دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل اول: الگوریتم گرام_اشمیت

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

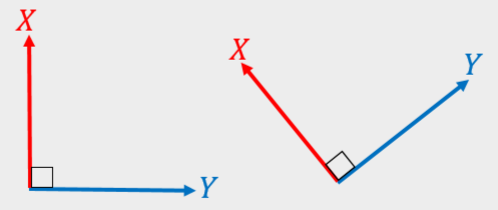
فهرست مطالب

تعریف ۱.۱

دو بردار X و Y را بر هم عمود گوییم در صورتی‌که

$$X^TY = Y^TX = 0$$

در شکل زیر دو بردار عمود بر هم نشان داده شده است.



بردارهای X, Y بر هم عمودند

عمود بودن دو بردار را با نماد $X \perp Y$ نمایش می دهیم (بخوانید X بر Y عمود است).

مثال ۱.۱

نشان دهید دو بردار $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ متعامد هستند(بر هم عمودند).

حل: باید نشان دهیم $Y^TX = X^TY = 0$، داریم :

$$Y^TX = X^TY = [\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}] \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = -2 + 2 = 0$$

قضیه ۱.۱

قضیه فیثاغورث در $\mathbb{R}^n$: فرض کنید دو بردار X, Y بر هم عمود باشند، آنگاه :

$$\|X + Y\|_2^2 = \|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2$$

اثبات : چون دو بردار X, Y بر هم عمودند پس $X^TY = 0$. بنابراین می‌توان نوشت :

$$\|X + Y\|_2^2 = (X + Y)^T(X + Y) = (X^T + Y^T)(X + Y)$$
$$= X^TX + X^TY + Y^TX + Y^TY$$

از آنجاییکه $X^TY = Y^TX = 0$ پس

$$\|X + Y\|_2^2 = X^TX + Y^TY = \|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2$$

نکته ۱.۱

در صورتی که X, Y بر هم عمود نباشند داریم:

$$\|X+Y\|_2^2 = \|X\|_2^2 + 2X^TY + \|Y\|_2^2$$

$$\|X-Y\|_2^2 = \|X\|_2^2 - 2X^TY + \|Y\|_2^2$$

که در واقع تعمیم اتحادهای مربع $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ می‌باشند.

۱ بردارهای متعامد و یکه

تعریف ۱.۲

مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ متعامد است اگر :

$$v_i^T v_j = 0, \qquad i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, ..., n$$

و بعلاوه می‌گوییم متعامد یکّه‌اند اگر :

$$v_i^T v_i = 1, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

مثال ۱.۲

نشان دهید مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ که به صورت زیر تعریف شده‌اند، متعامدند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل: باید نشان دهیم تک تک آن‌ها برهم عمودند. یعنی باید موارد زیر را بررسی کنیم

$$v_1^T v_2 = 0,\ v_1^T v_3 = 0,\ v_2^T v_3 = 0$$

داریم:

$$v_1^T v_2 = \begin{bmatrix} 3, & -6, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} = (3)(1) + (-6)(\frac{3}{2}) + (2)(3) = 3 - 9 + 6 = 0$$

$$v_1^T v_3 = \begin{bmatrix} 3, & -6, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = (3)(-2) + (-6)(-\frac{2}{3}) + (2)(1) = -6 + 4 + 2 = 0$$

$$v_2^T v_3 = \begin{bmatrix} 1, & \frac{3}{2}, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = (1)(-2) + (\frac{3}{2})(-\frac{2}{3}) + (3)(1) = -2 - 1 + 3 = 0$$

مجموعه بردارهای داده شده متعامدند. البته این بردارها یکّه نیستند برای مثال توجه کنید که

$$v_1^T v_1 = \begin{bmatrix} 3, & -6, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)(3) + (-6)(-6) + (2)(2) = 9 + 36 + 4 = 49 \neq 1$$

مثال ۱.۳

نشان دهید مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ متعامد یکّه‌اند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$v_1^T v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = 0$$

$$v_1^T v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 = 0$$

$$v_2^T v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6}, & \frac{\sqrt{2}}{6}, & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{9} + 2\frac{\sqrt{2}}{9} = 0$$

لذا این مجموعه بردار متعامد است، از طرفی

$$v_1^T v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

$$v_2^T v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6}, & \frac{\sqrt{2}}{6}, & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{8}{9} = 1$$

$$v_3^T v_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

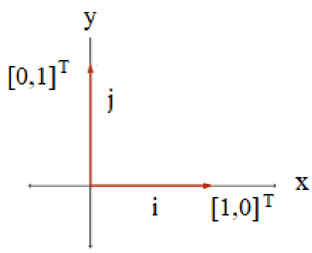
لذا مجموعه داده شده متعامد یکّه است.

۲ بردارهای یکه استاندارد

بردارهای یکه استاندارد در $\mathbb{R}^2$ به صورت زیرند

$$i = [1, 0]^T, \qquad j = [0, 1]^T$$

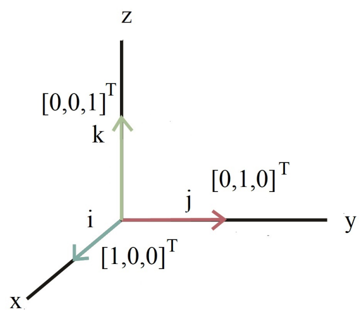
این بردارها در شکل زیر نشان داده شده اند



بردارهای یکه استاندارد در $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیرند

$$i = [۱, ۰, ۰]^T, \qquad j = [۰, ۱, ۰]^T, \qquad k = [۰, ۰, ۱]^T$$

این بردارها در شکل زیر نشان داده شده اند



تعریف ۱.۳

پایه متعامد و یکه: فرض کنید مجموعه $\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ باشد. چنانچه مجموعه این بردارها متعامد یکّه باشد گوییم این پایه یک پایه متعامد و یکه برای $\mathbb{R}^n$ است.

سوال: چرا نیاز است تا یک پایه لزوماً متعامد یکّه باشد؟
پایه‌های متعامد و یکه درواقع از خواص بسیار مناسب و جالبی برخوردارند که باعث استفاده از آن‌ها در زمینه‌های مختلف ریاضی و حتی علوم دیگر می‌شود.

