امیرمحمد عزتی 402212269

سوال ①

الف) $\text{null}(A) = \text{null}(A^TA)$

1

فرض ⊥: $x \in \text{Null}(A) \Rightarrow (Ax = 0)$ ضرب A^T

$\Rightarrow A^TAx = A^T0 = 0 \Rightarrow x \in \text{Null}(A^TA)$

$\Rightarrow \boxed{\text{Null}(A) \subseteq \text{Null}(A^TA)}$ ①

فرض 2: $x \in \text{Null}(A^TA) \Rightarrow (A^TAx = 0)$ ضرب x^T

$\Rightarrow x^TA^TAx = x^T0 = 0 \Rightarrow (Ax)^TAx = 0$

$\Rightarrow \|Ax\|_2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Null}(A)$

$\Rightarrow \boxed{\text{Null}(A^TA) \subseteq \text{Null}(A)}$ ②

①, ② $\Rightarrow \text{Null}(A) = \text{Null}(A^TA)$

ب) $\|A\|_2 = \sup_{\|U\| = \|V\| = 1} U^TAV \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

می دانیم: $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ این ترم برابر با حداکثر مقداری است که ماتریس A می تواند بردار واحد x را بکشد.

این عبارت را می توانیم بصورت ضرب داخلی دو بردار U و AV بنویسیم. آنگاه:

$\sup_{\|U\| = \|V\| = 1} U^TAV$

زمانی که بردار V در جهت AV باشد ماکزیمم ترین حالت پیش می آید چون قدر داخلی ماکزیمم می شود.
همچنین دو بردار V و U نرم واحد دارند.

پس U را مانند روبه رو در نظر می گیریم: $U = \frac{AV}{\|AV\|}$

$$U^T AV = \frac{(AV)^T AV}{\|AV\|_2} = \|AV\|_2$$

$$\sup_{\|V\|_2=1} \|AV\|_2 = \text{Spectral norm of } A$$

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

---

2) $\|A\|_2 = \sigma_{max}(A)$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

تکیک تجزیه SVD: $A = U\Sigma V^T$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 = \|U\Sigma V^T x\|_2 \xrightarrow{U \text{ is orthogonal}} \|Ax\|_2 = \|\Sigma V^T x\|_2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 = \|\Sigma y\|_2 \quad \text{where} \quad y = V^T x$$

زمانی $\|\Sigma y\|$ ماکزیمم می شود که y با بردار اولیه پایه align باشد یعنی در جهت آن باشد
پس $\|Ax\|_2 \leq \sigma_1$. پس بزرگترین مقدار $\|Ax\|_2$ می تواند دقیقا σ_1 باشد که بزرگترین Singular value است. $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_{min}$

$$\|A\|_2 = \sigma_{max}(A)$$

ج) $\|A^TA\|_2 = \|AA^T\|_2 = \|A\|_2^2$

باروش SVD :

$A = U\Sigma V^T$

$A^TA = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$

- پس Singular value های A^TA نسبت به A به توان 2 رسیده‌اند.

با توجه به رابطه بخش "ج" که داشتیم :

$\|A^TA\|_2 = \sigma_{max}(A^TA) = \sigma_{max}(A)^2 = \|A\|_2^2$

همینطور برای $\|AA^T\|_2$ نیز مانند بالا می‌توان نوشت .

د) $Tr(A^TB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A^TB = K_{n\times n} \Rightarrow Tr(K)_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} K_{ii}$

$K_{11} = \sum_{j=1}^{m} A^T_{1j} B_{j1} = \sum_{j=1}^{m} A_{j1}\cdot B_{j1}$

حال اگر همه element های قطر اصلی K را بخواهیم محاسبه کنیم کافیه یک روی Sum روی اندیس دوم ماتریس نیز بزنیم .

