① الف)

$0<\epsilon<1$

$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&\epsilon\end{bmatrix} \qquad K(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-\epsilon^{-1}&\epsilon^{-1}\end{bmatrix}$

نرم ۱ :

$\|A\|_1=\max\{2,\epsilon\}=2$

$\|A^{-1}\|_1=\max\{1+\frac{1}{\epsilon},\frac{1}{\epsilon}\}=1+\frac{1}{\epsilon}$

$K_1(A)=2(1+\frac{1}{\epsilon})=2+\frac{2}{\epsilon} \xrightarrow[0<\epsilon<1]{} \boxed{K_1(A)>4}$

نرم ∞ :

$\|A\|_\infty=\max(1+0,1+\epsilon)=1+\epsilon$

$\|A^{-1}\|_\infty=\max(1+0,\frac{2}{\epsilon})=\frac{2}{\epsilon}$

$K_\infty(A)=(1+\epsilon)(\frac{2}{\epsilon})=2(1+\frac{1}{\epsilon}) \xrightarrow[0<\epsilon<1]{} \boxed{K_\infty(A)>4}$

ب) $D\in\mathbb{R}^{100\times100}$

$D=\mathrm{diag}(\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{3}) \qquad \boxed{\det(D)=(\frac{1}{3})^{100}\simeq 0}$

$D^{-1}=\mathrm{diag}(3,\dots,3)$

$\|D\|_1=\|D\|_\infty=\frac{1}{3} \qquad \|D^{-1}\|_1=\|D^{-1}\|_\infty=3$

$K_1(D)=K_\infty(D)=\frac{1}{3}\times3=\boxed{1}$

دترمینان این ماتریس به صفر میل می‌کند ولی عدد حالت این ماتریس ۱ است که یعنی این ماتریس بسیار خوش حالت است، پس گزاره صورت سوال امکان پذیر است

② الف) ΔA داریم در نتیجه آشفتگی در ماتریس ضرایب رخ داده است. ابتدا جواب اصلی دستگاه $AX=b$ را می‌یابیم:

$$X=A^{-1}b=\begin{bmatrix}9&-36&30\\-36&192&-180\\30&-180&180\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-24\\30\end{bmatrix}=X^{*}_{\text{جواب اصلی}}$$

حال دستگاه را با ماتریس ضرایب $A+\Delta A$ حل می‌کنیم:

$$\tilde{X}=(A+\Delta A)^{-1}b=\begin{bmatrix}8.9919&-35.9514&29.9514\\-35.9676&191.8057&-179.8057\\29.9730&-179.8381&179.8381\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9919\\-23.9676\\29.9730\end{bmatrix}=\tilde{X}$$

$\Delta X=\tilde{X}-X^{*}=[-0.0081\ ,\ 0.0323\ ,\ -0.0270]^T$

$\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1}=\frac{0.0674}{57}=\boxed{0.0011}$ میزان خطای نسبی دستگاه

۲) ب) آشفتگی در ماتریس سمت راست است.

$$AX = b+\Delta b$$

جواب اصلی را که از قسمت قبل داشتیم: $X^* = [3, -24, 30]^T$

دستگاه جدید را حل می‌کنیم:

$$A\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.001 \end{bmatrix} \qquad \tilde{X} = A^{-1}(b+\Delta b)$$

$$\tilde{X} = [3.03, -24.18, 30.18]^T$$

$$\Delta X = \tilde{X} - X^* = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.18 \\ +0.18 \end{bmatrix} \qquad \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.39}{57} = \boxed{0.00684}$$

میزان خطای نسبی جواب دستگاه

با توجه به قضایایی که داخل جزوه داشتیم می‌توانیم بازه تغییرات جواب دستگاهمان را نیز تعیین کنیم:

$$\frac{1}{K_1(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant K_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \xrightarrow{K_1(A)=748} \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{0.001}{3}$$

$$4.456 \times 10^{-7} \leqslant \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant 0.2493$$

