فرآیندهای تصادفی

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴

استاد درس: دکتر صفری

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

تمرین سری سیزدهم

مهلت تحویل: جمعه، ۱۷ مرداد ۲۳:۵۹

In mathematics, you don't understand things. You just get used to them.

John von Neumann (1903–1957)

۱. فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند پواسن همگن با پارامتر λ باشد. کوواریانس بین $X(t)$ و $X(t+\tau)$ را برای $t>0$ و $\tau>0$ محاسبه کنید، یعنی عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\operatorname{Cov}\big(X(t), X(t+\tau)\big) = E\left[\big(X(t)-E[X(t)]\big)\big(X(t+\tau)-E[X(t+\tau)]\big)\right].$$

---

۲. مشاهده یک اتم رادیواکتیو را از زمان $t=0$ آغاز می‌کنیم. این اتم در زمان $t>0$ دچار واپاشی شده و از حالت رادیواکتیو خارج می‌شود. توزیع زمانی این واپاشی به صورت زیر است:

$$F(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<0\\ 1-e^{-\lambda t}, & \tau\geq 0\end{cases} = \Pr\{t\leq\tau\}.$$

حالت اتم در زمان t را به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر می‌گیریم:

$$x_t=\begin{cases}0 & \text{اگر اتم در زمان } t \text{ رادیواکتیو باشد}\\ 1 & \text{اگر اتم در زمان } t \text{ رادیواکتیو نباشد}\end{cases}$$

مجموعه متغیرهای $\{x_t\}$ یک فرآیند تصادفی را تعریف می‌کنند.

فرض کنید در زمان $t=0$ مشاهده N اتم رادیواکتیو مستقل را آغاز می‌کنیم که هر کدام با x_t^i برای $i=1,2,\dots,N$ نمایش داده می‌شوند. اگر $X_t=\sum_{i=1}^{N}x_t^i$ قرار دهیم، آنگاه $\{X_t\}$ نیز یک فرآیند تصادفی است. نشان دهید که برای $t\leq 1/\lambda$ (یعنی t در مقایسه با $1/\lambda$ ناچیز باشد) و N به اندازه کافی بزرگ، فرآیند $\{X_t\}$ را می‌توان با تقریب بسیار خوبی توسط یک فرآیند پواسن $Y(t)$ با پارامتر $\lambda N t$ مدل کرد.

۳. فرض کنید $\mathbb{R}$ یک فرآیند زاد و مرگ در زمان پیوسته باشد که در آن $\lambda_n = \lambda > 0$ برای $n \geq 0$، $\mu_0 = 0$ و $\mu_n > 0$ برای $n \geq 1$. همچنین فرض کنید $\pi = \sum_n \pi_n < \infty$ که در آن $\pi_n = \lambda^n/(\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n)$ به طوری که π_i/π توزیع پایدار فرآیند است. اگر حالت اولیه یک متغیر تصادفی با توزیع برابر توزیع مانای فرآیند باشد، ثابت کنید که تعداد مرگ‌ها در بازه $[0,t]$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λt است.

راهنمایی: اگر $a_k(t)$ احتمال اینکه تعداد مرگ‌ها تا زمان t برابر k باشد را نشان دهد، معادله دیفرانسیل زیر را استخراج کنید:

$$a'_k(t) = -\lambda a_k(t) + \lambda a_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

---

۴. تعریف زیر یک مفهوم از فرآیند پواسن چندمتغیره در دو بعد را ارائه می‌دهد. فرض کنید $(X(t), Y(t))$ به صورت $X(t) = \alpha(t) + \gamma(t)$ و $Y(t) = \beta(t) + \gamma(t)$ تعریف شود، که در آن $\alpha(t)$، $\beta(t)$ و $\gamma(t)$ سه فرآیند پواسن مستقل با پارامترهای λ_1، λ_2 و λ_3 هستند. تابع مولد توزیع $(X(t), Y(t))$ را بیابید.

---

۵. فرض کنید زنجیره مارکوف متشکل از حالت‌های ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ماتریس احتمال انتقال زیر را داشته باشد:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید کدام حالت‌ها گذرا و کدام بازگشتی هستند.

---

۶. اگر زنجیره مارکوف تقلیل‌ناپذیر و بازگشتی باشد، آنگاه برای هر حالت اولیه:

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}$$

---

۷. فرض کنید $\|P_{ij}\|$ ماتریس احتمال انتقال زنجیره مارکوف باشد و $\{\pi_j\}$ توزیع مانای فرآیند را نشان دهد. همچنین $\|P_{ij}^{(m)}\|$ ماتریس احتمال انتقال mـ گام را نشان می‌دهد. اگر $\varphi(x)$ یک تابع مقعر روی $x \geq 0$ باشد و تعریف کنیم:

$$E_m = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \varphi(P_{ji}^{(m)}) \quad \text{با } l \text{ ثابت}$$

ثابت کنید که E_m تابعی نزولی نباشد از m است، یعنی برای همه $m \geq 1$ داشته باشیم $E_{m+1} \geq E_m$.

راهنمایی: از نامساوی جنسن استفاده کنید.

---

۸. ک بازیکن وجود دارند که بازیکن i ام مقدار $v_i > 0$ دارد $(i = 1, ..., k)$. در هر دوره، دو بازیکن بازی می‌کنند در حالی که $k-2$ بازیکن دیگر در یک صف مرتب منتظر می‌مانند. بازنده بازی به انتهای صف می‌پیوندد و برنده سپس با بازیکنی که در ابتدای صف است بازی جدیدی انجام می‌دهد. هرگاه i و j بازی کنند، i با احتمال $\frac{v_i}{v_i+v_j}$ برنده می‌شود.

---

۹. مشتریان می‌توانند توسط هر یک از سه سرویس‌دهنده سرویس دریافت کنند، که زمان‌های سرویس سرویس‌دهنده i دارای توزیع نمایی با نرخ μ_i است $(i = 1, 2, 3)$. هرگاه یک سرویس‌دهنده آزاد شود، مشتری که بیشترین زمان انتظار را داشته است سرویس خود را با آن سرویس‌دهنده آغاز می‌کند.

(آ) اگر شما وارد شوید و هر سه سرویس‌دهنده مشغول و هیچ مشتری در انتظار نباشد، زمان مورد انتظار تا ترک سیستم را بیابید.

(ب) اگر شما وارد شوید و هر سه سرویس‌دهنده مشغول و یک مشتری در انتظار باشد، زمان مورد انتظار تا ترک سیستم را بیابید.

---

۱۰. در یک سال با آب‌وهوای خوب، تعداد طوفان‌ها دارای توزیع پواسن با میانگین ۱ است؛ در یک سال بد، این توزیع با میانگین ۳ است. فرض کنید وضعیت آب‌وهوای هر سال فقط به وضعیت سال قبل بستگی دارد. یک سال خوب به احتمال مساوی با یک سال خوب یا بد دنبال می‌شود، و یک سال بد با احتمال دو برابر بیشتر با یک سال بد نسبت به یک سال خوب دنبال می‌شود. فرض کنید سال گذشته (سال ۰) یک سال خوب بوده است.

(آ) تعداد مورد انتظار کل طوفان‌ها در دو سال آینده (یعنی سال‌های ۱ و ۲) را بیابید.

(ب) احتمال عدم وجود طوفان در سال ۳ را بیابید.

(ج) میانگین تعداد طوفان‌ها در سال در بلندمدت را بیابید.

(د) نسبت سال‌هایی که طوفان ندارند را بیابید.