$Tr(K) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m}^{m} A_{ji}B_{ji}$

چون جمع هم ضرب‌های اندیس های دوماتریس را داریم می‌توانیم index ها را عوض کنیم:

$Tr(K) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = Tr(A^TB)$

ط) $\|A\|_F = \sqrt{\sum \sigma_i^2(A)}$

$$\|A\|_F = \sqrt{Tr(A^TA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

$$\sqrt{Tr(A^TA)} \overset{SVD}{=} \sqrt{Tr(V\Sigma^2V^T)} \xrightarrow[V \text{ is orthogonal}]{Tr(V\Sigma^2V^T) = Tr(\Sigma^2)}$$

$$Tr(\Sigma^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_{min(n,m)}^2 = \sum_{i=1}^{min(n,m)} \sigma_i^2$$

$$\Rightarrow \|A\|_F = \sqrt{Tr(\Sigma^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{min(n,m} \sigma_i^2(A)}$$

ی) $Tr(A) = \sum \lambda_i$

eigenvalue decomposition

$$A_{n\times n} = Q\Lambda Q^{-1}$$

$$Tr(A) = Tr(Q\Lambda Q^{-1}) = Tr(\Lambda)$$

تغییر پذیری trace نسبت به Similarity transformation

$$\Rightarrow Tr(A) = Tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ک) $\|A+X\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|\alpha\|_F^2 + 2\,Tr(A^TB)$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} \Rightarrow \|A\|_F^2 = \sum_i \sum_j A_{ij}^2$$

$$\Rightarrow \|A+X\|_F^2 = \sum_i \sum_j (A_{ij} + X_{ij})^2 \Rightarrow$$

ج ـ ۱۵۱) $\|A+X\|_F^2 = \sum\sum A_{ij}^2 + \sum\sum X_{ij}^2 + 2\sum\sum A_{ij}X_{ij}$

(*) $\sum\sum A_{ij}X_{ij} = Tr(A^TX)$ در بخش "ج" اثبات کردیم که:

دو تا ترم اول هم که تعریف نرم فربنیوس هستند:

So

$$\Longrightarrow \|A+X\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|X\|_F^2 + 2\,Tr(A^TX)$$

---

b) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

eigenvalue decomposition: $A = Q\Lambda Q^{-1}$

$$det(A) = det(Q\Lambda Q^{-1}) = det(Q)\cdot det(\Lambda)\cdot det(Q^{-1})$$

$$\Rightarrow det(A) = det(Q)\cdot det(\Lambda)\cdot \frac{1}{det(Q)} = det(\Lambda)$$

Λ: ماتریس قطری nxn که روی قطرش مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ وجود دارد.

$$\Rightarrow det(A) = det(\Lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ب) $\|A\|_F \geq \|A\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \geq \frac{Tr(A)}{n} \geq \sqrt[n]{det(A)}$

چون: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2(A)}$, $\|A\|_2 = \sigma_{max}(A)$

پس: $\boxed{\|A\|_F \geq \|A\|_2}$

از آنجایی که $\|A\|_2$ بزرگترین Singular Value است و $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F$ میانگین Singular Value هاست. پس

$$\|A\|_2 \geq \frac{\|A\|_F}{\sqrt{n}}$$

از آنجایی که نرم فربنیوس جمع Singular Value ها است. و $\frac{\|A\|_F}{\sqrt{n}}$ میانگین Singular Value هاست. و عبارت $\frac{Tr(A)}{n}$ تقریبا میانگین آن ها است. و عبارت eigen value ماتریس A است، چون شامل اعداد مثبت و منفی می‌شود امّا Singular value ها همیشه مثبت اند پس:

$$\frac{\|A\|_F}{\sqrt{n}} \geq \frac{Tr(A)}{n} = \frac{\sum_i \lambda_i}{n}$$

برای بخش آخر اثبات از eigen value Decomposition استفاده کنیم:

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

$$\begin{cases} Tr(A) = Tr(\Lambda) = \sum_i \lambda_i \\ det(A) = det(\Lambda) = \prod_i \lambda_i \end{cases}$$

از آنجایی که میانگین حسابی بیشتر از میانگین هندسی است پس:

$$\frac{\sum_i \lambda_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_i \lambda_i} \Rightarrow \frac{Tr(A)}{n} \geq \sqrt[n]{det(A)}$$

سوال ①

2) باتوجه به قضیه مقدار میانگین:

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = f'(c) \quad , \quad c \in (a,b)$$

$$f(x) = \log(1+e^x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \frac{d}{dx}(1+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow \qquad x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \boxed{0 \leq f'(x) \leq 1}$$

$$\text{So} \Rightarrow \quad \frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = f'(c) \leq 1 \Rightarrow$$

$$|f(b)-f(a)| \leq \underbrace{1}_{K} \times |b-a|$$

پس این تابع 1- lipschitz است.

