برازش منحنی به کمک معیار کم‌ترین مربعات و تجزیه SVD

۸ اسفند ۱۴۰۱

مساله ی کم ترین مربعات زیر را در نظر بگیرید:

$min\|b-AX\|_2 \quad X \in \mathbb{R}^n$

فرض کنیم تجزیه ی مقدار منفرد ماتریس A به صورت زیر باشد:

$A = USV^\top$

خواهیم داشت:

$\|b-AX\|_2 = \left\|b-USV^\top X\right\|_2 = \left\|U^\top b - SV^\top X\right\|_2$

حال قرار می دهیم:

$$C = U^\top b,\ Z = V^\top X$$

$$SV^\top X = SZ = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 z_1 \\ \vdots \\ s_k z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\implies \|b-AX\|_2 = \|[c_1 - s_1 z_1,\ c_2 - s_2 z_2,\ \cdots, c_k - s_k z_k, c_{k+1}, \cdots, c_m]\|_2$

$= (\sum_{i=1}^{k}(c_i - s_i z_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{m} c_i^2)^{1/2}$

و این عبارت زمانی می نیمم می شود که:

$$z_i = \begin{cases} \frac{c_i}{s_i}, & i \le i \le k \\ \text{دلخواه}, & k < i \le n \end{cases}$$

با مشخص شدن بردار Z ، با توجه به تساوی $Z = V^\top X$ ، بردار مجهول X از رابطه ی $X = VZ$ محاسبه می شود.

مثال ۱. با استفاده از تجزیه ی SVD ، چند جمله ای درجه ی دو را طوری بیابید که با معیار کم ترین مربعات بهترین تقریب داده های زیر باشد.

x_i	y_i
۰	۱
۰/۲۵	۱/۲۸۴۰
۰/۵	۱/۶۴۸۷
۰/۷۵	۲/۱۱۷۰
۱/۰۰	۲/۷۱۸۳

حل. چند جمله ای درجه ی دو p_2 را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

هدف یافتن ضرایب a_0 a_1 و a_2 می باشد. اگر داده های (x_i, y_i) در چند جمله ای فوق صدق می کرد به ازای $i = 1, \cdots, 5$ ، تساوی $p_2(x_i) = y_i$ برقرار می بود، یعنی:

$$\begin{array}{ll} i=1: & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ i=2: & a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \\ i=3: & a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3 \\ i=4: & a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 = y_4 \\ i=5: & a_0 + a_1 x_5 + a_2 x_5^2 = y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

و با جای گذاری x_i و y_i ها:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix}} \tag{1}$$

اما این دستگاه جواب ندارد، لذا با معیار کم ترین مربعات، می خواهیم بردار $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ را طوری بیابیم که $\|b - AX\|_2$ را می نیمم کند. تجزی ی SVD ماتریس A به صورت زیر به دست می آید:

$$A = USV^\top$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.63 & 0.63 & -0.014 & -0.3378 \\ -0.34 & -0.45 & -0.21 & 0.255 & 0.75 \\ -0.41 & -0.19 & 0.52 & -0.68 & -0.22 \\ -0.50 & -0.14 & 0.31 & -0.65 & -0.45 \\ -0.60 & 0.57 & 0.43 & -0.21 & -0.2678 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} ۲.۷۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۹۳۷۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰.۱۶۲۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},\ V^{\top}=\begin{bmatrix} -۰.۷۹ & -۰.۴۷ & -۰.۳۷ \\ -۰.۵۹ & ۰.۵۱ & ۰.۶۲ \\ ۰.۱۰۲۷ & ۰.۷۱ & ۰.۶۸ \end{bmatrix}$$

$$C=U^{\top}b=U^{\top}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \\ y_۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴.۱۳۷۲ \\ ۰.۳۴۷۳ \\ ۰.۰۰۹۹ \\ -۰.۰۰۵۹ \\ ۰.۰۱۵۵ \end{bmatrix}$$

$$z_۱=\frac{c_۱}{s_۱}=-۱٫۵۲۶,\ z_۲=\frac{c_۲}{s_۲}=۰٫۳۷۰۶,\ z_۳=\frac{c_۳}{s_۳}=۰٫۰۶۰۹$$

$$X=\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix},\ VZ=\begin{bmatrix} ۱.۰۰۵ \\ ۰.۸۶۴۲ \\ ۰.۸۴۳۷ \end{bmatrix}$$

$$P_۲(x)=۱٫۰۰۵+۰٫۸۶۴۲x+۰٫۸۴۳۷x^۲$$