مثال ۱.۴

فرض کنید مجموعه $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ یک پایه متعامد و یکه برای $\mathbb{R}^۳$ باشد. آنگاه بنا به تعریف پایه بودن هر عضو دلخواه $\mathbb{R}^۳$ مثل u را می‌توان برحسب ترکیب خطی این بردارها نوشت. یعنی

$$u = c_۱v_۱ + c_۲v_۲ + c_۳v_۳ \qquad (۱)$$

ضرایب c_iها را محاسبه کنید.

حل: با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق از سمت چپ در $v_۱^T$ داریم

$$v_۱^Tu = c_۱v_۱^Tv_۱ + c_۲v_۱^Tv_۲ + c_۳v_۱^Tv_۳ \qquad (۲)$$

چون مجموعه‌ی داده شده متعامد یکّه است پس داریم

$$v_۱^Tv_۱ = ۱ \ , \ v_۱^Tv_۲ = ۰ \ , \ v_۱^Tv_۳ = ۰$$

لذا با قرار دادن مقادیر فوق در (۲) داریم

$$v_1^T u = c_1 \times 1 + c_2 \times 0 + c_3 \times 0 = c_1$$

پس ضریب c_1 به صورت $\boxed{c_1 = v_1^T u}$ حاصل می‌شود.

برای بدست آوردن v_2 کافی‌ست طرفین (۱) را از چپ در v_2^T ضرب کنیم، بنابراین داریم

$$v_2^T u = c_1 \underbrace{v_2^T v_1}_{0} + c_2 \underbrace{v_2^T v_2}_{1} + c_3 \underbrace{v_2^T v_3}_{0}$$

لذا $\boxed{c_2 = v_2^T u}$ حاصل می‌شود، به طور مشابه $\boxed{c_3 = v_3^T u}$ حاصل می‌شود.

مثال ۱.۵

مجموعه‌ی متعامد یکّه زیر را در نظر بگیرید(خودتان نشان دهید که این مجموعه متعامد یکّه است)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردار $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ را برحسب بردارهای v_1, v_2, v_3 بنویسید.

حل: داریم

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

چون مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ متعامد یکّه است پس ضرایب c_1, c_2, c_3 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$c_1 = v_1^T u = [0, \quad 0, \quad -1] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -6$$

$$c_2 = v_2^T u = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$c_3 = v_3^T u = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -6 v_1 + \frac{9}{\sqrt{2}} v_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_3$$

۳ ماتریس های متعامد

فرض کنید بردارهای متعامد و یکّه v_1 و v_2 و v_3 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه ماتریس ساخته شده با بردارهای v_1 ، v_2 و v_3 مربعی و به صورت زیر است:

$$Q = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

با محاسباتی ساده می‌توان دید که Q در $Q^TQ = I$ و$QQ^T = I$ صدق می‌کند، به چنین ماتریس هایی یک ماتریس متعامد orthogonal می‌گوییم. در واقع تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۱.۴

فرض کنید Q ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد، Q را ماتریسی متعامد گوییم هرگاه

$$Q^TQ = QQ^T = I$$

قضیه ۱.۲

وارون هر ماتریس متعامد چون Q با ترانهاده‌اش برابر است:

$$Q^{-1} = Q^T$$

اثبات: چون $Q^TQ = I$ پس با ضرب Q^{-1} از راست داریم

$$Q^T \underbrace{QQ^{-1}}_{I} = Q^{-1} \Rightarrow Q^T I = Q^{-1} \Rightarrow \boxed{Q^T = Q^{-1}}$$

تذکر ۱.۱

خاصیت $Q^{-1} = Q^T$ خیلی مهم است زیرا محاسبه وارون ماتریس‌ها در عمل مشکل است.

حال که با مزیت مهم یک پایه متعامد (و به خصوص یکّه) آشنا شدیم می‌خواهیم بدانیم وقتی یک پایه $v_1, v_2, \dots, v_n$ داده شده است اما لزوماً متعامد نیست، آیا می‌توان آن را به یک پایه متعامد $q_1, q_2, \dots, q_n$ تبدیل کرد؟ جواب **مثبت** است و این کار توسط الگوریتم گرام - اشمیت (Gram-Schmidt) انجام می‌شود. قبل از معرفی این الگوریتم به برخی مفاهیم اشاره می‌کنیم.

مثال ۱.۶

قبلاً دیدیم که مجموعه بردارهای

$$v_1 = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \\ ۲ \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۳}{۲} \\ ۳ \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} -۲ \\ -\frac{۲}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

متعامدند اما یکّه نمی‌باشند. آن را به مجموعه متعامد یکّه تبدیل کنید.

حل: اگر هر بردار را بر اندازه‌اش یعنی همان نرم ۲ اش تقسیم کنیم یکّه می‌شود. یعنی

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{۱}{\sqrt{(۳)^۲ + (-۶)^۲ + (۲)^۲}} v_1 = \frac{۱}{\sqrt{۴۹}} v_1 = \frac{۱}{۷} v_1 = \frac{۱}{۷} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \frac{۱}{\sqrt{(۱)^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ + (۳)^۲}} v_2 = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۴۹}{۴}}} v_2 = \frac{۲}{۷} v_2 = \frac{۲}{۷} \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۳}{۲} \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2} = \frac{۱}{\sqrt{(-۲)^۲ + (-\frac{۲}{۳})^۲ + (۱)^۲}} v_3 = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۴۹}{۹}}} v_3 = \frac{۳}{۷} v_3 = \frac{۳}{۷} \begin{bmatrix} -۲ \\ -\frac{۲}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموعه متعامد $\{v_1, v_2, v_3\}$ به مجموعه متعامد یکّه $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ تبدیل شد:

$$\hat{v}_1 = \frac{۱}{۷} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \\ ۲ \end{bmatrix}, \; \hat{v}_2 = \frac{۲}{۷} \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۳}{۲} \\ ۳ \end{bmatrix}, \; \hat{v}_3 = \frac{۳}{۷} \begin{bmatrix} -۲ \\ -\frac{۲}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۵

ضرب داخلی دو بردار u و v به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle u, v \rangle = u^T v$$

مثال ۱.۷

اگر $u = [۱, -۱, ۰]^T$ و $v = [-۲, ۲, ۱۰]^T$ آنگاه ضرب داخلی دو بردار را محاسبه کنید.