---

3) اگر همه توابع f_i یک تابع p_i-lipschitz باشند. آنگاه:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq p_i |x-y|$$

اگر برای f_2 این رابطه را بنویسیم و سپس f_1 را به عنوان ورودی به آن بدهیم: $f_2 \circ f_1$

$$|f_2(f_1(x)) - f_2(f_1(x))| \leq p_2 |f_1(x) - f_2(x)|$$

$$|f_1(a)-f_1(y)| \leq p_1 |x-y| \xrightarrow{\text{So}}$$

$$|f_2(f_1(x)) - f_2(f_1(y))| \leq P_2 P_1 |x-y|$$

اگر این عبارت را تعمیم بدهیم آنگاه:

$$|f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x) - f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(y)| \leq P_n P_{n-1} \dots P_1 |x-y|$$

پس ثابت lipschitz این تابع برابر است با:

$$K = P_n \times P_{n-1} \times \dots \times P_1$$

---

4) فرض می‌کنیم دو تابع f و g لیپشیتز هستند. آنگاه:

$$|f(x)-f(y)| \leq L_f |x-y|$$

$$|g(x)-g(y)| \leq L_g |x-y|$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \leq (L_f+L_g)|x-y|$$

از آنجایی که $|A+B| \leq |A|+|B|$ است پس:

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

$$\xRightarrow{\text{so}} |(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq (L_f+L_g)|x-y|$$

پس ثابت برای تابع $f+g$ برابر با L_f+L_g است.

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$

$$= |f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))|$$

سوال ①

ادامه بخش 4) با توجه به نامساوی مثلثی :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le |f(x)|\,|g(x)-g(y)| + |g(y)|\,|f(x)-f(y)|$$

$$|g(x)-g(y)| \le L_g\,|x-y|$$

$$|f(x)-f_y| \le L_f\,|x-y|$$

اگر f و g کراندار باشند پس $|f(x)| \le K_f$, $|g(y)| \le K_g$ است پس میتوان کلی خواهیم داشت :

$$|\underbrace{f(x)g(x) - f(y)g(y)}_{f.g\,(x)}| \le (K_f L_f + K_g L_g)\,|x-y|$$

$\leftarrow$ ثابت lipschitz

سوال ②

تابع شبکه دولایه :

$$y_k(x,w) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{M} w_{kj}^{(2)}\, h\left(\sum_{i=1}^{D} w_{ji}^{(1)} x_i + w_{j0}\right) + w_{k0}^{(2)}\right)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad , \quad \tanh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

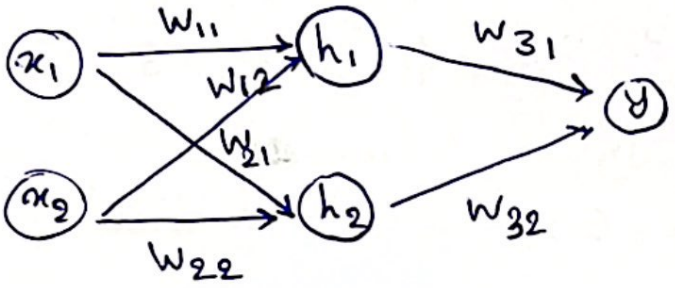
$$\boxed{\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

اگر $\tanh$ را به جای h قرار دهیم آنگاه :

$$y_k(x,w) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_{kj}^{(2)}\, h\left(\sum_{i=1}^{D} w_{ji}^{(1)} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} w_{j0}^{(1)}\right) + w_{k0}^{(2)} + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_{kj}\right)$$

$$\begin{cases} w_{kj}^{(2)\prime} = \frac{1}{2} w_{kj}^{(2)} \\ w_{k0}^{(2)\prime} = w_{k0}^{(2)} + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} w_{kj} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{ji}^{(1)\prime} = \frac{1}{2} w_{ji}^{(1)} \\ w_{j0}^{(1)\prime} = \frac{1}{2} w_{j0}^{(1)} \end{cases}$$

سوال ③



۱) خطی که بتواند S_2 و S_3 را جدا کند خط $x_1 = 3$ است.

