Analyse en Composante Principale (ACP)

edysan
écologie et dynamique des systèmes anthropisés

Jonathan Lenoir (MCU), `jonathan.lenoir@u-picardie.fr`
Unité "Écologie et Dynamique des Systèmes Anthropisés"
`http://www.u-picardie.fr/edysan/`

cnrs

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Analyse en Composante Principale (ACP)

1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Analyse en Composante Principale (ACP)

1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Statistique multi-variée

- **Méthodes descriptives (X_j) :**
  - X_j quantitatives : Analyse en Composante Principale (ACP)
  - X_j qualitatives : Analyse Factorielle des Correspondances (AFC)
  - ...
- **Méthodes explicatives ($Y_k = f(X_j)$) :**
  - Y_k et X_j quantitatives : Analyse Canonique des Corrélations (ACC)
  - Y_k qualitatives et X_j quantitatives : Analyse Discriminante (AFD)
  - ...

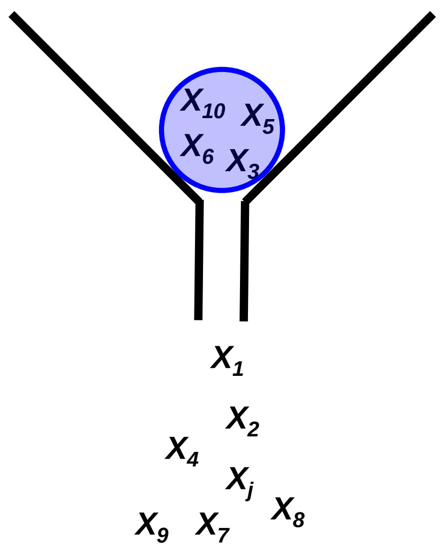
UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Principe de l'ACP

➤ **Représenter au mieux dans un espace plus réduit des observations issues d'un espace plus grand en nombres de dimensions (X_j variables) :**

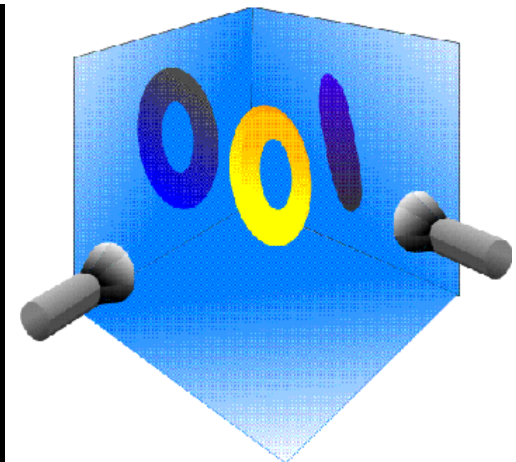
- Simplification de la réalité
- Concentration d'une information de départ diluée
- Description du maximum de variabilité dans un espace réduit

	X_1	X_2	X_3	...
ind 1	33	12	55	...
ind 2	25	11	50	...
ind 3	29	11	43	...
...	...	...	...	...



Principe de l’ACP

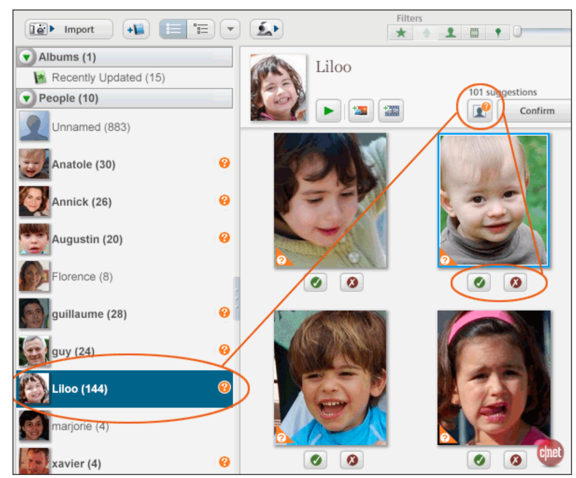
- **Dessinez c’est gagné?**
  - Simplifier un objet 3D (réalitée) par une représentation en 2D (plan)



Quelles applications?

- **Analyses de données :**
  - Réduction du nombres de variables explicatives (X_j) avant modélisation
  - Obtention de nouvelles variables explicatives (CP_j) non corrélées
- **Imagerie :**
  - Compression d’image
  - Reconnaissance faciale





Situation

- *P* variables quantitatives ont été mesurées sur *N* individus :

	X_1	X_2	…	X_j	…	X_p
ind 1	x_{11}	x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1p}
ind 2	x_{12}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2p}
…	…	…	…	…	…	…
ind i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{ip}
…	…	…	…	…	…	…
ind n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{np}

- **Q : Peut-on « simplifier », « concentrer » ou « compresser » l'essentiel de l'information contenue dans ce tableau?**

- **Exemple : Mesures de *P* variables morpho-métriques sur *N* individus différents**

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Objectifs

- **Résumer le tableau de façon à identifier les variables ou combinaisons de variables selon lesquelles les *N* individus se différencient le plus**
  - Identification des « composantes principales » (*CP*) qui déterminent l'essentiel de la différence entre individus (variance)

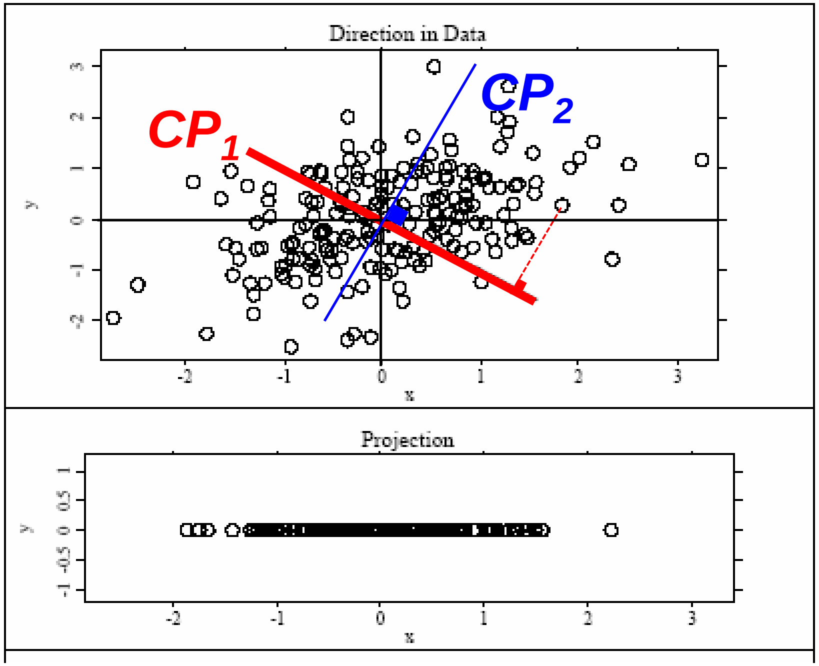
- **Examiner la position des *N* individus le long de ces « composantes principales »**
  - Typologie des individus

