴۱}u_{۱۲} + l_{۴۲}u_{۲۲} & l_{۴۱}u_{۱۳} + l_{۴۲}u_{۲۳} + l_{۴۳}u_{۳۳} & l_{۴۱}u_{۱۴} + l_{۴۲}u_{۲۴} + l_{۴۳}u_{۳۴} + u_{۴۴} \end{bmatrix}$$

سطر اول:

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13}, \quad u_{14} = a_{14}$$

ستون اول:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \quad l_{41} = \frac{a_{41}}{u_{11}}$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{bmatrix}$$

سطر دوم:

$$u_{22} + l_{21}u_{12} = a_{22}, \quad u_{23} + l_{21}u_{13} = a_{23}, \quad u_{24} + l_{21}u_{14} = a_{24}$$

$$\Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}, \quad u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14}$$

ستون دوم:

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32}, \quad l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} = a_{42}$$

$$\Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}, \quad l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}}$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{bmatrix}$$

سطر سوم:

$$u_{33} + l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = a_{33}, \quad u_{34} + l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} = a_{34}$$

$$\Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}, \quad u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}$$

ستون سوم:

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}}$$

سطر چهارم:

$$u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34}$$

مثال ۲.۲۶

تجزیه دولیتل ماتریس زیر را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ 30 & 1 & -5 & 11 \\ 42 & -1 & -4 & 18 \\ 12 & 1 & 7 & 28 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ 30 & 1 & -5 & 11 \\ 42 & -1 & -4 & 18 \\ 12 & 1 & 7 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

سطر اول U

$$u_{11} = a_{11} = 6, \quad u_{12} = a_{12} = 0, \quad u_{13} = a_{13} = -1, \quad u_{14} = a_{14} = 2$$

ستون اول L

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{30}{6} = 5 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{42}{6} = 7 \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{u_{11}} = \frac{12}{6} = 2 \end{aligned}$$

سطر دوم U

$$\begin{aligned} u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (5)(0) = 1 \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} = -5 - (5)(-1) = 0 \\ u_{24} &= a_{24} - l_{21}u_{14} = 11 - (5)(2) = 1 \end{aligned}$$

ستون دوم L

$$\begin{aligned} l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-1 - (7)(0)}{1} = -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} = \frac{1 - (2)(0)}{1} = 1 \end{aligned}$$

سطر سوم U

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -4 - (7)(1) - (-1)(0) = 3 \\ u_{34} &= a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 18 - (7)(2) - (-1)(1) = 5 \end{aligned}$$

ستون سوم L

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} = \frac{7 - (2)(-1) - (1)(0)}{3} = 3$$

سطر چهارم U

$$u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = 28 - (2)(2) - (1)(1) - (3)(5) = 8$$

در نتیجه تجزیه دولیتل ماتریس داده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ 30 & 1 & -5 & 11 \\ 42 & -1 & -4 & 18 \\ 12 & 1 & 7 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

۷ الگوریتم کلی تجزیه دولیتل برای یک ماتریس $n \times n$

در ادامه به معرفی الگوریتم کلی تجزیه دولیتل برای یک ماتریس $n \times n$ می‌پردازیم. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. می‌خواهیم تجزیه دولیتل $A = LU$ را محاسبه کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & \dots & l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}u_{11} & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & \dots & l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \dots + l_{n,n-1}u_{n-1,n} + u_{nn} \end{bmatrix}$$

با بازنویسی به کمک سیگما خواهیم داشت:

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ l_{21}u_{11} & \sum l_{2k}u_{k2} + u_{22} & \sum l_{2k}u_{k3} + u_{23} & \dots & \sum l_{2k}u_{kn} + u_{2n} \\ l_{31}u_{11} & \sum l_{3k}u_{k2} & \sum l_{3k}u_{k3} + u_{33} & \dots & \sum l_{3k}u_{kn} + u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}u_{11} & \sum l_{nk}u_{k2} & \sum l_{nk}u_{k3} & \dots & \sum l_{nk}u_{kn} + u_{nn} \end{bmatrix}$$

برای سادگی کار اندیس‌های سیگماها نوشته نشده است. با مقایسه ماتریس فوق با A داریم:

$$u_{11} = a_{11},\ u_{12} = a_{12},\ \dots\ , u_{1n} = a_{1n}$$

و همچنین با فرض $u_{11} \neq 0$ داریم

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21}u_{11} \Longrightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ a_{31} = l_{31}u_{11} \Longrightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \\ \vdots \\ a_{n1} = l_{n1}u_{11} \Longrightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}} \end{cases}$$

همچنین برای هر $2 \leq i \leq j \leq n$ داریم:

$$a_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \Longrightarrow u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

و برای هر $2 \leq j < i \leq n$ با فرض $u_{jj} \neq 0$ داریم:

$$a_{ij} = l_{ij}u_{jj} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \Longrightarrow l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

لذا الگوریتم دولیتل در حالت کلی محاسبه می گردد:

الگوریتم تجزیه دولیتل

$$u_{1j} = a_{1j} \qquad 1 \le j \le n$$
$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad 2 \le i \le n$$
$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \qquad 2 \le i \le j \le n$$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \qquad 2 \le j < i \le n$$

۱.۷ تجزیه کروت برای یک ماتریس های 3×3

در اینجا ابتدا تجزیه کروت را برای یک ماتریس 3×3 بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که یعنی:

$$l_{11} = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31}, \quad l_{11}u_{12} = a_{12} \Longrightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad l_{11}u_{13} = a_{13} \Longrightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$
$$l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \Longrightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$
$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \Longrightarrow u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$$
$$l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \Longrightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}$$
$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = a_{33} \Longrightarrow l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

مثال ۲.۲۷

تجزیه کروت ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برای ستون اول:

$$l_{۱۱} = ۱, \quad l_{۲۱} = ۳, \quad l_{۳۱} = ۲$$

برای ستون دوم:

$$\begin{aligned}
&l_{۱۱}u_{۱۲} = ۲ \Longrightarrow u_{۱۲} = ۲\\
&l_{۲۱}u_{۱۲} + l_{۲۲} = ۸ \Longrightarrow l_{۲۲} = ۲\\
&l_{۳۱}u_{۱۲} + l_{۳۲} = ۶ \Longrightarrow l_{۳۲} = ۲
\end{aligned}$$

برای ستون سوم:

$$\begin{aligned}
&l_{۱۱}u_{۱۳} = ۴ \Longrightarrow u_{۱۳} = ۴\\
&l_{۲۱}u_{۱۳} + l_{۲۲}u_{۲۳} = ۱۴ \Longrightarrow u_{۲۳} = ۱\\
&l_{۳۱}u_{۱۳} + l_{۳۲}u_{۲۳} + l_{۳۳} = ۱۳ \Longrightarrow l_{۳۳} = ۳
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۸ & ۱۴ \\ ۲ & ۶ & ۱۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸ الگوریتم کلی تجزیه کروت برای یک ماتریس $n \times n$

در حالت کلی، تجزیه کروت برای ماتریس $n \times n$ چون A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{۱۱} & ۰ & \dots & ۰ \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n۱} & l_{n۲} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & u_{۱۲} & \dots & u_{۱n} \\ ۰ & ۱ & \dots & u_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix}$$

الگوریتم تجزیه

$$\begin{aligned}
&l_{۱j} = a_{۱j} && ۱ \le j \le n\\
&u_{i۱} = \frac{a_{i۱}}{l_{۱۱}} && ۲ \le i \le n\\
&l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=۱}^{j-۱} l_{ik}u_{kj} && ۲ \le i \le j \le n\\
&u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=۱}^{i-۱} l_{ik}u_{kj}}{l_{jj}} && ۲ \le j < i \le n
\end{aligned}$$

دستور تجزیه LU در متلب

```
A =
-12          -3          0
-12          -18         3
4            16          -15

>> [L,U]=lu(A)

L =
```

```
1              0              0
1              1              0
-1/3          -1              1

U =
-12           -3              0
0            -15              3
0              0            -12
```

کد متلب تجزیه دولیتل

```
clc
clear all
close all
A = [9 2 7;-18 2 -13;9 14 12];
[n,m]=size(A); U=zeros(n); L=zeros(n);
% Diagonal of L
for j=1:n
L(j,j)=1;
end
% First row of U
for j=1:n
U(1,j)=A(1,j);
end

% First column of L
for i=1:n
L(i,1)=A(i,1)/U(1,1);
end

for i=2:n
for j=2:n

if j >= i
s = 0;
for k=1:i-1
s = s + (L(i,k) * U(k,j));
end
U(i,j) = A(i,j) - s;
end

if j < i
s=0;
for k=1:j-1
s = s + (L(i,k) * U(k,j));
end
L(i,j) = (A(i,j) - s)/U(j,j);
end
end
end
```

```
L =
1          0          0
-2         1          0
1          2          1


U =
9          2          7
0          6          1
0          0          3
```

۹ حل دستگاه خطی به کمک تجزیه LU

فرض کنید بخواهیم دستگاه $AX=b$ را حل کنیم. در روش تجزیه، حل یک دستگاه پیچیده به حل دو دستگاه سادتر تبدیل می‌شود. ابتدا ماتریس A را به‌گونه‌ای به حاصل ضرب دو ماتریس L و U تبدیل می‌کنیم ($A=LU$) بطوری که L و U به ترتیب پایین مثلثی و بالا مثلثی باشند.

$$AX=b \Longrightarrow (LU)X=b \Longrightarrow \begin{cases} LY=b & \text{جایگذاری پیشرو} \\ UX=Y & \text{جایگذاری پسرو} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که ابتدا می بایست دستگاه پایین مثلثی $LY=b$ را حل کنیم تا Y به دست آید و سپس دستگاه بالامثلثی $UX=Y$ را حل کنیم تا X تعیین گردد.

