

(۱) برای ماتریس A و بردار b ، همه‌ی جواب‌های کمترین مربعات $AX = b$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۲) دستگاه فرامعین زیر را با استفاده از روش افراز به دستگاه مربعی حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(۳) الف- برای ماتریس رتبه کامل $A_{m \times n}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^m$ ، ثابت کنید x جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات $Ax = b$ است، اگر و تنها اگر:

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & A \\ A^T & O_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ O_{n \times 1} \end{bmatrix}$$

ب- اگر ماتریس A ، تُتک (Sparse) باشد، ترجیح می‌دهیم به جای حل معادلات نرمال، از روش بالا استفاده کنیم. توضیح دهید چرا.

(۴) ماتریس $A_{m \times n}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید. درستی یا نادرستی هر گزاره را با دلیل بیان کنید.
الف) اگر b در فضای ستونی A باشد آنگاه هر جواب $AX = b$ یک جواب کمترین مربعات خواهد بود.

ب) جواب کمترین مربعات $AX = b$ نزدیکترین نقطه‌ی فضای ستونی A به b است.
پ) اگر \hat{X} یک جواب کمترین مربعات $AX = b$ باشد، آنگاه $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

۵) اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و \hat{x} یک جواب برای کمترین مربعات معادله خطی $Ax = b$ باشد، آنگاه نشان دهید بردار $y \in \mathbb{R}^n$ هم یک جواب برای این مساله است اگر و تنها اگر بردار $z \in N(A)$ داشته باشیم $y = \hat{x} + z$ (راهنمایی: $N(A^T A) = N(A)$)

۶) جدول زیر جمعیت تقریبی شهر شیراز در هر پنج سال و از سال های ۱۳۵۵ تا ۱۴۰۰ را نشان می دهد.

جدول ۱: جمعیت شهر شیراز

سال خورشیدی	جمعیت
1355	625, 813
1360	848, 279
1365	965, 117
1370	1, 089, 355
1375	1, 412, 895
1380	1, 987, 210
1385	2, 345, 678
1390	2, 412, 780
1395	2, 698, 285
1400	2, 917, 554

فرض کنید که بتوان رشد جمعیت را با تابع $P = ae^{bx}$ مدل کرد که در آن x نشان دهنده سال و P نشان دهنده جمعیت برحسب میلیون نفر می باشد. مقادیری از a و b را بیابید که تابع ae^{bx} بهترین برازش کمترین مربعات داده های فوق را ارائه دهد و داده های فوق و منحنی برازش کننده آنها را به کمک نرم افزار های *Python* یا *MATLAB* رسم کنید. سپس به کمک تابع برازش کننده حاصل شده، جمعیت شهر شیراز را در سال ۱۴۳۰ خورشیدی تخمین بزنید.

نحوه ارسال تمرین‌ها

فایل الکترونیکی پاسخ تمرینات به همراه پوشه کدهای متلب یا پایتون به آدرس زیر ایمیل شود:

mdehghan.aut.nla.bsc@gmail.com

بعلاوه فایل تمرینات در سامانه کورسز دانشگاه آپلود شود. در هنگام ارسال فایل، اسم خود و شماره دانشجویی خود را روی نام فایل قرار دهید. برای مثال نام فایل ارسالی چنین باشد:

Akbari-12345678

توجه ۱: مهلت ارسال تمرینات (بدون تمدید) تا تاریخ ۱۰ خرداد ماه ۱۴۰۳ می‌باشد.

توجه ۲: نوشتن شماره دانشجویی در سربرگ تمرینات و عنوان ایمیل ضروری است.

توجه ۳: آمادگی کامل دانشجویان گرامی جهت ارایه تمرینات به صورت شفاهی در تاریخ مقرر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

توجه ۴: از کدهای موجود در سطح وب یا کتاب‌های مرجع نیز می‌توانید استفاده کنید اما باید منابع استفاده شده را ذکر کنید و قادر به توضیح عملکرد کد ارسال شده باشید.