برای اینکه شرط روبه رو را در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} h_1(x) = 0 & S_3 \\ h_1(x) = 1 & S_2 \end{cases}$$

$$z_1(x) = w_{11} x_1 + w_{12} x_2 + b_1$$

$$h_1(x) = \phi(z_1(x)) \quad \text{where} \quad \phi(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

برای اینکه به ازای $z > 0$ دسته S_2 را تشخیص دهیم و به ازای $z \leq 0$ دسته S_3 باید خط $x_1 - 3 = 0$ را قرینه کنیم پس در این حالت z برابر است با:

$$z_1(x) = -x_1 + 3 \Rightarrow \begin{cases} z > 0 & \phi(z) = 1 \Rightarrow S_2 \\ z \leq 0 & \phi(z) = 0 \Rightarrow S_3 \end{cases}$$

So: $\begin{cases} w_{11} = -1 \\ w_{12} = 0 \end{cases}$, $b_1 = 3$

۲) برای اینکه دو دسته S_2 و S_1 را جدا کنیم می‌توانیم از خطی که از دو نقطه (3 و 1) و (1 و 2) می‌گذرد را بعنوان جداکننده در نظر بگیریم که بین این دو دسته قرار می‌گیرد. این خط برابر است با:

$$x_2 + 2x_1 - 5 = 0$$

پس اگر Z_2 را بصورت روبرو تعریف کنیم:

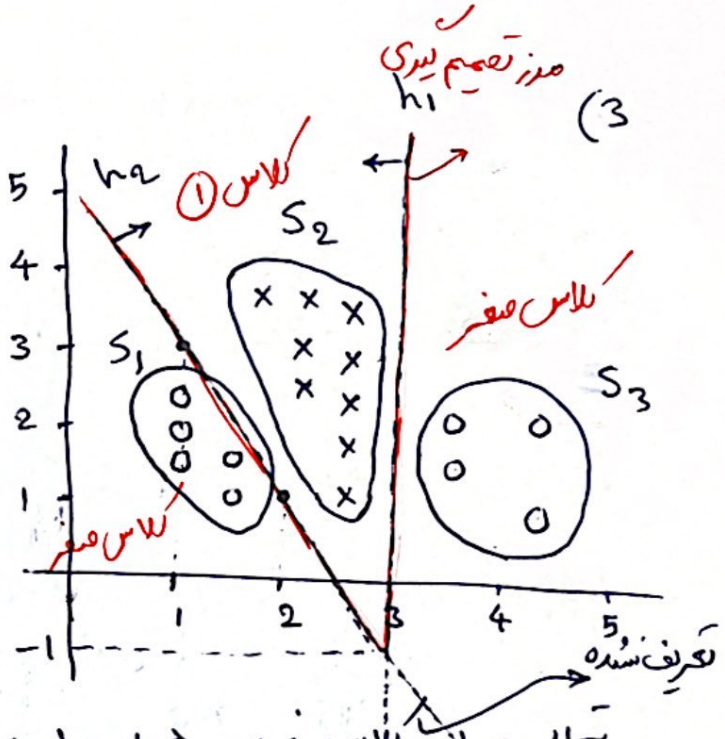
$>0 \quad \phi(z)=1 \quad S_2$

$\leq 0 \quad \phi(z)=0 \quad S_1$

$$Z_2(x) = 2x_1 + x_2 - 5$$

$$h_2(x) = \phi(Z_2(x))$$

$$\begin{cases} W_{21}=2 \\ W_{22}=1 \end{cases}, \quad b_2=-5$$



$S_1, S_3 \Rightarrow$ کلاس دایره

$S_2 \Rightarrow$ کلاس x

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & S_3 \\ 1 & S_2 \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & S_1 \\ 1 & S_2 \end{cases}$$

تحلیل: برای کلاس ضربدر همواره هردو نورون h_1 و h_2 یک می‌شود و برای کلاس دایره نیز هردو صفر می‌شوند. اگر جمع این دو نورون را حساب کنیم:

$$h_1(x) + h_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{کلاس ضربدر} \\ 1 & \text{کلاس دایره} \\ 0 & \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

← نقطه‌ای که هم سمت راست h_1 قرار بگیرد و هم‌زمان سمت چپ h_2 قرار بگیرد مربوط به هیچ کلاسی نیست.

