(۱) طبق قضیه ی زیر به حل مسئله می پردازیم:

قضیه: فرض کنید A ماتریس غالب قطر سطری اکید باشد آنگاه روش گاوس سیدل برای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$ همگرا به جواب دقیق $AX=b$ است.

ابتدا باید ماتریس A را غالب قطر سطری اکید کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۶ & ۲ \\ -۱ & ۲ & -۵ \end{bmatrix} \qquad AX=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۸ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

حدس اولیه $X^{(0)}=[۲,\alpha,\beta]$

حال به سراغ حل دستگاه با استفاده از روش گاوس-سیدل می رویم:

$$x_i^{(K+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(K+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(K)}\right) \qquad i=۱,۲,\dots,n \quad K=۰,۱,۲,\dots$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(K+1)}&=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}x_2^{(K)}-a_{13}x_3^{(K)}\right)\\ x_2^{(K+1)}&=\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{21}x_1^{(K+1)}-a_{23}x_3^{(K)}\right)\\ x_3^{(K+1)}&=\frac{1}{a_{33}}\left(b_3-a_{31}x_1^{(K+1)}-a_{32}x_2^{(K+1)}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{۳}\left(۰-x_2^{(0)}-x_3^{(0)}\right)=\frac{-(\alpha+\beta)}{۳}=۰$$

$$\boxed{\alpha=-\beta}$$

$$x_2^{(1)}=\frac{-1}{۶}\left(-۸-\underset{۰}{x_1^{(1)}}-۲\underset{\beta}{x_3^{(0)}}\right)=\frac{۸+۲\beta}{۶}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\boxed{\beta=۱}$$

$$\boxed{\alpha=-۱}$$

$$x_3^{(1)}=\frac{-1}{۵}\left(۷+\underset{۰}{x_1^{(1)}}-۲\underset{۵/۳}{x_2^{(1)}}\right)=-\frac{1}{۵}\left(۷-\frac{۱۰}{۳}\right)=\boxed{\frac{-۱۱}{۱۵}}$$

(۲) الف)

$$x_1^{(K+1)}=x_1^{(K)}+\frac{\omega}{a_{11}}\left(b_1-a_{11}x_1^{(K)}-a_{12}x_2^{(K)}-a_{13}x_3^{(K)}\right)$$

$$x_2^{(K+1)}=x_2^{(K)}+\frac{\omega}{a_{22}}\left(b_2-a_{21}x_1^{(K+1)}-a_{22}x_2^{(K)}-a_{23}x_3^{(K)}\right)$$

$$x_3^{(K+1)}=x_3^{(K)}+\frac{\omega}{a_{33}}\left(b_3-a_{31}x_1^{(K+1)}-a_{32}x_2^{(K+1)}-a_{33}x_3^{(K)}\right)$$

حدس اولیه بردار صفر

$\omega=۱/۱$

$$x^{(1)}=۰+\frac{۱/۱}{۱۰}\left(۹-۱۰x^{(0)}+y^{(0)}-۰\right)=\boxed{۰/۹۹}$$

$$y^{(1)}=۰+\frac{۱/۱}{۱۰}\left(۷+x^{(1)}-۱۰y^{(0)}+۲z^{(0)}\right)=\boxed{۰/۸۷۸۹}$$

$$z^{(1)}=۰+\frac{۱/۱}{۱۰}\left(۶+۲y^{(1)}-۱۰z^{(0)}\right)=\boxed{۰/۸۵۳۳}$$

تکرار اول

CamScanner

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \frac{1.1}{10}\left(9 - 10x^{(1)} + y^{(1)}\right) = 0.99 + \frac{1.1}{10}\left(9 - 10(0.99) + 0.8789 - 0\right) = \boxed{0.9876}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \frac{1.1}{10}\left(7 + x^{(2)} - 10y^{(1)} + 2z^{(1)}\right) = 0.8789 + \frac{1.1}{10}\left(7 + 0.9876 - 10(0.8789) + 2(0.8523)\right) = \boxed{0.9784}$$

$$z^{(2)} = z^{(1)} + \frac{1.1}{10}\left(6 + 2y^{(2)} - 10z^{(1)}\right) = 0.8523 + \frac{1.1}{10}\left(6 + 2(0.9784) - 10(0.8523)\right) = \boxed{0.7899}$$

$$X^{(2)} = [0.9876 , 0.9784 , 0.7899]^T$$

تکرار دوم

۲) ب)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پارامتر بهینه در روش SOR از رابطه مقابل بدست می‌آید: $\omega_{opt} = \min_{\omega} \{\rho(M_{SOR}(\omega))\}$

