גיאומטריה לא אוקלידית

|  |  |
| --- | --- |
| פרופסור אילון סולן | גיאומטריה  לא אוקלידית |

אילון סולן

© כל הזכויות שמורות למחבר. אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחד כל חלק שהוא מהחומר שבחוברת זו. שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בחוברת זו אסור בהחלט אלא ברשות

מקורה של המילה גיאומטריה הוא מיוונית. "גיאו" ביוונית משמעו "ארץ" ו-"מֶטְרִיָּה" משמעו "מדידה". מטרת הגיאומטריה היא לתת תיאור של הארץ ולאפשר למדוד דברים שונים, כמו אורכים וזוויות.

האדם הראשון שלמד את הנושא בצורה מסודרת היה אוקלידס, שנולד בערך בשנת 371 לפני הספירה בעיר אלכסנדריה שבמצרים ונפטר בה בערך בשנת 285 לפני הספירה. אוקלידס פיתח את הגיאומטריה המישורית שנלמדת בבית הספר, ונקראת על שמו "הגיאומטריה האוקלידית". המישור מורכב מנקודות, בין כל שתי נקודות ניתן להעביר ישר, וכל שני ישרים הם מקבילים או שהם נחתכים בנקודה אחת. זווית בין שני ישרים היא כמות הסיבוב הדרושה כדי שאחד הישרים יגיע למקומו של הישר השני, כשציר הסיבוב הוא נקודת החיתוך בין שני הישרים. כמו כן, סכום הזוויות בכל משולש הוא 180 מעלות.



אוקלידס. מקור: ויקיפדיה. שימוש חופשי.

הגיאומטריה שפיתח אוקלידס מתאימה לעולם שטוח. אבל העולם שבו אנו חיים אינו שטוח אלא כדורי, וכבר בתקופה של אוקלידס ידעו זאת. עם זאת, העולם גדול עד מאוד, וכאשר אנחנו מסתכלים על העולם שמסביבנו הוא כמעט שטוח. הרצפה שבביתנו שטוחה, ושטחים שבהם בונים בניינים הם שטוחים. לכן למרות שהגיאומטריה המישורית אינה מתארת בדיוק את העולם, ניתן להשתמש בה בחיי היומיום.

עם זאת, כאשר רוצים לתכנן נתיבי טיסה או מנהרות ארוכות, יש לקחת בחשבון שהעולם אינו מישורי אלא כדורי. לכן יש לבדוק את התכונות של גיאומטריה כדורית. הגיאומטריה המישורית והגיאומטריה הכדורית אינן הגיאומטריות האפשריות היחידות. כיצד תיראה הגיאומטריה של אנשים החיים בעולם הנראה כצמיג? והאם יכולים להיות מישורים שמכילים מספר סופי של נקודות?

בחוברת זו נגדיר את מושג המישור ונכיר מישורים שאינן המישור האוקלידי. בפרק 1 נגדיר את מושג הנקודה והישר, ונבדוק מה הופך אוסף של נקודות וישרים למישור. בפרק 2 נחקור מישורים סופיים - מישורים המורכבים ממספר סופי של נקודות וישרים. בפרק 3 נחקור את המישור הכדורי ונעמוד על מספר הבדלים בין המישור האוקלידי והמישור הכדורי.

# 1. מה הוא מישור

מישור מורכב מנקודות, ועוברים בו ישרים רבים. אך מה היא נקודה ומה הוא ישר? אוקלידס הגדיר נקודה כ-"דבר שלא ניתן לחלק אותו" וישר כ-"קו שעליו נמצאות נקודות". הגדרות אלה אינן מסבירות מה הם נקודה וישר. בסעיף זה נגדיר את מושג המישור ונביא דוגמאות למישורים.

