به نام خدا

دانشکده مهندسی کامپیوتر

امنیت و حریم خصوصی در یادگیری ماشین (۴۰۸۱۶)

نیم‌سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

استاد درس: دکتر امیرمهدی صادق‌زاده

طراحان: علی جاوری، محمدرضا میرباقری، رئوف زارع

تمرین اول

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ یکشنبه ۲۹ مهر ۱۴۰۳

نکات و قواعد

۱. سوالات خود را زیر پیام مربوطه در Quera مطرح نمایید.

۲. لطفا مطابق تاکید پیشین، حتما آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی را رعایت نمایید. در صورت تخطی از آیین‌نامه، در بهترین حالت مجبور به حذف درس خواهید شد.

۳. در صورتی که پاسخ‌های سوالات نظری را به صورت دست‌نویس آماده کرده‌اید، لطفا تصاویر واضحی از پاسخ‌های خود ارسال کنید. در صورت ناخوانا بودن پاسخ ارسالی، نمره‌ای به پاسخ ارسال شده تعلق نمی‌گیرد.

۴. همه‌ی فایل‌های مربوط به پاسخ خود را در یک فایل فشرده و با نام SPML_HW۱_StdNum_FirstName_LastName ذخیره کرده و ارسال نمائید.

سوال ۱ مروری بر پیشنیازها (۵۰ نمره)

نرم اسپکترال یا نرم ۲ـالحاقی ماتریس A را به صورت $||A||_2$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

نرم فروبنیوس ماتریس $A \in R^{m\times n}$ عبارت است از $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}\{A^T A\}}$ (اثر یا Tr ماتریس،جمع درایه‌های رو قطر اصلی آن ماتریس می‌باشد.)

به یک تابع حقیقی $f : R \longleftarrow R$ پیوسته لیپشیتز می‌گوییم در صورتی که عدد حقیقی و مثبت k وجود داشته باشد به طوری که برای هر x_1, x_2 داشته باشیم:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

و به این k ثابت لیپشیتز می‌گوییم.

۱. عبارت‌های زیر را ثابت کنید. (در اینجا منظور از $\sigma_{\max}(A)$ بزرگترین مقدار تکین و λ_iها همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.)

(الف)

$$null(A) = null(A^T A)$$

(ب)

$$\|A\|_2 = \sup_{\|U\|=\|V\|=1} U^T A V, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(ج)

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$

(د)

$$\|A^T A\|_2 = \|AA^T\|_2 = \|A\|_2^2$$

(ه)

$$Tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_i j B_i j, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(و)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum \sigma_i^2(A)}$$

(ز)

$$Tr(A) = \lambda_i$$

(ح)

$$\|A + X\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|X\|_f^2 + 2Tr(A^T B)$$

(ط)

$$det(A) = \Pi_{i=1}^{n}$$

(ی)

$$\|A\|_F \geq \|A\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \geq \frac{Tr(A)}{n} \geq \sqrt[n]{det(A)}$$

۲. ثابت کنید تابع $f(x) = \log(1 + \exp x)$ یک تابع $1 - lipschitz$ می‌باشد. (راهنمایی: ابتدا به وسیله قضیه مقدار میانگین ثابت کنید اگر مشتق تابع محدود باشد تابع $lipschitz$ خواهد بود و سپس حکم را اثبات کنید.)

۳. توابع $\{f_i\}_i^n$ ، $p_i - lipschitz$ هستند. ثابت کنید $f_n o f_{n-1} o \dots f_1$ نیز $lipschitz$ است. ضریب آن را بیابید.

۴. دو تابع f و g، $lipschitz$ هستند. ثابت کنید $f \times g$ و $f + g$ نیز $lipschitz$ می‌باشند. ضرایب آن‌ها را نیز با فرض اینکه ضرایب لیپشیتز f و g به ترتیب L_f و L_g می‌باشد، بیابید.