حل:

$$\langle u, v \rangle = u^T v = [۱, -۱, ۰] \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = -۲ - ۲ + ۰ = -۴$$

نکته ۱.۲

با توجه به نماد ضرب داخلی و تعریف بردارهای عمود، هرگاه

$$\langle u, v\rangle = u^T v = ۰$$

گوییم بردارهای u و v عمودند، یعنی ضرب داخلی‌شان صفر است.

۴ زاویه بین دو بردار

زاویه بین دو بردار دلخواه X, Y از رابطه‌ی

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|_۲ \|Y\|_۲}$$

محاسبه می‌شود. توجه کنید زاویه بین دو بردار عمود $\theta = ۹۰^\circ$ است و واضح است که $X \perp Y$ هرگاه :

$$\theta = ۹۰^\circ \iff \cos\theta = ۰ \iff \langle X, Y\rangle = ۰$$

مثال ۱.۸

زاویه بین دو بردار $X = [۱, ۱, ۱]^T, Y = [۱, ۱, ۰]^T$ را بیابید.

حل : داریم :

$$\|X\|_۲ = \sqrt{۱ + ۱ + ۱} = \sqrt{۳}, \qquad \|Y\|_۲ = \sqrt{۱ + ۱ + ۰} = \sqrt{۲}$$

$$\langle X, Y\rangle = X^T Y = [۱, ۱, ۱]\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۱ + ۱ + ۰ = ۲$$

لذا داریم :

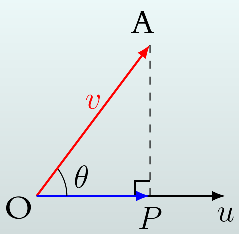
$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|_۲ \|Y\|_۲} = \frac{۲}{\sqrt{۲}\sqrt{۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۶}} \approx ۰/۸۱۶۵$$

در نتیجه زاویه بین دو بردار برابر $\theta = \cos^{-۱}(۰/۸۱۶۵) \approx ۳۵^\circ$ است.

۵ تصویر یک بردار روی بردار دیگر

تعریف ۱.۶

فرض کنید دو بردار u و v داده شده‌اند و بردار v با بردار u زاویه θ بسازد.(شکل زیر را ببینید)



$۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$,

از بردار v عمودی بر بردار u رسم می‌کنیم و محل تقاطع را P نامگذاری می کنیم. آنگاه بردار OP را تصویر v بر u می‌نامیم.

برای بدست آوردن بردار OP برحسب u و v به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\triangle OAP : \cos(\theta) = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{\|OP\|_۲}{\|v\|_۲} \rightarrow \|OP\|_۲ = \|v\|_۲ \cos(\theta) \tag{۳}$$

از طرفی برای ضرب داخلی u و v داریم:

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = \|v\|_۲ \|u\|_۲ \cos(\theta) \tag{۴}$$

از (۳) و (۴) داریم

$$\|OP\|_۲ = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_۲}$$

اکنون برای بدست آوردن بردار تصویر OP کافی است بردار یکّه و هم‌جهت $\frac{u}{\|u\|_۲}$ را در $\|OP\|_۲$ ضرب کنیم:

$$OP = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_۲} . \frac{u}{\|u\|_۲} = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_۲^۲} . u$$

معمولا بردار فوق را با نماد $proj_u(v)$ که مخفف projective به معنای تصویر است نمایش می‌دهند:

$$proj_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_۲^۲} . u$$

مثال ۱.۹

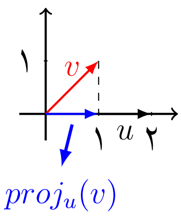
تصویر بردار $v = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را بر بردار $u = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ بدست آورید.

حل: داریم

$$\langle v, u\rangle = v^T u = \begin{bmatrix} ۱, & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۲, \qquad \|u\|_۲^۲ = ۰^۲ + ۲^۲ = ۴$$

$$proj_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_۲^۲} . u = \frac{۲}{۴} u = \frac{۱}{۲} u = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه حاصل شده با شکل زیر مطابقت دارد.



مثال ۱.۱۰

تصویر بردار $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ را بر بردار $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بدست آورید.

حل: داریم

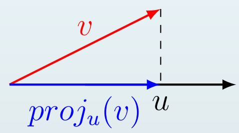
$$\langle v, u\rangle = v^T u = \begin{bmatrix} -1, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2 + 9 = 7, \qquad \|u\|_2^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

پس

$$proj_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_2^2}.u = \frac{7}{13}u = \begin{bmatrix} \frac{14}{13} \\ \\ \frac{21}{13} \end{bmatrix}$$

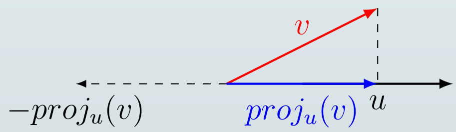
نکته ۱.۳

فرض کنید دو بردار u و v داده شده‌اند. به تصویر بردار v بر u دقت کنید.



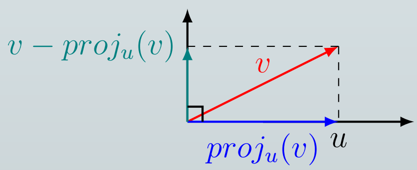
شکل (۱)

بردار $-proj_u(v)$ به صورت زیر است:



شکل (۲)

لذا جمع دو بردار v و $-proj_u(v)$ به صورت زیر است:



شکل (۳)

این از لحاظ هندسی نشان می‌دهد که بردار $v - proj_u(v)$ بر بردار u عمود است. البته این نتیجه را می‌توان به صورت جبری نیز اثبات کرد؛ زیرا

$$\begin{aligned}
\langle v - proj_u(v), u\rangle &= \langle u, v - proj_u(v)\rangle = u^T(v - proj_u(v)) \\
&= u^T v - u^T proj_u(v) = u^T v - u^T(\frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|_2^2}).u \\
&= u^T v - u^T(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|_2^2}).u = u^T v - u^T(\frac{u^T v}{\|u\|_2^2}).u \\
&= u^T v - (\frac{u^T v}{\|u\|_2^2})u^T u \ ; \ u^T u = \|u\|_2^2 \\
&= u^T v - (\frac{u^T v}{\|u\|_2^2}).\|u\|_2^2 = u^T v - u^T v = 0
\end{aligned}$$