مثال ۲.۲۸

دستگاه را به روش تجزیه دولیتل حل کنید.

$$\begin{cases} ۴x_۱-۲x_۲+۲x_۳=۶ \\ ۴x_۱-۳x_۲-۲x_۳=-۸ \\ ۲x_۱+۳x_۲-x_۳=۵ \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} ۴x_۱-۲x_۲+۲x_۳=۶ \\ ۴x_۱-۳x_۲-۲x_۳=-۸ \\ ۲x_۱+۳x_۲-x_۳=۵ \end{cases} \xrightarrow{AX=b} \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۴ & -۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۸ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

ابتدا تجزیه دولیتل ماتریس A را بدست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۴ & -۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

ابتدا دستگاه $LY=b$ را با جایگذاری پیشرو حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۸ \\ ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جایگذاری پیشرو}} \begin{cases} y_۱=۶ \\ y_۲=-۱۴ \\ y_۳=-۵۴ \end{cases}$$

سپس دستگاه $UX = Y$ را با جایگذاری پسرو حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۱۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۱۴ \\ -۵۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جایگذاری پسرو}} \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۲ \\ x_۳ = ۳ \end{cases}$$

نکته ۲.۲

اگر ماتریس به صورت $A = LU$ تجزیه شود، آنگاه محاسبه دترمینان آن ساده می‌شود:

$$A = LU \Longrightarrow \det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = l_{۱۱} \dots l_{nn} u_{۱۱} \dots u_{nn}$$

نکته ۲.۳

اگر $A = LU$ همان تجزیه دولیتل باشد آنگاه

$$\det(A) = l_{۱۱} \dots l_{nn} u_{۱۱} \dots u_{nn} = ۱ \times ۱ \times ... \times ۱ \times u_{۱۱} \dots u_{nn} = u_{۱۱} \dots u_{nn}.$$

نکته ۲.۴

اگر $A = LU$ همان تجزیه کروت باشد آنگاه

$$\det(A) = l_{۱۱} \dots l_{nn} u_{۱۱} \dots u_{nn} = l_{۱۱} \dots l_{nn} \times ۱ \times ۱ \times ... \times ۱ = l_{۱۱} \dots l_{nn}$$

مثال ۲.۲۹

دترمینان ماتریس زیر را با توجه به تجزیه دولیتل محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۴ & -۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۴ & -۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (۴)(-۱)(-۱۸) = ۷۲$$

قضیه ۲.۵

پیچیدگی محاسباتی تجزیه دولیتل برای ماتریس $n \times n$، A از $O(n^۳)$ است.

۱۰ محورگیری (محورگزینی)

مثال ۲.۳۰

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} \qquad 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \end{cases} \tag{13}$$

حل: ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

روش حذفی گاوس برای شروع با مشکل مواجه است زیرا هنگام تشکیل ضربگرها داریم:

$$m_{21} = -\frac{1}{0} \quad \text{بی‌معنی}, \qquad m_{31} = -\frac{3}{0} \quad \text{بی‌معنی}$$

بخاطر همین موضوع است که در قسمت‌های قبل فرض می‌کردیم که عضو لولا هیچ‌گاه صفر نباشد. اگر عضو لولا را بتوانیم تغییر دهیم روش می‌تواند شروع شود. برای مثال در دستگاه (۱۳) اگر جای معادله اول و دوم را جا به جا کنیم داریم:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \end{cases} \tag{14}$$

واضح است که ترتیب معادلات تاثیری در جواب ندارد و درواقع جواب دستگاه تغییر نمی‌کند. با نوشتن ماتریس افزوده دستگاه (۱۴) داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

بنابراین از همان اول می‌توانیم وقتی با عضو لولا صفر برخورد کردیم تنها سطر مربوط به لولا را تغییر دهیم. اکنون روش حذفی گاوس می تواند بطور مو فقیت آمیز بکار گرفته شود زیرا عضو لولای جدید $1 \neq 0$ است و بعلاوه تنها نیاز است که درایه $(3,1)$ ماتریس افزوده فوق یعنی ۳ را صفر کنیم. این کار به راحتی توسط اعمال سطری مقدماتی زیر انجام می‌شود.

$$R_3 \to R_3 + m_{31}^{(0)} R_1 \ , \qquad m_{31}^{(0)} = -\frac{3}{1} = -3$$

پس ماتریس افزوده جدید چنین خواهد بود.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & -22 \end{array}\right]$$

لولای جدید غیرصفر است. مرحله بعدی حذفی گاوس چنین است:

$$R_3 \to R_3 + m_{32}^{(1)} R_2 \quad , m_{32}^{(0)} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

پس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۹}{۲} & -۲۷ \end{array}\right]$$

بنابراین جواب دستگاه چنین محاسبه می‌شود(جایگذاری پسرو)

$$x_۳ = \frac{-۲۷}{-\frac{۹}{۲}} = ۶, \qquad x_۲ = \frac{۱}{۲}(-۲ + x_۳) = \frac{۱}{۲}(-۲ + ۶) = \frac{۱}{۲}(۴) = ۲$$
$$x_۱ = \frac{۱}{۱}(۵ - x_۲ - x_۳) = ۵ - ۲ - ۶ = -۳$$

به راحتی می‌توان دید که $X = [-۳, ۲, ۶]^T$ جواب دستگاه (۱۳) نیز هست.
تکنیکی که در مساله قبل بکار بردیم و توانستیم روش حذفی گاوس را اجرا کنیم عمل محورگیری(Pivoting) نام دارد. با توجه به اینکه در اجرای روش حذفی گاوس امکان دارد در یکی از مراحل یکی از عضو محوری صفر شوند لذا عمل محورگیری می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. مثال بعدی نشان می‌دهد ممکن است روش حذفی گاوس در ابتدای شروع کار بدون هیچ مشکلی اجرا شود اما در مراحل بعدی با مشکل رو به رو شود.

مثال ۲.۳۱

دستگاه داده شده را با روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + ۹x_۴ = ۷ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ - x_۴ = ۵ \\ ۶x_۱ - ۴x_۲ + ۸x_۳ + ۱۰x_۴ = ۱۹ \\ ۲x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۰ \end{cases}$$

حل: ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{۲} & ۱ & ۰ & ۹ & ۷ \\ ۴ & ۲ & ۳ & -۱ & ۵ \\ ۶ & -۴ & ۸ & ۱۰ & ۱۹ \\ ۲ & -۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{array}\right]$$

عنصر محوری غیر صفر است و لذا فرآیند حذفی گاوس می‌تواند شروع شود:

$$R_۲ \to R_۲ - ۲R_۱, \qquad R_۳ \to R_۳ - ۳R_۱, \qquad R_۴ \to R_۴ - R_۱$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۲ & ۱ & ۰ & ۹ & ۷ \\ ۰ & \boxed{۰} & ۳ & -۱۹ & -۹ \\ ۰ & -۷ & ۸ & -۱۷ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۲ & -۶ & -۷ \end{array}\right]$$

مشاهده شد که در گام بعدی عضو محوری صفر شده و لذا روش حذفی گاوس ناچار است متوقف گردد مگر اینکه محورگیری انجام شود.

توجه ۲.۱۳

اگر در مرحله‌ای از روش حذفی گاوس عضو محوری و تمام درایه‌های پایین آن در ستون مربوطه صفر شوند آنگاه می‌توان ثابت کرد که ماتریس ضرایب وارون‌ناپذیر است(درواقع منفرد است) که این خلاف فرض وارون‌پذیری ماتریس ضرایب است که در شروع فصل در نظر گرفته شد.

همانطور که دیدیم برای انجام عمل محورگیری تنها کافی است سطر لولا با یک سطر دیگر تعویض گردد. قبلا اشاره کردیم که تعویض دو سطر دلخواه از یک ماتریس توسط ماتریس مقدماتی از نوع اول انجام می‌شود. به ویژه تذکر دادیم که این نوع ماتریس مقدماتی را بیشتر با نام ماتریس جایگشت می‌شناسیم. می توان به کمک ماتریس های جایگشت فرم ماتریسی روش حذفی گاوس با محورگیری را بیان کرد.

توجه ۲.۱۴

علاقمندان برای دیدن فرم ماتریسی روش حذفی گاوس با محورگیری به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۱.۱۰ محورگیری جزئی

گاهی اوقات عضو محوری صفر نمی‌باشد(از لحاظ تئوری) اما از لحاظ محاسبات کامپیوتری ممکن است صفر تلقی گردد مثلا دستگاه زیر را با ماتریس افزوده در نظر بگیرید:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{۰/۰۰۰۰۱} & ۵ & ۷ \\ ۹ & ۱ & ۱۲ \end{array}\right]$$

عضو محوری ۰/۰۰۰۰۱ و هرگز صفر نیست اما اگر کامپیوتر ما در حساب ۳ رقم اعشار محاسبات را انجام دهد آنگاه آن را صفر تلقی کرده و در نتیجه الگوریتم حذفی گاوس همچنان با مشکل مواجه خواهد شد. به ویژه می‌توان نشان داد که بیش از حد کوچک بودن عضو محوری باعث افزایش خطای محاسبات و خطای گرد کردن شده و آنگاه به درستی و دقت جواب محاسبه شده با روش حذفی گاوس نمی‌توان اعتماد کرد.

به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۲.۳۲

$$\begin{cases} ۰/۰۰۰۳x_۱ + ۱/۵۶۶x_۲ = ۱/۵۶۹ \\ ۰/۳۴۵۴x_۱ - ۲/۴۳۶x_۲ = ۱/۰۱۸ \end{cases}$$

بردار $X = [x_۱, x_۲]^T = [۱۰, ۱]^T$ در هر دو معادله صدق می‌کند زیرا:

$$\begin{cases} ۰/۰۰۰۳ \times ۱۰ + ۱/۵۶۶ \times ۱ = ۰/۰۰۳ + ۱/۵۶۶ = ۱/۵۶۹ \\ ۰/۳۴۵۴ \times ۱۰ - ۲/۴۳۶ \times ۱ = ۳/۴۵۴ - ۲/۴۳۶ = ۱/۰۱۸ \end{cases}$$

از طرفی دترمینان دستگاه ضرایب برابر است با:

$$(۰/۰۰۰۳)(-۲/۴۳۶) - (۱/۵۶۶)(۰/۳۴۵۴) \simeq -۰/۵۴۱۶$$

که مخالف صفر است یعنی دستگاه جواب یکتا دارد و یکتا جوابش $[۱۰, ۱]^T$ است.
هدف حل دستگاه با روش حذفی گاوس است. چون عضو محوری صفر نیست پس این روش باید قادر به حل دستگاه باشد(حداقل از لحاظ تئوری). ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{۰/۰۰۰۳} & ۱/۵۶۶ & ۱/۵۶۹ \\ ۰/۳۴۵۴ & -۲/۴۳۶ & ۱/۰۱۸ \end{array}\right]$$

چنانچه محاسبات با ۴ رقم اعشار(کل قبل و بعد اعشار) انجام شود داریم:

$$m_{۲۱} = -\frac{۰/۳۴۵۴}{۰/۰۰۰۳} = -۱۱۵۱$$

در این حالت سطر دوم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$R_۲ \to R_۲ + m_{۲۱}R_۱$$

