MASSE AJOUTÉE EN INTERACTION FLUIDE STRUCTURE

Projet MAP411

Jocelyn Beauchesne et Amir Benmahjoub

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

1
MODÉLISATION

Question 1

Dans $\Omega_f \times [0,T]$ nous avons :

$$\rho_f \frac{\partial \overrightarrow{u_f}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} p = \overrightarrow{0}$$

En appliquant la divergence :

$$\rho_f \cdot div(\frac{\partial \overrightarrow{u_f}}{\partial t}) + div(\overrightarrow{\nabla} p) = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, en supposant les fonctions de régularité suffisante, on peut appliqué le théorème de Schwartz :

$$\rho_f \cdot \frac{\partial div(\overrightarrow{u_f})}{\partial t} + div(\overrightarrow{\nabla} p) = \overrightarrow{0}$$

Mais dans $\Omega_f \times [0,T]$ nous avons aussi :

$$div(\overrightarrow{u_f}) = 0$$

Donc on a bien :

$$-\Delta p = 0 \tag{1}$$

En projetant la toute première équation sur la normale sortante $\overrightarrow{n_f}$:

$$\rho_f \frac{\partial \overrightarrow{u_f}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{n_f} + \overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{n_f} = 0$$

De plus :

$$\overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{n_f} = \frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}}$$

On a aussi :

$$\frac{\partial \overrightarrow{n_f} \cdot \overrightarrow{u_f}}{\partial t} = \overrightarrow{n_f} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{u_f}}{\partial t} + \overrightarrow{u_f} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{n_f}}{\partial t} = \overrightarrow{n_f} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{u_f}}{\partial t}$$

Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\rho_f \cdot \frac{\partial \overrightarrow{n_f} \cdot \overrightarrow{u_f}}{\partial t}$$

Par passage à la frontière sur $\Gamma_f^3 \times [0,T]$ on a, puisque $\overrightarrow{n_f} \cdot \overrightarrow{u_f} = 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0$$

Par passage à la frontière sur $\Sigma \times [0,T]$ on a, puisque $\overrightarrow{n_f} \cdot \overrightarrow{u_f} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$:

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\rho_f \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

D'où le problème fluide reformulé

$$\tag{5}$$

Question 2

Soit p et η vérifiant le problème d'intéraction fluide structure :

$$-\Delta p = 0$$

Soit $q \in Q$, on a :

$$-\Delta p \cdot q = 0$$

$$\int_{\Omega_f} (-\Delta p \cdot q) dxdy = 0$$

$$\int_{\Omega_f} (-\Delta p \cdot q) dxdy = \int_{\Omega_f} (\overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} q) dxdy - \int_{\partial\Omega_f} (\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} \cdot q) ds = 0$$

$$a_f(p,q) = \int_{\Omega_f} (\overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} q) dxdy = \int_{\partial\Omega_f} (\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} \cdot q) ds$$

Sur Γ_f^3 : $\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0$
Sur $\Gamma_f^2 \cup \Gamma_f^1$: $p = \overline{p}$, $\overline{p}$ ne dépendant que du temps, on a aussi : $\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0$
On a donc :

$$\int_{\partial\Omega_f} (\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} \cdot q) ds = \int_{\Sigma} (\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} \cdot q) dx = -\rho_f \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} q$$

On a donc bien :

$$a_f(p,q) = -\rho_f \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} q$$

Soit $\xi \in V$, on a sur Ω_s :

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a\eta - b\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = p\,|_{\Sigma}$$

$$\left(\rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \xi\right)_{L^2} + \int_{\Omega_s} a\eta\xi dx - \int_{\Omega_s} b\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \xi dx = \int_{\Omega_s} p\xi dx = (p\,|_{\Sigma}, \xi)_{L^2}$$

$$\int_{\Omega_s} b\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \xi dx = b(\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\xi\right]_0^L - \int_{\Omega_s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} dx)$$

On a de plus d'après les conditions limites en (2) : $\xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$
D'où :

$$a_s(\eta,\xi) = \left(\rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \xi\right)_{L^2} + \int_{\Omega_s} a\eta\xi dx + \int_{\Omega_s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = (p\,|_{\Sigma}, \xi)_{L^2}$$

