

فرآيندهاي تصادفي

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴ استاد درس: دکتر صفری

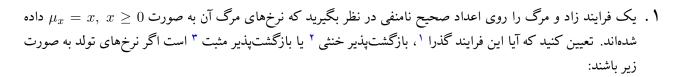
تمرین سری دوازدهم

مهلت تحویل: سهشنبه، ۲۰ خرداد ۲۳:۵۹



We have to remember that what we observe is not nature in itself but nature exposed to our method of questioning.

Werner Heisenberg (1901-1976)



$$\lambda_x = x + 1, \ x > 0; \ (\tilde{1})$$

$$\lambda_x = x + 2, \ x \ge 0.$$
 (ب)

تعریف \mathbf{Y} . فرض کنید Y یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ λ باشد که مستقل از زنجیره مارکوف زمانپیوسته $\{X(t)\}$ است، و تعریف کنید:

$$\bar{P}_{ij} = P(X(Y) = j \mid X(0) = i)$$

(آ) نشان دهید که:

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{v_i + \lambda} \sum_{k} q_{ik} \bar{P}_{kj} + \frac{\lambda}{v_i + \lambda} \delta_{ij}$$

که در آن i = j اگر i = j و صفر اگر $i \neq j$ باشد.

 $^{^{1}}$ transient

²null recurrent

³positive recurrent

(ب) نشان دهید که پاسخ دستگاه معادلات بالا به صورت زیر داده می شود:

$$\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}/\lambda)^{-1}$$

که در آن $ar{\mathbf{p}}$ ماتریسی از درایههای $ar{P}_{ij}$ است، \mathbf{I} ماتریس همانی است، و \mathbf{R} ماتریس مولد است.

(ج) فرض کنید اکنون که Y_1,\dots,Y_n متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ λ هستند که مستقل از $\{X(t)\}$ میباشند. نشان دهید که:

$$P(X(Y_1 + \dots + Y_n) = j \mid X(0) = i)$$

برابر است با درایهی سطر i و ستون j از ماتریس $ar{\mathbf{P}}^n$

باشد $S=\{0,1,2\}$ فرض کنید $\{X(t),t\geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته با فضای حالت $\{X(t),t\geq 0\}$

$$q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را تعیین کنید:

- (آ) توزیع زمان باقی ماندن در وضعیت ۱.
- (ب) ماتریس انتقال Q از زنجیره تعبیه شده.
- X(0)=0 که در آن au_i زمان گذار au_i ام است و $P(au_2\mid X(au_1)=1)$
- وزیع X(0) میک فرایند تولد و مرگ بازگشتی مثبت و تحویل ناپذیر را روی $S=\{0,1,2,\ldots\}$ در نظر بگیرید، و فرض کنید X(0) توزیع ایستا π را برای توزیع اولیه خود دارد. سپس X(t) برای تمام $t\geq 0$ توزیع $t\geq 0$ توزیع اولیه خود دارد.

$$E[\lambda_{X(t)}] = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda_x \pi(x) \quad \text{o} \quad E[\mu_{X(t)}] = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_x \pi(x)$$

میتوانند به ترتیب به عنوان نرخ متوسط تولد و نرخ متوسط مرگ فرایند تفسیر شوند.

- (آ) نشان دهید که نرخ متوسط تولد برابر با نرخ متوسط مرگ است.
- (ب) بخش (آ) چه مفهومی برای یک صف N سرور بازگشتی مثبت دارد؟