یا

$$\begin{aligned} -۲/۴۳۶ + (-۱۱۵۱)(۱/۵۶۶) &= -۲/۴۳۶ - ۱۸۰۲ = -۱۸۰۴ \quad (۴d) \\ ۱/۰۱۸ + (-۱۱۵۱)(۱/۵۶۶) &= ۱/۰۱۸ - ۱۸۰۶ = -۱۸۰۵ \quad (۴d) \end{aligned}$$

پس ماتریس افزوده جدید چنین است:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۰/۰۰۰۳ & ۱/۵۶۶ & ۱/۵۶۹ \\ ۰/۰۰۰۰ & -۱۸۰۴ & -۱۸۰۵ \end{array}\right]$$

بنابراین جواب دستگاه برابر است با:

$$\begin{aligned} x_۲ &= \frac{-۱۸۰۵}{-۱۸۰۴} = ۱/۰۰۱ \quad (۴d) \\ x_۱ &= \frac{۱/۵۶۹ - (۱/۵۶۶)(۱/۰۰۱)}{۰/۰۰۰۳} = \frac{۱/۵۶۹ - ۱/۵۶۸}{۰/۰۰۰۳} = \frac{۰/۰۰۱}{۰/۰۰۰۳} = ۳/۳۳۳ \end{aligned}$$

یعنی جواب $[۳/۳۳۳, ۱/۰۰۱]^T$ حاصل شده است. مقدار $x_۲ = ۱/۰۰۱$ قابل قبول است اما $x_۱ = ۳/۳۳۳$ با $x_۱$ واقعی یعنی ۱۰ بسیار فاصله دارد و جواب تعیین شده اصلا و اصلا قابل قبول نیست.
برای حل این مشکل ۲ راهکار می‌توان در نظر داشت:

۱. افزایش تعداد ارقام محاسبات اعداد در کامپیوتری که در دسترس است

۲. انجام محورگیری

درواقع چون عضو محوری خیلی کوچک است و در مخرج قرار می‌گیرد باعث می‌شود ضرب‌گر $m_{۲۱}$ مقدار بزرگی باشد و این خود باعث از دست رفتن ارقام با معنی می‌گردد. توجه داشته باشید در دروس آنالیز عددی مقدماتی آموختیم که از تقسیم اعداد بر اعداد خیلی کوچک می‌بایست پرهیز کرد.
اکنون برای حل مساله فوق از هر ۲ راهکار استفاده می‌کنیم

- راهکار اول: افزایش تعداد ارقام در محاسبات

ابتدا به جای محاسبات با ۴ رقم اعشار آن را به ۵ رقم اعشار افزایش می‌دهیم در این صورت داریم:

$$m_{۲۱} = -\frac{۰/۳۴۵۴}{۰/۰۰۰۳} = -۱۱۵۱/۳$$

$$R_۲ \to R_۲ + m_{۲۱}R_۱$$

پس

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۰/۰۰۰۳ & ۱/۵۶۶ & ۱/۵۶۹ \\ ۰/۰۰۰۰۱ & -۱۸۰۵/۳ & -۱۸۰۵/۴ \end{array}\right]$$

که از حل آن جواب $x_۲ = ۱/۰۰۰۱ \quad , \quad x_۱ = ۹/۳۳۳۲$ حاصل می‌شود. مشاهده می‌شود که دقت جواب بهتر گردیده اما هنوز قابل قبول نمی‌باشد. حال یکبار دیگر محاسبات را با ۶ رقم اعشار انجام می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$m_{۲۱} = -\frac{۰/۳۴۵۴}{۰/۰۰۰۳} = -۱۱۵۱/۳۳$$
$$R_۲ \to R_۲ + m_{۲۱}R_۱$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} ۰/۰۰۰۳ & ۱/۵۶۶ & ۱/۵۶۹ \\ ۰/۰۰۰۰۰۱ & -۱۸۰۵/۴۲ & -۱۸۰۵/۴۲ \end{array}\right]$$

پس جواب $x_۲ = ۱/۰۰۰۰۰ \quad , \quad x_۱ = ۹/۹۹۹۹۹$ حاصل می‌شود که بهبودی در جواب حاصل شده دیده می‌شود؛ البته باید توجه کرد همواره افزایش ارقام نمی‌تواند مشکل را حل کند.

- راهکاردوم: محورگیری

اکنون این دستگاه را با همان روش حذفی گاوس حل می‌کنیم، لیکن قبل از حل، جای دو سطر اول و دوم را عوض می‌کنیم تا عضو لولایی جدید خیلی کوچک نشود و در نتیجه ضریب $m_{۲۱}$ متناظر بزرگ نگردد.

$$\begin{cases} ۰/۳۴۵۴x_۱ - ۲/۴۳۶x_۲ = ۱/۰۱۸ \\ ۰/۰۰۰۳x_۱ + ۱/۵۶۶x_۲ = ۱/۵۶۹ \end{cases}$$
$$m_{۲۱} = -\frac{۰/۰۰۰۳}{۰/۳۴۵۴} = -۰/۰۰۰۸$$

جواب این دستگاه با روش جایگذاری پسرو به صورت $x_۱ = ۱۰/۰۱$ و $x_۲ = ۱/۰۰۰$ که در مقایسه با جواب قبلی از دقت خوبی برخوردار است.
همانطور که مشاهده گردید با عمل محورگیری توانستیم به جواب محاسبه شده بهبود قابل توجه‌ای دهیم(آن را با حالت غیرمحورگیری مقایسه کنید.) به عمل فوق محورگیری جزئی (Partial Pivoting) گفته می‌شود.
درواقع وقتی که عضو محوری صفر نمی‌باشد و تنها عددی کوچک است و از محورگیری (جابجایی سطرها)استفاده می‌کنیم گفته می‌شود از محورگیری جزئی استفاده شده است.

مثال ۲.۳۳

دستگاه زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{cases} ۱۰^{-۵}x_۱ + x_۲ = ۲ \\ \qquad x_۱ + x_۲ = ۳ \end{cases}$$

می‌توان دید که $[۱, ۲]^T$ جواب تقریبی معادله است. اکنون دستگاه را بدون محورگیری جزئی حل می‌کنیم. ماتریس افزوده جدید چنین است(محاسبات $۳d$)

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۱۰^{-۵} & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۹۹۹۹۹ & -۱۹۹۹۹۷ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{جایگذاری پسرو}} \begin{cases} x_۱ = ۰/۰۰ \\ x_۲ = ۲/۰۰ \end{cases}$$

مشاهده شد که $x_۱$ قابل قبول نیست. حال دقت محاسبات را به ۵ رقم اعشار افزایش می‌هیم $(۵d)$ داریم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-5} & 1 & 2 \\ 0 & -99999 & -199997 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{جایگذاری پسرو}} \begin{cases} x_1 = 0/0000 \\ x_2 = 2/0000 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که هنوز جواب بهبودی نیافته است. زیرا مقدار $x_1 = 0/0000$ قابل قبول نیست هرچند مقدار $x_2 = 2/0000$ مناسب است. اکنون دقت محاسبات را به ۷ رقم اعشار افزایش می‌دهیم($7d$) داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 1/000000 \\ x_2 = 1/999990 \end{cases}$$

که جواب قابل قبول است.

اگر از محورگیری جزئی استفاده کنیم داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 10^{-5}x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

یا

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 10^{-5} & 1 & 2 \end{array}\right]$$

بنابراین

$$m_{21} = -\frac{10^{-5}}{1} = -10^{-5}$$

و با اعمال

$$R_2 \to R_2 - 10^{-5}R_1$$

در ماتریس افزوده فوق داریم(در حساب ۳ رقم اعشاری)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1/00 & 2/00 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{جایگذاری پسرو}} \begin{cases} x_1 = 1/00 \\ x_2 = 2/00 \end{cases}$$

که جواب قابل قبولی است. همانطور که مشخص است راهکار دوم یعنی محورگیری در صورتی که کامپیوتر مورد نظر دارای محدودیت محاسباتی باشد نسبت به راهکار اول ترجیح داده می‌شود.

اما در واقعیت محورگیری جزئی به چه صورت مانع از رشد خطا در محاسبات روش حذفی گاوس می‌شود؟

برای دانستن این موضوع به قضیه‌ایی از آنالیز عددی مقدماتی توجه کنید.

قضیه ۲.۶

فرض کنید a و b تقریب هایی از مقادیر واقعی A و B باشد و $a, b, A, B > 0$ آنگاه خطای حاصل ضرب ab در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$er(ab) \leq aer(b) + ber(a)$$

که در آن $er(a) = |A - a|$, $er(b) = |B - b|$ خطای مطلق a و b و $er(ab) = |AB - ab|$ خطای مطلق حاصل ضرب ab است.

مطابق رابطه $er(ab) \leq aer(b) + ber(a)$ اگر a یا b بزرگ باشد آنگاه حاصلضرب آنها دارای خطای بزرگی خواهد بود.

به همین دلیل وقتی ضربگرهای m_{ij} بزرگ هستند چون مطابق عملیات سطری مقدماتی $R_i \to R_i + m_{ij}R_j$ حاصل m_{ij} در هر درایه سطر R_j بزرگ بوده و در این مرحله ارقام بامعنی از دست می‌روند. درواقع محورگیری جزئی با کوچک کردن ضربگرهای m_{ij} مانع از این کار می‌شود.

مثال ۲.۳۴

اگر در یک مساله نیاز به محورگیری جزئی داشته باشیم اما تعداد سطرهایی که در آنها عضو لولا قرار دارد بیش از یکی باشد کدام یک از سطرها را می‌بایست با سطر لولا تعویض کرد؟

حل: مطابق رابطه $er(ab) \leq aer(b) + ber(a)$ هرچقدر اندازه‌ی ضریبگرها از لحاظ اندازه(قدرمطلق) کوچک باشد از انتشار خطای بیشتر جلوگیری می‌کند بنابراین سطری که در آن عضو لولا از همه بزرگ‌تر است(البته از لحاظ قدرمطلق) را انتخاب کرده و با سطر لولای فعلی تعویض می‌کنیم.

