دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پاسخ تمرین سری سوم

توسط امیرحسین فرهمند و پوریا عصاره‌ها

۱. فرض کنید $X_n, n \geq 0$ یک زنجیره شاخه‌ای باشد و متغیر تصادفی مرتبط ξ دارای واریانس محدود σ^2 باشد.

۱. نشان دهید که

$$E[X_{n+1}^2 \mid X_n = x] = x\sigma^2 + x^2\mu^2.$$

۲. از قسمت ۱ استفاده کنید تا نشان دهید که

$$E_x(X_{n+1}^2) = x\mu^n\sigma^2 + \mu^2 E_x(X_n^2).$$

۳. نشان دهید که

$$E_x(X_n^2) = x\sigma^2(\mu^{n-1} + \cdots + \mu^{2(n-1)}) + x^2\mu^{2n}, \quad n \geq 1.$$

۴. نشان دهید که اگر در ابتدا x ذره وجود داشته باشد، آنگاه برای $n \geq 1$

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} x\sigma^2\mu^{n-1}\left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu \neq 1, \\ nx\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$

نکته مهم: شما نمی‌توانید از استقرا برای اثبات این نتایج استفاده کنید.

---

۲. ماتریس انتقال زنجیره مارکوف زیر را در نظر بگیرید:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای حالت را $\{1, 2, \cdots, 7\}$ نام‌گذاری کنید، گراف انتقال را رسم کنید و حالت‌ها را با تجزیه فضای حالت به اجتماع مجزا از مجموعه‌های گذرا و مجموعه‌های بسته غیرقابل کاهش از حالت‌های بازگشتی طبقه‌بندی کنید.

دلایل دقیق همان‌طور که در کلاس‌ها ارائه شده است، ضروری هستند.

۳. فرض کنید x و y حالت‌های متمایز یک زنجیره مارکوف با $d < \infty$ حالت هستند و فرض کنید x به y منجر می‌شود. بگذارید n_0 کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که $P^{n_0}(x,y) > 0$ و بگذارید $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$ حالت‌هایی باشند به‌طوری‌که

$$P(x,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n_0-2},x_{n_0-1})P(x_{n_0-1},y) > 0.$$

۱. نشان دهید که $x, x_1, \ldots, x_{n_0-1}, y$ حالت‌های متمایز هستند.

۲. از قسمت (۱) استفاده کنید تا نشان دهید که $n_0 \leq d-1$.

۳. نتیجه بگیرید که $P_x(T_y \leq d-1) > 0$.

---

۴. زنجیره شاخه‌ای $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ را با توزیع فرزندان $(p_k)_{k\geq 0}$ در نظر بگیرید. فرض کنید $X_0 = 1$.

۱. فرض کنید $p_0 = 0.25$، $p_1 = 0.4$، $p_2 = 0.35$. احتمال این‌که جمعیت در نسل دوم منقرض شود (یعنی $X_2 = 0$ اما $X_1 \neq 0$) چقدر است؟ احتمال این‌که جمعیت در نهایت منقرض شود چقدر است؟

۲. فرض کنید $p_k = p(1-p)^k$، $k \geq 0$، که در آن $0 < p < 1$. احتمال انقراض ρ را بیابید.

---

۵. فرض کنید $X_n, n \geq 0$ یک زنجیره مارکوف باشد که فضای حالت آن $\mathcal{S}$ زیرمجموعه‌ای از $\{0,1,2,\ldots\}$ است و تابع انتقال P آن به‌گونه‌ای است که

$$\sum_y yP(x,y) = Ax + B, \quad x \in \mathcal{S},$$

برای برخی ثابت‌های A و B.

۱. نشان دهید که

$$E[X_{n+1}] = AE[X_n] + B.$$

۲. نشان دهید که اگر $A \neq 1$، آنگاه

$$E[X_n] = \frac{B}{1-A} + A^n\left(E[X_0] - \frac{B}{1-A}\right).$$

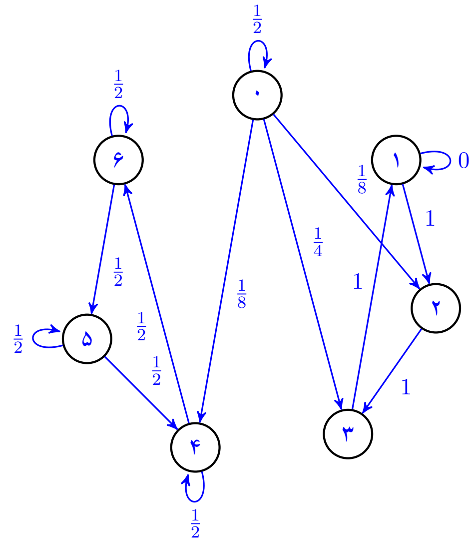
۳. فرض کنید $X_n, n \geq 0$ زنجیره Ehrenfest روی $\{0,1,\ldots,d\}$ باشد. نشان دهید که فرض قسمت ۱ برقرار است و از آن نتیجه برای محاسبه $E_x(X_n)$ استفاده کنید.