# 1.1. נקודות וישרים

נתחיל בדוגמה של המישור האוקלידי. לפנינו דף נייר. כל נקודה על הדף היא "נקודה" במישור, וכל ישר שניתן לצייר בעזרת סרגל הוא "ישר". באופן פורמלי, כל נקודה ניתנת לייצוג על ידי הקואורדינטות שלה: נקודה היא זוג של מספרים ממשיים (x,y). בתרשים 1 תיארנו מספר נקודות במישור האוקלידי. ישר מוגדר על ידי שוויון לינארי. הישר y=x הוא אוסף כל הנקודות במישור ששתי הקואורדינטות שלהן שוות, והישר y=2x+1 הוא אוסף כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את השוויון y=2x+1. שני ישרים אלה מופיעים אף הם בתרשים 1.

ציר x

ציר y

הישר y=x

הישר y=2x+1

הנקודה (3,1)

הנקודה (-2,1/2)

הנקודה (3,1)

תרשים 1: המישור האוקלידי: שלוש נקודות ושני ישרים.

נביט עכשיו בדוגמה נוספת של נקודות וישרים. אוסף הנקודות יהיה כמו במישור האוקלידי, אך ישר נתון על ידי מעגל, ראו תרשים 2.

ציר x

ציר y

הישר (y-2)2+(x-1)2 = 1

הנקודה (3,1)

הנקודה (-2,5/2)

הנקודה (3,-2)

הישר (y+1)2+(x+1)2 = 4

הישר (y+2)2+(x-1)2 = 1

תרשים 2: המקרה שבו ישרים נותנים על ידי מעגלים.

האם אנחנו מוכנים לקבל את ההגדרה השנייה של ישרים? כלומר, האם אנחנו חושבים שמישור שבו ישרים הם מעגלים הוא "מישור תקני"? לשם כך נשאל מה מבדיל בין שתי ההגדרות של ישרים – אוסף נקודות שפותר משוואה לינארית לעומת אוסף נקודות שפותר משוואת מעגל.

הבדל אחד הוא שבהגדרה הרגילה של ישרים, בין כל שתי נקודות עובר ישר אחד. בהגדרה של ישר כמעגל, בין כל שתי נקודות יכולים לעבור יותר משני ישרים. בתרשים 2, הישרים (y+2)2+(x-1)2=1 ו- (y+1)2+(x+1)2=2 נחתכים בשתי נקודות, ולכן בין שתי נקודות אלה עוברים לפחות שני ישרים. למען האמת, עוברים ביניהם אין סוף ישרים. האם אנחנו מוכנים לקרוא בשם "מישור" לאוסף של נקודות וישרים המקיים שבין שתי נקודות יכולים לעבור יותר מישר אחד?

הבדל שני הוא שבהגדרה הרגילה, שני ישרים אינם נחתכים (כלומר, הם מקבילים) או שהם נחתכים בנקודה אחת. בהגדרה של ישר כמעגל, שני ישרים אינם נחתכים או שהם נחתכים בנקודה אחת (אם הם משיקים) או שהם נחתכים בשתי נקודות. האם אנחנו מוכנים לקרוא בשם "מישור" לאוסף של נקודות וישרים המקיים שישנם ישרים הנחתכים ביותר מנקודה אחת?

אוקלידס רשם מספר תכונות שעל נקודות וישרים לקיים על מנת שנקרא להן "מישור". בסעיף הבא נפרט את התכונות האלה.

# 1.2. חוקי מישור

נביא כעת את התכונות שעל נקודות וישרים לקיים על מנת שהן תוכרזנה כ"מישור".

**תכונה 1: בין כל שתי נקודות עובר ישר.**

תכונה זו מבטיחה שבמישור אין חורים: אין שתי נקודות שביניהן לא עובר ישר.

**תכונה 2: על כל ישר יש לפחות שתי נקודות.**

תכונה זו מבטיחה שישר אינו נקודה, שכן על כל ישר נמצאות לפחות שתי נקודות.

**תכונה 3: אם שני ישרים נחתכים, הם נחתכים בנקודה אחת בלבד.**

תכונה זו מבטיחה שישר הוא אכן ישר ולא קו מעוקל, שכן קווים מעוקלים יכולים להיחתך ביותר מנקודה אחת. תכונה זו גם מבטיחה שלכל שתי נקודות קיים ישר אחד ויחיד העובר דרך שתיהן. אכן, אם היו שני ישרים שונים שעוברים דרך שתי נקודות, אז חיתוך שני הישרים האלה היה מכיל לפחות שתי נקודות, דבר הסותר את תכונה 3.