مثال ۲.۳۵

مساله داده شده را با روش حذفی گاوس و محورگیری جزئی حل کنید(محاسبات را با ۴ رقم بعد از اعشار انجام دهید).

$$\begin{cases} x_۱ - ۱۲x_۲ + x_۳ = -۱۰ \\ ۲x_۱ + ۷x_۲ - x_۳ = ۸ \\ ۱۵x_۱ + x_۲ - ۸x_۳ = ۸ \end{cases}$$

حل: ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{۱} & -۱۲ & ۱ & -۱۰ \\ ۲ & ۷ & -۱ & ۸ \\ ۱۵ & ۱ & -۸ & ۸ \end{array}\right]$$

دیده می‌شود بزرگ‌ترین عضو لولا در سطر سوم قرار دارد پس با تعویض سطر اول و سوم داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{۱۵} & ۱ & -۸ & ۸ \\ ۲ & ۷ & -۱ & ۸ \\ ۱ & -۱۲ & ۱ & -۱۰ \end{array}\right]$$

داریم:

$$m_{۲۱} = -\frac{۲}{۱۵} = -۰/۱۳۳۳, \qquad m_{۳۱} = -\frac{۱}{۱۵} = -۰/۰۶۶۷$$

با اعمال عملیات

$$R_۲ \to R_۲ + m_{۲۱}R_۱, \qquad R_۳ \to R_۳ + m_{۳۱}R_۱$$

داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱۵ & ۱ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۶/۸۶۶۷ & ۰/۰۶۶۴ & ۶/۹۳۳۶ \\ ۰ & \boxed{-۱۲/۰۶۶۷} & ۱/۵۳۳۴ & -۱۰/۵۳۳۴ \end{array}\right]$$

در این مرحله عضو محوری بزرگ از لحاظ اندازه در سطر سوم است. پس با تعویض سطر سوم و دوم داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱۵ & ۱ & -۸ & ۸ \\ ۰ & \boxed{-۱۲/۰۶۶۷} & ۱/۵۳۳۴ & -۱۰/۵۳۳۴ \\ ۰ & ۶/۸۶۶۷ & ۰/۰۶۶۴ & ۶/۹۳۳۶ \end{array}\right]$$

پس

$$m_{۳۲} = -\frac{۶/۸۶۶۷}{-۱۲/۰۶۶۷} = ۰/۵۶۸۹$$

$$R_3 \to R_3 + m_{32}R_2$$

در مرحله‌ی بعدی داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 15 & 1 & -8 & 8 \\ 0 & -12.0667 & 1.5334 & -10.5334 \\ 0 & 0 & 0.9388 & 0.9411 \end{array}\right]$$

لذا جواب دستگاه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{0.9411}{0.9388} \approx 1.003 \\ x_2 &= \frac{-10.5334 - 1.5334x_3}{-12.0667} \approx 1.000 \\ x_1 &= \frac{8 + 8x_3 - x_2}{15} \approx 1.002 \end{aligned}$$

درواقع جواب دقیق دستگاه $X = [1,1,1]^T$ می‌باشد و تقریب به دست آمده قابل قبول است.

۲.۱۰ مقیاس کردن

دستگاه معادلات زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1.001x_1 + 9999.999x_2 = 10001 \end{cases}$$

جواب دقیق دستگاه $[1,1]^T$ است. دستگاه نیاز به محورگیری جزئی دارد چرا؟ پس سطرهای اول و دوم را تعویض می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1.001 & 9999.999 & 10001 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

داریم:

$$m_{21} = -\frac{1}{1.001} = -1.00$$

لذا عملیات $R_2 \to R_2 + m_{21}R_1$ نتیجه می‌دهد:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1.001 & 9999.999 & 10001 \\ 0 & -10000 & -10000 \end{array}\right]$$

پس

$$x_2 = \frac{-10000}{-10000} = 1.00 \qquad (3d)$$

و برای x_1 داریم:

$$x_1 = \frac{10001 - 9999.999 \times 1.00}{1.001} = 0$$

که جواب قابل قبولی برای x_1 حاصل نشده است. توجه کنید حتی عمل محورگیری نتوانسته است جواب صحیح را بدهد!

برای اینکه علت این موضوع را دربیابیم، کافی است یکبار دیگر به رابطه خطای حاصل ضرب دقت کنیم:

$$er(ab) \leq aer(b) + ber(a) \tag{۱۵}$$

وقتی محورگیری جزئی انجام می‌دهیم m_{ij} ها تا حد امکان کوچک می‌شوند اما وقتی بعضی از درایه‌های سطرهای ماتریس خیلی بزرگ باشند آنگاه ضرب یک ضربگر کوچک m_{ij} نیز نمی‌تواند جلوی انتشار خطا را بگیرد زیرا طبق رابطه‌ی خطا در (۱۵) حتی یکی از اعداد a و b بزرگ باشد آنگاه همچنان خطای حاصل ضرب بزرگ خواهد بود بنابراین تکنیک محورگیری در مسائلی که بعضی از درایه‌ها بیش از اندازه بزرگ هستند نیز نمی‌تواند جواب قابل قبولی را نتیجه بدهد.
در این مواقع باید هر سطر را به اندازه‌ی بزرگترین درایه در آن سطر(از لحاظ اندازه) تقسیم کنیم تا علی‌رغم داشتن ضربگرهای کوچک(حاصل شده از محورگیری) درایه‌های روی سطرها هم از لحاظ اندازه کوچک شوند.
درواقع با اینکار بزرگترین درایه هر سطر از لحاظ اندازه برابر یک خواهد بود به این عمل مقیاس کردن (scaling) می‌گویم.

توجه ۲.۱۵

عمل مقیاس کردن تاثیری در جواب‌های دستگاه ندارد. بنابراین بهتر است در روند حذفی گاوس در هرگام هنگام محورگیری، از مقیاس کردن نیز استفاده شود.

اکنون مثال قبل را بار دیگر درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_۱ + \qquad\qquad x_۲ = ۲ \\ ۱/۰۰۱x_۱ + ۹۹۹۹/۹۹۹x_۲ = ۱۰۰۰۱ \end{cases}$$

بزرگترین درایه در سطر اول برابر یک و ضرایب این سطر برابرند لذا سطر اول نیاز به مقیاس کردن ندارد. بزرگترین درایه در سطر دوم ۹۹۹۹/۹۹۹ است با تقسیم این سطر بر این عدد داریم:

$$\frac{۱/۰۰۱}{۹۹۹۹/۹۹۹} = ۰/۰۰۰۱۰۰ \simeq ۰/۰۰۰ \qquad (۳d)$$
$$\frac{۱۰۰۰۱}{۹۹۹۹/۹۹۹} = ۱/۰۰۰۱۰۰۰۱ \simeq ۱/۰۰۰ \qquad (۳d)$$

بنابراین دستگاه بعد از مقیاس کردن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۲ \\ \qquad x_۲ = ۱ \end{cases}$$

که جواب $[۱, ۱]^T$ را دارا می‌باشد.

۳.۱۰ محورگیری کلی

مشاهده شد که برای انتخاب عضومحوری با بزرگترین اندازه در فرآیند حذفی گاوس با محورگیری جزئی آن را در بین سطرهای ماتریس افزوده در هر مرحله جستجو کنیم.
برای تعیین عضو محوری با بزرگترین اندازه ممکن است آن را به شیوه دیگری نیز انتخاب کنیم مثلا آن را از بین بزرگترین درایه در کل ماتریس باقی مانده انتخاب کنیم به عبارتی علاوه بر جستجو در کل سطرها، کل ستون‌ها را هم جستجو کنیم.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & & & & \times \\ \circ & \times & & & & & \\ \circ & \circ & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\times} & \times & \cdots & \times \\ & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & & \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

عضو محوری در کل ماتریس باقی مانده در شکل جستجو می‌شود نه تنها در سطرهای پایین عضو لولای فعلی
بنابراین اگر $\widehat{A}^{(k)}$ زیر ماتریس باقی مانده در مرحله k ــ ام روش حذفی گاوس باشد(ماتریس متشکل از درایه‌های قرمز) و $a_{ij}^{(k)}$ نشان‌دهنده درایه‌هایش باشد آنگاه عبارت
$\max_{i,j}|a_{ij}^{(k)}|$ را محاسبه کرده و برای مثال اگر بزرگترین درایه از لحاظ اندازه در سطر p و ستون q ــ ام ماتریس $\widehat{A}^{(k)}$ باشد.

$$\widehat{A}^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \boxed{a_{p,q}^{(k)}} & \\ & & & \\ a_{n,k}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}$$

آنگاه لازم است که $a_{p,q}^{(k)}$ به مکان درایه $a_{kk}^{(k)}$ انتقال یابد یعنی ابتدا سطر p ــ ام و k ــ ام را جابجا کرده و سپس ستون q ــ ام و k ــ ام را نیز جابجا می‌کنیم.
اگر در هر گام حذفی گاوس بدین صورت عضو محوری را برگزینیم آنگاه گفته می‌شود که از محورگیری کلی (Total Pivoting) استفاده شده است یا در برخی منابع (Complete Pivoting) گفته می شود.
واضح است که تعداد درایه‌هایی که در روش محورگیری کلی باید جستجو شود تا ماکزیمم درایه از لحاظ قدرمطلق یافت شود به مراتب بیشتر از محورگیری جزئی است. بعلاوه وقتی از محورگیری کلی استفاده می‌کنیم به دلیل اینکه ستون‌های ماتریس ضرایب جابجا می‌شوند ترتیب مجهول‌ها در بردار جواب X تغییر یافته و لزوما در محله آخر جایگزینی پسرو مقادیر آنها به ترتیب $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_{n-1},\ x_n$ محاسبه نمی‌شود.(در ادامه راهکارهایی برای این مشکل معرفی می‌شود)
با توجه به مطالب فوق اغلب روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی نسبت به حذفی گاوس با محورگیری کلی ارجحیت دارد.

توجه ۲.۱۶

علاقمندان برای دیدن موضوعاتی از قبیل تجزیه LU با محورگیری جزئی ، حل دستگاه $AX=b$ با تجزیه $PA=LU$، تجزیه LU با محورگیری کامل و حل دستگاه $AX=b$ با تجزیه $PAQ=LU$ به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

۴.۱۰ فاکتور رشد

همانطور که مشاهده شد روش حذفی گاوس بدون عمل محورگیری می‌تواند ناپایدار باشد به این معنی که رشد خطای محاسبات در مراحل میانی و انباشته شدن آن‌ها تا پایان یافتن آخرین گام باعث می‌شود جوابی کاملاً متفاوت با دستگاه $AX=b$ حاصل گردد.
برای این روش یک پارامتر که از آن با نام عامل رشد (Growth factor) یاد می‌کنیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho=\frac{\max\limits_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}|}{\max\limits_{i,j}|a_{ij}|}$$

که در آن $A=(a_{ij})$ و $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$ زیرماتریس حاصل از روش حذفی گاوس در گام $k-$ام است. می‌توان ثابت کرد که اگر برای یک ماتریس عامل رشد به قدر کافی کوچک باشد آنگاه جواب حاصل شده از روش حذفی گاوس قابل اعتمادتر است.