2
SIMULATION NUMÉRIQUE

Question 3

Pour la condition de Neumann, nous avons obtenu les équations suivantes, pour $1 \leq i \leq Nx - 1$:

$$\text{Sur } \Gamma_f^3 : \frac{p_{i,1}^n - p_{i,0}^n}{\delta y} + \frac{\delta y}{2}\left(\frac{p_{i-1,0}^n - 2 * p_{i,0}^n + p_{i+1,0}^n}{(\delta x)^2}\right) = 0$$
$$\text{Sur } \Sigma : \frac{p_{i,N_y-1}^n - p_{i,N_y-2}^n}{\delta y} + \frac{\delta y}{2}\left(\frac{-p_{i-1,N_y-1}^n + 2 * p_{i,N_y-1}^n - p_{i+1,N_y-1}^n}{(\delta x)^2}\right) = -\rho_f \cdot \frac{\eta_i^n - 2 * \eta_i^{n-1} + \eta_i^{n-2}}{(dt)^2}$$

Sur $\Gamma_f^1 et \Gamma_f^2$ nous avons :

$$p_{i,j}^n = \overline{p}(t^n)_{i,j} \text{ pour } i = 0, i = N_x - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq N_y - 1$$

A l'intérieur du tube on a le laplacien discrétisé centré :

$$\frac{-p_{i-1,j}^n + 2 * p_{i,j}^n - p_{i+1,j}^n}{(\delta x)^2} + \frac{-p_{i,j-1}^n + 2 * p_{i,j}^n - p_{i,j+1}^n}{(\delta y)^2} = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq N_x - 2 \text{ et } 1 \leq j \leq N_y - 2$$

Afin de résoudre ce système, on a effectué le changement de base suivant :

$$k = i + j * N_x, \text{ pour } 0 \leq i \leq N_x - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq N_y - 1$$

De sorte que :

$$0 \leq k \leq N_x * N_y - 1$$

En appliquant ce changement de base à nos équations, on obtient alors un système linéaire. Connaissant p à tout temps $n * dt$ on peut en déduire η :

$$\eta^{n+1} = \frac{(\delta t)^2}{\rho_s h_s}(p^n - a\eta^n) + 2\eta^n - \eta^{n-1} \tag{2}$$

Question 4

- ### Résultats

Avec les paramètres donnés en question 3, le système numérique conduit à un comportement instable qui diverge en à peine 4 ou 5 itérations.

Il faut monter jusqu'à $\rho_s \simeq 41$ pour obtenir une simulation stable. On obtient le résultat des figures 1 et 2.

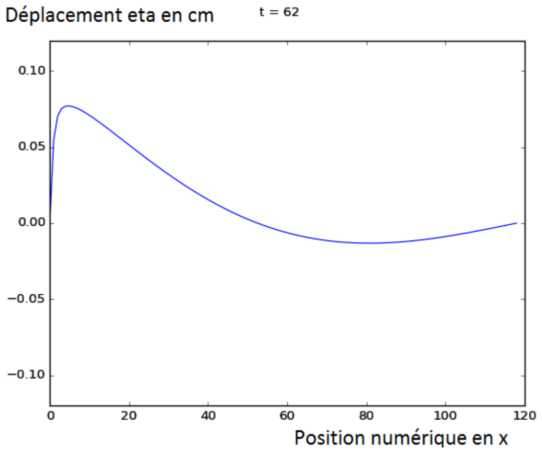

FIGURE 1 – Graphique de η au temps $t = 62 * 0.001 = 0.062$

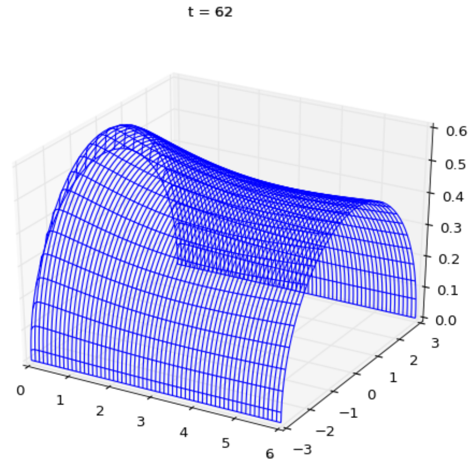

FIGURE 2 – Vu en meshgrid du vaisseau sanguin avec perturbation au temps $t = 0.062$

- **VARIATIONS DE L**

On se place donc en $\rho_s = 41$ et on fait varier L. Voici le tableau que l'on obtient :

L =	1 cm	6 cm	10 cm
Nature de la simulation	Stable	Au bord de l'instabilité	Instable

On s'est donc interrogé sur les valeurs de ρ_s qui pour chaque valeur de L serait approximativement la valeur transitoire de ρ_s pour la stabilité de la simulation. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

L =	1 cm	6 cm	10 cm
ρ_s transitoire $\simeq$	4	41	110

QUESTION 5

Afin de répondre à cette question on se place à : $\rho_s = 30$ et $L = 6$.

