دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پاسخ تمرین سری سوم

توسط امیرحسین فرهمند و پوریا عصاره‌ها

۱. خرابی در طول یک رشته طناب با نرخ $\lambda = 2$ در هر فوت رخ می‌دهند.

(الف) احتمال اینکه در اولین فوت رشته طناب هیچ نقصی وجود نداشته باشد را محاسبه کنید.

$\{X(l)\}_{l>0}$ یک فرآیند تصادفی پواسون است. و طبیعی است که $X(0) = 0$

$$P(X(1) = 0) = P(X(1) - X(0) = 0) = e^{-2}$$

(ب) احتمال شرطی اینکه در دومین فوت رشته طناب هیچ نقصی وجود نداشته باشد، با فرض اینکه در اولین فوت فقط یک نقص وجود داشته است، را محاسبه کنید.

خداروشکر می‌دانیم بازه های مجزا مستقل هستند.

$$P(X(2) - X(1) = 0|X(1) = 1) = P(X(2) - X(1) = 0|X(1) - X(0) = 1) = e^{-2}$$

---

۲. فرض کنید $p_k = \Pr\{X = k\}$ تابع جرم احتمال مربوط به توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. نشان دهید که: $p_0 = \exp\{-\lambda\}$ و اینکه p_k به‌صورت بازگشتی توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود: $p_k = (\lambda/k)p_{k-1}$

بدیهتا

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(X = 0) = e^{-\lambda} \\
p_{k-1} &= P(X = k-1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
p_k &= (X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&\Rightarrow \quad p_k/p_{k-1} = \lambda/k \quad \Rightarrow \quad p_k = (\lambda/k)p_{k-1}
\end{aligned}$$

---

۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون و پارامترهای α و β به ترتیب باشند. توزیع شرطی X را با فرض اینکه $N = X + Y = n$ تعیین کنید.

$$
\begin{aligned}
P(X=x|N=n) &= P(X=x|X+Y=n) \\
&= \frac{P(X=x, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(Y=n-x, X=x)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(Y=n-x)P(X=x)}{P(X+Y=n)}
\end{aligned}
$$

می‌توانید از دانش اسلاید های استفاده کنید که جمع پواسون ها میشود پواسون با جمع نرخ ها یا از احتمال کل

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{i=1}^{n} P(X+Y=n|X=i)P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(Y=n-i|X=i)P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(Y=n-i)P(X=i) \\
&= e^{-\alpha-\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta^{n-i}\alpha^{i}}{i!(n-i!)} \\
&= e^{-\alpha-\beta} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i!)} \beta^{n-i}\alpha^{i} \\
&= e^{-\alpha-\beta} \frac{1}{n!} (\alpha+\beta)^{n}
\end{aligned}
$$

$$
P(X=x|N=n) = \frac{e^{-\beta-\alpha}\frac{\beta^{n-x}\alpha^{x}}{x!(n-x)!}}{e^{-\alpha-\beta}\frac{1}{n!}(\alpha+\beta)^{n}} = \binom{n}{x}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-x}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{x}
$$

---

۴. یک فروشگاه ساعت ۸ صبح باز می‌شود. از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح، مشتریان با نرخ پواسون برابر با ۴ نفر در ساعت وارد فروشگاه می‌شوند. بین ساعت ۱۰ صبح تا ۱۲ ظهر، نرخ ورود مشتریان برابر با ۸ نفر در ساعت است. از ساعت ۱۲ ظهر تا ۲ بعدازظهر، نرخ ورود مشتریان به‌صورت پیوسته از ۸ نفر در ساعت (در ۱۲ ظهر) تا ۱۰ نفر در ساعت (در ۲ بعدازظهر) افزایش می‌یابد؛ و از ساعت ۲ تا ۵ بعدازظهر، نرخ ورود مشتریان به‌صورت پیوسته از ۱۰ نفر در ساعت (در ۲ بعدازظهر) تا ۴ نفر در ساعت (در ۵ بعدازظهر) کاهش می‌یابد.

توزیع احتمالاتی تعداد مشتریانی که در یک روز مشخص وارد فروشگاه می‌شوند را تعیین کنید

مسئله را یک فرآیند تصادفی پواسون ناهمگن در نظر بگیرید با نرخ متغییر:

$$
\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t<8\,,\ t>17 \\ 4 & 8<t<10 \\ 8 & 10<t<12 \\ 8+(t-12) & 12<t<14 \\ 10-2(t-14) & 14<t<17 \end{cases} \quad , \quad X(t)-X(s) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t)-\Lambda(s))
$$

$$
P(X(17)-X(8)=x) = e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} \quad , \quad \lambda = \Lambda(t)-\Lambda(s) = \int_{8}^{17} \lambda(t)\,dt
$$

$$\lambda = 2 \times 4 + 2 \times 8 + \left(\frac{1}{2}t^2 - 4t\right)\Big|_{12}^{14} + \left(38t - t^2\right)\Big|_{14}^{17}$$
$$\lambda = 8 + 16 + 18 + 93 = 135$$