که کران بالای بزرگی است و یعنی می‌توانیم تا ۲۴ درصد داخل جواب دستگاه خطا داشته باشیم و با توجه به عدم حالت زیادی که داشتیم این موضوع طبیعی است (ماتریس هیلبرت به طور کلی بدحالت و بدوضع است)

۲) ج) دستگاه جدید را حل می‌کنیم:

$$(A+\Delta A)X = b+\Delta b$$

$$\tilde{X} = (A+\Delta A)^{-1}(b+\Delta b) = [3.0218, -24.1474, 30.1528]^T$$

$$\Delta X = \tilde{X} - X^* = [0.0218, -0.1474, 0.1528]^T \qquad \frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{0.3221}{57} = \boxed{0.0056}$$

میزان خطای نسبی جواب دستگاه

قضیه اصلی: فرض کنید A نامنفرد باشد و $b \neq 0$. اگر شرط $\|\Delta A\|\|A^{-1}\| < 1$ برقرار باشد آنگاه خطای نسبی جواب دستگاه $AX=b$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \left(\frac{K(A)}{1 - K(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\right)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \boxed{\frac{0.00003}{1.8333}} \qquad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \boxed{0.00033} \qquad K(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 = \frac{11}{6} \times 408 = \boxed{748}$$

$$\frac{\|\Delta X\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \left(\frac{748}{1 - 748 \times 1.6363 \times 10^{-5}}\right)\left(1.6363 \times 10^{-5} + 33 \times 10^{-5}\right) = \boxed{0.2622}$$

کران بالای خطای نسبی جواب دستگاه جدید (که مقدار قابل توجهی است)

(۳ الف)

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = ۱۶۱ \times ۱۶ = \boxed{۲۵۷۶}$$ عدد حالت

در خوش حالت کننده گاوس سایدل داریم: $A = \underbrace{(D+L)}_{M} - \underbrace{(-U)}_{N}$ و از طرفی $G_{GS} = M^{-1}N$

و خوش حالت کننده گاوس سایدل برابر است با $\boxed{M^{-1} = (D+L)^{-1}}$ $\quad G_{GS} = (D+L)^{-1}(-U)$

و درنتیجه برای خوش حالت کردن ماتریس A باید M^{-1} را از سمت چپ در آن ضرب کنیم.

$$\underbrace{(D+L)^{-1}}_{M^{-1}} A = \underbrace{(D+L)^{-1}}_{M^{-1}} b$$

$$M = D+L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۲۷ & ۹ & ۳ & ۰ \\ ۱۲۵ & ۲۵ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ \\ -۳ & -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۶۰ & -۲/۵ & ۱\frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & -۱/۵ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۳ & -۳/۵ & -۳/۴۱۶۶۷ \\ ۰ & -۶۰ & -۶۵ & -۶۳/۱۶۶۷ \end{bmatrix}$$

برای خوش حالت کننده ژاکوبی داریم: $A = M - N = \underbrace{D}_{M} - \underbrace{(-(L+U))}_{N}$ و $G_J = M^{-1}N = D^{-1}(-(L+U))$

و در نتیجه خوش حالت کننده ژاکوبی برابر با $M^{-1} = D^{-1}$ می‌باشد پس کافی است برای خوش حالت کردن A با این روش A را در D^{-1} ضرب کنیم:

$$D = \mathrm{diag}(۱, ۴, ۳, ۱) \qquad D^{-1} = \mathrm{diag}(۱, \tfrac{۱}{۴}, \tfrac{۱}{۳}, ۱)$$

$$M^{-1}A = D^{-1}A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \\ ۹ & ۳ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۱۲۵ & ۲۵ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