Pour le pas temporel $dt = 0.001$, le système est clairement instable dès la 20-ième itération. Il va surprenement de même pour $dt = 0.0001, 0.00001, 0.000001, \dots$. Voici un tableau qui récapitule à partir de quelle itération le système montre un comportement clairement instable.

dt =	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-10}
Instabilité observée à partir de n $\simeq$	20	29	36	49	140

Certes le nombre d'itération que cela prend semble s'allonger, mais le temps effectif $dt * n$ auquel cela survient est clairement de plus en plus petit. Ainsi, il est particulièrement surprenant de constater qu'il ne semble pas y avoir ici de condition CFL. Contrairement aux différences finies étudiées dans le cours, notamment le système explicite pour l'équation d'advection.

3
ANALYSE DE STABILITÉ

Question 6

Considérons v et w définies sur Σ. Montrons que : $(M_A w, v)_{L^2} = a_f(w, \mathcal{R}v)$. Ω_f est un ouvert borné régulier de classe C^1. On suppose ici les fonctions v et w suffisament réguliéres pour justifier les calculs ($\mathcal{R}v$ et $\mathcal{R}w$ sont des fonctions de $C^2(\bar{\Omega_f})$). $\mathcal{R}v$ et $\mathcal{R}w$ vérifient donc la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega_f} (\Delta \mathcal{R}w \cdot \mathcal{R}v) dxdy = -\int_{\Omega_f} (\vec{\nabla} \mathcal{R}w \cdot \vec{\nabla} \mathcal{R}v) dxdy + \int_{\partial \Omega_f} (\frac{\partial \mathcal{R}v}{\partial \vec{n_f}} \cdot \mathcal{R}w) ds$$

$$a_f(\mathcal{R}w, \mathcal{R}v) = -\int_{\Omega_f} (\Delta \mathcal{R}w \cdot \mathcal{R}v) dxdy + \int_{\partial \Omega_f} (\frac{\partial \mathcal{R}v}{\partial \vec{n_f}} \cdot \mathcal{R}w) ds$$

Sur Ω_f on a : $\Delta \mathcal{R}w = 0$ donc :

$$\int_{\Omega_f} (\Delta \mathcal{R}w \cdot \mathcal{R}v) dxdy = 0$$

De plus :

$$\int_{\partial \Omega_f} (\frac{\partial \mathcal{R}v}{\partial \vec{n_f}} \cdot \mathcal{R}w) ds = \int_{\Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}} (\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds + \int_{\Gamma_{f_3}} (\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds + \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds$$

Sur $\Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}$ on a : $\mathcal{R}w = 0$ donc :

$$\int_{\Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}} (\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds = 0$$

Sur Γ_{f_3} on a : $\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}$ donc :

$$\int_{\Gamma_{f_3}} (\vec{\nabla} Rv \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds = 0$$

Sur Σ on a : $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} w = \mathcal{R}w$ et $\vec{\nabla} Rv \cdot \vec{n_f} = v$ donc :

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \mathcal{R}v \cdot \vec{n_f}) \cdot \mathcal{R}w ds = \int_{\Sigma} (\mathcal{M}_{\mathcal{A}} w \cdot v) ds = (\mathcal{M}_{\mathcal{A}} w, v)_{L^2}$$

Ceci étant vrai pour tout w et v définis sur Σ on a donc :

$$\forall (u, w)\, (\mathcal{M}_{\mathcal{A}} w, v)_{L^2} = a_f(\mathcal{R}w, \mathcal{R}v)$$

Montrons que M_A est symétrique et positif. Par symétrie de la forme bilinéaire a_f et du produit scalaire on a :

$$\forall (u, w)\, (\mathcal{M}_{\mathcal{A}} w, v)_{L^2} = a_f(\mathcal{R}w, \mathcal{R}v) = a_f(\mathcal{R}v, \mathcal{R}w) = (\mathcal{M}_{\mathcal{A}} v, w)_{L^2} = (w, \mathcal{M}_{\mathcal{A}} v)_{L^2}$$

On n'en déduit que $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ est symétrique. De plus :

$$\forall v, (v, \mathcal{M}_\mathcal{A} v)_{L^2} = a_f(\mathcal{R}v, \mathcal{R}v) = \int_{\Omega_f} \left\| \overrightarrow{\nabla} \mathcal{R}v \right\|^2 dxdy \geq 0$$

D'où $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ est symétrique et positif.

