۱- نشان دهید یک ماتریس هاوس هولدر حقیقی 2×2 را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$H = \begin{bmatrix} -cos(\phi) & sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix}$$

آنگاه Hx را بیابید که $x = \begin{bmatrix} cos(\phi), & sin(\phi) \end{bmatrix}^T$ است.

۲- ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) همه‌ی مقادیر و بردارهای ویژه‌ی A را به صورت تحلیلی بیابید.
ب) درستی نتایج خود را با تابع `eig` از ماژول `numpy.linalg` بررسی کنید.
پ) بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A را با روش توانی و بردار اولیه‌ی $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ تخمین بزنید.
ت) توضیح دهید که چرا نمی‌توانیم از روش معکوس توانی برای محاسبه‌ی مقدار ویژه‌ی با اندازه‌ی کمینه‌ی A استفاده کنیم.
ث) از روش معکوس توانی انتقال یافته برای تخمین مقدار ویژه‌ی با اندازه‌ی کمینه‌ی A استفاده کنید.

۳- ماتریس A را در نظر بگیرید که به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

تمام مقادیر a را بیابید که به ازای آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس A برابر با 0، 3 و -3 باشند.

۴ـ الف ـ ثابت کنید برای هر سه عدد دلخواه a, b, c، ماتریسی با چند جمله‌ای مشخصه

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

وجود دارد.

ب ـ نشان دهید که ماتریس های $n \times n$ مانند A و B وجود ندارند که رابطهٔ زیر برای آنها برقرار باشد.

$$AB - BA = I$$

۵- فرض کنید $(\lambda_i, X_i)\ ;\ i = 1, 2, \dots n$ جفت ویژه‌های ماتریس A باشند و $X = [X_1, X_2, \dots X_n]$ فرض کنید

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

برقرار باشد و تجزیه LU ماتریس X^{-1} وجود داشته باشد. نشان دهید دنباله‌ی $\{A_k\}$ حاصل از الگویتم QR جهت یافتن مقادیر ویژه به یک ماتریس بالا مثلثی همگرا خواهد بود.

۶- آیا تا به حال برایتان این سوال پیش آمده است که موتورهای جستجو مانند *Google* چگونه نتایج جستجو ها را به ترتیب اهمیت مرتب می کنند؟ شاید برایتان جالب باشد که بدانید برای انجام این کار از الگوریتمی به نام *Page Rank* استفاده می شود که در آن برای رتبه بندی صفحات وب، نیازمند محاسبهٔ بردار ویژه هستیم. محققان حوزهٔ داده کاوی نسخه های بسیار قدرتمند و پیشرفته ای از این الگوریتم را توسعه داده اند ولی ما در این تمرین یک نسخه بسیار ساده شده از الگوریتم *Page Rank* را می خواهیم بررسی کنیم. در واقع هدف رتبه دهی به اعضای یک مجموعه بر اساس میزان اهمیت آنها و تاثیری که بر یکدیگر می گذارند می باشد.

فرض کنید که n تیم فوتبال که رتبه های آنها با متغیرهای x_i نمایش داده می شوند را می خواهیم رتبه بندی کنیم $1 \le i \le n$. فرض بر این است که هر تیم در مقابل تمام تیم های دیگر بازی کرده است و پارامتر r_{ij} وزن های استفاده شده در روند رتبه بندی می باشند که در آن i اشاره به تیم i و j اشاره به تیم j دارد و همچنین $r_{ii} = 0$ می باشد.

رتبهٔ تیم i متناسب با حاصل جمع وزن دار رتبهٔ باقی تیم ها می باشد که این وزن ها همان r_{ij} ها می باشند، در نتیجه داریم:

$$x_i = k\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j, \qquad 1 \leq i \leq n$$

که در آن k ثابت تناسب است. می توانیم رابطهٔ فوق را به فرم ماتریسی $kRx = x$ که در ان $R = [r_{ij}]$ می باشد بنویسیم. اگر دو طرف این رابطه را بر k تقسیم کنیم می بینیم که یک مسئله مقدار ویژه/ بردار ویژه ظاهر شده است!