اما طبق قضیه‌ای که در جزوه داشتیم نیز می‌توان این مسئله را حل کرد:

قضیه ۳.۱۲: فرض کنید A سه‌قطری با عناصر قطری ناصفر باشد و مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش ژاکوبی یعنی M_J همگی حقیقی باشند و $\mu = \rho(M_J) < 1$، آنگاه پارامتر بهینه روش SOR از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}$$

و به ازای آن داریم: $\rho(M_{SOR}(\omega_{opt})) = \omega_{opt} - 1$

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} \\ \frac{-a_{31}}{a_{33}} & \frac{-a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/10 & 0 \\ 1/10 & 0 & 2/10 \\ 0 & 2/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(M_J) = \det(M_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{1}{25}\lambda + \frac{\lambda}{100} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1/\sqrt{20} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{20}} \end{cases}$$

$$\mu = \rho(M_J) = \max\left(|0|, \left|\frac{1}{\sqrt{20}}\right|, \left|\frac{-1}{\sqrt{20}}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0.22 < 1$$

بنابراین می‌توانیم از قضیه بالا استفاده کنیم:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \xrightarrow[\mu = 0.2236]{} \omega_{opt} = 1.0128$$

تکرار اول

$$x^{(1)} = 0 + \frac{1.028}{10}\left(9 - 10x^{(0)} + y^{(0)}\right) = \boxed{0.9115}$$

$$y^{(1)} = 0 + \frac{1.028}{10}\left(7 + x^{(1)} - 10y^{(0)} + 2z^{(0)}\right) = \boxed{0.8012}$$

$$z^{(1)} = 0 + \frac{1.028}{10}\left(6 + 2y^{(1)} - 10z^{(0)}\right) = \boxed{0.7699}$$

تکرار دوم

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \frac{1.028}{10}\left(9 - 10x^{(1)} + y^{(1)}\right) = \boxed{0.9809}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \frac{1.028}{10}\left(7 + x^{(2)} - 10y^{(1)} - 2z^{(1)}\right) = \boxed{0.9540}$$

$$z^{(2)} = z^{(1)} + \frac{1.028}{10}\left(6 + 2y^{(2)} - 10z^{(1)}\right) = \boxed{0.7910}$$

۳) الف) $x^{(k)}$ تقریب برای دستگاه $Ax=b$ ، بردار باقی‌مانده به صورت $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

می‌دانیم که $A = D+L+U$ و فرم ماتریسی روش ژاکوبی برابر است با:

$$\boxed{Dx^{(k+1)} = -(L+U)X^{(k)} + b}$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = b - (L+D+U)x^{(k)} \Rightarrow \boxed{b = r^{(k)} + (L+D+U)x^{(k)}}$$

پس از جایگذاری داریم:

$$Dx^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + (L+D+U)x^{(k)} + r^{(k)}$$

$$\to Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} + r^{(k)} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } D^{-1}]{\text{از چپ در}} \boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}}$$

ب) دوباره مانند قسمت الف رابطه ای که برای b بدست آورده‌ایم را در فرم ماتریسی روش گاوس سیدل جایگذاری می‌کنیم:

$$(L+D)x^{(k+1)} = b - UX^{(k)} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (L+D)x^{(k+1)} = (L+D+U)x^{(k)} - UX^{(k)} + r^{(k)}$$

$$\xrightarrow{(L+D)^{-1}\times} \boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + (L+D)^{-1}r^{(k)}}$$

ج) مانند قسمت های قبلی b را در فرم ماتریسی این روش SOR نیز جایگذاری می‌کنیم:

$$(D+\omega L)x^{(k+1)} = -\left((\omega-1)D + \omega U\right)X^{(k)} + \omega\left(r^{(k)} + (L+D+U)x^{(k)}\right)$$

$$(D+\omega L)x^{(k+1)} = \cancel{-\omega DX^{(k)}} + DX^{(k)} \cancel{- \omega UX^{(k)}} + \omega(L+\cancel{D}+\cancel{U})X^{(k)} + \omega r^{(k)}$$

$$(D+\omega L)x^{(k+1)} = (D+\omega L)X^{(k)} + \omega r^{(k)} \Rightarrow \boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(\omega L+D)^{-1}r^{(k)}}$$

۳) ت) کوچک بودن $\|r^{(K)}\|_2$ لزوما به این معنا نیست که $x^{(K)}$ به جواب دقیق دستگاه نزدیک باشد

زیرا به طور مثال در ماتریس های بدوضع Ill-conditional ، عدد حالت بزرگ است چون

$\|A\|\|A^{-1}\| = K(A)$ بزرگ است و در نتیجه صرفا این که $\|r^{(K)}\|_2$ کوچک باشد نمی‌تواند تضمین کند که

$x^{(K)}$ به جواب اصلی دستگاه نزدیک باشد.