← اگر یک بایاس $-\frac{3}{2}$ به جمع بالا بدهیم کلاس‌بندی بعد از اعمال تابع ϕ درست انجام می‌شود

$$h_1(x) + h_2(x) - \frac{3}{2} = \begin{cases} 0.5 & \text{کلاس ضربدر} \\ -0.5 & \text{کلاس دایره} \end{cases} \qquad \phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{کلاس ضربدر} \\ 0 & \text{کلاس دایره} \end{cases}$$

$$W_{31}=1, \quad W_{32}=1, \quad b_3=-\frac{3}{2}$$

4) الف) دلیل استفاده از SGD متعدد است:

1) وقتی از mini batch استفاده می‌کنیم بار محاسباتی در یک iteration کاهش می‌یابد یعنی به جای اینکه ماتریس ورودی $[m \times d]$ باشد که بار محاسباتی ضرب و محاسبه گرادیان را زیاد می‌کند. می‌توانیم در هر mini batch از K تا Sample از m تا استفاده کنیم و ماتریس ورودی $[K \times d]$ باشد در هر iteration $(K \ll m)$

2) از لحاظ حافظه و GPU به صرفه است. چون نیاز است تعداد داده کمتری در GPU برای محاسبات در هر iteration ذخیره کنیم و در iteration بعدی داده‌های قبل که نیاز نداریم را می‌توانیم پاک کنیم.

3) آپدیت گرادیان در نتیجه محاسبه لاس زودتر انجام می‌شود. یعنی شبکه را سریع‌تر آپدیت می‌کنیم و می‌توانیم کاهش لاس و عملکرد شبکه را ببینیم.

ب)

$$h(x) = \sigma(W_1 x + b_1)$$

$$p(x) = \sigma(W_2 h(x) + b_2)$$

$$\ell = \frac{-1}{m} \sum_i y_i \log p_i + (1-y_i) \log(1-p_i)$$

$$h_i = h(x_i)$$

$$p_i = p(x_i)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial p_i} = \frac{-1}{m}\left(\frac{y_i}{p_i} - \frac{1-y_i}{1-p_i}\right)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial W_2} = p_i(1-p_i)\, h(x_i) \quad (h_i)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial W_2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial W_2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial p_i} p_i(1-p_i)\, h_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial p_i} \; p_i(1-p_i)$$

$\frac{\partial p_i}{\partial b_1} = p_i(1-p_i)$

$$\frac{\partial p_i}{\partial h_i} = p_i(1-p_i)\cdot w_2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial h_i} = \frac{\partial \ell}{\partial p_i}\,\frac{\partial p_i}{\partial h_i} = \frac{\partial \ell}{\partial p_i}\, p_i(1-p_i)\cdot w_2$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial w_1} = h_i(1-h_i)\cdot x_i^T$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial h_i}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial h_i}\cdot h_i(1-h_i)\cdot x_i^T$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial h_i}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ell}{\partial h_i}\cdot h_i(1-h_i)$$

سوال ④

بخش اول

Input image: $i \times i \times 3$

first layer: $K_1 \times K_1 \times 3$ فیلتر d_1 تا

output: $(i-K_1+1)\times(i-K_1+1)\times d_1$

$\left(\frac{H-K+2P}{S}+1\right)\cdot\left(\frac{W-K+2P}{S}+1\right)$

Second layer: $K_2 \times K_2 \times d_1$ فیلتر d_2 تا

output: $(i-K_1-K_2+2)\times(i-K_1-K_2+2)\times d_2$

Third layer: $K_3 \times K_3 \times d_2$ فیلتر d_3 تا dilation = n

dilation=n ↓ $K_{effective} = K_3 + (K_3-1)(n-1)$

ادامه سوال ④

Third layer:

$$\text{output}: \; i - K_1 - K_2 + 2 - \left(K_3 + (K_3 - 1)(n-1)\right) + 1$$

$$\Rightarrow \left(i - K_1 - K_2 - nK_3 + n + 2\right) \times \left(i - K_1 - K_2 - nK_3 + n + 2\right) \times d_3$$

بخش دوم

- first layer $K \times K$ dilation $= d_1$
- second layer $K \times K$ dilation $= d_2$
- Third layer $K \times K$ dilation $= d_3$

فرمول receptive field اگر stride=1 باشد برابرست با:

$$RF_K = 1 + \sum_{i=1}^{K} (F - 1) \times d$$

K: تعداد لایه — F: سایز فیلتر — d: dilation

$$RF_3 = 1 + (K-1)d_1 + (K-1)d_2 + (K-1)d_3$$

$$\Rightarrow RF_3 = RF_{output} = 1 + (K-1)(d_1 + d_2 + d_3)$$

محدوده دید برای عنصرهای نرون خروجی