بنابراین ثابت کردیم که

$$v - proj_u(v) \perp u$$

مثال ۱.۱۱

قبلا دیدیم که تصویر بردار $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بر $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. اکنون نشان دهید که

$$v - proj_u(v) \perp u$$

حل: داریم $proj_u(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و

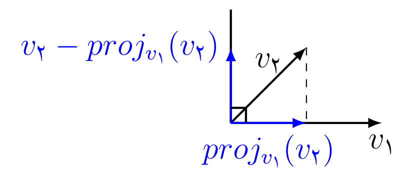
$$v - proj_u(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle v - proj_u(v), u\rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\rangle = \begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)(2) + (1)(0) = 0$$

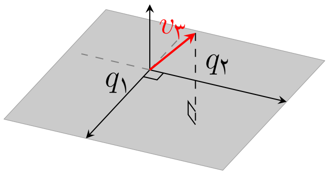
لذا $v - proj_u(v)$ بر u عمود است.

۶ الگوریتم گرام_اشمیت در حالت خاص

اکنون الگوریتم گرام_اشمیت را در حالت خاص برای سه بردار v_1و v_2 و v_3 توضیح می‌دهیم. فرض کنید v_1و v_2 و v_3، سه بردار مستقل خطی باشند، می‌خواهیم مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ را به مجموعه متعامد یکّه $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3\}$ تبدیل کنیم. ابتدا دو بردار v_1و v_2 را در نظر می‌گیریم



انتخاب می‌کنیم $q_1 = v_1$ و $q_2 = v_2 - proj_{v_1}(v_2)$. اکنون می‌دانیم که q_2 عمود بر q_1 است. حال بردار v_3 را نسبت به بردارهای q_1 و q_2 در نظر می‌گیریم.



می‌خواهیم با داشتن بردار v_3 برداری مثل q_3 بدست آوریم که بر q_1 و q_2 عمود باشد. در این صورت مجموعه $\{q_1, q_2, q_3\}$ متعامد خواهد بود و کار تمام است.

مانند آنچه برای v_1 و v_2 دیدیم کافی است بردار q_3 به صورت زیر انتخاب شود:

$$q_3 = v_3 - (\text{تصویر بردار } v_3 \text{ بر صفحه شامل } q_1, q_2) \quad (۵)$$

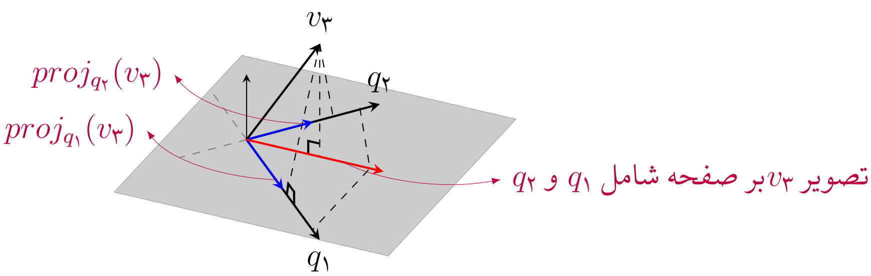
امّا تصویر بردار v_3 بر صفحه شامل q_1, q_2 را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

(۱) ابتدا تصویر v_3 را بر q_1, q_2 به طور جداگانه محاسبه می کنیم یعنی $proj_{q_1}(v_3)$ و $proj_{q_2}(v_3)$ را بدست می‌آوریم.

(۲) سپس این دو تصویر بدست آمده را جمع می‌کنیم یعنی

$$proj_{q_1}(v_3) + proj_{q_2}(v_3)$$

این کار منطقی است (به شکل زیر توجه نمایید)



واضح است که بنابر جمع جبری بردارها داریم

$$\text{تصویر بردار } v_3 \text{ بر صفحه شامل } q_1, q_2 = proj_{q_1}(v_3) + proj_{q_2}(v_3) \quad (۶)$$

با قرار دادن (۵) در (۶) داریم

$$q_3 = v_3 - proj_{q_1}(v_3) - proj_{q_2}(v_3)$$

لذا مجموعه‌ی $\{q_1, q_2, q_3\}$ که متعامد است را بدست می‌آوریم.

برای اینکه مجموعه‌ی اخیر یکّه نیز باشد کافی است هر بردار را بر نرمش تقسیم کنیم تا مجموعه متعامد یکّه

$$\left\{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3\right\} = \left\{\frac{q_1}{\|q_1\|_2}, \frac{q_2}{\|q_2\|_2}, \frac{q_3}{\|q_3\|_2}\right\}$$

حاصل شود. بنابر این الگوریتم گرام‌ـاشمیت برای سه بردار v_1و v_2 و v_3 به صورت زیر خلاصه می‌شود:

ورودی : $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی

۱) $q_1 = v_1, \qquad \hat{q}_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|_2}$

۲) $q_2 = v_2 - proj_{q_1}(v_2), \qquad \hat{q}_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|_2}$

۳) $q_3 = v_3 - proj_{q_1}(v_3) - proj_{q_2}(v_3), \qquad \hat{q}_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|_2}$

مثال ۱.۱۲

مجموعه بردارهای زیر در $\mathbb{R}^{۴}$ مستقل خطی است

$$v_{۱} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix},\ v_{۲} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۵ \\ ۸ \end{bmatrix},\ v_{۳} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۱ \\ ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

آن را به کمک الگوریتم گرام_اشمیت به یک مجموعه بردارهای متعامد و یکه تبدیل کنید.