سوال ۲ توابع فعالساز (۲۵ نمره)

تابع یک شبکه دو لایه از فرم زیر را در نظر بگیرید

$$y_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{M} w_{kj}^{(2)} h\left(\sum_{i=1}^{D} w_{ji}^{(1)} x_i + w_{j0}^{(1)}\right) + w_{k0}^{(2)}\right).$$

که در آن توابع فعال‌سازی غیرخطی واحد پنهان[1] $h(\cdot)$ با استفاده از توابع سیگموید لوجستیک به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\sigma(a) = \{1 + \exp(-a)\}^{-1}.$$

نشان دهید که یک شبکه معادل وجود دارد که دقیقاً همان تابع را محاسبه می‌کند، اما توابع فعال‌سازی واحد پنهان آن $\tanh(a)$ می‌باشد که به شکل زیر تعریف شده‌است:

$$\tanh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$$

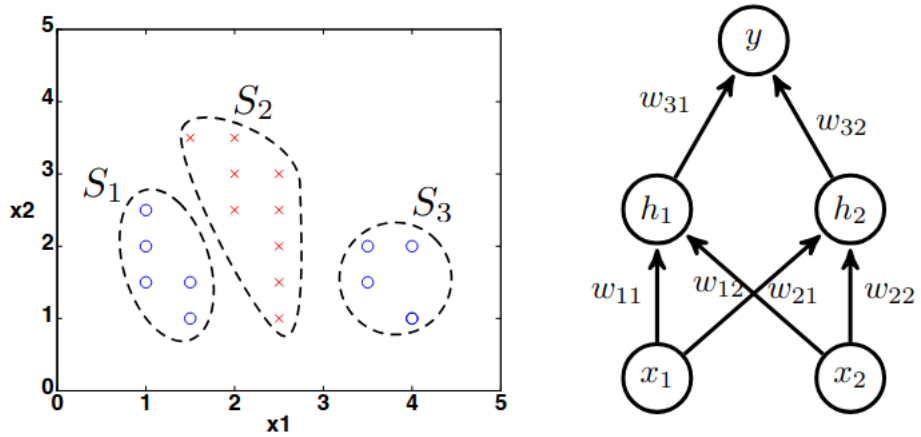
راهنمایی: ابتدا رابطه بین $\sigma(a)$ و $\tanh(a)$ را پیدا کنید و سپس نشان دهید پارامترهای شبکه‌ها به وسیله تبدیلات خطی باهم تفاوت دارند.

[1] *Hidden-unit nonlinear activation functions*

سوال ۳ شبکه‌های عصبی (۲۵ نمره)

در این سوال ما قصد داریم از یک شبکه عصبی برای دسته بندی علامت های ضرب ($\times$) و علامت های دایره‌ای ($\circ$) نشان داده شده در شکل ۱ استفاده کنیم. اگرچه علامت‌های ضرب و دایره خطی تفکیک‌پذیر نیستند، می‌توانیم آن‌ها را به سه دسته S_1، S_2 و S_3 (همانطور که در شکل۱ نشان داده شده) تقسیم‌بندی کنیم، به گونه‌ای که S_1 خطی تفکیک‌پذیر از S_2 و S_2 خطی تفکیک‌پذیر از S_3 باشد. سپس از این روش برای طراحی وزن‌های شبکه عصبی نشان داده شده در شکل۱، در جهت کلاس‌بندی مجموعه آموزشی استفاده خواهیم‌کرد. برای تمامی گره‌ها از تابع فعال‌سازی *threshold* که به صورت زیر تعریف شده، استفاده می‌کنیم.

$$\phi(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$



(a) The dataset with groups S_1, S_2, and S_3. (b) The neural network architecture

شکل ۱

۱. در قسمت اول، پارامترهای $w_{11}w_{12}$، و b_1 نورون با برچسب h_1 را طوری تنظیم می‌کنیم که خروجی آن $h_1(x) = \phi(w_{11}x_1+w_{12}x_2+b_1)$ یک جداکننده خطی بین مجموعه‌های S_2 و S_3 تشکیل دهد.
وزن‌های مربوط به $w_{11}w_{12}$، و b_1 را به نحوی مشخص کنید که $h_1(x) = 0$ برای همه نقاط در S_3 و $h_1(x) = 1$ برای همه نقاط در S_2 باشد.