Question 7

On cherche p^* tel que $p = p^* + \varepsilon_F \bar{p} - \rho_f \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ soit solution de (5).
Sur $\Omega_f \times [0, T]$:

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \Delta p^* + \Delta(\varepsilon_F \bar{p}) - \rho_f \Delta \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

Or, sur $\Omega_f \times [0, T]$: $\Delta \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$ donc :

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \Delta p^* + \Delta(\varepsilon_F \bar{p}) = 0 \Rightarrow \Delta p^* = -\Delta(\varepsilon_F \bar{p})$$

Sur $\Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2} \times [0, T]$:

$$p = \bar{p} \Rightarrow p^* + \varepsilon_F \bar{p} - \rho_f \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \bar{p}$$

Or, sur $\Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}$: $\varepsilon_F \bar{p} = \bar{p}$ et $\mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$ donc :

$$p = \bar{p} \Rightarrow p^* = 0$$

Sur $\Gamma_{f_3} \times [0, T]$:

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \overrightarrow{n_f}} + \frac{\partial \varepsilon_F \bar{p}}{\partial \overrightarrow{n_f}} - \rho_f \frac{\partial \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0$$

Or, sur Γ_{f_3} : $\frac{\partial \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0$ donc :

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\frac{\partial \varepsilon_F \bar{p}}{\partial \overrightarrow{n_f}}$$

Sur $\Sigma \times [0, T]$:

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \overrightarrow{n_f}} + \frac{\partial \varepsilon_F \bar{p}}{\partial \overrightarrow{n_f}} - \rho_f \frac{\partial \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Or, sur Σ : $\frac{\partial \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}}{\partial \overrightarrow{n_f}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ donc :

$$\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\frac{\partial \varepsilon_F \bar{p}}{\partial \overrightarrow{n_f}}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \Delta p^* = -\Delta(\varepsilon_F \bar{p}) & \text{dans } \Omega_f \times [0, T] \\ p^* = 0 & \text{sur } \Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2} \times [0, T] \\ \frac{\partial p^*}{\partial \overrightarrow{n_f}} = -\frac{\partial \varepsilon_F \bar{p}}{\partial \overrightarrow{n_f}} & \text{sur } \Gamma_{f_3} \cup \Sigma \end{cases}$$

QUESTION 8

Montrons que :

$$p_{ext} = (\rho_s h_s \mathcal{I} + \rho_f M_A)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L}\eta$$

On a :

$$p = p^* + \varepsilon_F \bar{p} - \rho_f \mathcal{R}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

En restreignant à Σ :

$$p\mid_\Sigma = p^*\mid_\Sigma + \varepsilon_F \bar{p}\mid_\Sigma - \rho_f \mathcal{R}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\mid_\Sigma$$

Par définition de p_{ext} :

$$p\mid_\Sigma = p_{ext} - \rho_f \mathcal{M}_\mathcal{A}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

D'après (14) :

$$p_{ext} = \rho_f \mathcal{M}_\mathcal{A}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L}\eta = (\rho_s h_s \mathcal{I} + \rho_f \mathcal{M}_\mathcal{A})\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L}\eta$$

QUESTION 9

Puisque $\overrightarrow{n_f}$ est selon y, on a sur Σ :

$$f(x)g'(R) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \forall x \tag{3}$$

On pose alors :

$$f(x) = K\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \forall x \tag{4}$$

Donc grâce à l'équation sur Σ_f^3 on en déduit :

$$g'(0) = 0 \tag{5}$$

Enfin, grâce à l'équation sur Ω_f :

$$K\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 g(y) - g''(y)\right) = 0, \forall (x,y) \in \Omega_f \tag{6}$$

On en déduit que :

$$g(y) = \frac{a\exp\left(\frac{k\pi}{L}y\right) + b\exp\left(-\frac{k\pi}{L}y\right)}{2}, \forall y \tag{7}$$