حل:

$$۱)\ q_{۱} = v_{۱} = \begin{bmatrix} ۱, & ۲, & ۰, & ۳ \end{bmatrix}^T$$

$$\|q_{۱}\|_{۲} = \sqrt{۱+۴+۰+۹} = \sqrt{۱۴} \Rightarrow \hat{q}_{۱} = \frac{q_{۱}}{\|q_{۱}\|_{۲}} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \\ ۰ \\ \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \end{bmatrix}$$

$$۲)\ q_{۲} = v_{۲} - proj_{q_{۱}}(v_{۲}) = v_{۲} - \frac{\langle v_{۲}, q_{۱} \rangle}{\|q_{۱}\|_{۲}^{۲}} q_{۱}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} ۴, & ۰, & ۵, & ۸ \end{bmatrix}^T - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} ۴, & ۰, & ۵, & ۸ \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} ۱, & ۲, & ۰, & ۳ \end{bmatrix}^T \right\rangle}{۱۴} q_{۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۴, & ۰, & ۵, & ۸ \end{bmatrix}^T - \frac{۴+۰+۰+۲۴}{۱۴} \begin{bmatrix} ۱, & ۲, & ۰, & ۳ \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} ۴, & ۰, & ۵, & ۸ \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} ۲, & ۴, & ۰, & ۶ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۲, & -۴, & ۵, & ۲ \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\|q_{۲}\|_{۲} = \sqrt{۴+۱۶+۲۵+۴} = \sqrt{۴۹} = ۷ \to \hat{q}_{۲} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} \\ -\frac{۴}{۷} \\ \frac{۵}{۷} \\ \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}$$

$$۳)\ q_{۳} = v_{۳} - proj_{q_{۱}}(v_{۳}) - proj_{q_{۲}}(v_{۳})$$

$$= v_{۳} - \frac{\langle v_{۳}, q_{۱} \rangle}{\|q_{۱}\|_{۲}^{۲}} q_{۱} - \frac{\langle v_{۳}, q_{۲} \rangle}{\|q_{۲}\|_{۲}^{۲}} q_{۲}$$

$$q_3 = [8,\ 1,\ 5,\ 6]^T - \frac{\left\langle [8,\ 1,\ 5,\ 6]^T, [1,\ 2,\ 0,\ 3]^T \right\rangle}{14}[1,\ 2,\ 0,\ 3]^T$$
$$- \frac{\left\langle [8,\ 1,\ 5,\ 6]^T, [2,\ -4,\ 5,\ 2]^T \right\rangle}{49}[2,\ -4,\ 5,\ 2]^T$$
$$= [8,\ 1,\ 5,\ 6]^T - \frac{8+2+0+18}{14}[1,\ 2,\ 0,\ 3]^T$$
$$- \frac{16-4+25+12}{49}[2,\ -4,\ 5,\ 2]^T$$
$$= [8,\ 1,\ 5,\ 6]^T - 2[1,\ 2,\ 0,\ 3]^T - [2,\ -4,\ 5,\ 2]^T = [4,\ 1,\ 0,\ -2]^T$$
$$\|q_3\|_2 = \sqrt{16+1+0+4} = \sqrt{21} \to \hat{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموعه متعامد و یکه زیر به دست می آید

$$\hat{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \qquad \hat{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \qquad \hat{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}$$

تذکر ۱.۲

دلیل الزام مستقل خطی بودن بردار های ورودی الگوریتم گرام_اشمیت : اگر بردار ها مستقل خطی نباشند از مرحله ای به بعد در الگوریتم تقسیم بر صفر رخ می دهد و کل الگوریتم متوقف می شود. در واقع این الگوریتم هر یک از بردار ها ورودی را به ترتیب نسبت بردار های قبلی متعامد می کند و این کار را با جابجایی آن بردار و عمود ساختن آن بر $Span$ بردار های قبلی انجام می دهد، حال اگر بردار های ورودی مستقل خطی نباشند، یکی از بردار ها در $Span$ بردار های پیش از خود قرار خواهد گرفت و الگوریتم گرام_اشمیت بردار صفر تولید خواهد کرد و این باعث توقف الگوریتم خواهد شد.

۷ الگوریتم گرام_اشمیت در حالت کلی

الگوریتم گرام_اشمیت برای بردارهای $v_1, v_2, ..., v_n$ به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\text{ورودی : } \{v_1, v_2, ..., v_n\} \text{ مستقل خطی} \\
&q_1 = v_1, \qquad\qquad \hat{q}_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|_2} \\
&q_2 = v_2 - proj_{q_1}(v_2), \qquad\qquad \hat{q}_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|_2} \\
&q_3 = v_3 - proj_{q_1}(v_3) - proj_{q_2}(v_3), \qquad\qquad \hat{q}_3 = \frac{q_3}{\|q_3\|_2} \\
&\vdots \\
&q_n = v_n - proj_{q_1}(v_n) - proj_{q_2}(v_n) - ... - proj_{q_{n-1}}(v_n), \; \hat{q}_n = \frac{q_n}{\|q_n\|_2}
\end{aligned}
$$

بنابراین در حالت کلی داریم

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} proj_{q_i}(v_j), \quad j = 1, 2, ..., n$$

تمرین ۱.۱

الگوریتم گرام_اشمیت را در نرم افزار متلب پیاده کنید.

۸ تجزیه QR

تعریف ۱.۷

فرض کنید ماتریس A ، $n \times n$ ، باشد. می‌گوییم $A = QR$ یک تجزیه QR (QR Decomposition) ماتریس A است اگر R ماتریسی بالا مثلثی و Q ماتریسی متعامد باشد. یعنی

$$A = QR, \qquad \text{ماتریسی } n \times n \; R, \qquad \text{ماتریسی } n \times n \; Q$$

تذکر ۱.۳

در تجزیه QR ماتریس Q مربعی است و $Q^TQ = QQ^T = I$.