مثال ۲.۳۶

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

عامل رشد را در دو حالت
الف) حذفی گاوس بدون محورگیری
ب) حذفی گاوس با محورگیری جزئی
محاسبه کنید.

حل: الف)

$$m_{21} = -\frac{1}{10^{-4}} = -10^{4}$$
$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + m_{21} R_1} \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{4} \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\rho = \frac{\max|a_{ij}^{(1)}|}{\max|a_{ij}|} = \frac{|1 - 10^{4}|}{1} = 10^{4} - 1 = 9999$$

که بسیار بزرگ است.
ب)

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{bmatrix},\ m_{21} = -\frac{10^{-4}}{1} = -10^{-4}$$
$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + m_{21} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-4} \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\rho = \frac{\max|a_{ij}^{(1)}|}{\max|a_{ij}|} = \frac{1}{1} = 1$$

که مشاهده می‌شود عامل رشد بسیار کمتر شده است. که دلیلی بر کارایی عمل محورگیری است. اما در حالت کلی داریم:

قضیه ۲.۷

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه عامل رشد روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی توسط

$$\rho \leq 2^{n-1}$$

کران‌دار می‌شود و عامل رشد حذفی گاوس با محورگیری کامل توسط

$$\rho \leq \sqrt{n \prod_{i=2}^{n} i^{\frac{1}{i-1}}} = \sqrt{n \times 2^{\frac{1}{1}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} \times \cdots \times n^{\frac{1}{n-1}}}$$

کران‌دار می‌شود.

برای اثبات قضیه می توانید به مرجع زیر رجوع نمایید.
J. H. Wilkinson, Error analysis of direct methods of matrix inversion, Journal of the ACM 8 (1961) 281–330.

جدول زیر برای بعضی از مقادیر n کران بالای عامل رشد را در هر دو حالت محورگیری جزیی و کلی نشان می دهد.

Partial pivoting	Total pivoting	n
۵۱۲	۱۹/۲۹	۱۰
$۶/۳ \times ۱۰^{۲۹}$	۳۵۷۰/۳۱	۱۰۰
$۱/۶ \times ۱۰^{۱۵۰}$	$۶/۳ \times ۱۰^{۵}$	۵۰۰
$۵/۴ \times ۱۰^{۳۰۰}$	$۸/۶ \times ۱۰^{۶}$	۱۰۰۰

طبق نتایج جدول فوق کران بالای فاکتور رشد برای محورگیری کلی بسیار کوچکتر از این کران برای محورگیری جزیی است.

توجه ۲.۱۷

با توجه به کران‌های بالا عامل‌های رشد مشاهده می‌شود که روش حذفی گاوس با محورگیری کامل پایدارتر از روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی است. بعلاوه متاسفانه در محورگیری جزئی عامل رشد می‌تواند به اندازه $۲^{n-۱}$ رشد کند که اصلاً نتیجه‌ی جالبی برای این روش نمی‌باشد. اما در مسائل کاربردی و عملی روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی معمولاً پایدار است و به دلیل حجم محاسباتی کمتر نسبت به روش حذفی گاوس با محورگیری کامل ترجیح داده می‌شود.

قضیه ۲.۸

اگر A ماتریسی متقارن و معین مثبت باشد آنگاه

$$\rho \leq ۱$$

برای اثبات می توانید به مرجع زیر رجوع نمایید.
J. H. Wilkinson, Error analysis of direct methods of matrix inversion, Journal of the ACM 8 (1961) 281–330.

قضیه ۲.۹

اگر A ماتریسی غالب قطر (سطری یا ستونی) باشد آنگاه

$$\rho \leq ۲$$

برای اثبات می توانید به مرجع زیر رجوع نمایید.
J. H. Wilkinson, Error analysis of direct methods of matrix inversion, Journal of the ACM 8 (1961) 281–330.

توجه ۲.۱۸

قضایای فوق نشان می‌دهند که روش حذفی گاوس برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت و غالب قطر کاملاً پایدار است و نیاز به هیچ محورگیری ندارد.

توجه ۲.۱۹

روش حذفی گاوس بدون محورگیری ناپایدار است و اگر A ماتریسی دلخواه باشد نباید استفاده شود.

تمرین ۲.۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱۰^{-۵} & ۰ & ۱ \\ ۱۰ & ۱۰^{-۴} & ۲ \\ ۱۰۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

عامل رشد حذفی گاوس را برای این ماتریس در هر دو حالت زیر محاسبه کنید.
۱) حذفی گاوس بدون محورگیری
۲) حذفی گاوس با محورگیری جزئی

۱۱ تجزیه چولسکی

یک بار دیگر تجزیه LU، دولیتل و کروت را به یاد آورید. (در حالت ۳×۳)

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ l_{۲۱} & ۱ & ۰ \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{۱۱} & u_{۱۲} & u_{۱۳} \\ ۰ & u_{۲۲} & u_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & u_{۳۳} \end{bmatrix} \rightarrow \text{دولیتل}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} & ۰ \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & l_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & u_{۱۲} & u_{۱۳} \\ ۰ & ۱ & u_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \text{کروت}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در حالت کلی برای این دو تجزیه مقادیر قطری ماتریس‌های L و U یکسان نمی‌باشد. در صورتی که مقادیر قطری L و U را یکی فرض کنیم یعنی $۱ \leq j \leq n$, $u_{jj} = l_{jj}$ آنگاه تجزیه را تجزیه چولسکی Cholesky می‌نامیم.

مثال ۲.۳۷

تجزیه چولسکی ماتریس داده شده را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱۶ & ۸ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

حل: می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱۶ & ۸ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{۱۱} & ۰ \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{۱۱} & u_{۱۲} \\ ۰ & l_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{۱۱}^{۲} & l_{۱۱}u_{۱۲} \\ l_{۲۱}l_{۱۱} & l_{۲۱}u_{۱۲} + l_{۲۲}^{۲} \end{bmatrix}$$

لذا می‌بایست:

$$\begin{cases} l_{۱۱}^{۲} = ۱۶ \Rightarrow l_{۱۱} = ۴, -۴ \\ l_{۱۱}u_{۱۲} = ۸ \rightarrow u_{۱۲} = ۲, -۲ \\ l_{۲۱}l_{۱۱} = ۴ \rightarrow l_{۲۱} = ۱, -۱ \\ l_{۲۱}u_{۱۲} + l_{۲۲}^{۲} = ۱۱ \end{cases}$$

بنابراین از معادله آخر داریم:

$$l_{۲۲}^{۲} = ۱۱ - l_{۲۱}u_{۱۲}$$

حالت اول) $l_{21} = 1,\ u_{12} = 2$ پس

$$l_{22}^2 = 11 - (2)(1) = 9 \to l_{22} = 3, -3$$

حالت دوم) $l_{21} = -1,\ u_{12} = -2$ پس

$$l_{22}^2 = 11 - (-2)(-1) = 9 \to l_{22} = 3, -3$$

بنابراین ۴ حالت زیر را داریم:

$$L_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad U_1 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad U_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad U_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

البته واضح است حالت‌های (۱) و (۴) به راحتی از هم به دست می‌آیند. درواقع $L_1 = -L_4, U_1 = -U_4$ و حالت (۲) و (۳) هم چنین هستند یعنی $L_2 = -L_3, U_2 = -U_3$. پس دو تجزیه‌ی متفاوت زیر برای A به دست می‌آید :

$$A = L_3U_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A = L_4U_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم تجزیه را طوری انتخاب کنیم که عناصر روی قطر اصلی L و U مثبت باشند آنگاه تجزیه یکتا به دست می‌آید، بنابراین می‌توان حالت مطلوب را به صورت زیر در نظر گرفت(حالت سوم):

$$A = LU = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۳۸

تجزیه چولسکی ماتریس داده شده را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 5 \\ 5 & 9 & -2 \\ -5 & 3 & 34 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & l_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

اگر سطرهای L را با R_1, R_2, R_3 و ستون‌های U را با C_1, C_2, C_3 نمایش دهیم آنگاه (مقادیر مثبت روی قطر انتخاب می‌شوند)

$$
\begin{aligned}
&R_1 \times C_1 \to l_{11}^2 = 25 \Rightarrow l_{11} = 5\\
&R_1 \times C_2 \to l_{11}u_{12} = 0 \Rightarrow u_{12} = 0\\
&R_1 \times C_3 \to l_{11}u_{13} = 5 \Rightarrow u_{13} = 1\\
&R_2 \times C_1 \to l_{21}l_{11} = 5 \Rightarrow l_{21} = 1\\
&R_2 \times C_2 \to l_{21}u_{12} + l_{22}^2 = 9 \Rightarrow l_{22}^2 = 9 - 0 \to l_{22} = 3\\
&R_2 \times C_3 \to l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = -2 \Rightarrow (1 \times 1) + (3)u_{23} = -2 \to u_{23} = -1\\
&R_3 \times C_1 \to l_{31}l_{11} = -5 \Rightarrow l_{31} = -1\\
&R_3 \times C_2 \to l_{31}u_{12} + l_{32}l_{22} = 3 \Rightarrow (1 \times 0) + l_{32} \times 3 = 3 \to l_{32} = 1\\
&R_3 \times C_3 \to l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}^2 = 34 \Rightarrow (-1)(1) + (1)(-1) + l_{33}^2 = 34 \to l_{33}^2 = 36 \to l_{33} = 6
\end{aligned}
$$

پس عامل‌های L و U به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$
L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & l_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}
$$

نکته ۲.۵

اگر A متقارن باشد آنگاه تجزیه ماتریس $A = LU$ را به صورت $A = LL^T$ محاسبه می‌کنیم که در بیشتر کتب جبرخطی به این شکل تجزیه، تجزیه چولسکی گفته می شود. به‌ویژه می‌توان ثابت کرد که تجزیه چولسکی وجود دارد اگر و تنها اگر ماتریس A متقارن معین مثبت باشد.

