① مرحله اول محاسبه A^TA :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^TA=\begin{bmatrix} 40 & 28 & 8 \\ 28 & 34 & 20 \\ 8 & 20 & 16 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^TA}(\lambda)=\det(\lambda I-A^TA)=\lambda^3-90\lambda^2+1296\lambda$$

محاسبه مقادیر ویژه A^TA :

$$=\lambda(\lambda-72)(\lambda-18) \Longrightarrow \lambda_1=72 \quad , \quad \lambda_2=18 \quad , \quad \lambda_3=0$$

بنابراین $r=2$ و داریم : $\Sigma_1=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$

$$\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=8{,}4852$$
$$\sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=4{,}2426$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8{,}4852 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}2426 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مرحله دوم بردارهای ویژه متناظر با λ_i ها را می‌یابیم : (باید $AX=\lambda X$ را حل کنیم)

$$\lambda_1=72 \qquad v_1=\left[+\tfrac{2}{3}, +\tfrac{2}{3}, +\tfrac{1}{3}\right]^T$$
$$\lambda_2=18 \qquad v_2=\left[-\tfrac{2}{3}, +\tfrac{1}{3}, +\tfrac{2}{3}\right]^T$$
$$\lambda_3=0 \qquad v_3=\left[+\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, +\tfrac{2}{3}\right]^T$$

این بردارها یکه شده‌اند. ماتریس V بصورت زیر است :

$$V=[v_1, v_2, v_3]=\begin{bmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \\ +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

در مرحله سوم برای $i=1,2$ بردارهای u_1, u_2 را بصورت زیر بدست می‌آوریم : $\left(u_i=\frac{1}{\sigma_i}Av_i\right)$

$$u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{1}{\sqrt{72}}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +\frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} \end{bmatrix}=[0{,}7071 , 0{,}7071]^T$$

$$u_2=\frac{1}{\sigma_2}Av_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} \\ +\frac{2}{3} \end{bmatrix}=[0{,}7071 , -0{,}7071]^T$$

بنابراین چون U یک ماتریس 2×2 است نیازی به استفاده از الگوریتم گرام اشمیت نداریم و تجزیه SVD به شرح زیر است :

$$A=U\Sigma V^T=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 \\ 0{,}7071 & -0{,}7071 \end{bmatrix}_{2\times 2} \\ \quad u_1 \qquad\quad u_2 \end{array}\begin{bmatrix} 8{,}4852 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}2426 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه متناظر با λ_i که بصورت زیر عمل میکنیم : (باید $AX=\lambda X$ یا $(A-\lambda I)X=0$ را حل کنیم)

$$\lambda_1=72 : (A-\lambda I)X=0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 40-72 & 28 & 8 \\ 28 & 34-72 & 20 \\ 8 & 20 & 16-72 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \xrightarrow[\text{سطری پلکانی}]{\text{فرم تحویل یافته}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases} x_1-2x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases} \Longrightarrow x_1=x_2=2x_3 \qquad X_1=\begin{bmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 18 : \quad (A-\lambda I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 40-18 & 28 & 8 \\ 28 & 34-18 & 20 \\ 8 & 20 & 16-18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{پلکانی تحویل یافته}]{\text{فرم سطری}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 = -2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{matrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 : \quad (A-\lambda I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 28 & 8 \\ 28 & 34 & 20 \\ 8 & 20 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{تحویل یافته}]{\text{فرم سطری پلکانی}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} 2x_1 = x_3 \\ x_3 = -x_2 \end{matrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

---

2 ۱- طبق تعریف مقادیر تکین ماتریس های A و A^T به شکل مقابل اند:

$$\sigma_{i_A} = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

$$\sigma_{i_{A^T}} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$$

در واقع طبق تعریف ۲ مقدار تکین مثبت وجود دارد که این ها ریشه های دوم مثبت مقادیر ویژه مخالف صفر A^TA یا AA^T هستند و می دانیم مقادیر ویژه دو ماتریس A^TA و AA^T یکی هستند و تنها در مقادیر ویژه صفر تفاوت دارند" بنابراین مقادیر تکین مثبت A و A^T یکسان اند." درست (اگر واژه مثبت را هم در نظر بگیریم)

البته با تجزیه SVD هم می توان نشان داد که:

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = V\Sigma^T U^T$$

و می دانیم که Σ یک ماتریس قطری است و مقادیر تکین A روی قطر این ماتریس قرار دارند و ترانهاده کردن این ماتریس عملاً تغییری در آن ایجاد نمی کند و $\Sigma = \Sigma^T$ بنابراین مقادیر تکین

۲- دوباره طبق تعریف داریم:

$$\sigma_{i_A} = \sqrt{\lambda_i(A^TA)} \qquad \sigma_{i_{A^{-1}}} = \sqrt{\lambda_i\left((A^{-1})^T A^{-1}\right)} = \sqrt{\lambda_i\left(A^TA\right)^{-1}}$$

و می دانیم که مقادیر ویژه A^{-1} معکوس مقادیر ویژه A هستند بنابراین مقادیر تکین A^{-1} نیز معکوس مقادیر تکین A اند.

