فرآیندهای تصادفی

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴

استاد درس: دکتر صفری

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

تمرین سری دوازدهم

مهلت تحویل: سه‌شنبه، ۲۰ خرداد ۲۳:۵۹

We have to remember that what we observe is not nature in itself but nature exposed to our method of questioning.

Werner Heisenberg (1901-1976)

۱. یک فرایند زاد و مرگ را روی اعداد صحیح نامنفی در نظر بگیرید که نرخ‌های مرگ آن به صورت $\mu_x = x,\ x \geq 0$ داده شده‌اند. تعیین کنید که آیا این فرایند گذرا [۱]، بازگشت‌پذیر خنثی [۲] یا بازگشت‌پذیر مثبت [۳] است اگر نرخ‌های تولد به صورت زیر باشند:

(آ) $\lambda_x = x + 1,\ x \geq 0;$

(ب) $\lambda_x = x + 2,\ x \geq 0.$

---

۲. فرض کنید Y یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ λ باشد که مستقل از زنجیره مارکوف زمان‌پیوسته $\{X(t)\}$ است، و تعریف کنید:

$$\bar{P}_{ij} = P(X(Y) = j \mid X(0) = i)$$

(آ) نشان دهید که:

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{v_i + \lambda} \sum_k q_{ik} \bar{P}_{kj} + \frac{\lambda}{v_i + \lambda} \delta_{ij}$$

که در آن $\delta_{ij} = 1$ اگر $i = j$ و صفر اگر $i \neq j$ باشد.

[1] transient
[2] null recurrent
[3] positive recurrent

(ب) نشان دهید که پاسخ دستگاه معادلات بالا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}/\lambda)^{-1}$$

که در آن $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریسی از درایه‌های $\bar{P}_{ij}$ است، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است، و $\mathbf{R}$ ماتریس مولد است.

(ج) فرض کنید اکنون که $Y_1, \dots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ λ هستند که مستقل از $\{X(t)\}$ می‌باشند. نشان دهید که:

$$P(X(Y_1 + \cdots + Y_n) = j \mid X(0) = i)$$

برابر است با درایه‌ی سطر i و ستون j از ماتریس $\bar{\mathbf{P}}^n$.

---

۳. فرض کنید $\{X(t), t \geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته با فضای حالت $S = \{0, 1, 2\}$ و مولد زیر باشد

$$q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را تعیین کنید:

(آ) توزیع زمان باقی ماندن در وضعیت ۱.

(ب) ماتریس انتقال Q از زنجیره تعبیه شده.

(پ) $P(\tau_2 \mid X(\tau_1) = 1)$ که در آن τ_i زمان گذار **i** ام است و $X(0) = 0$.

---

۴. مشتریان طبق یک فرایند پواسون با نرخ λ به یک ایستگاه خدماتی دو سروره می‌رسند. هر زمان که مشتری جدیدی وارد می‌شود، هر مشتری که در سیستم است فوراً خارج می‌شود. یک ورودی جدید ابتدا با سرور ۱ و سپس با سرور ۲ وارد سرویس می‌شود. اگر زمان‌های سرویس در سرورها به صورت مستقل نمایی با نرخ‌های مربوطه μ_1 و μ_2 باشند، چه نسبتی از مشتریان ورودی سرویس خود را با سرور ۲ تکمیل می‌کنند؟ (یعنی چه نسبتی از مشتریان ورودی هر دو سرویس را بدون مانع تکمیل می‌کنند.)

---

۵. یک فرایند تولد و مرگ بازگشتی مثبت و تحویل‌ناپذیر را روی $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ در نظر بگیرید، و فرض کنید $X(0)$ توزیع ایستا π را برای توزیع اولیه خود دارد. سپس $X(t)$ برای تمام $t \geq 0$ توزیع π را خواهد داشت. کمیت‌های

$$E[\lambda_{X(t)}] = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda_x \pi(x) \quad \text{و} \quad E[\mu_{X(t)}] = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_x \pi(x)$$

می‌توانند به ترتیب به عنوان نرخ متوسط تولد و نرخ متوسط مرگ فرایند تفسیر شوند.

(آ) نشان دهید که نرخ متوسط تولد برابر با نرخ متوسط مرگ است.

(ب) بخش (آ) چه مفهومی برای یک صف N سرور بازگشتی مثبت دارد؟