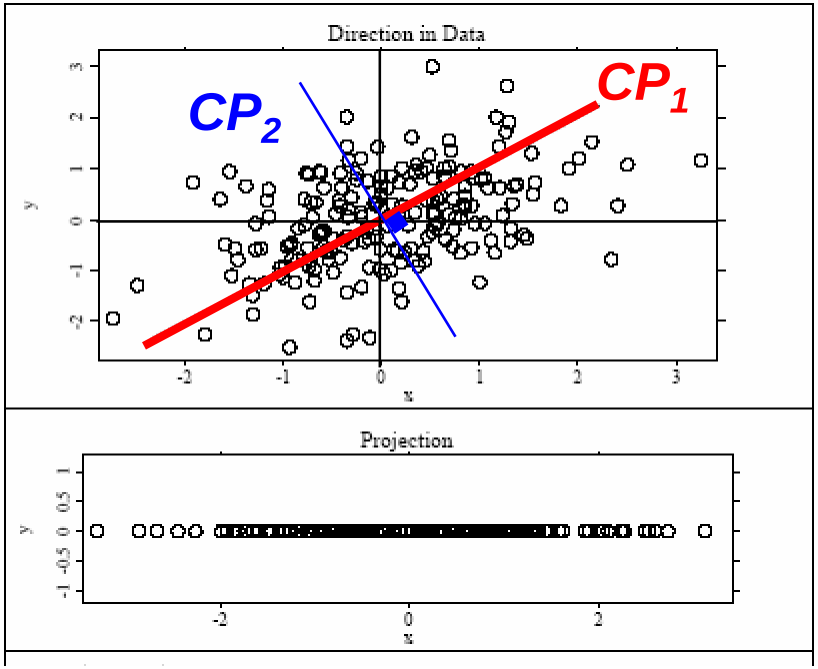
- **Etudier les relations des *P* variables le long de ces « composantes principales »**
  - Typologie des variables

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Notion de projection

- **Cas simple d'un tableau à 2 variables (P = 2, X_1 et X_2) et N individus :**
  - On pourrait résumer ce tableau par une « composante principale » CP_1
  - Projection orthogonale des individus le long de CP_1

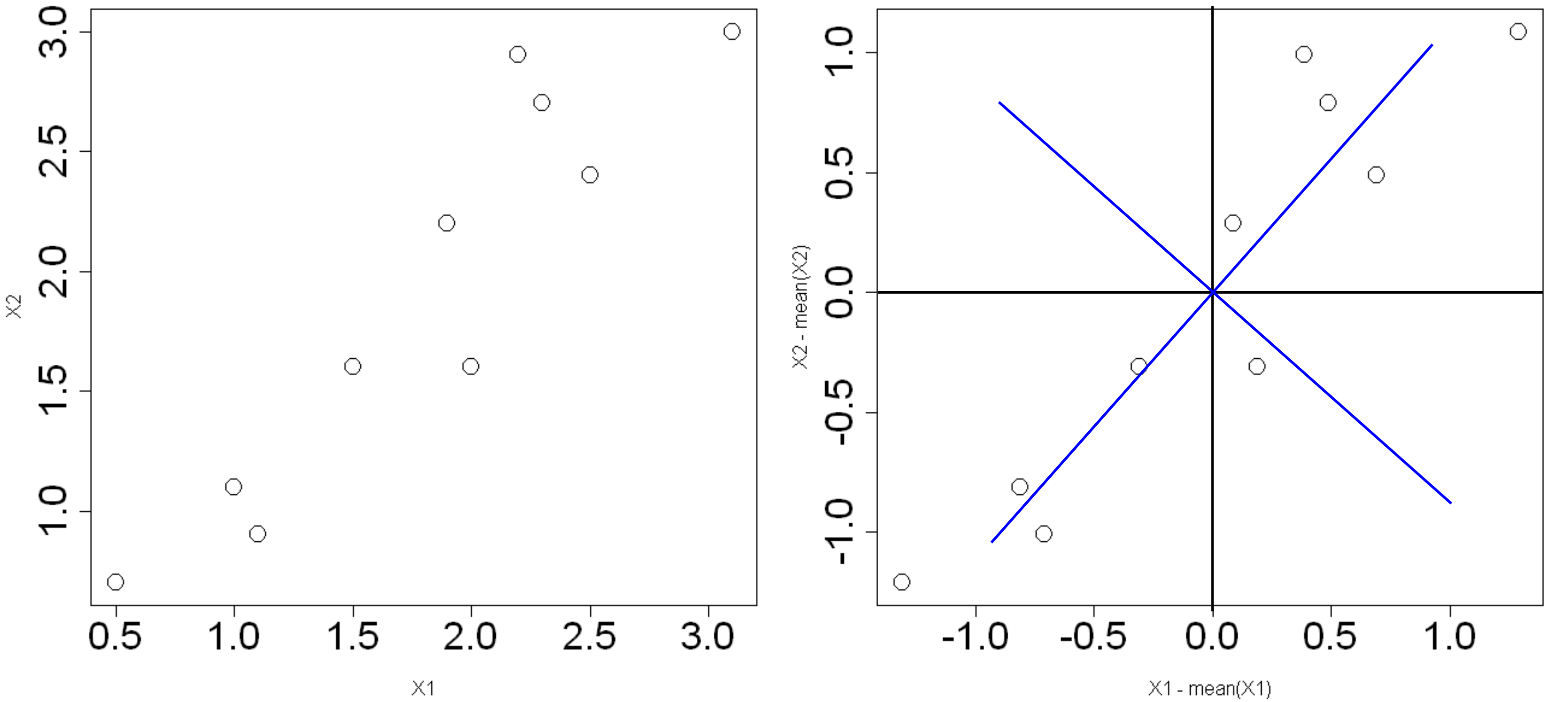




- **Orthogonalité de CP_2 par rapport à CP_1**
- **Changement de référentiel obtenu par rotation**

Centrage

- **Il est recommandé de toujours centrer les valeurs associées à chaque variable X_j pour éviter le problème de la translation au cours du changement de référentiel et pour simplifier au cas de la rotation seule**



- **Comment allez-vous positionner CP_1 puis CP_2?**

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Analyse en Composante Principale (ACP)

1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Notion de covariance

- **ACP : calculs des *CPs* basés sur la covariance entre variables**
- **Qu'est ce que la covariance entre deux variables X_1 et X_2?**
  - Indique si à un écart positif de X_1 pour un individu *i* par rapport à la moyenne sur X_1 correspond un écart positif ou négatif de X_2 pour ce même individus *i* par rapport à la moyenne sur X_2

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i,1} - \overline{X_1}\right)\left(X_{i,2} - \overline{X_2}\right)}{n-1}$$