**תכונה 4: במישור יש לפחות שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.**

אם כל הנקודות במישור היו על ישר אחד, לא היה מדובר במישור אלא בישר. תכונה 4 מבטיחה שהמישור לא יהיה חד-ממדי.

כעת אנחנו יכולים להביא את ההגדרה של מישור.

**הגדרה 1: מישור מורכב מקבוצה של איברים הנקראים נקודות ומקבוצה של ישרים המקיימים את תכונות 1-4, כאשר כל ישר הוא אוסף של נקודות.**

תרגיל 1: האם המישור האוקלידי מקיים את התכונות 1-4? אם לא, אילו תכונות הוא אינו מקיים?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

תרגיל 2: נתבונן באוסף הנקודות של המישור האוקלידי. כמו בדוגמה שראינו, נגדיר ישר להיות אוסף הנקודות שנמצאות על מעגל. האם אוסף הנקודות והישרים הללו מקיימים את התכונות 1-4? אם לא, אילו תכונות הם אינם מקיימים?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

הפתרונות לכל התרגילים מופיעים בסוף החוברת. נסו להתמודד עם התרגילים בעצמכם, ולאחר סיום קריאת החוברת תוכלו לבדוק את הפתרונות שלכם.

לפני שנציג דוגמאות של מישורים נזכור כי שני ישרים שאין להם נקודה משותפת במישור נקראים ישרים מקבילים.

**הגדרה 2: שני ישרים שאין להם נקודה משותפת במישור נקראים ישרים מקבילים.**

המישור האוקלידי מכיל מספר אינסופי של נקודות. בפרק הבא נראה שישנם מישורים המכילים מספר סופי של נקודות. במקרה כזה, נקרא לנקודות בשמות: אלה, בוריס, גור וכו'. כדי לציין את קבוצת נקודות המישור, נרשום את שמות הנקודות בין סוגריים מסולסלים: {אלה, בוריס, גור}. אם קיים ישר העובר דרך הנקודות אלה וגור ולא דרך הנקודה בוריס, נסמן אותו על ידי סוגריים מרובעים: [אלה, גור].

תרגיל 3. להלן מספר הגדרות של נקודות וישרים. עבור כל אחת מהן ציינו אם היא מקיימת כל אחת מהתכונות 1-4. אם ההגדרה אינה מקיימת חלק מהתכונות, הביאו דוגמאות המראות זאת.

1. קבוצת הנקודות היא {אלה, בוריס, גור} וישנם שלושה ישרים [אלה, בוריס], [אלה, גור] ו-[בוריס, גור], שכל אחד מהם מכיל שתי נקודות.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. קבוצת הנקודות היא {אלה, בוריס, גור} וישנם שלושה ישרים [אלה], [בוריס] ו-[גור], שכל אחד מהם מכיל נקודה אחת.