Cholesky Decomposition (3×3)

※ برای ماتریس‌های متقارن و معین مثبت ※

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{11}l_{31} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
l_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \quad ; l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}}
$$

$$
l_{21}^2 l_{22}^2 = a_{22}; \quad l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} = a_{23}
$$

$$
l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}; \quad l_{32} = \frac{(a_{23} - l_{31}l_{21})}{l_{22}}
$$

$$
l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}
$$

مثال ۲.۳۹

تجزیه چولسکی ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱۶ & ۴ & -۴ \\ ۴ & ۱۰ & ۵ \\ -۴ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}$$

حل:

$$l_{۱۱}=\sqrt{a_{۱۱}}=\sqrt{۱۶}=۴\,, \qquad l_{۲۱}=\frac{a_{۲۱}}{l_{۱۱}}=\frac{۴}{۴}=۱$$
$$l_{۳۱}=\frac{a_{۳۱}}{l_{۱۱}}=\frac{-۴}{۴}=-۱\,, \qquad l_{۲۲}=\sqrt{a_{۲۲}-l_{۲۱}^{۲}}=\sqrt{۱۰-۱}=۳$$
$$l_{۳۲}=\frac{۱}{l_{۲۲}}[a_{۳۲}-l_{۳۱}l_{۲۱}]=\frac{۱}{۳}[۵-(-۱)(۱)]=۲ \quad , \qquad l_{۳۳}=\sqrt{a_{۳۳}-l_{۳۱}^{۲}-l_{۳۲}^{۲}}=\sqrt{۹-۱-۴}=۲$$

پس داریم:

$$A=LL^T=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱۲ تجزیه چولسکی در حالت کلی $n\times n$

فرض کنید ماتریس متقارن معین مثبت A، $n\times n$ داده شده است. مطابق حالات خاصی که بررسی شد می توان تجزیه چولسکی را در حالت کلی به صورت زیر محاسبه کرد

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{۱۱} & \dots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n۱} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{۱۱} & \dots & u_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{۱۱}=\sqrt{a_{۱۱}}, \qquad l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=۱}^{i-۱}l_{ik}^{۲}}\,,\ ۱<i\le n$$

$$l_{i۱}=\frac{a_{i۱}}{l_{۱۱}}\,,\ ۲\le i\le n, \qquad l_{ij}=\frac{۱}{l_{jj}}[a_{ij}-\sum_{k=۱}^{j-۱}l_{ik}l_{kj}]\,,\ ۱<j<i\le n$$

در حالت کلی قضیه‌های زیر برای تجزیه چولسکی برقرار می‌باشد.

قضیه ۲.۱۰

ماتریس A متقارن معین مثبت است اگر و تنها اگر یک تجزیه چولسکی $A=LL^T$ با درایه‌های قطری مثبت برای L وجود داشته باشد.

قضیه ۲.۱۱

هر ماتریس متقارن معین مثبت یک تجزیه چولسکی یکتا دارد.

تذکر ۲.۱

مشابه آنچه برای تجزیه‌های دولیتل و کروت نشان دادیم می‌توان دید که پیچیدگی محاسباتی تجزیه چولسکی از $O(n^3)$ است.

توجه ۲.۲۰

علاقمندان برای دیدن پایداری تجزیه چولسکی به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

تجزیه چولسکی در متلب

```
A =
1     10      9
10    109     60
9     60      377
>> L=chol(A)'
L =
1        0       0
10       3       0
9      -10      14

>> A-L*L'
ans =
0       0       0
0       0       0
0       0       0
```

۱.۱۲ حل دستگاه با تجزیه چولسکی

فرض کنید هدف حل دستگاه $AX = b$ با روش تجزیه چولسکی است. چون A به صورت $A = LL^T$ تجزیه شده است پس داریم:

$$LL^T X = b$$

اگر قرار دهیم $Y = L^T X$ آنگاه

$$LY = b \longrightarrow Y \text{ حل دستگاه پایین مثلثی برای }$$
$$L^T X = Y \longrightarrow X \text{ حل دستگاه بالا مثلثی برای }$$

توجه کنید که دستگاه های مثلثی فوق به صورت زیر قابل حل اند

$$LY = b \rightarrow y_1 = \frac{b_1}{l_{nn}}, \qquad y_i = \frac{1}{l_{ii}}[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} y_k], \quad i = 2, 3, ..., n$$

$$L^T X = Y \rightarrow x_n = \frac{y_n}{l_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{l_{ii}}[y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k], \quad i = n-1, n-2, ..., 1$$

مثال ۲.۴۰

دستگاه داده شده را با روش تجزیه چولسکی حل کنید.

$$\begin{cases} ۹x_۱+ & ۳x_۲+ & ۶x_۳ = & ۳ \\ ۳x_۱+ & ۱۰x_۲+ & ۵x_۳ = & -۵ \\ ۶x_۱+ & ۵x_۲+ & ۲۱x_۳ = & ۱۶ \end{cases}$$

حل: داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۶ \\ ۳ & ۱۰ & ۵ \\ ۶ & ۵ & ۲۱ \end{bmatrix} \;,\; b = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۵ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

تجزیه چولسکی ماتریس A به صورت زیر است(نشان دهید)

$$A = LL^T \;,\; L = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

داریم:

$$LY = b \rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۵ \\ ۱۶ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۱ \\ y_۲ = -۲ \\ y_۳ = ۴ \end{cases}$$

$$L^T X = Y \rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = -۱ \\ x_۳ = ۱ \end{cases}$$

حل دستگاه با تجزیه چولسکی در متلب

```
>> A=[9 3 6;3 10 5;6 5 21]
A =
9 3 6
3 10 5
6 5 21
>> b=[3;-5;16]
b =
3
-5
16
>> L=chol(A)'
L =
3 0 0
1 3 0
2 1 4
>> Y=linsolve(L,b)
Y =
1
-2
4
>> X=linsolve(L',Y)
```

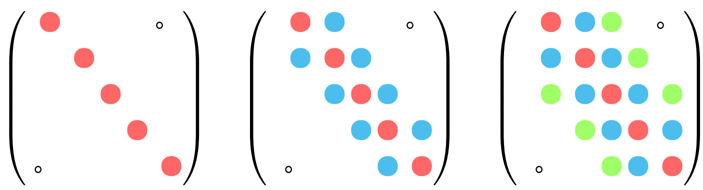
```
X =
0
-1
1
```

۱۳ دستگاه‌های تُنُک

توجه کنید در مسائل جبرخطی، ماتریس‌های تنک (Sparse) مورد علاقه ما هستند. این‌گونه ماتریس‌ها، ماتریس‌هایی هستند که بیشتر عناصرشان صفر باشد. اگر اعضای غیر صفر ماتریس به طور منظمی حول قطر متراکم گردند آنگاه به آن‌ها ماتریس نواری (Banded Matrix) می‌گویند. البته تعداد نوارهای غیر صفر را عرض نوار می‌گویند.

ماتریس هایی که عرض نوار آن‌ها ۱ و ۳ و ۵ باشد همان Diagonal، Tridiagonal و Pentadiagonal هستند.

توجه کنید کار با ماتریس‌های تنک راحت‌تر است ولی نکته‌ای که باید رعایت کرد این است که در برنامه نویسی درمورد این ماتریس‌ها از عملیات غیرضروری مثل جمع یا ضرب کردن درایه‌های صفر آن جلوگیری شود. درمورد حل دستگاه با ماتریس ضرایب سه‌قطری، یک محقق به نام توماس الگوریتمی ارائه داد (Thomas algorithm) که زمان اجرای برنامه $O(n)$ است.



Diagonal　　Tri-Diagonal　　Penta-Diagonal

۱.۱۳ الگوریتم توماس

حجم عملیات روش حذفی گاوس برای یک ماتریس $n \times n$ با نرخ n^3 رشد خواهد کرد که در عمل برای وقتی که n بزرگ است از کارایی آن به شدت می‌کاهد. بعلاوه در بین دستگاه‌هایی که از مسائل کاربردی نشأت می‌گیرند دستگاه‌ها با ماتریس ضرایب ۳ قطری به شدت مورد توجه هستند.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} X = f \tag{16}$$

برای هماهنگی بیشتر نمادها $a_1 = 0$ و $c_n = 0$ فرض می‌شوند. توجه کنید که ماتریس ضرایب دستگاه فوق توسط سه بردار

$$a = [a_2, a_3, \dots, a_n], \qquad b = [b_1, b_2, \dots, b_n], \qquad c = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]$$

مشخص شده و ذخیره می‌گردد. واضح است که a از $n-1$ درایه، b از n درایه و c از $n-1$ درایه تشکیل شده است لذا کل ماتریس دارای

$$(n-1) + (n) + (n-1) = 3n - 2$$

درایه است.

تذکر ۲.۲

بردار سمت راست را با f نمایش داده‌ایم تا با درایه‌های $b_1, b_2, \dots, b_n$ اشتباه نگردد. بنابراین f به صورت زیر در نظر گرفته

می‌شود:

$$f = [f_۱, f_۲, \dots, f_n]^T$$

حل دستگاه معادلات خطی (۱۶) به طور مستقیم با روش حذفی گاوس معمولی دارای پیچیدگی محاسباتی $O(n^۳)$ است. اما همانطور که می‌بینیم از $n^۲$ درایه‌ی ماتریس تنها در حالت کلی $۳n - ۲$ درایه ناصفر هستند و این یعنی $n^۲ - ۳n + ۲$ درایه صفر هستند.
برای مثال فرض کنید $n = ۱۰۰$ باشد آنگاه ماتریس سه‌قطری فوق حداکثر ۲۹۸ درایه ناصفر دارد که باید ذخیره گردند و به تعداد $n^۲ - ۳n + ۲ = ۱۰۰۰۰ - ۲۹۸ = ۹۷۰۲$ درایه صفر دارد. بنابراین در عمل واقعاً نیاز است در روند حذفی گاوس با این همه درایه صفر اعمال حسابی ضرب و تقسیم و جمع انجام شود؟ درواقع الگوریتم توماس قصد دارد از روش حذفی گاوس برای حل یک دستگاه سه‌قطری به طور بهینه استفاده کند تا پیچیدگی محاسباتی حذفی گاوس را $O(n)$ نگه دارد.
کلید اساسی الگوریتم توماس قضیه‌ی اساسی زیر است.

قضیه ۲.۱۲

فرض کنید ماتریس ۳ قطری

$$A = \begin{bmatrix} b_۱ & c_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-۱} \\ ۰ & \dots & ۰ & a_n & b_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

دارای تجزیه‌ی LU دولیتل باشد. آنگاه ماتریس‌های L و U به صورت دو قطری زیر هستند:

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \beta_۲ & ۱ & ۰ & \ddots & \vdots \\ ۰ & \beta_۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ۰ \\ ۰ & \dots & ۰ & \beta_n & ۱ \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_۱ & c_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & \alpha_۲ & c_۲ & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ddots & \ddots & ۰ \\ \vdots & \ddots & ۰ & \ddots & c_{n-۱} \\ ۰ & \dots & ۰ & ۰ & \alpha_n \end{bmatrix}$$

که در آن α_i و β_i بر حسب a_i، b_i ، c_i قابل بیان‌اند.