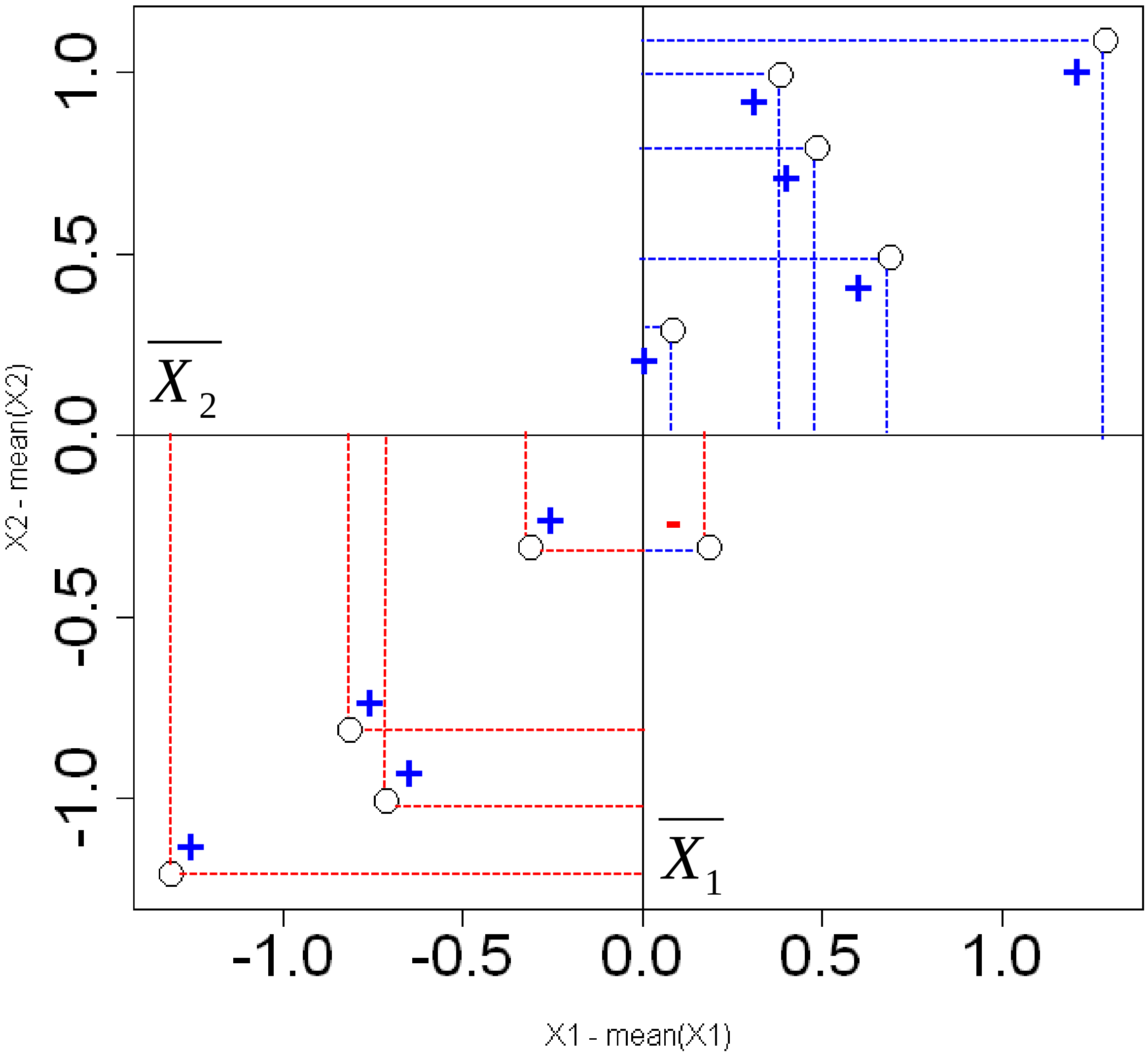
$$\mathrm{cov}(X_1, X_1) = ?$$

- **C'est le signe de la covariance qui importe :**
  - $\mathrm{cov}(X_1, X_2) > 0$: X_1 augmente quand X_2 augmente
  - $\mathrm{cov}(X_1, X_2) < 0$: X_1 augmente quand X_2 diminue
- **NB : Si X_1 et X_2 sont centrées, alors** $\overline{X_1} = \overline{X_2} = 0$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Notion de covariance

➤ **Visualisation graphique de la covariance sur variables centrées :**



cov (X_1, X_2) = 0.61 > 0

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Notion de covariance

- **Pour *P* > 2, on calcule la covariance pour toutes les paires de variables possibles :**
  - Matrice *C* de covariances

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_1, X_j) & \ldots & \mathrm{cov}(X_1, X_p) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{var}(X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_2, X_j) & \ldots & \mathrm{cov}(X_2, X_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(X_j, X_1) & \mathrm{cov}(X_j, X_2) & \ldots & \mathrm{var}(X_j) & \ldots & \mathrm{cov}(X_j, X_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(X_p, X_1) & \mathrm{cov}(X_p, X_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X_p, X_j) & \ldots & \mathrm{var}(X_p) \end{pmatrix}$$

- **Propriétés :**
  - *C* est une matrice carré de taille *p* x *p*
  - *C* est une matrice symétrique

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Analyse en Composante Principale (ACP)

1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

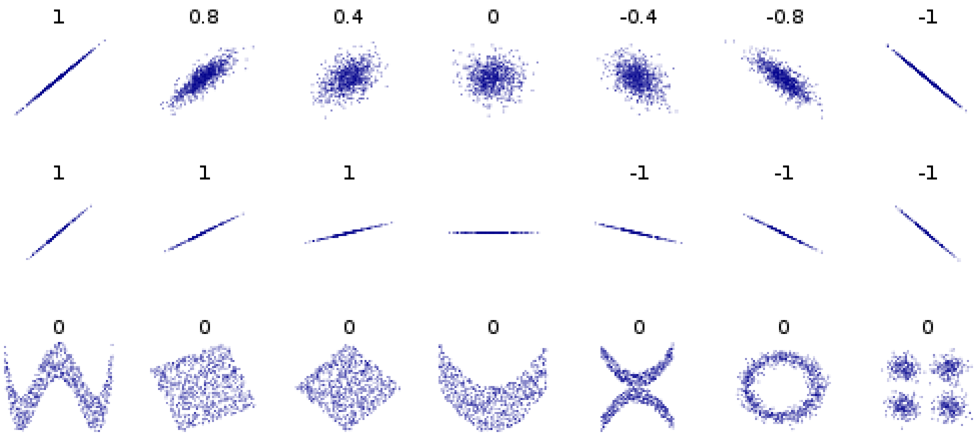
Notion de corrélation : l'ACP normée

- **Corrélation = covariance « standardisée » : réduction**
  - Comprise entre -1 et 1, la corrélation mesure l'intensité de la liaison <u>linéaire</u> entre deux variables X_1 et X_2

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}$$

$$\rho(X_1, X_1) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_1)}{\sigma(X_1)\sigma(X_1)}$$

$$\rho(X_1, X_1) = \frac{\operatorname{var}(X_1)}{\operatorname{var}(X_1)}$$



- **NB : ρ^2 = part de la variance partagée entre les 2 variables**

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Notion de corrélation : ACP normée

- **Si l'ACP est basée sur la matrice de covariances, l'ACP normée est basée elle sur la matrice de corrélations :**
  - Matrice *C* de corrélations

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \ldots & \rho(X_1, X_j) & \ldots & \rho(X_1, X_p) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 & \ldots & \rho(X_2, X_j) & \ldots & \rho(X_2, X_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho(X_j, X_1) & \rho(X_j, X_2) & \ldots & 1 & \ldots & \rho(X_j, X_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho(X_p, X_1) & \rho(X_p, X_2) & \ldots & \rho(X_p, X_j) & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Propriétés :**
  - *C* est une matrice carré de taille *p* x *p*
  - *C* est une matrice symétrique
  - *C* possède une diagonale de 1

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

ACP non-normée ou ACP normée?