مثال :

$$r^{(K)} = b - Ax^{(K)} \qquad \|A\|_1 = 2/001 \;,\; \|A^{-1}\| = 2001 \Rightarrow K_1(A) = 4004$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1/001\, x_2 = 2 \end{cases} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad X^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ جواب اصلی و دقیق

ولی در تکرار K ام به $X^{(K)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ~~برسیم~~ رسیدیم در نتیجه داریم :

$$r^{(K)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2/001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0/001 \end{bmatrix} \qquad \|r^{(K)}\|_2 = \sqrt{0 + (-10^{-3})^2} = \boxed{10^{-3}}$$

$$X^* - X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \|X^* - X\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

در نتیجه

$$\|r^{(K)}\|_2 << \|X^* - X\|_2$$

که یعنی $\|r^{(K)}\|_2$ بسیار کوچک است اما جواب بدست آمده در تکرار K ام به جواب دقیق دستگاه نزدیک نیست

۴) الف) با توجه به درایه های جدول واضح است که باید $|c|>2$ تا ماتریس A غالب قطری اکید باشد:

$|c|>2: \quad c>2$ و $c<-2$

ب)

پ)

ت) در این مواقع الگوریتم گاوس سیدل سرعت همگرایی بالاتری دارد.

می‌دانیم که به مقدار عددی $-\log \rho(M)$ نرخ همگرایی یک روش عددی با ماتریس تکرار M گفته می‌شود و با R نمایش داده می‌شود:

$R = -\log \rho(M)$

برای مقایسه سرعت همگرایی ۲ روش بصورت کلی می‌توانیم از این معیار استفاده کنیم:

$$M_J = -D^{-1}(L+U) \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-D^{-1} = \begin{bmatrix} -c^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-1} \end{bmatrix} \qquad M_J = \begin{bmatrix} 0 & -c^{-1} & 0 & 0 \\ -c^{-1} & 0 & -c^{-1} & 0 \\ 0 & -c^{-1} & 0 & -c^{-1} \\ 0 & 0 & -c^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$P(M_J) = \det(M_J - \lambda I) \Rightarrow$ ریشه‌های $P(M_J)$ همان مقادیر ویژه M_Jاند

$$\lambda^4 - \frac{1}{c^4} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{c}, \ \lambda_2 = \frac{-1}{c}, \ \lambda_3 = \frac{i}{c}, \ \lambda_4 = \frac{-i}{c}$$

$$\rho(M_J) = \max\left\{ \left|\tfrac{1}{c}\right|, \left|\tfrac{-1}{c}\right|, \left|\tfrac{i}{c}\right|, \left|\tfrac{-i}{c}\right| \right\} = \boxed{c^{-1}}$$

$$M_{GS} = -(L+D)^{-1} U = \begin{bmatrix} 0 & -c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c^{-2} & -c^{-1} & 0 \\ 0 & -c^{-3} & c^{-2} & -c^{-1} \\ 0 & c^{-4} & -c^{-3} & c^{-2} \end{bmatrix}$$

$$P(M_{GS}) = \det(M_{GS} - \lambda I) \Rightarrow -\lambda \cdot (c^{-2} - \lambda)^3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = c^{-2} \end{cases}$$

$$\rho(M_{GS}) = \boxed{c^{-2}}$$

$$\frac{R_{GS}}{R_J} = \frac{-\log \rho(M_{GS})}{-\log \rho(M_J)} = \frac{\log(c^{-2})}{\log(c^{-1})} = \boxed{2}$$

بنابراین سرعت همگرایی روش گاوس سیدل ۲ برابر روش ژاکوبی است (در این مسئله) و پاسخ به c وابسته نمی‌باشد

۵) الگوریتم فشرده روش ژاکوبی به شکل مقابل است:

$$x_i^{(K+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(K)}\right) \qquad i=1,2,\dots,n \quad , \quad K=0,1,2,\dots$$