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^{-1}$$

وچون Σ قطری است داریم:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots \sigma_r & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots \sigma_r^{-1} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

درست

۳- نادرست . برای مثال $\left\{A(x)=\begin{bmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{bmatrix} : x\neq 0\right\}$ خانواده‌ای از ماتریس‌های مشابه‌اند ولی مقادیر تکین آن‌ها $|x|$ و صفر هستند .

۴- درست . فرض کنیم A ضریبی از یک ماتریس متعامد باشد آنگاه می‌دانیم که با استفاده از خواص ماتریس‌های متعامد داریم $Cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|=1$.

حالا فرض کنیم که $Cond(A)=1$ بنابراین یعنی $\|A\|\|A^{-1}\|=1$ حال قرار می‌دهیم $A=cO$ که O یک ماتریس متعامد یا Orthogonal است . باید ثابت کنیم این اتفاق تنها وقتی رخ داده که A ضریبی از یک ماتریس متعامد باشد . تجزیه SVD A را بصورت $A=U\Sigma V^T$ درنظر می‌گیریم . نرم ماتریس بیشترین مقدار تکین این ماتریس است که روی قطر Σ قرار دارد . بنابراین $\|A\|=\sigma_{max}$ و $\|A^{-1}\|=\sigma_{min}^{-1}$ درنتیجه $Cond(A)=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ و اگر $Cond(A)=1$ یعنی $\sigma_{max}=\sigma_{min}$ بنابراین تمام مقادیر تکین باهم برابرند درنتیجه $\Sigma=cI$ و داریم $A=U(cI)V^T=cUV^T$ که UV^T حاصلضرب دو ماتریس متعامد است پس خودش هم متعامد است بنابراین A یک ضریبی از یک ماتریس متعامد است و دو طرف این گزاره اثبات شد .

۵- درست

$$A=U\Sigma V^T \qquad \sigma_{i_A}=\sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

$$\sigma_{i_{PA}}=\sqrt{\lambda_i\left((PA)^T PA\right)}=\sqrt{\lambda_i(A^TP^TPA)}=\sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

P متعامد است پس $P^TP=I$

بنابراین اگر P متعامد باشد ، آنگاه مقادیر منفرد PA و A یکسان خواهند بود .

(3) $A_{m\times n}$ با مقادیر منفرد $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ ثابت کنید: $\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

با توجه به این که $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$ بنابراین $\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i(A^TA)|$

از طرفی داریم $A=(a_{ij})$, $1\leq i\leq n$, $1\leq m\leq n$ و $A^T=(b_{ij})$, $b_{ij}=(a_{ji})$ بنابراین :

$$A^TA = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}a_{jk}\right) \longrightarrow Tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} =$$

$$Tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

همچنین می دانیم که اثر یک ماتریس برابر است با مجموع مقادیر ویژه آن ماتریس است : $Tr(A)=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(A)$

همچنین تمامی مقادیر ویژه A^TA حقیقی و به صورت σ_i^2 می باشند و داریم :

$$\begin{cases} Tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(A) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \\ Tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

(4) الف) A ماتریس معین مثبت است و $A=L^TL$ تجزیه چولسکی آن است . $L=U\Sigma V^T$

$$A = L^TL = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T U^TU \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

زیرا U متعامد است $U^TU = I$

و با توجه به این که Σ ماتریس قطری است و $\Sigma^T = \Sigma$ داریم :

$$A = V\Sigma^2 V^T$$

و در نظر گرفته بودیم که $X=V\Sigma V^T$ ، با توجه به این که V متعامد است در نتیجه می توان نوشت :

$$X^2 = (V\Sigma V^T)^2 = V\Sigma^2 V^T = A \longrightarrow X^2=A$$

می توان از روش های مختلفی برای نشان دادن معین مثبت بودن X استفاده کرد ولی در این جا با توجه به این که $X=\sqrt{A}=A^{1/2}$ و می دانستیم $A=L^TL$ و تجزیه چولسکی دارد بنابراین معین مثبت است برای X نیز داریم $X=(L^TL)^{1/2} = (L^T)^{1/2}L^{1/2}$ در نتیجه X نیز تجزیه چولسکی دارد و بنابراین X نیز معین مثبت است

④ ب)

$$X = -A + \sqrt{A^2+B}$$

از قسمت قبل می‌دانیم که اگر A معین مثبت باشه و $A = L^T L$ تجزیه چولسکی آن باشه و $L = U\Sigma V^T$ آنگاه $\sqrt{A} = X = V\Sigma V^T$.