- **S'il est recommandé de toujours « centrer » ses donnés en ACP, la question de les « réduire » (ACP normée) dépend de vos données :**
  - Si vos données sont toutes dans la même unité de mesure et varient dans des gammes de valeurs identiques : l'ACP non-normée suffit
  - Si vos données sont dans des unités de mesure différentes et varient dans des gammes de valeurs différentes : l'ACP normée est recommandée

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

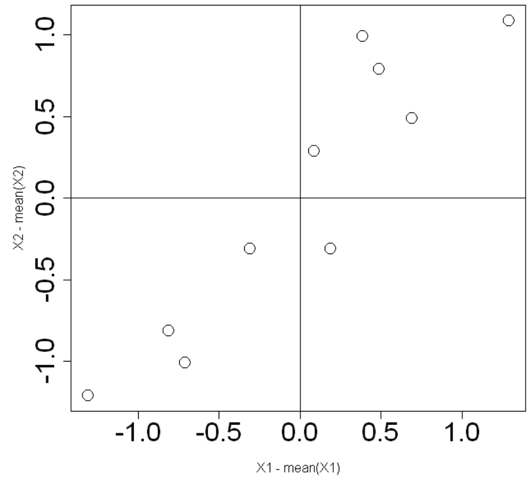
Analyse en Composante Principale (ACP)

1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Reprenons le cas simple de notre exemple à deux variables X_1 et X_2 :**
  - > X_1 = c(2.5, 0.5, 2.2, 1.9, 3.1, 2.3, 2, 1, 1.5, 1.1)
  - > X_2 = c(2.4, 0.7, 2.9, 2.2, 3, 2.7, 1.6, 1.1, 1.6, 0.9)



- **X_1 et X_2 varient d'un même ordre de grandeur?**
  - var(X_1) = 0.6165556
  - var(X_2) = 0.7165556
  - cov(X_1, X_2) = 0.6154444
  - ACP non-normée = matrice de covariances

$$C = \begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix}$$

- **Utilisation de la matrice de covariances pour changer de référentiel :**
  - Calcul du vecteur directeur de CP_1
  - Calcul du vecteur directeur de CP_2

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Une histoire d'algèbre linéaire et de calculs matriciels :**
  - Détermination des *p* valeurs propres λ_j
  - Détermination des *p* vecteurs propres V_j

- **Soit la matrice de covariances *C* de taille *p* x *p*, elle admet *p* valeurs propres et *p* vecteurs propres associés, tels que :**
  - $CV_j = \lambda_j V_j$

- **Dans notre exemple à deux variables, *C* admet 2 valeurs propres et 2 vecteurs propres tels que soit vérifié les égalités suivantes :**

$$\begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Détermination des 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 :**
  - Calcul du déterminant de $C - \lambda I$
  - Résolution de l'équation $\det(C - \lambda I) = 0$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.6165556 - \lambda & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = (0.6165556 - \lambda)(0.7165556 - \lambda) - 0.6154444^2$$

$$\lambda^2 - 1.333111\lambda + 0.06302444 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1.284028 \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0.04908323$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

➢ **Chaque valeur propre représente la variance des données autour d'un nouvel axe *CP* ou « composante principale » qui est une combinaison linéaire des variables de départ**

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2)$$

$$1.284028 + 0.04908323 = 0.6165556 + 0.7165556 = 1.333111$$

➢ **La première « composante principale » ou CP_1 associée à λ_1 porte 96% de la variance totale**

➢ **La deuxième « composante principale » ou CP_2 associée à λ_2 porte 4% seulement de la variance totale**

➢ **A partir d'une seule dimension (CP_1), il est possible ici de résumer 96% de l'information de départ contenue dans deux dimensions (X_1, X_2)**

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 :**
  - Résolution des 2 systèmes d'équations $CV_j - \lambda_j V_j = 0$

λ_1

$$\begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 1.284028 \times \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.6165556 \times v_{1,1} + 0.6154444 \times v_{1,2} - 1.284028 \times v_{1,1} = 0 \\ 0.6154444 \times v_{1,1} + 0.7165556 \times v_{1,2} - 1.284028 \times v_{1,2} = 0 \end{cases}$$

λ_2

$$\begin{pmatrix} 0.6165556 & 0.6154444 \\ 0.6154444 & 0.7165556 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0.04908323 \times \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.6165556 \times v_{2,1} + 0.6154444 \times v_{2,2} - 0.04908323 \times v_{2,1} = 0 \\ 0.6154444 \times v_{2,1} + 0.7165556 \times v_{2,2} - 0.04908323 \times v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Une solution possible (cf. sous la contrainte que V_1 et V_2 soient tout 2 des vecteurs unitaires de taille 1)**

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0.6778736 \\ 0.7351785 \end{pmatrix} \qquad NB: v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 = 1$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} -0.7351785 \\ 0.6778736 \end{pmatrix} \qquad NB: v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.6778736 & -0.7351785 \\ 0.7351785 & 0.6778736 \end{pmatrix}$$

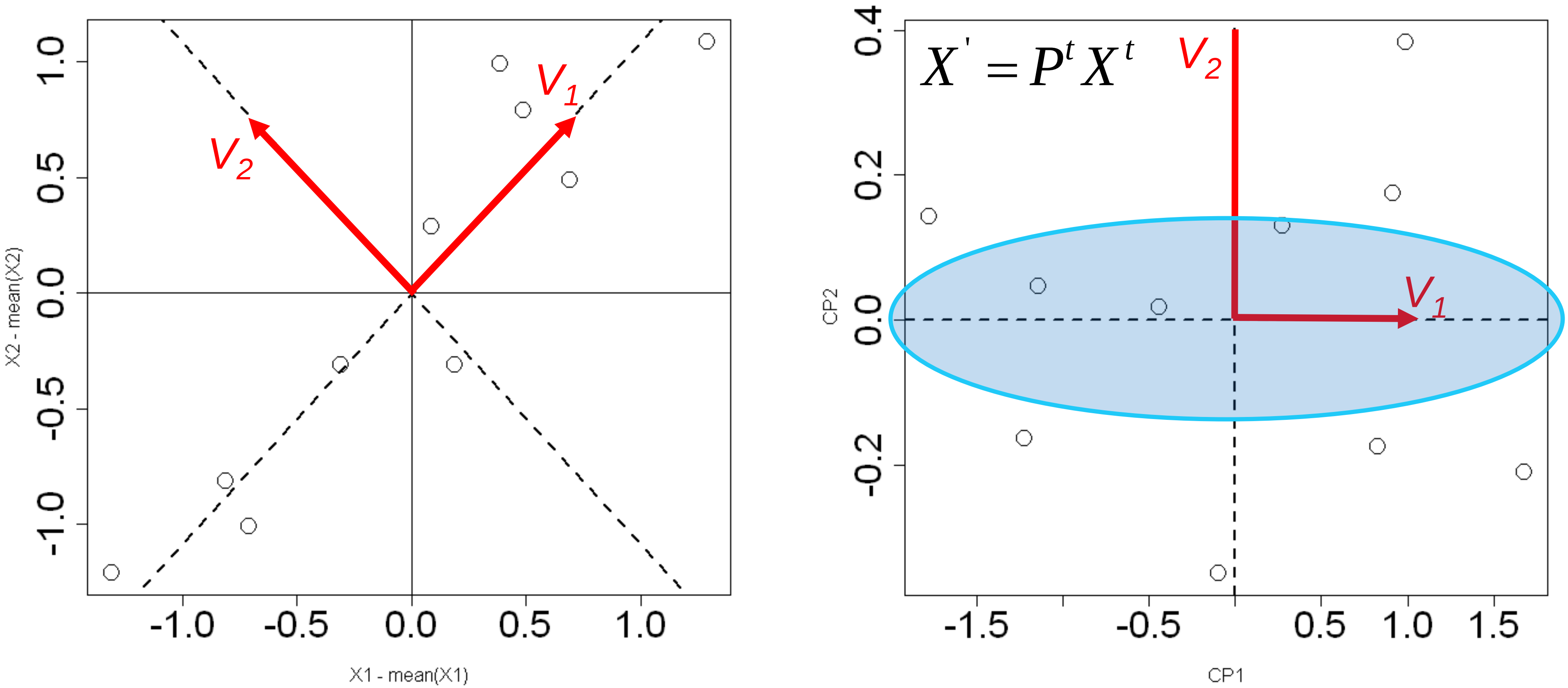
$$D = \begin{pmatrix} 1.284028 & 0 \\ 0 & 0.04908323 \end{pmatrix}$$