۹ تجزیه QR با الگوریتم گرام_اشمیت

اکنون آماده‌ایم تا محاسبه‌ی تجزیه QR را با الگوریتم گرام_اشمیت بیان کنیم. دیدیم که

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} proj_{q_i}(v_j), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

با توجه به تعریف تصویر بردار به بردار دیگر داریم

$$proj_{q_i}(v_j) = \frac{\langle v_j, q_i \rangle}{\|q_i\|_2^2} q_i = \frac{q_i^T v_j}{\|q_i\|_2^2} q_i$$

لذا

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i^T v_j}{\|q_i\|_2^2} q_i$$

از طرفی $\|q_i\|_2^2 = q_i^T q_i$ پس

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i^T v_j}{q_i^T q_i} q_i \qquad (7)$$

و اگر فرض کنیم بردارهای ورودی $v_1, ..., v_n$ ستون ماتریس $A_{n\times n}$ باشند و ستون‌های A را با $a_1, ..., a_n$ نمایش دهیم یعنی

$$a_1 = v_1, a_2 = v_2, ..., a_n = v_n$$

از (۷) داریم:

$$\boxed{q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i^T a_j}{q_i^T q_i} q_i, \qquad j = 1, 2, ..., n} \qquad (8)$$

۱.۹ شرح تجزیه QR برای یک ماتریس 3×3

حال برای محاسبه تجزیه QR از رابطه‌ی (۸) ابتدا حالت خاص $n = 3$ فرض می‌کنیم.
یعنی :

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$$

بعلاوه ضریب q_i در سری را یعنی $\frac{q_i^T a_j}{q_i^T q_i}$ را با r_{ij} نمایش می‌دهیم پس

$$q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i, , \qquad j = 1, 2, 3.$$

پس

$$q_1 = a_1 \qquad (j = 1)$$
$$q_2 = a_2 - r_{12} q_1 \qquad (j = 2)$$
$$q_3 = a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 \qquad (j = 3)$$

بنابراین

$$\begin{cases} a_1 = q_1 \\ a_2 = q_2 + r_{12}q_1 \\ a_3 = q_3 + r_{13}q_1 + r_{23}q_2 \end{cases} \tag{۹}$$

اکنون اعداد r_{ij} را درایه‌های ماتریس بالامثلثی $\hat{R}$ در نظر می‌گیریم که قطر واحد است یعنی:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بعلاوه فرض می‌کنیم $\hat{Q}$ ماتریسی باشد که ستون‌هایش q_1 ، q_2 و q_3 می‌باشد. یعنی $\hat{Q} = [q_1, q_2, q_3]$. با توجه به رابطه (۹) می‌توان نوشت :

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3] = [q_1,\ q_2 + r_{12}q_1,\ q_3 + r_{13}q_1 + r_{23}q_2] \tag{۱۰}$$

از طرفی حاصل $\hat{Q}\hat{R}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{Q}\hat{R} = \hat{Q}\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{Q}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \hat{Q}\begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \hat{Q}\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 \end{bmatrix}\right] \tag{۱۱}$$

امّا

$$\begin{cases} \hat{Q}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q_1 \times 1 + q_2 \times 0 + q_3 \times 0 = q_1 \\ \hat{Q}\begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = q_1 \times r_{12} + q_2 \times 1 + q_3 \times 0 = q_2 + r_{12}q_1 \\ \hat{Q}\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 \end{bmatrix} = q_3 + r_{13}q_1 + r_{23}q_2 \end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر محاسبه شده‌ی فوق در (۱۱) داریم:

$$\hat{Q}\hat{R} = [q_1,\ q_2 + r_{12}q_1,\ q_3 + r_{13}q_1 + r_{23}q_2] \tag{۱۲}$$

با مقایسه (۱۰) و (۱۲) داریم که $A = \hat{Q}\hat{R}$.
در این تجزیه همان‌طور که دیدیم $\hat{R}$ ماتریس بالامثلثی و قطر واحد است. امّا ستون‌های $\hat{Q}$ تنها متعامدند و یکّه نمی‌باشند، چون از q_iها استفاده کردیم نه $\hat{q}_i$ ها. اکنون اگر بنویسیم :

$$A = \hat{Q}\hat{R} = \hat{Q}I\hat{R} = \underbrace{\hat{Q}D^{-1}}_{Q}\underbrace{D\hat{R}}_{R} = QR$$

که در آن D ماتریس قطری به صورت زیر است:

$$D = \begin{bmatrix} \|q_1\|_2 & 0 & 0 \\ 0 & \|q_2\|_2 & 0 \\ 0 & 0 & \|q_3\|_2 \end{bmatrix}$$

آنگاه Q ماتریسی ایزومتری خواهد بود زیرا اولا:

$$Q^TQ = (\hat{Q}D^{-1})^T(\hat{Q}D^{-1}) \overset{D=D^T}{=} D^{-1}\hat{Q}^T\hat{Q}D^{-1} \tag{13}$$

از طرفی

$$D^2 = \begin{bmatrix} \|q_1\|_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|q_2\|_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|q_3\|_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}^T\hat{Q} = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 & q_1^Tq_3 \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 & q_2^Tq_3 \\ q_3^Tq_1 & q_3^Tq_2 & q_3^Tq_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \|q_1\|_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|q_2\|_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|q_3\|_2^2 \end{bmatrix} = D^2 \tag{14}$$

در نتیجه با قرار دادن (۱۴) در (۱۳) داریم $Q^TQ = D^{-1}D^2D^{-1} = I$. لذا Q ماتریسی ایزومتری است. بعلاوه ماتریس R به صورت بالامثلثی زیر

$$R = D\hat{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{11}r_{12} & r_{11}r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{22}r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

است که در آن فرض شده است :

$$r_{11} = \|q_1\|_2, \qquad r_{22} = \|q_2\|_2, \qquad r_{33} = \|q_3\|_2$$

۱۰ الگوریتم گرام-اشمیت برای تجزیه QR در حالت کلی

خودتان: استدلالی که برای $n = 3$ برای تجزیه QR ماتریس A آورده شد را به حالت $n \times n$ تعمیم دهید و نشان دهید به صورت زیر است :

تجزیه QR فرض کنید ماتریس $A = [a_1, \ a_2, \dots, a_n]$ داده شده است. اگر a_iها مستقل خطی باشند الگوریتم زیر یک تجزیه QR به دست می‌آورد.