(۳ ب)

$$A = \begin{bmatrix} -۱۰^{-۳} & -۱۰^{-۲} & -۱۰^{-۲} \\ ۲\times۱۰^{-۳} & ۰ & -۱۰^{-۴} \\ ۱ & ۵\times۱۰^{-۳} & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\|a^i\|_۲ = \sqrt{\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲}$$

$$\|a^۱\|_۲ = \sqrt{(-۱۰^{-۳})^۲ + (-۱۰^{-۲})^۲ \times ۲} = \boxed{\sqrt{۲۰۱ \times ۱۰^{-۶}}}$$

$$\|a^۲\|_۲ = \sqrt{(۲\times۱۰^{-۳})^۲ + (-۱۰^{-۴})^۲} = \boxed{\sqrt{۴۰۱ \times ۱۰^{-۸}}}$$

$$\|a^۳\|_۲ = \sqrt{۱^۲ + (۵\times۱۰^{-۳})^۲ + ۴^۲} = \boxed{\sqrt{۱۷ + ۲۵\times۱۰^{-۶}}}$$

$$D = \begin{bmatrix} \|a^۱\|_۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \|a^۲\|_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \|a^۳\|_۲ \end{bmatrix}$$

CamScanner

$$D = \begin{bmatrix} 70.5345 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.24253 \end{bmatrix}$$ خوش حالت کننده

$$DA = \begin{bmatrix} -0.07053 & -0.70534 & -0.70534 \\ 1 & 0 & -0.05 \\ 0.24253 & 0.001212 & 0.97014 \end{bmatrix}$$ ماتریس خوش حالت شده

قضیه: فرض کنید λ_{max} و λ_{min} بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه A^TA باشند آنگاه:

$$K_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5\times10^{-6} & 5.01\times10^{-3} & 4{+}98\times10^{-7} \\ 5.01\times10^{-3} & 1.25\times10^{-4} & 2.01\times10^{-2} \\ 4{+}98\times10^{-7} & 2.01\times10^{-2} & 16.0001 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_{max}(A^TA) = 17.00012 \\ \lambda_{min}(A^TA) = 3.7758\times10^{-6} \end{cases}$$

$$K_2(A) = \frac{\sqrt{17.00012}}{\sqrt{3.7758\times10^{-6}}} = \boxed{2121.87}$$ ماتریس بد وضع

$$(DA)^T DA = \begin{bmatrix} 1.0613 & 0.05004 & 0.23516 \\ 0.05004 & 0.4975 & 0.49868 \\ 0.02351 & 0.49868 & 1.44118 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_{max} = 1.73819 \\ \lambda_{min} = 0.27983 \end{cases}$$

$$K_2(DA^T.DA) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}} = \boxed{2.49227}$$ ماتریس خوش وضع

با ضرب ماتریس A در D عدد حالت از ۲۱۲۱٫۸۷ به ۲٫۴۹۲۲۷ کاهش پیدا کرد که یعنی ماتریس بسیار خوش حالت تر از حالت اولیه اش شده است.

۴

قضیه

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|\tilde{X}\|}\right)$$

$$\leqslant K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\tilde{A}\|}{\|\tilde{A}\|}\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|\tilde{X}\|}\right)$$

$$\xrightarrow{\|\tilde{A}\|\,\|\tilde{x}\| \geq \|\tilde{b}\|} \leqslant K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\tilde{A}\|\,\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|\tilde{b}\|}\right)$$

$$\xrightarrow{\|\tilde{A}\| \leqslant \|A\| + \|\Delta A\|} \leqslant K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{(\|A\| + \|\Delta A\|)\,\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|\tilde{b}\|}\right)$$

$$\leqslant K(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|\tilde{b}\|} + \frac{\|\Delta A\|\,\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|\tilde{b}\|}\right)$$

۵) الف)

$\boxed{r = b - A\tilde{x}}$ $\qquad A+H = A + \frac{r\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^2}$

$$(A+H)\tilde{x} = A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_2^2} = A\tilde{x} + \frac{r\cancel{\|\tilde{x}\|_2^2}}{\cancel{\|\tilde{x}\|_2^2}} = A\tilde{x} + r = \cancel{A\tilde{x}} + b - \cancel{A\tilde{x}} = b$$

$\boxed{\tilde{x}^T\tilde{x} = \|\tilde{x}\|_2^2}$

در نتیجه $\boxed{(A+H)\tilde{x} = b}$

ب)

$\alpha = \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2} \qquad H = \frac{r\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^2} \qquad (A+H)\tilde{x} = b$