Mais puisque $g'(0) = 0$ on a : $a = b$ et donc :

$$g'(R) = \frac{1}{K} = a\left(\frac{k\pi}{L}\right)\sinh\left(\frac{k\pi}{L}R\right) \tag{8}$$

Finalement, on a bien :

$$\mathcal{R}w_k = f(x)g(y) = \left(\frac{L}{k\pi}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{L}R\right)} \tag{9}$$

Question 10

On se place à la frontière d'intéraction fluide-structure Ω_s :
Connaissant η^n puis p^n on n'en déduit η^{n+1} par la formule (9) :

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + a\eta^n = p^n$$

De plus, pour connaitre p^n, on utilise l'expression de η^n. Sur Σ on a :

$$p = p_{ext} - \rho_f \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = p_{ext} - \rho_f \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n_f}}$$

On n'en déduit de l'expression de (10) que :

$$p^n = p^n_{ext} - \rho_f \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\partial t^2}$$

On obtient donc bien la formule :

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + a\eta^n + \rho_f \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\partial t^2} = p^n_{ext}$$

Question 11

On s'intéresse à la stabilité de la solution homogène. On pose donc $p^n_{ext} = 0$. $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est un opérateur symétrique donc :

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}\eta^n, w_k)_{L^2} = (\eta^n, \mathcal{M}_{\mathcal{A}} w_k)_{L^2} = (\eta^n, \mu_k w_k)_{L^2} = \mu_k \eta^n_k$$

En effectuant le produit scalaire avec un mode w_k on obtient :

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1}_k - 2\eta^n_k + \eta^{n-1}_k}{\delta t^2} + a\eta^n_k + \rho_f \mu_k \frac{\eta^n_k - 2\eta^{n-1}_k + \eta^{n-2}_k}{\partial t^2} = 0$$

Question 12

- **Théorie :**

Explicitons le polynôme caractéristique χ de la récurrence précédente.
En réécrivant la récurrence :

$$\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2}\eta^{n+1}_k + \left(\frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2} - 2\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} + a\right)\eta^n_k + \left(\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} - 2\frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2}\right)\eta^{n-1}_k + \frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2}\eta^{n-2}_k = 0$$

D'où χ :

$$\chi(X) = \frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} X^3 + \left(\frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2} - 2\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} + a\right) X^2 + \left(\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} - 2\frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2}\right) X + \frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2}$$

On a bien :

$$\chi(-1) = -\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} + \frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2} - 2\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} + a - \frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} + 2\frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2} + \frac{\rho_f \mu_k}{\delta t^2} = a + \frac{4}{\delta t^2}(\rho_f \mu_k - \rho_s h_s)$$

De plus, puisque χ est de degré 3 et $\frac{\rho_s h_s}{\delta t^2} > 0$, on a bien :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \chi(\eta) = -\infty$$

Lorsqu'on prend un pas δt très petit on peut supposer que le terme dominant dans $\chi(-1)$ est $\frac{4}{\delta t^2}(\rho_f \mu_k - \rho_s h_s)$. On suppose donc : $\chi(-1) = \frac{4}{\delta t^2}(\rho_f \mu_k - \rho_s h_s)$. Lorsque $\rho_f \mu_k > \rho_s h_s$ alors $\chi(-1) > 0$ et le polynome caractéristique possède une racine dans $]-\infty, -1[$. Cette racine est donc de module supérieur à 1 ce qui fait diverger la solution. Il suffit qu'un des modes propres respectent la condition d'instabilité, donc au minimum μ_{max} (si il existe un k différent de 1 qui la respecte alors μ_{max} la respecte forcément aussi) . On a donc bien :

$$\frac{\rho_s h_s}{\rho_f \mu_{max}} < 1$$

- Implications numériques :

La relation précédente, avec les valeurs prises dans le schéma numérique donne :

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} < 39.78\ldots$$

Ce qui est bien cohérent avec les résultats obtenus dans le schéma numérique, même si la valeur limite semblait plutôt être $\frac{\rho_s}{\rho_f} = 41$ dans notre cas.

Il est intéressant de noter que ρ_s, ρ_f, R et h_s sont des données intrinsèques au problème, on a donc seulement la possibilité de réduire L soit la taille de la portion de vaisseau sanguin sur laquelle on réalise nos simulations pour obtenir de la stabilité.