بنابراین برای دستگاه $Ax=b$ داریم:

$$x_1^{(K+1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(K)} + 0\right) \Rightarrow 5\, x_1^{(K+1)} = \underbrace{x_0^{(K)}}_{0} + x_2^{(K)} + 1 = x_2^{(K)} + 1$$

$$x_2^{(K+1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_1^{(K)} + x_3^{(K)}\right) \Rightarrow 5\, x_2^{(K+1)} = x_1^{(K)} + x_3^{(K)} + 1$$

$\vdots$

$$x_i^{(K+1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_{i-1}^{(K)} + x_{i+1}^{(K)}\right) \Rightarrow \boxed{5\, x_i^{(K+1)} = x_{i-1}^{(K)} + x_{i+1}^{(K)} + 1}$$

الگویی که از فرم فشرده روش ژاکوبی بدست آوردیم دقیقاً همان رابطه‌ای است در سوال ذکر شده است در نتیجه دنباله بردارهای تولید شده در تساوی صدق می‌کنند.

۶) الف) فرض کنید $Au=0$ باشد و u بردار ویژه ماتریس تکرار ژاکوبی (M_J) باشد باید ثابت کنیم که مقدار ویژه متناظر با بردار u $\underline{1}$ است.

$$M_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$M_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$$

بردار v را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ درنظر می‌گیریم:

$$(M_J - \lambda I)\, v = 0$$

دستگاه مقابل را از فرم ماتریسی تبدیل به فرم عادی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\lambda v_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} v_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} v_n = 0 \\ \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} v_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} v_2 - \cdots - \lambda v_n = 0 \end{cases}$$

هر سطر را در $-a_{ii}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} \lambda a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \cdots + a_{1n} v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \cdots + \lambda a_{nn} v_n = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم که $Au=0$ نیز به فرم زیر است:

$$\begin{cases} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1n} u_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \cdots + a_{nn} u_n = 0 \end{cases}$$

با مقایسه این دو دستگاه به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \\ \vdots \\ u_n = \lambda v_n \end{cases}$$

از آنجا که می‌دانیم u و v در واقع یکی هستند در نتیجه $\boxed{\lambda=1}$

طبق فرض داشتیم که u بردار ویژه MJ است پس $u=v$

حال به بررسی قسمت دوم حکم می‌پردازیم:

اگر u بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه 1 باشد و MJ ماتریس تکرار ژاکوبی دستگاه باشد آنگاه $Au=0$

$$(MJ - \lambda I)u = 0 \quad \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & -1 & & \\ & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = 0$$

تبدیل به فرم عادی

$$\begin{cases} -u_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} u_2 - \cdots - u_n \frac{a_{1n}}{a_{11}} = 0 \\ \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} u_1 - \cdots - u_n = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{در } -a_{ii}]{\text{ضرب سطر } i \text{ ام}} \begin{cases} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1n} u_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} u_1 + \cdots + a_{nn} u_n = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{Au = 0}$$

پس دو طرف این قضیه را اثبات کردیم و در نتیجه این حکم برقرار است.

قضیه لازم و کافی: روش تکراری $X^{(k+1)} = MX^{(k)} + c$ همگراست اگر و تنها اگر $\Longleftrightarrow$ $\rho(M) < 1$

در این حالت چون یک مقدار ویژه M برابر با 1 است در نتیجه $\rho(M) \geq 1$ بنابراین $\rho(M) < 1$ برقرار نیست و در نتیجه روش ژاکوبی همگرا نخواهد بود.

۶) ب) برای این که به دقت ... برسیم طبق رابطه ای که در جزوه داشتیم لازم است حداقل K تکرار داشته باشیم:

$$K \geq \frac{\log \epsilon}{\log \rho(M)}$$

$$K \geq \frac{\log 0/1}{\log \rho(M)} = \boxed{\frac{-1}{\log \rho(M)}}$$

حداقل تعداد تکرار مورد نیاز

۷) الف)

ب)

ج)

۸) الف)

ب) با توجه به این که در دستگاه $TX = b$ ماتریس ضرایب یعنی T غالب قطر سطری اکید است در نتیجه روش های ژاکوبی و گاوس سیدل برای این دستگاه همگرا هستند و بعد از تعدادی تکرار تقریب قابل قبولی از جواب اصلی را به ما می دهند.

$|-1| + |-1| < |5|$

ج)