$$Rx = \frac{1}{k}x$$

اکنون احتمالاً این سوال برایتان پیش آمده است که وزن های r_{ij} را چگونه تعریف کنیم. برای این کار رویکرد های بسیار زیادی وجود دارد. آسان ترین آنها این است که قرار دهیم $r_{ij} = 1$ اگر تیم i از تیم j ببرد و $r_{ij} = 0$ اگر تیم i از تیم j ببازد. مشکل این شیوهٔ وزن دهی این است که اگر امتیاز دو تیم نزدیک باشد، تیم بازنده هیچ امتیازی دریافت نمی کند. برای مثال حالتی را فرض کنید که تیم i ۶ گل و تیم j ۵ گل زده باشد. همچنین این رویکرد این مشکل را دارد که تیم برنده اگر با اختلاف گل فاحشی ببرد، هیچ امتیاز مضاعفی دریافت نمی کند. برای مثال حالتی را در نظر بگیرید که تیم i ۶ گل و تیم j صفر گل به ثمر رسانده باشند. و از همه مهم تر اینکه این شیوه وزن دهی ممکن است باعث ایجاد یک سطر صفر شود. این حالت زمانی رخ می دهد که یک تیم تمام بازی هایش را ببازد و این منجر می شود که ماتریس R یک ماتریس تحویل ناپذیر (*irreducible*) شود. بررسی تحویل ناپذیری یک ماتریس جزء اهداف این تمرین نمی باشد ولی در همین حد کافیست که بدانیم برای درست کار کردن الگوریتم *Page Rank* باید ماتریس R تحویل ناپذیر باشد و وجود یک سطر صفر در آن، منجر به نقض این شرط می شود. رویکرد مناسب تر برای تشکیل ماتریس R این است که مقادیر r_{ij} را بر حسب امتیاز کل بازی محاسبه کنیم. فرض کنیم S_{ij} برابر با تعداد گل های زده شدهٔ تیم i در بازی مقابل تیم j باشد. آنگاه r_{ij} را به صورت زیر بازتعریف می کنیم:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

با توجه به این تعریف جدید تیم بازنده نیز در هر صورت مقداری امتیاز کسب خواهد کرد و در نتیجه ماتریس R تحویل ناپذیر خواهد بود. اکنون برای انجام رتبه بندی کافیست که بردار ویژهٔ متناظر با بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس R را به دست آورده و آن را بر نُرم 2 خود تقسیم کنیم تا مقیاس شود. در این بردار ویژهٔ مقیاس شده (که نُرم 2 آن برابر با یک است) تمام درایه ها مثبت می باشند که این خاصیت از تحویل ناپذیر بودن ماتریس R ناشی می شود. بیاییم و این بردار ویژه را V بنامیم. اگر درایهٔ v_i بزرگترین مقدار را

از میان دیگر درایه های این بردار داشته باشد، آنگاه تیم i رتبه نخست را کسب کرده است، سپس اگر v_j دومین درایهٔ بزرگ بردار V باشد، آنگاه تیم j رتبهٔ دوم را کسب کرده است و به همین ترتیب باقی تیم ها را نیز رتبه بندی می کنیم.

اکنون نوبت آن فرا رسیده که شما به کمک الگوریتم *Page Rank* تشریح شده در بالا، شش تیم که امتیازهای آنها مطابق جدول زیر می باشند را رتبه بندی نمایید.

جدول ۱: جدول امتیازات

تیم ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰	۱۷	۲۵	۲۵	۱۰	۳۰
۲	۳۸	۰	۲۴	۴۸	۲۱	۲۹
۳	۲۰	۳۱	۰	۱۴	۲۴	۱۷
۴	۳۶	۳	۲۵	۰	۲۴	۴۵
۵	۲۴	۳۰	۱۳	۱۴	۰	۰
۶	۲۸	۲۴	۲۰	۱۰	۲۳	۰

برای محاسبهٔ بردار ویژهٔ متناظر با بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس R، روش توانی را در *Python* یا *MATLAB* پیاده سازی کنید و با محک توقف $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| \leq 10^{-6}$ آن را اجرا کنید. در نهایت رتبه بندی این شش تیم را اعلام نمایید.

نحوه ارسال تمرین‌ها

فایل الکترونیکی پاسخ تمرینات به همراه پوشه کدهای متلب یا پایتون به آدرس زیر ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

بعلاوه فایل تمرینات در سامانه کورسز دانشگاه آپلود شود. در هنگام ارسال فایل، اسم خود و شماره دانشجویی خود را روی نام فایل قرار دهید. برای مثال نام فایل ارسالی چنین باشد:

Akbari-12345678

توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۲۱ اردیبهشت ماه ۱۴۰۳ می‌باشد.
توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است.

توجه ۳: آمادگی کامل دانشجویان گرامی جهت ارایه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

توجه ۴: از کدهای موجود در سطح وب یا کتاب‌های مرجع نیز می‌توانید استفاده کنید اما باید منابع استفاده شده را ذکر کنید و قادر به توضیح عملکرد کد ارسال‌شده باشید.