۲. در این مرحله، پارامترهای $w_{21}w_{22}$، و b_2 نورون با برچسب h_2 را به گونه‌ای تنظیم می‌کنیم که خروجی آن $h_2(x) = \phi(w_{21}x_1+w_{22}x_2+b_2)$ یک جداکننده خطی بین مجموعه‌های S_1 و S_2 تشکیل دهد.
وزن‌های مربوط به $w_{21}w_{22}$، و b_2 را به نحوی مشخص کنید که $h_2(x) = 0$ برای همه نقاط در S_1 و $h_2(x) = 1$ برای همه نقاط در S_2 باشد.

۳. اکنون دو طبقه‌بندی کننده h_1 (برای طبقه‌بندی S_2 از S_3) و h_2 (برای طبقه‌بندی S_1 از S_2) داریم. وزن‌های نورون نهایی شبکه عصبی را بر اساس نتایج h_1 و h_2 تنظیم می‌کنیم تا تلاقی‌های دایره‌ها را طبقه‌بندی کنیم. فرض کنید $h_3(x) = \phi(w_{31}h_1(x) + w_{32}h_2(x) + b_3)$ باشد.

(الف) عبارت های w_{31}، w_{32}، b_3 را به گونه‌ای محاسبه کنید که $h_3(x)$ کل مجموعه داده را به درستی طبقه‌بندی کند.
(ب) مرز تصمیم مورد نظر خود را رسم کنید.

۴. در مثال بالا، ما باید با توجه به داده‌ها وزن‌ها را یاد بگیریم. در اولین مرحله، باید گرادیان‌های پارامترهای شبکه عصبی را بدست آوریم.
فرض کنید ما داده‌های m نمونه x_i با برچسب y_i داریم، که $i \in [1, m]$. x_i یک بردار $d \times 1$ است و $y_i \in \{0, 1\}$. ما از داده‌ها برای آموزش یک شبکه عصبی با یک لایه مخفی استفاده می‌کنیم:

$$h(x) = \sigma(W_1 x + b_1)$$
$$p(x) = \sigma(W_2 h(x) + b_2)$$

که در آن $\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$ تابع سیگموید است، W_1 یک ماتریس $n \times d$ و b_1 یک بردار $n \times 1$ است. W_2 یک ماتریس $1 \times n$ و b_2 یک بردار 1×1 است.

ما از تابع خطای آنتروپی متقابل استفاده کرده و منفی لگاریتم درست‌نمایی را برای آموزش شبکه عصبی به حداقل می‌رسانیم:

$$l = \frac{1}{m}\sum_i l_i = \frac{1}{m}\sum_i -(y_i \log p_i + (1-y_i)\log(1-p_i)),$$

که در آن $p_i = p(x_i)$، $h_i = h(x_i)$ هستند.

(الف) وقتی m بزرگ است، معمولاً از یک نمونه کوچک از کل داده‌ها برای محاسبه گرادیان استفاده می‌کنیم. این روش گرادیان کاهشی تصادفی (SGD) نامیده می‌شود. توضیح دهید که چرا از SGD به جای گرادیان کاهشی استفاده می‌کنیم.

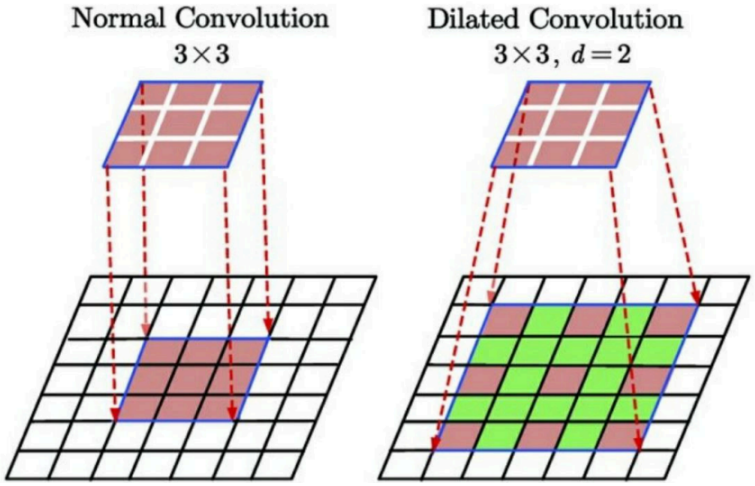
(ب) گرادیان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial l}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial l}{\partial W_2}, \quad \frac{\partial l}{\partial b_2}, \quad \frac{\partial l}{\partial h_i}, \quad \frac{\partial l}{\partial W_1}, \quad \frac{\partial l}{\partial b_1}.$$