قبل از آن‌که مقادیر α_i و β_i را در حالت کلی مشخص کنیم از یک ماتریس ۳×۳ شروع می‌کنیم.
برای $n = ۳$ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} b_۱ & c_۱ & ۰ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ ۰ & a_۳ & b_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \beta_۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \beta_۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_۱ & c_۱ & ۰ \\ ۰ & \alpha_۲ & c_۲ \\ ۰ & ۰ & \alpha_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_۱ & c_۱ & ۰ \\ \beta_۲\alpha_۱ & \beta_۲ c_۱ + \alpha_۲ & c_۲ \\ ۰ & \beta_۳\alpha_۲ & \beta_۳ c_۲ + \alpha_۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین طبق تساوی می‌بایست:

سطر اول : $\alpha_۱ = b_۱, \quad c_۱ = c_۱, \quad ۰ = ۰$
سطر دوم : $\beta_۲\alpha_۱ = a_۲, \quad \beta_۲ c_۱ + \alpha_۲ = b_۲ \quad, c_۲ = c_۲$
سطر سوم : $۰ = ۰, \quad \beta_۳\alpha_۲ = a_۳ \quad, \beta_۳ c_۲ + \alpha_۳ = b_۳$

از معادلات فوق تنها معادلات زیر نتیجه جدیدی در پی دارند:

$$\alpha_۱ = b_۱$$
$$\beta_۲\alpha_۱ = a_۲, \quad \beta_۲ c_۱ + \alpha_۲ = b_۲$$
$$\beta_۳\alpha_۲ = a_۳, \quad \beta_۳ c_۲ + \alpha_۳ = b_۳$$

سپس از معادلات فوق داریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_1, & \beta_2 = \dfrac{a_2}{\alpha_1} \\ \alpha_2 = b_2 - \beta_2 c_1, & \beta_3 = \dfrac{a_3}{\alpha_2} \\ \alpha_3 = b_3 - \beta_3 c_2 \end{cases} \tag{17}$$

بدین ترتیب همگی مجهولات کامل مشخص می‌گردند چون

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$$

و

$$\det(L) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\det(U) = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

(توجه کنید دترمینان هر ماتریس مثلثی (بالا یا پایین) برابر حاصلضرب اعضای روی قطر اصلی است.)

پس:

$$\det(A) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

و اگر A وارون‌پذیر فرض شود باید $\alpha_1 \neq 0$، $\alpha_2 \neq 0$ و $\alpha_3 \neq 0$ و لذا β_3 و β_2 در رابطه (۱۷) قابل تعریف اند.

مثال ۲.۴۱

تجزیه LU ماتریس ۳ قطری داده شده را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 11 & 3 \\ 0 & -42 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_2 = 10, a_3 = -42 \\ b_1 = 2, b_2 = 11, b_3 = -13 \\ c_1 = 1, c_2 = 3 \end{cases}$$

حل: مطابق روابط استخراج شده داریم:

$$\alpha_1 = b_1 = 2, \quad \beta_2 = \frac{a_2}{\alpha_1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\alpha_2 = b_2 - \beta_2 c_1 = 11 - 5 \times 1 = 11 - 5 = 6, \quad \beta_3 = \frac{a_3}{\alpha_2} = \frac{-42}{6} = -7$$

$$\alpha_3 = b_3 - \beta_3 c_2 = -13 - (-7)(3) = -13 + 21 = 8$$

لذا

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

اکنون در حالت کلی داریم:

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1}\\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \beta_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2 & c_2 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & c_{n-1}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

اگر سطر اول LU را محاسبه کنیم داریم:

$$[\alpha_1, c_1, 0, \dots, 0]$$

و با مقایسه آن با سطر اول A داریم: $\boxed{\alpha_1 = b_1}$

با محاسبه‌ی سطر دوم LU داریم:

$$[\beta_2\alpha_1, \beta_2 c_1 + \alpha_2, c_2, 0, \dots, 0]$$

و با مقایسه آن با سطر دوم A یعنی

$$[a_2, b_2, c_2, 0, \dots, 0]$$

داریم:

$$\beta_2\alpha_1 = a_2, \quad \beta_2 c_1 + \alpha_2 = b_2$$

یا

$$\boxed{\beta_2 = \frac{a_2}{\alpha_1}} \quad \text{و} \quad \boxed{\alpha_2 = b_2 - \beta_2 c_1}$$

با محاسبه سطر سوم LU داریم:

$$[0, \beta_3\alpha_2, \beta_3 c_2 + \alpha_3, c_3, 0, \dots, 0]$$

و با مقایسه آن با سطر سوم A یعنی

$$[0, a_3, b_3, c_3, 0, \dots, 0]$$

داریم:

$$\beta_3\alpha_2 = a_3, \quad \beta_3 c_2 + \alpha_3 = b_3$$

یا

$$\boxed{\beta_3 = \frac{a_3}{\alpha_2}} \quad \text{و} \quad \boxed{\alpha_3 = b_3 - \beta_3 c_2}$$

با ادامه این روند و محاسبه‌ی سطر $n-1$ام LU داریم:

$$[0, 0, \dots, 0, \beta_{n-1}\alpha_{n-2}, \beta_{n-1}c_{n-2} + \alpha_{n-1}, c_{n-1}]$$

و با مقایسه‌ی آن با سطر $n-1$ام ماتریس A یعنی

$$[0, 0, \dots, 0, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}]$$

داریم:

$$\beta_{n-1}\alpha_{n-2} = a_{n-1}, \quad \beta_{n-1}c_{n-2} + \alpha_{n-1} = b_{n-1}$$

یا

$$\boxed{\beta_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\alpha_{n-2}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\alpha_{n-1} = b_{n-1} - \beta_{n-1}c_{n-2}}$$

و در نهایت با محاسبه‌ی سطر nام ماتریس LU داریم:

$$[0,0,\dots,0,\beta_n\alpha_{n-1},\beta_n c_{n-1}+\alpha_n]$$

و با مقایسه آن با سطر nام ماتریس A یعنی

$$[0,0,\dots,0,a_n,b_n]$$

داریم:

$$\beta_n\alpha_{n-1}=a_n,\quad \beta_n c_{n-1}+\alpha_n=b_n$$

یا

$$\boxed{\beta_n=\frac{a_n}{\alpha_{n-1}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\alpha_n=b_n-\beta_n c_{n-1}}$$

در نتیجه همه درایه‌های ماتریس‌های L و U مشخص می‌گردند.

توجه ۲.۲۱

بنا به آنچه انجام شد می‌توان دید که تمامی درایه‌های دو ماتریس L و U در تجزیه LU ماتریس ۳ قطری A به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\alpha_1=b_1,\quad \beta_i=\frac{a_i}{\alpha_{i-1}},\quad \alpha_i=b_i-\beta_i c_{i-1},\quad i=2,3,\dots,n$$

اکنون آماده‌ایم تا الگوریتم توماس را بیان کنیم. درواقع با مشخص شدن تجزیه LU ماتریس A کافی است به‌جای دستگاه $AX=f$ به صورت زیر عمل کنیم:

$$LUX=f$$

اگر $Y=UX$ فرض کنیم داریم:

$$LY=f\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0\\ \beta_2&1&0&\ddots&\vdots\\ 0&\beta_3&1&0&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\dots&0&\beta_n&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\ \vdots\\f_n\end{bmatrix}$$

این دستگاه با جایگذاری پیشرو به صورت زیر حل می‌شود:

$$y_1=f_1,\quad y_2=f_2-\beta_2y_1,\ \dots,\ y_n=f_n-\beta_ny_{n-1}.$$

با داشتن $y_1,y_2,\dots,y_n$ مجهولات $x_1,x_2,\dots,x_n$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$UX=Y\Longrightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1&c_1&0&\dots&0\\ 0&\alpha_2&c_2&\ddots&\vdots\\ 0&0&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&0&\ddots&c_{n-1}\\ 0&\dots&0&0&\alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_{n-1}\\y_n\end{bmatrix}$$

با جایگذاری پسرو داریم:

$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - c_{n-1}x_n}{\alpha_{n-1}}, \quad \dots, \quad x_1 = \frac{y_1 - c_1 x_2}{\alpha_1}$$

بنابراین الگوریتم توماس به صورت زیر حاصل می گردد

الگوریتم توماس برای حل دستگاه سه قطری $AX = f$

گام (۱): ضرایب α_i و β_i را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_i = \frac{a_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = b_i - \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

گام (۲): مقادیر y_i را از روابط زیر محاسبه کنید

$$y_1 = f_1, \quad y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

گام (۳): مقادیر x_i را از روابط زیر محاسبه کنید

$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

مثال ۲.۴۲

دستگاه داده شده را با الگوریتم توماس حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 13 \\ 16x_1 - x_2 + 2x_3 = 65 \\ 15x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 66 \\ -2x_3 + 13x_4 = 9 \end{cases}$$

حل: واضح است که ماتریس ضرایب ۳ قطری است یعنی

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 16 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 13 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 13 \\ 65 \\ 66 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = 16, \quad a_3 = 15, \quad a_4 = -2$$
$$b_1 = 4, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 13$$
$$c_1 = -1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 5$$

گام(۱):

$$\alpha_1 = b_1 = 4, \quad \beta_i = \frac{a_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = b_i - \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4$$

پس

$$\begin{cases} \beta_۲ = \dfrac{a_۲}{\alpha_۱} = \dfrac{۱۶}{۴} = ۴ \\ \alpha_۲ = b_۲ - \beta_۲ c_۱ = -۱ + ۴ = ۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_۳ = \dfrac{a_۳}{\alpha_۲} = \dfrac{۱۵}{۳} = ۵ \\ \alpha_۳ = b_۳ - \beta_۳ c_۲ = ۸ - (۵)(۲) = ۸ - ۱۰ = -۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_۴ = \dfrac{a_۴}{\alpha_۳} = \dfrac{-۲}{-۲} = ۱ \\ \alpha_۴ = b_۴ - \beta_۴ c_۳ = ۱۳ - (۱)(۵) = ۱۳ - ۵ = ۸ \end{cases}$$

گام (۲):

$$\begin{aligned} & y_۱ = f_۱ = ۱۳, \quad y_i = f_i - \beta_i y_{i-۱}, \quad i = ۲,۳,۴ \\ & y_۲ = f_۲ - \beta_۲ y_۱ = ۶۵ - (۴)(۱۳) = ۱۳ \\ & y_۳ = f_۳ - \beta_۳ y_۲ = ۶۶ - (۵)(۱۳) = ۱ \\ & y_۴ = f_۴ - \beta_۴ y_۳ = ۹ - (۱)(۱) = ۸ \end{aligned}$$