$$C = PDP^t$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- V_1 et V_2 sont les vecteurs directeur de CP_1 et CP_2 :



- CP_1 porte 96% de l'inertie totale du nuage de point
- NB : $\rho(X_1, X_2) = 0.93$ mais $\rho(CP_1, CP_2) = 0$

UNIVERSITE de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

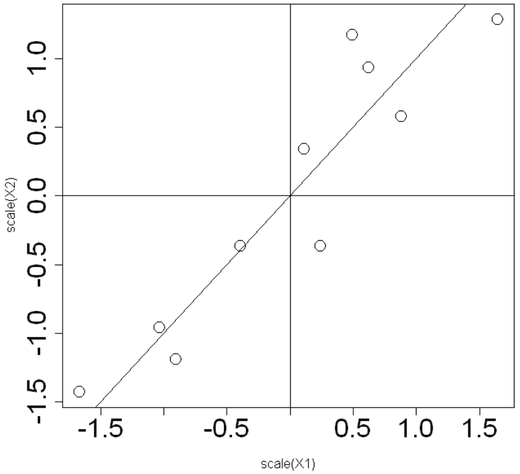
- **L'information (variance) portée par CP1 est tellement importante que l'on peut se passer de CP2 :**
  - Cela revient à compresser l'information originale portée par deux dimensions sur une seule dimension avec une perte ici de 4% de l'information d'origine
  - Par analogie, une fois que l'on a vu le chameau de profil, le voir de face n'apporte pas beaucoup plus d'information...

- **Attention :**
  - Dans le cas de l'ACP non-normée, chacune des variables représente *a priori* un poids égal à sa propre variance
  - L'ACP non-normée est une application rare et en général, on travail avec la matrice des corrélations (ACP normée)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- Cas de l'ACP normée sur le même jeu de donnée :



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0.93 \\ 0.93 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0.93 \\ 0.93 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 0.93^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0.1351 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1.93 \qquad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0.07$$

$$\lambda_1 = 1 + \rho \qquad \lambda_2 = 1 - \rho$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- **Une solution possible (cf. sous la contrainte que *V_1* et *V_2* soient tout 2 des vecteurs unitaires de taille 1)**

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$NB : v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 = 1$$

$$NB : v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1$$

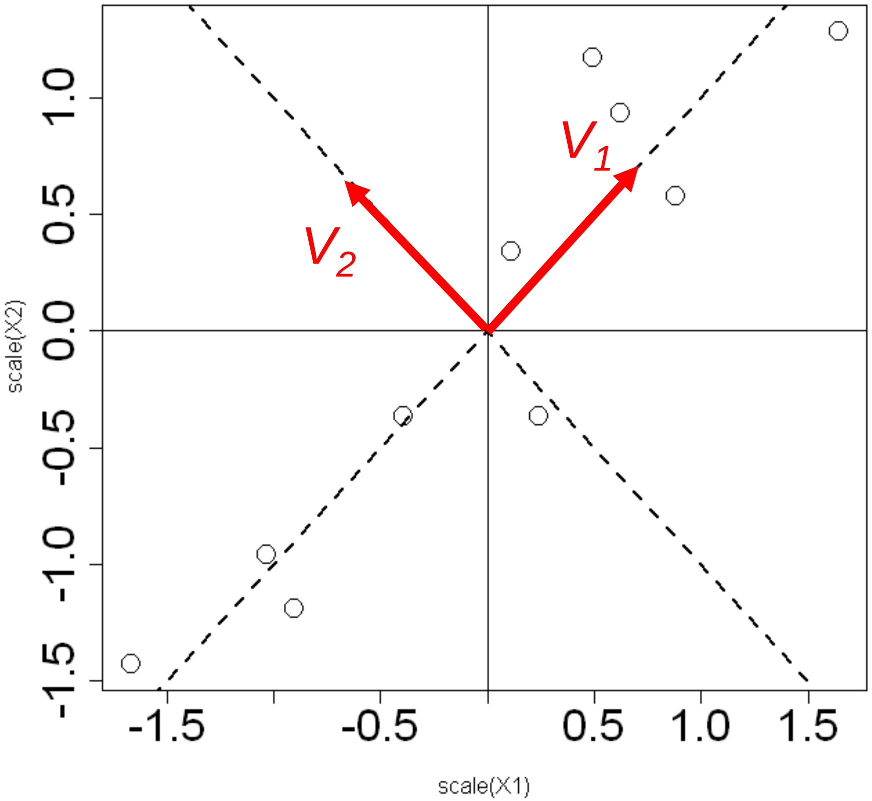
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