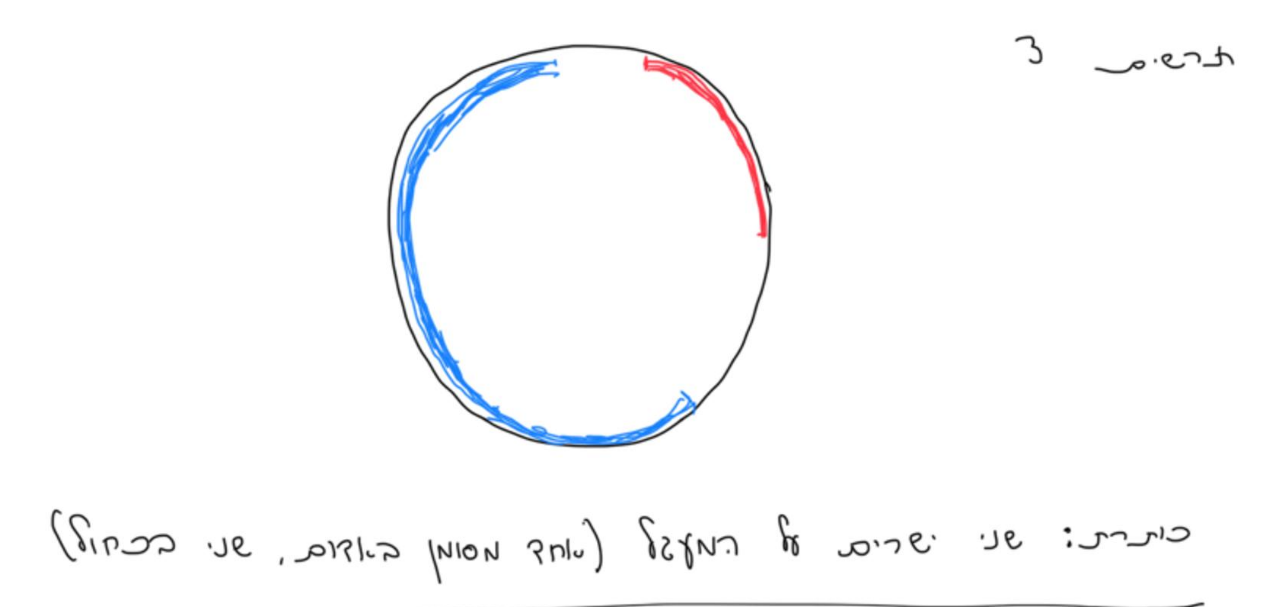
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. נתון מעגל (קבוצת הנקודות שמרכזן מהמרכז קבוע). קבוצת הנקודות היא קבוצת הנקודות על המעגל. ישר הוא קטע רציף של נקודות על המעגל שאינו המעגל כולו (ראו תרשים 3).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



תרגיל 4. עבור כל אחד מהסעיפים בתרגיל 1, רשמו את זוגות הישרים המקבילים.

סעיף א. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

סעיף ב. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

סעיף ג. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

תרגיל 5: הגדירו קבוצה של נקודות וקבוצה של ישרים המקיימים את תכונות 1, 2 ו-4 אך אינם מקיימים את תכונה 3.

הנקודות הן: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

הישרים הם: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

חוקי המישור שהבאנו כאן מתקיימים בכל מישור, כולל במישור האוקלידי – המישור הרגיל שאותו אנחנו מכירים ואוהבים. עם זאת, במישור האוקלידי מתקיימות תכונות נוספות. למשל: בין כל שתי נקודות במישור קיימת נקודה נוספת במישור. מתכונה זו נובע שבמישור האוקלידי יש מספר אינסופי של נקודות. אנחנו לא דורשים את התכונה הזו, ולכן ישנם מישורים שבהם מספר הנקודות סופי.

# 2. מישורים סופיים

במישור האוקלידי יש אינסוף נקודות ואינסוף ישרים. האם יכול להיות מישור שבו יש מספר סופי של נקודות וישרים? כפי שראינו בדוגמה הראשונה בתרגיל 3, התשובה חיובית. למען האמת, ישנם מישורים רבים שבהם מספר הנקודות והישרים סופי. מישור כזה נקרא באופן צפוי **מישור סופי**.

# 2.1. מישור הכיתה

נניח שלפנינו כיתה קטנה שבה ארבעה תלמידים: אירית, בר, גליה ודני. נבנה מישור שיש בו 4 נקודות – כל תלמיד בכיתה הוא נקודה. כדי להשלים את בניית המישור יש לציין את הישרים. במישור שלנו, כל זוג תלמידים ירכיבו ישר. כלומר, ישנם 6 ישרים:

* הישר [אירית, בר].
* הישר [אירית, גליה].
* הישר [אירית, דני].
* הישר [בר, גליה].
* הישר [בר, דני].
* הישר [גליה, דני].

