

برازش منحنی به کمک معیار کمترین مربعات و تجزیه SVD

۱۲ اسفند ۱۴۰۱

مساله ی کم ترین مربعات زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \|b - AX\|_2 \quad X \in \mathbb{R}^n$$

فرض کنیم تجزیه ی مقدار منفرد ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = USV^T$$

خواهیم داشت:

$$\|b - AX\|_2 = \|b - USV^T X\|_2 = \|U^T b - SV^T X\|_2$$

حال قرار می دهیم:

$$C = U^T b, \quad Z = V^T X$$

$$SV^T X = SZ = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 z_1 \\ \vdots \\ s_k z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|b - AX\|_2 = \|[c_1 - s_1 z_1, c_2 - s_2 z_2, \dots, c_k - s_k z_k, c_{k+1}, \dots, c_m]\|_2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k (c_i - s_i z_i)^2 + \sum_{i=k+1}^m c_i^2 \right)^{1/2}$$

و این عبارت زمانی می نیم می شود که:

$$z_i = \begin{cases} \frac{c_i}{s_i}, & i \leq k \\ \text{دلخواه}, & k < i \leq n \end{cases}$$

با مشخص شدن بردار Z ، با توجه به تساوی $Z = V^T X$ ، بردار مجهول X از رابطه $X = VZ$ محاسبه می شود.

مثال ۱. با استفاده از تجزیه SVD ، چند جمله ای درجه ۵ را طوری بیابید که با معیار کم ترین مربعات بهترین تقریب داده های زیر باشد.

x_i	y_i
۰	۱
۰.۲۵	۱.۲۸۴۰
۰.۵	۱.۶۴۸۷
۰.۷۵	۲.۱۱۷۰
۱.۰۰	۲.۷۱۸۳

حل. چند جمله ای درجه ۵ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

هدف یافتن ضرایب a_0 ، a_1 و a_2 می باشد. اگر داده های (x_i, y_i) در چند جمله ای فوق صدق می کرد به ازای $i = 1, \dots, 5$ ، تساوی $p_2(x_i) = y_i$ برقرار می بود، یعنی:

$$\begin{aligned} i=1: & a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ i=2: & a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \\ i=3: & a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 = y_3 \\ i=4: & a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 = y_4 \\ i=5: & a_0 + a_1x_5 + a_2x_5^2 = y_5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

و با جای گذاری x_i و y_i ها:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix} \quad (1)$$

اما این دستگاه جواب ندارد، لذا با معیار کم ترین مربعات، می خواهیم بردار $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ را طوری بیابیم که $\|b - AX\|_2$ را می نیم کند. تجزی SVD ماتریس A به صورت زیر به دست می آید:

$$A = USV^T$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.63 & 0.63 & -0.014 & -0.3378 \\ -0.34 & -0.45 & -0.21 & 0.255 & 0.75 \\ -0.41 & -0.19 & 0.52 & -0.68 & -0.22 \\ -0.50 & -0.14 & 0.31 & -0.65 & -0.45 \\ -0.60 & 0.57 & 0.43 & -0.21 & -0.2678 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9371 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1627 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^{\top} = \begin{bmatrix} -0.79 & -0.47 & -0.37 \\ -0.59 & 0.51 & 0.62 \\ 0.1027 & 0.71 & 0.68 \end{bmatrix}$$

$$C = U^{\top}b = U^{\top} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.1372 \\ 0.3473 \\ 0.0099 \\ -0.0059 \\ 0.0155 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \frac{c_1}{s_1} = -1.526, \; z_2 = \frac{c_2}{s_2} = 0.3706, \; z_3 = \frac{c_3}{s_3} = 0.0609$$

$$X = \begin{bmatrix} a_{\circ} \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \; VZ = \begin{bmatrix} 1.005 \\ 0.8642 \\ 0.8437 \end{bmatrix}$$

$$P_7(x) = 1/0.5 + 0.8642x + 0.8437x^7$$