---

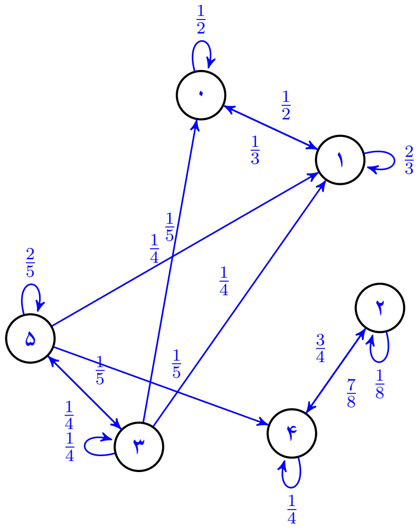
۶. زنجیره‌های مارکوف زیر با ماتریس‌های انتقال داده‌شده را در نظر بگیرید:

$$P_1(x,y) = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad , \quad P_1(x,y) = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 4 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 5 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

(a) تعیین کنید کدام حالت‌ها گذرا و کدام حالت‌ها بازگشتی هستند.



شکل ۱: گراف حالات P_1.



(آ) گراف حالات P_2.

P_1		P_2	
$\{0\}$	گذرا	$\{0,1\}$	بازگردنده
$\{1,2,3\}$	بازگردنده	$\{2,4\}$	بازگردنده
$\{4,5,6\}$	بازگردنده	$\{3,5\}$	گذرا

از شکل گراف ها می‌توان تشخیص داد حالاتی که با ورود به آن ها خروج نخواهیم داشت قطعا بازگردنده هستند. در زنجیره اول حالت ۰ به حالت ۱ می‌رود و از آنجا به حالت ۲ و ۳ می‌رود و از آنجا به هیچ طریقی به حالت ۰ بازنمی‌گردد. پس حالت ۰ گذرا است. در زنجیره دوم، حالت ۰ به حالت ۱ می‌رود و از آنجا به حالت ۰ برمی‌گردد. پس حالت ۰ بازگردنده است.

(b) برای زنجیره با فضای حالت $\{0,1,\ldots,6\}$، ρ_{0y} را برای $y=0,\ldots,6$ بیابید.

برای کلاس حالات بازگردنده میدانیم برای هر i,j در آن کلاس $\rho_{ii}=\rho_{ij}=\rho_{ji}=1$ و اگر $x\nrightarrow y$ آنگاه $\rho_{xy}=0$ با تحلیل قدم اول یعنی :

$$\begin{aligned}
\rho_{00} &= P_{00}+\sum_{k\neq 0}P_{0k}\rho_{k0}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cancelto{0}{\rho_{10}}+\frac{1}{8}\cancelto{0}{\rho_{20}}+\frac{1}{4}\cancelto{0}{\rho_{30}}+\frac{1}{8}\cancelto{0}{\rho_{40}}\\
\rho_{01} &= \frac{1}{2}\rho_{01}+\cancelto{0}{P_{01}}+\frac{1}{8}\cancelto{1}{\rho_{21}}+\frac{1}{4}\cancelto{1}{\rho_{31}}+\frac{1}{8}\cancelto{0}{\rho_{41}}\\
\frac{1}{2}\rho_{01} &= \frac{3}{8} \quad\Rightarrow\quad \rho_{01}=\frac{3}{4}=\rho_{02}=\rho_{03}=\rho_{0[1]}\\
\rho_{04} &= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}\rho_{04}+\cancelto{0}{\rho_{[1]4}} \Rightarrow \quad \rho_{0[4]}=\rho_{05}=\rho_{06}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(c) برای زنجیره روی $\{0,1,\ldots,5\}$، $\rho_{\{0,1\}}(x)$ را برای $x=0,\ldots,5$ بیابید.

می‌دانیم ۰ و ۱ در یک کلاس ارتباطی هستند. $\rho_{\{0,1\}}(x)$ ینی با شروع از x به کلاس $[1]$ برسیم. دیدیم

$$\forall i,j\in[y] \quad \rho_{xi}=\rho_{xj}$$

$\rho_x = \rho_{\{0,1\}}(x)$ در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho_1 = 1 \\
\rho_2 &= \rho_4 = 0 \\
\rho_3 &= (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\rho_3 + \frac{1}{4}\rho_3 \\
\rho_5 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\rho_3 + \frac{1}{5}\cancelto{0}{\rho_4} + \frac{2}{5}\rho_5 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}\rho_3 - \frac{1}{4}\rho_5 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5}\rho_3 + \frac{3}{5}\rho_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \frac{7}{8} \quad \rho_5 = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

---

۷. یک مؤلفه کامپیوتر دارای عمر فعال، اندازه‌گیری‌شده در واحدهای گسسته، است که یک متغیر تصادفی T است، که در آن $P(T=k)=a_k$ برای $k=1,2,\dots$ است. فرض کنید با یک مؤلفه جدید شروع می‌کنیم و هر مؤلفه پس از خرابی با یک مؤلفه جدید جایگزین می‌شود. بگذارید X_n سن مؤلفه در حال سرویس در زمان n باشد. آنگاه $\{X_n\}$ یک زنجیره مارکوف موفقیت است.