خب حالا به محاسبه A^2+B می‌پردازیم و سپس تجزیه چولسکی آن را می‌یابیم تا به L برسیم و سپس L را بصورت SVD تجزیه می‌کنیم و سپس $V\Sigma V^T$ جواب نهایی مان خواهد بود.

$$A^۲+B = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تجزیه چولسکی}} \begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{۲۱} \\ ۰ & l_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & ۰ \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^۲ + l_{۲۱}^۲ & l_{۲۱} l_{۲۲} \\ l_{۲۲} l_{۲۱} & l_{۲۲}^۲ \end{bmatrix}$$

$$l_{۲۲} = \sqrt{۸} \quad , \quad l_{۲۱} = ۳/\sqrt{۸} \quad , \quad l_{11} = \sqrt{\frac{۵۵}{۸}}$$

$$L = \begin{bmatrix} ۲,۶۲۲۵ & ۰ \\ ۱,۰۶۰۶ & ۲,۸۲۸۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تجزیه SVD}}$$

$$L = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -۰,۵۵۹۰ & -۰,۸۲۹۱ \\ -۰,۸۲۹۱ & ۰,۵۵۹۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳,۳۱۶۶ & ۰ \\ ۰ & ۲,۲۳۶۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰,۷۰۷۱ & -۰,۷۰۷۱ \\ -۰,۷۰۷۱ & ۰,۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

$$X = -A + V\Sigma V^T$$

$$X = \begin{bmatrix} ۲,۳۱۶۶ & ۰,۲۳۶۰ \\ ۱,۳۱۶۶ & ۱,۲۳۶۰ \end{bmatrix}$$ پاسخ نهایی

5) الف) از قاعده min-max استفاده می‌کنیم. این قاعده می‌گوید که برای یک ماتریس M، اگر $\sigma_k(M)$ k امین مقدار تکین M را نشان بدهد (به ترتیب افزایشی) سپس:

$$\sigma_k(M) = \min_{S:\dim(S)=k} \; \max_{x\in S, \|x\|=1} \|Mx\|$$

با استفاده از این قاعده نشان می‌دهیم که برای هر ماتریس دلخواه M و N داریم:

$$\sigma_k(M+N) \leq \sigma_k(M) + \|N\|_2$$

برای هر x که $\|x\|_2 = 1$ داریم:

$$\|(M+N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|Mx\| + \|N\|_2 \|x\| = \|Mx\| + \|N\|_2$$

$$\sigma_k(M+N) = \min_{S:\dim(S)=k} \; \max_{x\in S, \|x\|=1} \|(M+N)x\| \leq \min_{S:\dim(S)=k} \; \max_{x\in S, \|x\|=1} \|Mx\| + \|N\|_2 =$$

$$\left(\min_{S:\dim(S)=k} \; \max_{x\in S, \|x\|=1} \|Mx\|\right) + \|N\|_2 = \sigma_k(M) + \|N\|_2$$

حالا اگر قرار دهیم $M=A$ و $N=E$ داریم:

$$\sigma_k(A+E) \leq \sigma_k(A) + \|E\|_2$$

و اگر قرار دهیم $M=A+E$، $N=-E$ داریم:

$$\sigma_k(A) \leq \sigma_k(A+E) + \|E\|_2$$

با ترکیب این ۲ نامساوی داریم:

$$|\sigma_k(A+E) - \sigma_k(A)| \leq \|E\|_2$$

بنابراین نامساوی $|\sigma_K - \beta_K| \leq \|E\|_2$ ثابت شد به ازای هر $K=1,\dots,p$ که $p=\min\{m,n\}$

ب) این نامساوی نشان می‌دهد که مقادیر منفرد یک ماتریس نسبت به تغییرات کوچک پایدار هستند و حداکثر این مقدار به اندازه $\|E\|_2$ خواهد بود. راهنمایی سؤال این است که مسئله محاسبه‌ی مقادیر تکین یک ماتریس یک مسئله خوش وضع است. این بدین معناست که مقادیر تکین برای هر ماتریس معین هستند و این مقادیر بصورت یکتا تعیین می‌شوند و وابستگی پیوسته به درایه‌های ماتریس اولیه دارند و این نامساوی نیز حد خطا را مشخص می‌کند.

به زبانی دیگر این نامساوی بیان می‌کند خواص طیفی اصلی ماتریس که توسط مقادیر تکین آن نمایش داده می‌شوند نسبت به نویز پایدار هستند که این مورد در کاربردهای علمی و مهندسی اهمیت بسیاری دارد.

6