گام(۳):

$$\begin{aligned} & x_۴ = \frac{y_۴}{\alpha_۴} = \frac{۸}{۸} = ۱, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+۱}}{\alpha_i}, \quad i = ۳,۲,۱ \\ & x_۳ = \frac{y_۳ - c_۳ x_۴}{\alpha_۳} = \frac{۱ - (۵)(۱)}{-۲} = ۲ \\ & x_۲ = \frac{y_۲ - c_۲ x_۳}{\alpha_۲} = \frac{۱۳ - (۲)(۲)}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳ \\ & x_۱ = \frac{y_۱ - c_۱ x_۲}{\alpha_۱} = \frac{۱۳ - (-۱)(۳)}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \end{aligned}$$

لذا جواب دستگاه به صورت $X = [۴, ۳, ۲, ۱]^T$ حاصل می‌گردد.
کد الگوریتم توماس در متلب به همراه حل مثال قبل

```
clc
clear all
close all
A=[4 -1 0 0;16 -1 2 0;0 15 8 5;0 0 -2 13]
f=[13;65;66;9]
[n,m]=size(A); b=zeros(n,1); a=zeros(n,1);
c=zeros(n-1,1); beta=zeros(n,1); alpha=zeros(n,1);
y=zeros(n,1); x=zeros(n,1); y(1) = f(1);
for i=1:n
b(i)=A(i,i);
end
alpha(1) = b(1);
for i=1:n-1
a(i+1)=A(i+1,i);
c(i)=A(i,i+1);
end
for i=2:n
beta(i) = a(i)/alpha(i-1);
```

```
alpha(i) = b(i) - beta(i)*c(i-1);
y(i) = f(i) - beta(i)*y(i-1);
end
x(n) = y(n)/alpha(n);
for i=n-1:-1:1
x(i) = (y(i) - c(i)*x(i+1))/alpha(i);
end

A =
4   -1  0  0
16  -1  2  0
0   15  8  5
0   0  -2  13

f =
13
65
66
9

x =
4
3
2
1
```

۲.۱۳ حجم عملیات الگوریتم توماس

در ادامه به محاسبه پیچیدگی محاسباتی (حجم عملیات) الگوریتم توماس پرداخته و نشان می دهیم از $O(n)$ می باشد.

همانطور که دیدیم الگوریتم توماس در طی ۳ گام به محاسبه‌ی جواب دستگاه سه‌قطری $AX = f$ می‌پردازد.

محاسبه‌ی تعداد ضرب:

در گام (۱) به $n-۱$ ضرب برای محاسبه‌ی $\beta_i c_{i-۱}$ نیاز داریم.

در گام (۲) به $n-۱$ ضرب برای محاسبه‌ی $\beta_i y_{i-۱}$ نیاز داریم.

در گام (۳) به $n-۱$ ضرب برای محاسبه‌ی $c_i x_{i+۱}$ نیاز داریم.

پس در کل $۳n-۳ = (n-۱)+(n-۱)+(n-۱)$ ضرب خواهیم داشت.

محاسبه‌ی تعداد تقسیم:

در گام (۱) به $n-۱$ تقسیم برای محاسبه‌ی $\frac{a_i}{\alpha_{i-۱}}$ نیاز داریم.

در گام (۲) به تقسیم نیازی نداریم.

در گام (۳) یک تقسیم برای $\frac{y_n}{\alpha_n}$ و $n-۱$ تقسیم برای محاسبه‌ی $\frac{y_i - c_i x_{i+۱}}{\alpha_i}$ نیاز داریم.

بنابراین تعداد کل تقسیم‌ها برابر است با

$$(n-۱)+۰+۱+(n-۱) = ۲n-۱$$

محاسبه‌ی تعداد جمع:

در گام (۱) به $n-۱$ جمع برای محاسبه‌ی $b_i - \beta_i c_{i-۱}$ نیاز داریم.

در گام (۲) به $n-۱$ جمع برای محاسبه‌ی $f_i - \beta_i y_{i-۱}$ نیاز داریم.

در گام (۳) به $n-۱$ جمع برای محاسبه‌ی $y_i - c_i x_{i+۱}$ نیاز داریم.

بنابراین کل تعداد جمع‌ها برابر است با

$$(n-۱)+(n-۱)+(n-۱)=۳n-۳$$

بنابراین در الگوریتم توماس داریم:

$$\text{تعداد کل جمع} = ۳n-۳ \qquad \text{تعداد کل تقسیم} = ۲n-۱, \qquad \text{تعداد کل ضرب} = ۳n-۳,$$

بنابراین پیچیدگی محاسباتی الگوریتم توماس $O(n)$ است.

۱۴ تجزیه بلوکی

فرض کنید ماتریس بلوکی ۲ × ۲ زیر داده شده است:

$$A=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}_{(p+m)\times(p+m)}$$

به طوری که
$A_{۱۱}$ ماتریس $m\times m$، $A_{۱۲}$ ماتریس $m\times p$
$A_{۲۱}$ ماتریس $p\times m$، $A_{۲۲}$ ماتریس $p\times p$ باشد.
وقتی که ماتریس از ابعاد بالایی برخوردار باشد آنگاه کار کردن با الگوریتم‌ها در نسخه بلوکی می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد.

توجه ۲.۲۲

علاقمندان برای دیدن تجزیه بلوکی LU به درس تحت عنوان روش های عددی در جبرخطی(درسنامه مقطع کارشناسی ارشد که توسط مهدی دهقان ارایه می شود) مراجعه نمایند.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Accuracy	دقت
Adjoint	الحاقی
Algorithm	الگوریتم
Approximation	تقریب
Array	آرایه

B

Back substitution	جایگزینی پسرو
Backward stability	پایداری پسرو
Basis	پایه
Block LU decomposition	تجزیه بلوکی LU

C

cholesky factorization	تجزیه چولسکی
Computational complexity	پیچیدگی محاسباتی
Complex	مختلط
complete pivoting	محورگیری کامل
convergent matrix	ماتریس همگرا
Consistent	سازگار
Coordinate	مختصات
Cramer rule	قاعده ی کرامر
Crout decomposition	تجزیه کروت

D

defective matrix	ماتریس ناقص/معیوب
Diagonal	قطری
diagonally dominant	غالب قطری
Direct method	روش مستقیم
Doolittle decomposition	تجزیه دولیتل

E

Efficiency of an algorithm	کارآیی یک الگوریتم
Elementary row operations	اعمال سطری مقدماتی
Elimination	حذفی

F

Factorization	تجزیه

G

Gauss	گاوس
Gaussian elimination	روش حذفی گاوس
Gauss-Jordan	گاوس-جردن
Growth factor	عامل رشد

H

Homogeneous	همگن

I

Inconsistent	ناسازگار
Inverse	معکوس
Invertible	معکوس پذیر
Initial value problem	مسئله مقدار مرزی
Iterative method	روش تکراری

L

LU factorization	تجزیه LU
Limit	حد
Linear system	دستگاه خطی
Lower triangular	پایین مثلثی

M

Multiple	چندگانه

O

Order	رتبه
Orthogonal	متعامد

P

Partial	جزئی
Partial pivoting	محورگیری جزئی
Permutation	جایگشت
Pivot	محور
Pivoting	محورگیری
positive definite	مثبت معین

R

Real .... حقیقی
Root .... ریشه

S

Scalar .... اسکالر
Scaling .... مقیاس کردن
Schur complement .... مکمل شور
Sequence .... دنباله
Subspace .... زیرفضا
symmetric (hermitian) .... متقارن(هرمیتی)
System .... سیستم
Sparse matrix .... ماتریس تنک
Stability .... پایداری
Stable .... پایدار

T

Thomas algorithm .... الگوریتم توماس
Triangular .... مثلثی
Tridiagonal .... سه قطری

U

Upper triangular .... بالامثلثی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آرایه .... Array
اسکالر .... Scalar
اعمال سطری مقدماتی .... Elementary row operations
الحاقی .... Adjoint
الگوریتم .... Algorithm
الگوریتم توماس .... Thomas algorithm

ب

بالامثلثی .... Upper triangular

پ

پایدار .... Stable
پایداری .... Stability
پایداری پسرو .... Backward stability
پایه .... Basis
پایین مثلثی .... Lower triangular
پیچیدگی محاسباتی .... Computational complexity

ت

تجزیه .... Factorization
تجزیه بلوکی LU .... Block LU decomposition
تجزیه چولسکی .... cholesky factorization
تجزیه دولیتل .... Doolittle decomposition
تجزیه کروت .... Crout decomposition
تجزیه LU .... LU factorization
تقریب .... Approximation

ج

جایگزینی پسرو .... Back substitution
جایگشت .... Permutation
جزئی .... Partial

چ

چندگانه .... Multiple

ح

حد .... Limit
حذفی .... Elimination
حقیقی .... Real

د

دستگاه خطی .... Linear system
دقت .... Accuracy
دنباله .... Sequence

ر

رتبه .... Order
روش تکراری .... Iterative method
روش حذفی گاوس .... Gaussian elimination
روش مستقیم .... Direct method
ریشه .... Root

ز

زیرفضا .... Subspace

س

سازگار .... Consistent
سه قطری .... Tridiagonal
سیستم .... System

ع

عامل رشد .... Growth factor

غ

غالب قطری .... diagonally dominant

ق

قاعده ی کرامر .... Cramer rule
قطری .... Diagonal

ک

کارآیی یک الگوریتم .... Efficiency of an algorithm

گ

گاوس .... Gauss
گاوس–جردن .... Gauss-Jordan

م

ماتریس تنک .... Sparse matrix
ماتریس ناقص/معیوب .... defective matrix
ماتریس همگرا .... convergent matrix
متعامد .... Orthogonal
متقارن(هرمیتی) .... symmetric (hermitian)
مثبت معین .... positive definite
مثلثی .... Triangular
محور .... Pivot
محورگیری .... Pivoting
محورگیری جزئی .... Partial pivoting
محورگیری کامل .... complete pivoting
مختصات .... Coordinate
مختلط .... Complex
مسئله مقدار مرزی .... Initial value problem
معکوس .... Inverse
معکوس پذیر .... Invertible
مقیاس کردن .... Scaling
مکمل شور .... Schur complement

ن

ناسازگار .... Inconsistent

ه

همگن .... Homogeneous

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل دوم: روش های مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