(a) احتمالات p_i و q_i را مشخص کنید.

دستگاهی که سنش i است در سرویس بعدی یا تعویض شده بوده و عمرش ۱ است و یا به سن $i+1$ می‌رسد و می‌دانیم تا سن $i-1$ نسوخته بوده.

$$\begin{aligned}
p_i &= P(X_{n+1}=i+1|X_n=i) \\
&= P(T>i|T>i-1) \\
&= \frac{P(T>i)}{P(T>i-1)} = \frac{1-\sum_i^i a_i}{1-\sum_1^{i-1} a_i} = \frac{\sum_{i+1}^{\infty} a_i}{\sum_i^{\infty} a_i} \quad 1\le i\le\infty \\
q_i &= P(X_{n+1}=0|X_n=i) \\
&= P(T=i|T>i-1) \\
&= \frac{P(T=i)}{P(T>i-1)} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{i} a_k}{\sum_{k=i}^{\infty} a_k} \quad 1\le i\le\infty
\end{aligned}$$

(b) یک سیاست ”تعویض برنامه‌ریزی‌شده“ شامل تعویض مؤلفه پس از خرابی یا رسیدن به سن N، هرکدام که زودتر اتفاق بیفتد، است. احتمالات موفقیت p و q را تحت سیاست تعویض برنامه‌ریزی‌شده مشخص کنید.

زنجیر مارکف با این حرکت متناهی می‌شود. به این صورت که برای $i<N$ احتمالات قبلی را داریم و برای $q_N=1$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & \cdots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{array} &
\begin{bmatrix}
q_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\
q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
q_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & p_{N-1} \\
1 & & \cdots & & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

۸. فرض کنید X_n یک زنجیره مارکوف با احتمالات انتقال P_{ij} باشد. یک «عامل تخفیف» β با $0 < \beta < 1$ و یک تابع هزینه $c(i)$ داده شده است و می‌خواهیم هزینه کل تخفیف‌یافته مورد انتظار را از حالت i محاسبه کنیم، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_i = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n) \mid X_0 = i\right]$$

با استفاده از تحلیل گام اول، نشان دهید که h_i سیستم معادلات خطی زیر را ارضا می‌کند:

$$\forall i \in \mathcal{S} \qquad h_i = c(i) + \beta \sum_j P_{ij} h_j$$

---

۹. یک زنجیره مارکوف که در ژنتیک ظاهر می‌شود دارای حالت‌های $\{0, 1, \dots, 2d\}$ و تابع انتقال زیر است:

$$P(x,y) = \binom{2d}{y} \left(\frac{x}{2d}\right)^y \left(1 - \frac{x}{2d}\right)^{2d-y}$$

$\rho_{\{0\}}(x)$ را برای $0 < x < 2d$ بیابید.

---

۱۰. یک دستگاه جستجوی صفر به‌صورت زیر عمل می‌کند: اگر در زمان n در حالت j باشد، آنگاه در زمان $n+1$، موقعیت آن با احتمال $\frac{1}{j}$ برابر 0 است و موقعیت آن برابر k (که k یکی از حالت‌های $1, 2, \dots, j-1$ است) با احتمال $\frac{2k}{j^2}$ است. زمان مورد انتظار تا اولین باری که دستگاه به صفر برسد را از حالت m بیابید.

با تحلیل قدم اول :

$$\begin{aligned}
E[T_0|X_0=0] = e_0 &= 0 \\
E[T_0|X_0=m] = e_m &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{m^2} E[T_0|X_0=m, X_1=k] + \frac{1}{m} E[T_0|X_0=m, X_1=0] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{m^2} (e_k + 1) + \frac{1}{m} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{m^2} e_k \\
e_m - e_{m-1} &= \left(1 + \frac{2}{m^2} \sum_{k=1}^{m-2} k e_k + \frac{2(m-1)}{m^2} e_{m-1}\right) - \left(1 + \frac{2}{(m-1)^2} \sum_{k=1}^{m-2} k e_k\right) \\
e_m &= \sum_{i=1}^{m} e_i - e_{i-1}
\end{aligned}$$

سؤال امتیازی: A و B در حال بازی با سکه هستند. در هر دور، هر دو یک سکه پرتاب می‌کنند. اگر هر دو سکه روی یک طرف بیفتند، A هر دو سکه را می‌برد. در غیر این صورت، B هر دو سکه را می‌برد. فرض کنید A دارای m سکه و B دارای n سکه است. مقدار مورد انتظار تعداد بازی‌ها تا زمانی که یکی از آن‌ها تمام سکه‌های خود را از دست بدهد را بیابید.