گام (۱)

$$\begin{aligned}
&q_1 = a_1, \qquad r_{11} = \|q_1\|_2 \\
&q_2 = a_2 - r_{12}q_1, \qquad r_{12} = \frac{q_1^T a_2}{\|q_1\|_2^2}, \qquad r_{22} = \|q_2\|_2 \\
&q_3 = a_3 - r_{13}q_1 - r_{23}q_2, \qquad r_{13} = \frac{q_1^T a_3}{\|q_1\|_2^2}, \qquad r_{23} = \frac{q_2^T a_3}{\|q_2\|_2^2}, \quad r_{33} = \|q_3\|_2 \\
&\vdots \\
&q_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}q_i, \qquad r_{ij} = \frac{q_i^T a_j}{\|q_i\|_2^2}, \qquad r_{jj} = \|q_j\|_2 \\
&\vdots \\
&q_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} r_{in}q_i, \qquad r_{in} = \frac{q_i^T a_n}{\|q_i\|_2^2}, \quad r_{nn} = \|q_n\|_2
\end{aligned}$$

گام (۲) قرار دهید:

$$D = diag(r_{11},\ r_{22}, \cdots, r_{nn})$$

گام (۳) قرار دهید :

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & 1 & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = D\hat{R}$$

$$Q = [q_1, \quad q_2, \quad \cdots, \quad q_n] \times D^{-1}$$

خروجی الگوریتم تجزیه QR ماتریس A است و Q و R به قسمی هستند که $A = QR$. به طوری که Q متعامد و R بالا مثلثی قطر واحد است.

مثال ۱.۱۳

تجزیه QR ماتریس داده شده را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$a_1 = [1,\ -1,\ 3]^T\ ,\ a_2 = [3,\ 1,\ 4]^T\ ,\ a_3 = [3,\ 2,\ 5]^T$$

گام (۱) :

$$q_۱ = a_۱ = [۱, -۱, ۳]^T \ , \ r_{۱۱} = \|q_۱\|_۲ = \sqrt{۱۱} = ۳٫۳۱۶۶$$
$$r_{۱۲} = \frac{q_۱^T a_۲}{\|q_۱\|_۲^۲} = \frac{۱۴}{۱۱} = ۱٫۲۷۲۷$$
$$q_۲ = a_۲ - r_{۱۲} q_۱ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} - ۱٫۲۷۲۷ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱٫۷۲۷۳ \\ ۲٫۲۷۲۷ \\ ۰٫۱۸۱۸ \end{bmatrix}$$
$$r_{۲۲} = \|q_۲\|_۲ = ۲٫۸۶۰۴$$

$$r_{۱۳} = \frac{q_۱^T a_۳}{\|q_۱\|_۲^۲} = \frac{۱۶}{۱۱} = ۱٫۴۵۴۵$$
$$r_{۲۳} = \frac{q_۲^T a_۳}{\|q_۲\|_۲^۲} = \frac{۱۰٫۶۳۶۴}{۸٫۱۸۱۸} = ۱٫۳$$
$$q_۳ = a_۳ - r_{۱۳} q_۱ - r_{۲۳} q_۲ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} - ۱٫۴۵۴۵ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} - ۱٫۳ \begin{bmatrix} ۱٫۷۲۷۳ \\ ۲٫۲۷۲۷ \\ ۰٫۱۸۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰٫۷۰۰۰ \\ ۰٫۵۰۰۰ \\ ۰٫۴۰۰۰ \end{bmatrix}$$
$$r_{۳۳} = \|q_۳\|_۲ = ۰٫۹۴۸۷$$

گام (۲):

$$D = diag(۳٫۳۱۶۶, \ ۲٫۸۶۰۴, \ ۰٫۹۴۸۷), \ D^{-۱} = diag(۰٫۳۰۱۵, \ ۰٫۳۴۹۶, \ ۱٫۰۵۴۱)$$

گام (۳):

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱٫۲۷۲۷ & ۱٫۴۵۴۵ \\ ۰ & ۱ & ۱٫۳۰۰۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \ R = D\hat{R} = \begin{bmatrix} ۳٫۳۱۶۶ & ۴٫۲۲۱۲ & ۴٫۸۲۴۲ \\ ۰ & ۲٫۸۶۰۴ & ۳٫۷۱۸۵ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۹۴۸۷ \end{bmatrix}$$
$$Q = [q_۱, \ q_۲, \ q_۳] \times D^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰٫۳۰۱۵ & ۰٫۶۰۳۹ & -۰٫۷۳۷۹ \\ -۰٫۳۰۱۵ & ۰٫۷۹۴۶ & ۰٫۵۲۷۰ \\ ۰٫۹۰۴۵ & ۰٫۰۶۳۶ & ۰٫۴۲۱۶ \end{bmatrix}$$

می‌توان دید که

$$QR = \begin{bmatrix} ۱٫۰۰۰۰ & ۳٫۰۰۰۰ & ۳٫۰۰۰۰ \\ -۱٫۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۰ & ۲٫۰۰۰۰ \\ ۳٫۰۰۰۰ & ۴٫۰۰۰۰ & ۵٫۰۰۰۰ \end{bmatrix} = A$$
$$Q^TQ = \begin{bmatrix} ۱٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ \\ ۰٫۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ \\ ۰٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۰ \end{bmatrix} = I_۳$$
$$QQ^T = \begin{bmatrix} ۱٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ \\ ۰٫۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ \\ ۰٫۰۰۰۰ & ۰٫۰۰۰۰ & ۱٫۰۰۰۰ \end{bmatrix} = I_۳$$

توجه کنید که چون ماتریس A مربعی است آنگاه الگوریتم گرام‌ـاشمیت ، تجزیه QR را به دست می‌آورد پس Q ماتریسی متعامد خواهد بود.

تمرین ۱.۲

محاسبه ی تجزیه QR با الگوریتم گرام_اشمیت را در نرم افزار متلب و پایتون پیاده کرده و بر روی ماتریس داده شده اعمال نمایید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

در اینجا فصل اول را با چند دستور از نرم افزار های متلب و پایتون به خاتمه می رسانیم.