در هنگام محاسبه گرادیان مربوط به پارامترها در لایه‌های پایین‌تر، می‌توانید فرض کنید گرادیان در لایه‌های بالاتر در دسترس است (یعنی می‌توانید از آن‌ها در معادله استفاده کنید). برای مثال، هنگام محاسبه $\frac{\partial l}{\partial W_1}$، می‌توانید فرض کنید که $\frac{\partial l}{\partial p_i}, \frac{\partial l}{\partial W_2}, \frac{\partial l}{\partial b_2}, \frac{\partial l}{\partial h_i}$ را می‌دانید.

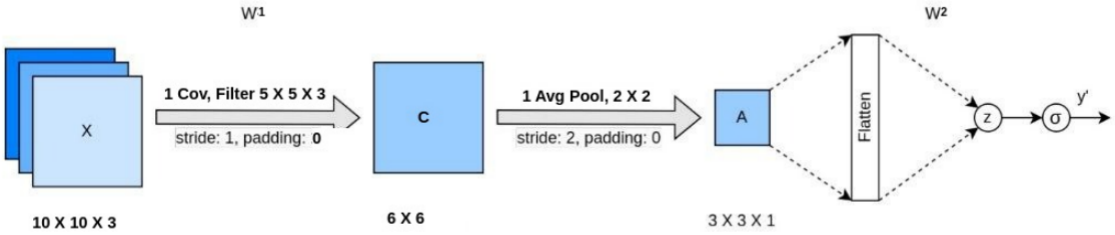
سوال ۴ شبکه‌های پیچشی (۲۵ نمره)

یکی از فیلترهای استفاده‌شده در شبکه‌های عصبی، فیلترهای dilated می‌باشد. تفاوت این فیلترها با فیلترهای معمولی این است که پیکسل‌ها را با فاصله ورودی می‌گیرند، نحوه‌ی عملکرد یکی از این فیلترها در شکل پایین دیده‌می‌شود. حال به سوالات زیر پاسخ دهید.



شکل ۲

- تصویر با ابعاد $i \times i \times 3$ داریم که ابتدا یک لایه کانولوشن معمولی با فیلتر $k_1 \times k_1 \times 3$ بر روی آن اعمال می‌شود و در لایه‌ی بعد d_2 لایه‌ی معمولی $k_1 \times k_1 \times d_1$ بر روی خروجی قبل اعمال می‌شود و سپس d_2 فیلتر *dilated* $k_2 \times k_2 \times d_1$ با پارامتر گسترش n بر روی خروجی لایه‌ی دوم اعمال می‌شود. در صورت سوال ابعاد خروجی لایه‌ی آخر را حساب نمایید.
- وقتی از کانولوشن dilated استفاده می‌شود، مبحث محدوددی دید پر رنگ‌تر مطرح می‌شود. اگر در لایه‌ی اول یک فیلتر k در k بر روی ورودی اعمال شود، که پارامتر گسترش آن d_1 است و در لایه‌ی دوم یک فیلتر k با پارامتر گسترش d_2 اعمال شود در لایه‌ی سوم یک فیلتر $k \times k$ با پارامتر گسترش d_3 اعمال شود برای عنصر های i و j و خروجی محدوده‌ی دید را بر حسب پارامترهای داده‌شده در سوال محاسبه نمایید.



شکل ۳

سوال ۵ تمرین عملی (۲۵ نمره)

نوت‌بوک *nn_numpy.ipynb* را کامل کنید.

موفق باشید.