בתרשים 4 מתואר המישור בצורה גרפית.

גליה

דני

אירית

בר

תרשים 4: מישור כיתה המכיל 4 נקודות ו-6 ישרים.

שימו לב: למרות שבתרשים 4 הישרים [אירית, דני] ו-[בר, גליה] חוצים זה את זה, הרי שהם אינם נחתכים במישור, שכן אין נקודה במישור הנמצאת במקום החצייה: במישור יש ארבע נקודות - ארבעת התלמידים בכיתה, ואין תלמיד הנמצא הן על הישר [אירית, דני] והן על הישר [בר, גליה]. לכן ישרים אלו הם ישרים מקבילים.

במישור הכיתה המתואר בתרשים 4 כל הישרים הם קווים ישרים. היינו יכולים לתאר אותו מישור בצורה גרפית גם בעזרת קווים שאינם ישרים. שתי דוגמאות מופיעות בתרשים 5.

תרשים 5: שתי הצגות נוספות של מישור כיתה המכיל 4 נקודות ו-6 ישרים.

אירית

דני

גליה

בר

אירית

דני

גליה

בר

הדבר החשוב בהצגה הגרפית של מישור הוא שכל ישר אכן יעבור דרך הנקודות שהוא אמור לעבור דרכן. מכיוון שבהצגה הגרפית של מישור הכיתה הנקודות הן הריבועים שבתוכם רשומים שמות הילדים, יש לוודא שכל ישר יחבר את הילדים שהוא מכיל. המסלול שבו עובר הישר על הדף אינו חשוב, כל עוד הוא אכן מחבר את הילדים המתאימים.

נבדוק אם התכונות הנדרשות ממישור מתקיימות במישור שמופיע בתרשים 4.

* בין כל שתי נקודות עובר ישר: תכונה זו מתקיימת, שכן כל שני תלמידים מהווים ישר.
* על כל ישר יש לפחות שתי נקודות: תכונה זו מתקיימת, שכן על כל ישר ישנן בדיוק שתי נקודות.
* כל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת לכל היותר: כל ישר מכיל בדיוק שני תלמידים, ולכן לא יכולים להיות שני ישרים שונים שעוברים דרך אותן שתי נקודות.
* ישנן לפחות שלוש נקודות שאינן על ישר אחד: גם תכונה זו מתקיימת שכן כל ישר מכיל רק שתי נקודות.
* נזכור ששני ישרים נקראים מקבילים אם הם אינם מכילים נקודה משותפת. האם ישנם במישור שלנו ישרים מקבילים? בוודאי! כבר אמרנו שהישר [אירית, דני] מקביל לישר [בר, גליה]. כמו כן, הישר [אירית, בר] והישר [גליה, דני] הם ישרים מקבילים, שכן אין תלמיד הנמצא בשניהם. מאותה סיבה גם הישר [אירית, גליה] מקביל לישר [בר, דני].

תרגיל 6: נתבונן בכיתה שמכילה חמישה ילדים: הילה, ויקטור, זיוה, חי וטנא.

* + 1. אוסף נקודות הוא ישר אם הוא מכיל בדיוק שני ילדים. רשמו את אוסף הישרים.

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

* + 1. ציירו את הנקודות והישרים באופן גרפי.
    2. האם בהגדרות אלה קיימים ישרים מקבילים? אם כן, כמה זוגות של ישרים מקבילים קיימים?

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

תרגיל 7: נתבונן בכיתה שמכילה ארבעה ילדים: חן, טל, יריב וכרמל. נגדיר נקודות וישרים באופן הבא:

* כל תלמיד מהווה נקודה.
* כל קבוצה של שלושה תלמידים מהווה ישר.

א) ציירו את הנקודות והישרים באופן גרפי. שים לב: ישר שמכיל שלוש נקודות יכול להיות עקום או להתעקל.

ב) רשמו את כל הישרים:

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

ג) האם הגדרה זו של נקודות וישרים מקיימת את כל הדרישות ממישור? אם לא, אילו דרישות אינן מתקיימות?

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*