یکه سازی(نرمال سازی) بردار :

```
Matlab
 V  [3;-6;9];
 V/norm (V, 2)
ans =
0.2673
-0.5345
0.8018






python
import numpy as np

V = np.array([3, -6, 9])
normalized_V = V / np.linalg.norm(V, 2)

print(normalized_V)
Output:
[ 0.26726124 -0.53452248  0.80178373]
```

تصویر بردار v بر بردار u :

```
Matlab


v[-1;3];
 u= [2;3];
 p= (dot(v,u)/norm(u)^2)*u

p =
1.0769
1.6154

```

```
    python
    import numpy as np

    v = np.array([-1, 3])
    u = np.array([2, 3])
    p = (np.dot(v, u) / np.linalg.norm(u)**2) * u

    print(p)
    Output:
    [1.07692308 1.61538462]
```

تجزیه QR:

```
Matlab


 A=[1 3 3;-1 1 2;3 4 5];
 [Q,R]=qr(A)

Q =

-0.3015   -0.6039   -0.7379
 0.3015   -0.7946    0.5270
-0.9045   -0.0636    0.4216


R =

-3.3166   -4.2212   -4.8242
      0   -2.8604   -3.7185
      0         0    0.9487

 Q*R

ans =

 1.0000    3.0000    3.0000
-1.0000    1.0000    2.0000
 3.0000    4.0000    5.0000





python
import numpy as np

A = np.array([[1, 3, 3], [-1, 1, 2], [3, 4, 5]])
Q, R = np.linalg.qr(A)
```

```
print("Q = ")
print(Q)
print("\nR = ")
print(R)
print("\nQ*R = ")
print(np.dot(Q, R))


Output:
Q =
[[-0.30151134 -0.60302269 -0.73786479]
 [ 0.30151134 -0.79471777  0.52764504]
 [-0.90453403 -0.06324555  0.42163617]]

R =
[[-3.31662479 -4.22121224 -4.82462113]
 [ 0.          -2.86038786 -3.71848736]
 [ 0.           0.           0.9486833 ]]

Q*R =
[[ 1.   3.   3.]
 [-1.   1.   2.]
 [ 3.   4.   5.]]
```

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Accuracy .... دقت
Algorithm .... الگوریتم
Approximation .... تقریب
Array .... آرایه

B

Backward substitution .... جایگزینی پسرو

C

Characteristic equation .... معادله مشخصه
Characteristic polynomial .... چندجمله‌ای مشخصه
Column .... ستون
Column vector .... بردار ستونی
convergence .... همگرایی
Convergent matrix .... مارتیس همگرا

D

Decomposition .... تجزیه
Determinant .... دترمینان
Diagonal .... قطری
Dimension .... بعد

E

Euclidean norm .... نرم اقلیدسی
Eigenvalue .... مقدار ویژه
Eigenvector .... بردار ویژه
Elementary row operations .... اعمال سطری مقدماتی

F

Factorization .... تجزیه
Fundamental theorem of algebra .... قضیه اساسی جبر
Finite .... متناهی
Frobenius norm .... نرم فروبنیوس

G

Gram-Schmidt process .... فرآیند گرام_اشمیت

H

Hermitian .... هرمیتی
Hilbert matrix .... ماتریس هیلبرت

I

Identity .... همانی
Inverse .... وارون یا معکوس
Invertible .... وارون پذیر
Iteration .... تکرار

L

Linear system .... دستگاه خطی
Linearly independent .... مستقل خطی
Lower triangular .... پایین مثلثی

M

Matrix .... ماتریس
Method .... روش
Minor .... کهاد

N

Nonsingular .... ناتکین (وارون پذیر)
Norm .... نرم
Norm of vector .... نرم یک بردار
Norm of matrix .... نرم یک ماتریس

O

Orthogonal .... متعامد

P

Permutation .... جایگشت

Positive definite .... معین مثبت

R

Radius .... شعاع همگرایی
Rank .... رتبه
Row .... سطر
Row vector .... بردار سطری

S

Scalar .... اسکالر
Symmetric .... متقارن
Singular .... منفرد یا تکین
Spectral .... طیفی
Spectral radius .... شعاع طیفی
Step .... گام

T

Trace .... اثر
Transpose .... ترانهاده
Triangular .... مثلثی
Tridiagonal .... سه قطری

U

Upper triangular .... بالا مثلثی

V

Vector .... بردار
Vector space .... فضای برداری

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آرایه ... Array
اثر ... Trace
اسکالر ... Scalar
اعمال سطری مقدماتی ... Elementary row operations
الگوریتم ... Algorithm

ب

بالا مثلثی ... Upper triangular
بردار ... Vector
بردار ستونی ... Column vector
بردار سطری ... Row vector
بردار ویژه ... Eigenvector
بعد ... Dimension

پ

پایین مثلثی ... Lower triangular

ت

تجزیه ... Decomposition
ترانهاده ... Transpose
تقریب ... Approximation
تکرار ... Iteration

ج

جایگزینی پسرو ... Backward substitution
جایگشت ... Permutation

چ

چندجمله‌ای مشخصه ... Characteristic polynomial

د

دترمینان ... Determinant
دستگاه خطی ... Linear system
دقت ... Accuracy

ر

رتبه ... Rank
روش ... Method

س

ستون ... Column
سطر ... Row
سه قطری ... Tridiagonal

ش

شعاع طیفی ... Spectral radius
شعاع همگرایی ... Radius

ط

طیفی ... Spectral

ف

فرآیند گرام‑اشمیت ... Gram-Schmidt process
فضای برداری ... Vector space

ق

قضیه اساسی جبر ... Fundamental theorem of algebra
قطری ... Diagonal

ک

کهاد ... Minor

گ

گام ... Step

م

ماتریس .... Matrix
ماتریس هیلبرت .... Hilbert matrix
مارتیس همگرا .... Convergent matrix
متعامد .... Orthogonal
متقارن .... Symmetric
متناهی .... Finite
مثلثی .... Triangular
مستقل خطی .... Linearly independent
معادله مشخصه .... Characteristic equation
معین مثبت .... Positive definite
مقدار ویژه .... Eigenvalue
منفرد یا تکین .... Singular

ن

ناتکین (وارون پذیر) .... Nonsingular
نرم .... Norm
نرم اقلیدسی .... Euclidean norm
نرم فروبنیوس .... Frobenius norm
نرم یک بردار .... Norm of vector
نرم یک ماتریس .... Norm of matrix

و

وارون پذیر .... Invertible
وارون یا معکوس .... Inverse

ه

هرمیتی .... Hermitian
همانی .... Identity
همگرایی .... convergence

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

جبرخطی عددی

(کارشناسی)

فصل اول: الگوریتم گرام‌ـ‌اشمیت

مدرس: مهدی دهقان

دانشکده
ریاضی و علوم کامپیوتر

ترم دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