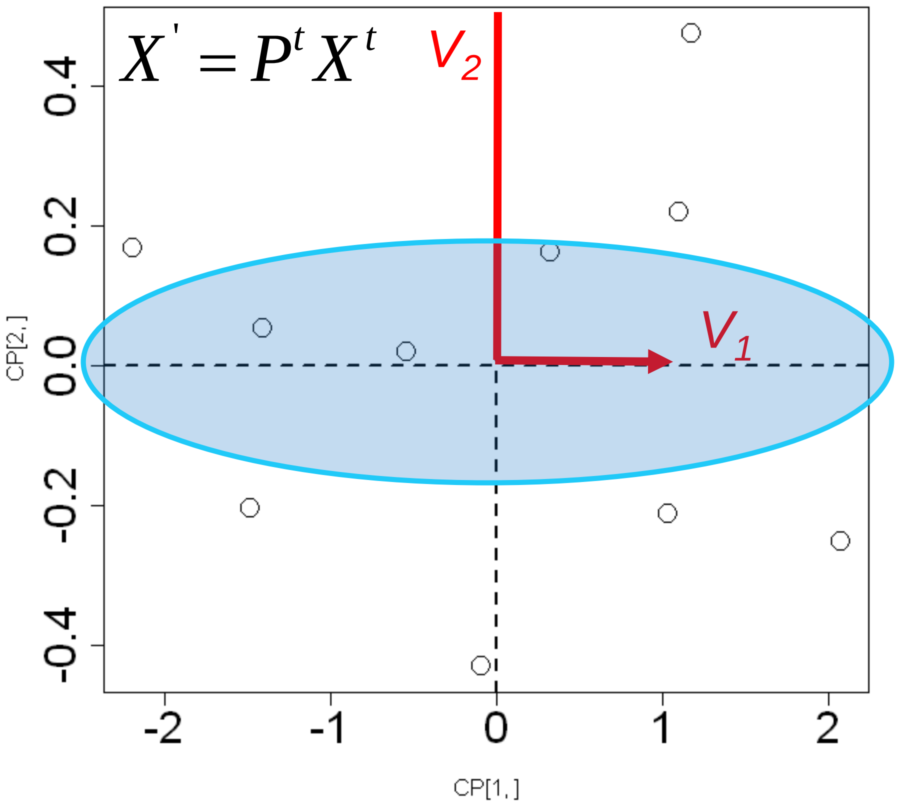
$$D = \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Un cas simple à 2 variables

- V_1 et V_2 sont les vecteurs directeur de CP_1 et CP_2 :





- CP_1 porte 96% de l'inertie totale du nuage de point
- NB : $\rho(X_1, X_2) = 0.93$ mais $\rho(CP_1, CP_2) = 0$

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Combien de composantes principales?

- **L'ACP d'un tableau de données à *P* variables et *N* individus admet *P* valeurs propres, *P* vecteurs propres, et *P* composantes principales :**
  - Conservez au moins 50-70% de la variance en cumulé
  - Conservez toute les composantes principale dont $\lambda > 1$ (limite de Kaiser)
  - Utilisez l'histogramme des valeurs propres (scree plot)

- **Attention :**
  - L'ACP sur un tableau de données tel que $P > N$ est impossible

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Typologies des individus et des variables

- **Typologie des individus :**
  - La lecture graphique de la position des individus le long des composantes principales permet de dresser une typologie
  - Les indidus proches le long d'une composante principale sont des individus qui partagent les mêmes caractéristiques vis-à-vis des variables quantitatives étudiées

- **Typologie des variables :**
  - Chaque composante principale est une combinaison linéaire des variables de départ auxquelles sont affecté des poids
  - La lecture graphique du cercle des corrélations permet de juger du poids des différentes variables de départ sur chacune des composantes principales

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Plan du cours

Analyse en Composante Principale (ACP)

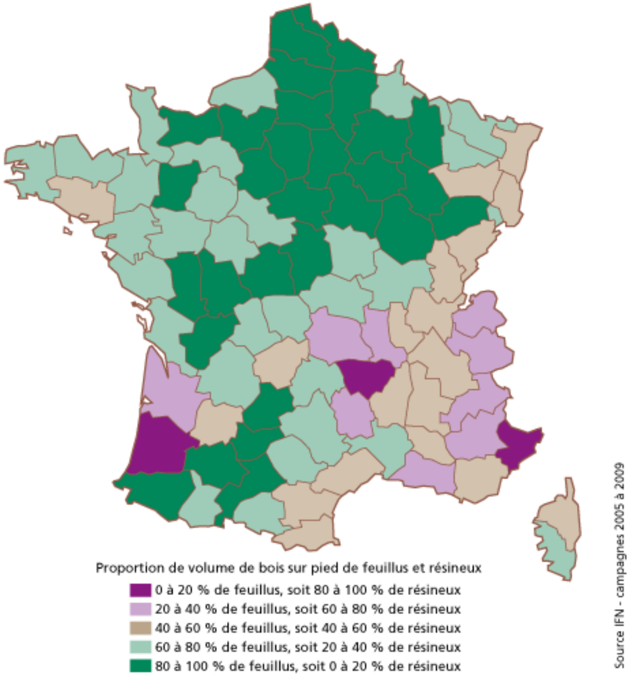
1. Définitions, applications et objectifs de l'ACP
2. Notion de covariance et ACP non-normée
3. Notion de corrélation et ACP normée
4. Meccanique de l'ACP à partir d'un exemple à deux variables
5. Application à partir d'un exemple concret (les forêts françaises)

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Exemple concret

- **Regrouper les départements français en régions homogènes du point de vue de la production forestière (typologie)**

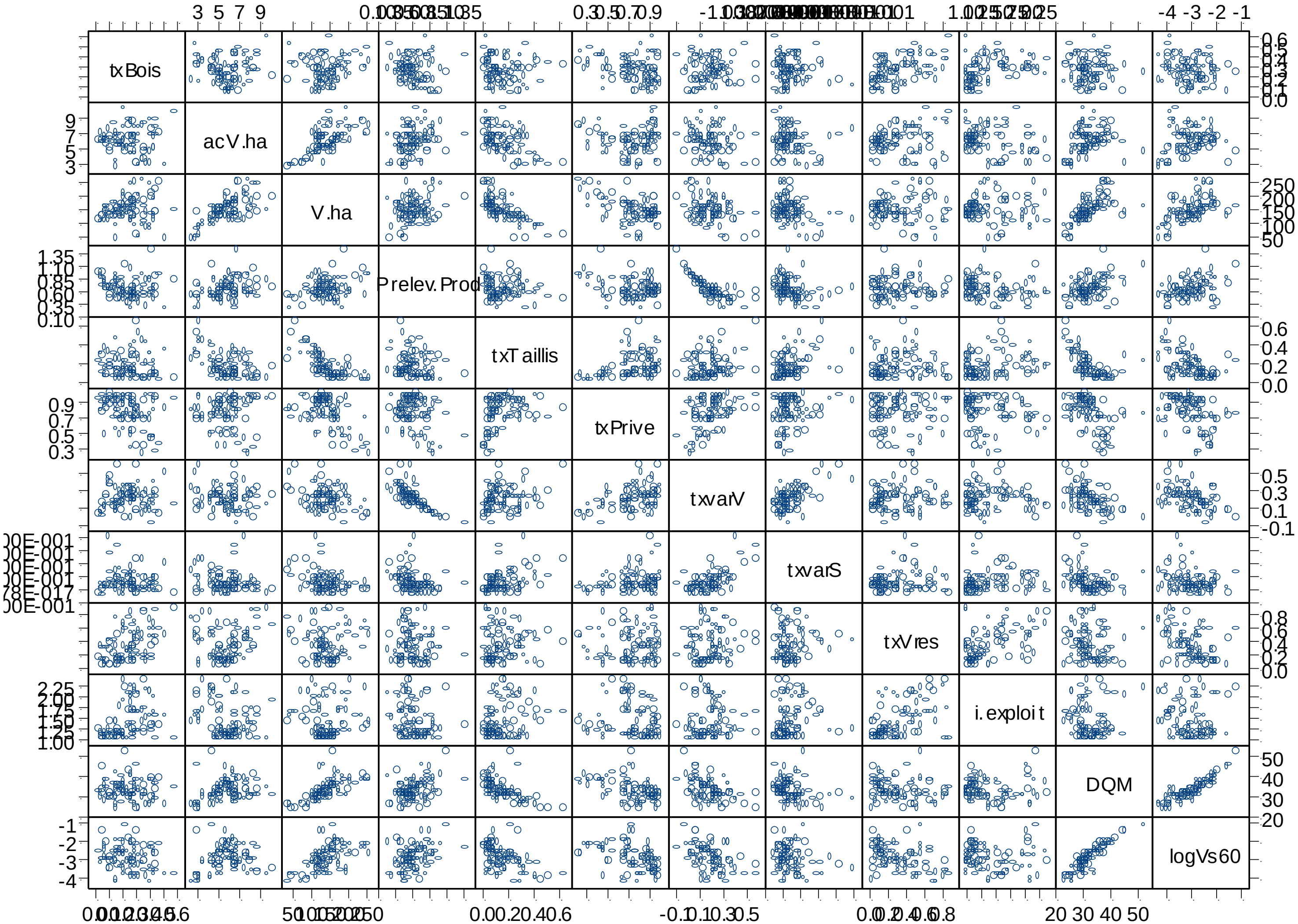
- **12 variables relative à la production forestière dans 90 départements :**
  - Taux de boisement
  - Accroissement en volume par hectare
  - Volume par hectare
  - Taux de prélèvement
  - Taux de taillis
  - Part de propriété privé
  - Accroissement en volume / volume
  - Accroissement en surface / surface
  - Part de résineux (volume)
  - Indice d'exploitabilité
  - DQM
  - log(volume $\geq$ D60)



UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Exemple concret

- **Relations 2 à 2 entres variables :**



Exemple concret

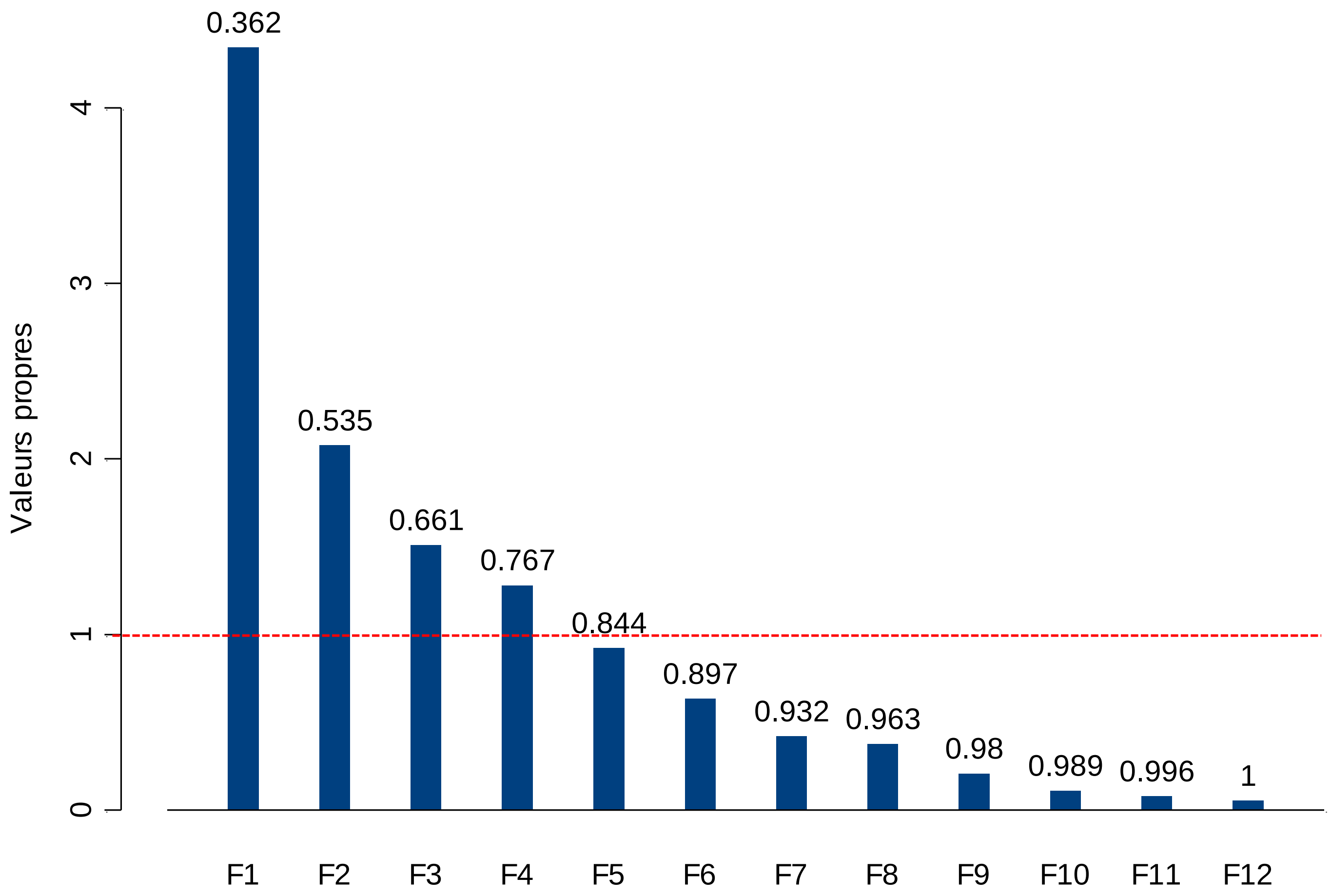
- **Matrice de corrélations :**

	txBois	acV.ha	V.ha	Prelev.F	txTaillis	txPrive	txvarV	txvarS	txVres	i.exploit	DQM	logVs60
txBois	1	0,02	0,13	-0,12	-0,07	-0,31	0,04	-0,08	0,49	0,37	-0,07	-0,20
acV.ha	0,02	1	0,67	0,28	-0,49	0,02	-0,15	-0,19	0,16	-0,25	0,24	0,14
V.ha	0,13	0,67	1	0,31	-0,71	-0,50	-0,35	-0,35	0,03	-0,01	0,65	0,55
Prelev.Prod	-0,12	0,28	0,31	1	-0,15	-0,26	-0,79	-0,29	-0,06	-0,18	0,42	0,39
txTaillis	-0,07	-0,49	-0,71	-0,15	1	0,36	0,22	0,40	0,07	0,26	-0,60	-0,48
txPrive	-0,31	0,02	-0,50	-0,26	0,36	1	0,41	0,22	0,00	-0,14	-0,46	-0,42
txvarV	0,04	-0,15	-0,35	-0,79	0,22	0,41	1	0,59	0,09	-0,03	-0,47	-0,44
txvarS	-0,08	-0,19	-0,35	-0,29	0,40	0,22	0,59	1	0,11	0,15	-0,28	-0,22
txVres	0,49	0,16	0,03	-0,06	0,07	0,00	0,09	0,11	1	0,51	-0,16	-0,42
i.exploit	0,37	-0,25	-0,01	-0,18	0,26	-0,14	-0,03	0,15	0,51	1	-0,03	-0,10
DQM	-0,07	0,24	0,65	0,42	-0,60	-0,46	-0,47	-0,28	-0,16	-0,03	1	0,90
logVs60	-0,20	0,14	0,55	0,39	-0,48	-0,42	-0,44	-0,23	-0,42	-0,10	0,90	1