$H\tilde{x} = b - A\tilde{x} = r$

$\|H\tilde{x}\| = \|b - A\tilde{x}\|_2 = \|r\|_2$

$$\to \|H\|_2\|\tilde{x}\|_2 \geq \|r\|_2 \to \frac{\|r\|_2}{\|\tilde{x}\|_2} \leq \|H\|_2 \xrightarrow[\times \frac{1}{\|A\|_2}]{} \underbrace{\frac{\|r\|_2}{\|\tilde{x}\|_2\|A\|_2}}_{1/\alpha} \leq \frac{\|H\|_2}{\|A\|_2} \longrightarrow$$

$\boxed{\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2}$

اگر $\tilde{x}$ یک جواب نزدیک به دستگاه اصلی باشد در این صورت H باید مقدار بسیار کوچکتری نسبت به A داشته باشد و اختلال کمی در A ایجاد کند و در این صورت α باید مقدار بزرگی داشته باشد تا حکمی که اثبات کردیم صحیح باشد و در نتیجه $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ باید کوچک باشد و برای عکس این موضوع نیز اگر مخرج α نسبت به صورتش کوچک باشد نتیجه می‌شود که H کوچک است و $\tilde{x}$ به جواب اصلی دستگاه نزدیک است.

فرض کنیم $\tilde{x}$ جواب نزدیک به جواب اصلی دستگاه باشد. رابطه $(A+H)\tilde{x}=b$ را داریم و در این رابطه می‌توان H را میزان آشفتگی در ماتریس A در نظر گرفت. چون $\tilde{x}$ به جواب دستگاه نزدیک است در نتیجه میزان آشفتگی ناچیز است و بنابراین H مقدار بسیار کوچکتری از A خواهد داشت و داریم:

$$\|H\|_2 \ll \|A\|_2 \Rightarrow 1 \ll \frac{\|A\|_2}{\|H\|_2}$$

از رابطه $\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2$ می‌دانیم که $1 \ll \frac{\|A\|_2}{\|H\|_2} \leq \alpha$ بنابراین داریم: $1 \ll \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2}$

و نتیجه می‌شود که $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ کوچک است.

حال اگر فرض کنیم $\|r\|_2$ در مقایسه با $\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2$ خیلی کوچک است نتیجه می‌شود: $1 \ll \frac{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}{\|r\|_2}$

که این یعنی α خیلی بزرگ است و از رابطه $\|A\|_2 \leq \alpha\|H\|_2$ متوجه می‌شویم که $\frac{\|A\|_2}{\|H\|_2} \leq \alpha$

و چون α خیلی بزرگ بود پس مقدار $\|H\|_2$ در برابر $\|A\|_2$ ناچیز است و در نتیجه در دستگاه $(A+H)\tilde{x}=b$ میزان آشفتگی H ناچیز است و نهایتاً جواب $\tilde{x}$ جوابی نزدیک به جواب اصلی دستگاه خواهد بود.

۶) الف) ✓

$$K(H_2) = 19.28$$

ب)

$$H_2 x = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 x_1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_1 \end{cases}$$

شیب خط

به صورت کلی شیب این دو خط خیلی هم به هم نزدیک نیست و به نوعی خوش وضع به حساب می‌آیند اما به ازای n های بزرگتر عدد حالت ماتریس های هیلبرت بسیار بزرگ می‌شود و به طور کلی این ماتریس ها بدوضع هستند.

ج)

$$H_3 x = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} x = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2/2 + x_3/3 = 0 \\ x_1/2 + x_2/3 + x_3/4 = 0 \\ x_1/3 + x_2/4 + x_3/5 = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم که $K(H_3) = 524$ در نتیجه H_3 بدوضع است و همانطور که از شکل ۵ هم مشخص است این سه صفحه بسیار به یکدیگر نزدیک هستند در نتیجه یک آشفتگی و اختلال کوچک می‌تواند منجر به اختلاف بسیار زیاد در جواب دستگاه موردنظر بشود که اصلاً مطلوب ما نیست.