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Exemple concret

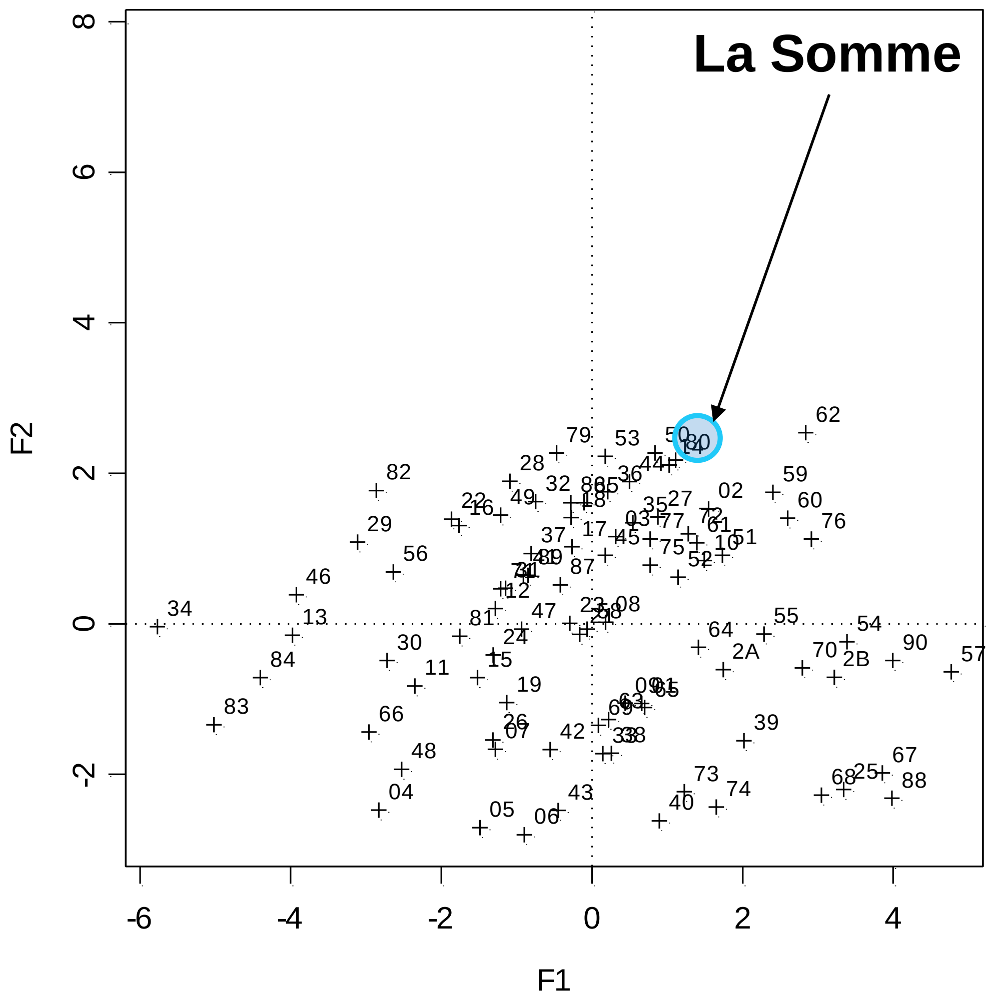
- **Réalisation d'une ACP normée dans un espace à 12 dimensions :**
  - Décomposition de la variance sur les 12 composantes principales
  - Combien d'axes doit-on conserver?



UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Exemple concret

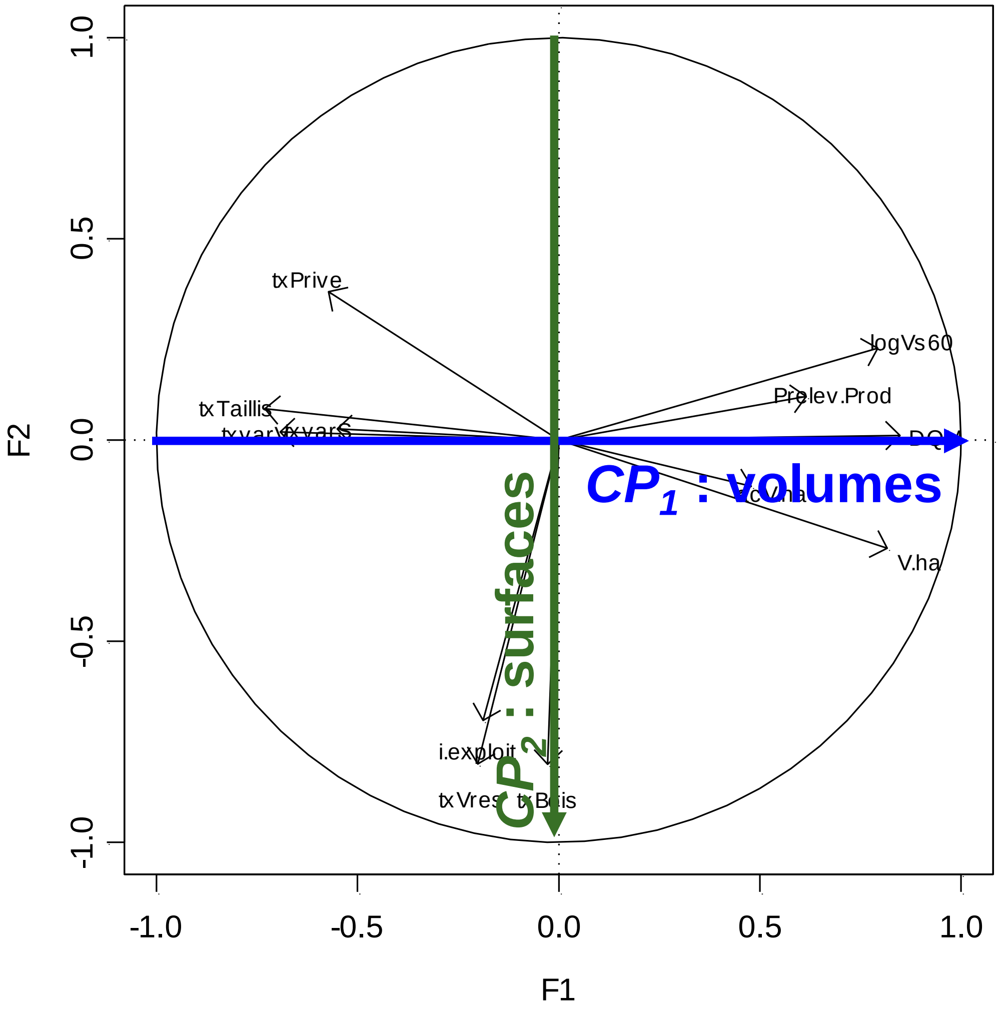
- **Projection dans le plan (CP_1, CP_2) :**
  - Position des départements et regroupement en types (typologie)



UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Exemple concret

- **Interprétation des axes du plan (CP_1, CP_2) :**
  - Lecture du cercle des corrélations



UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne