امیرحسین زابلی (۹۹۲۶۸۴۳)

تمرین سری ششم درس سیستم‌های کنترل خطی (گروه دوم - سیستم کنترل موقعیت گلوله و میله)

پارامترهای سیستم

m: جرم گلوله

R: شعاع گلوله

d: میزان انحراف اهرم

g: شتاب جاذبه

L: طول میله

J: ممان اینرسی گلوله

r: موقعیت گلوله نسبت به سر میله

α: زاویه میله نسبت به افق

θ: زاویه دنده

۱- معادله دینامیکی سیستم

معادله حرکت گلوله به صورت زیر است:

$$\left(\frac{J}{R^2}+m\right)\ddot{r}+mg\sin\alpha-mr\dot{\alpha}^2=0$$

با خطی سازی رابطه بالا حول $\alpha = 0$ (و بنابراین، استفاده از تقریب $\sin\alpha \approx \alpha$) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{J}{R^2}+m\right)\ddot{r}=-mg\alpha$$

از طرفی، معادله زیر که با تقریب به صورت خطی درآمده نیز در سیستم صدق می‌کند و زاویه میله و چرخ‌دنده را به همدیگر ربط می‌دهد:

$$\alpha=\frac{d}{L}\theta$$

با جاگذاری این رابطه در رابطه پیشین خواهیم داشت:

$$\left(\frac{J}{R^2}+m\right)\ddot{r}=-mg\frac{d}{L}\theta$$

۲- نمودارهای مکان هندسی، بود و نایکوییست سیستم

۲-۱- نمودار مکان هندسی

ابتدا تابع تبدیل حلقه باز داده شده را در متلب به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم:

```
zeros = [];
poles = [0 0];
P = zpk(zeros, poles, 0.21);
```

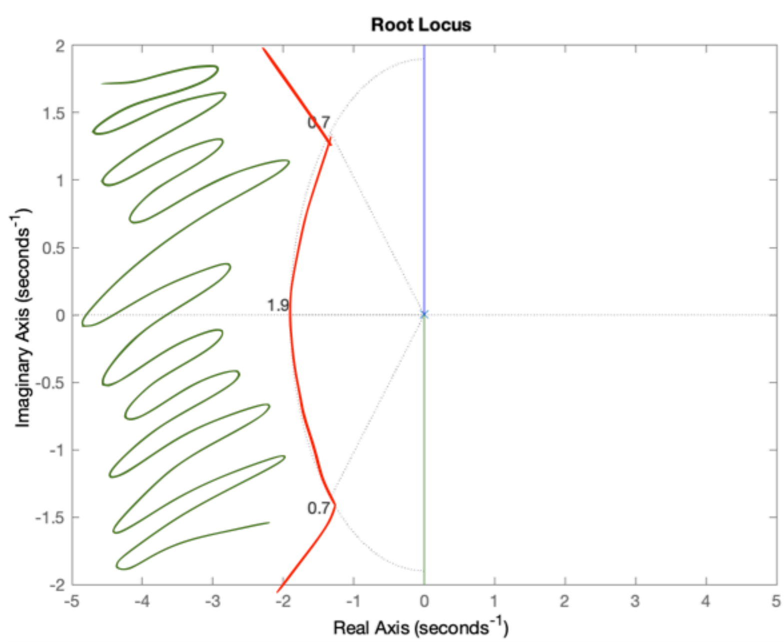
با استفاده از دستور rlocus(P) نمودار مکان هندسی را رسم می‌کنیم. نتیجه به صورت زیر درمی‌آید:

همانطور که از نمودار مشخص است، دو قطب سیستم، روی محور موهومی، از صفر به سمت بی‌نهایت خارج می‌شوند، اما مکان هندسی فعلی، در محدوده مدنظر طراحی(درون کادر قرمز در تصویر ۲-۱ که با رنگ سبز مشخص شده) قرار نمی‌گیرد. برای یافتن این ناحیه، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

مطابق آنچه مطلوب طراحی است، داریم:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq \frac{5}{100} \implies \zeta \geq 0.7$$

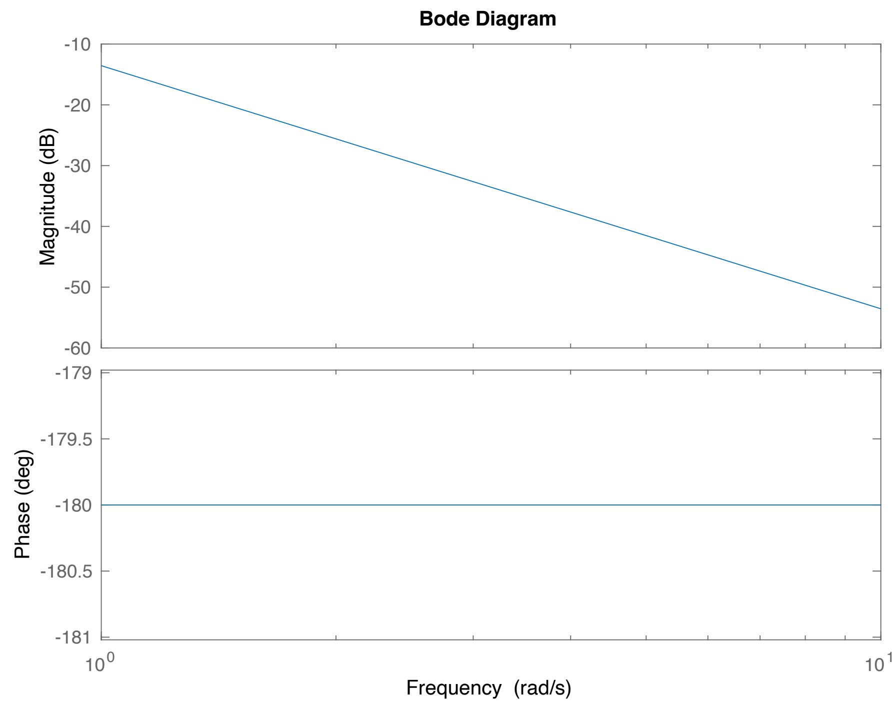
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 3 \implies w_n \geq 1.9$$



تصویر ۲-۱: نمودار مکان هندسی

۲-۲- نمودار بود

با استفاده از دستور bode(P) نمودار را رسم می‌کنیم:

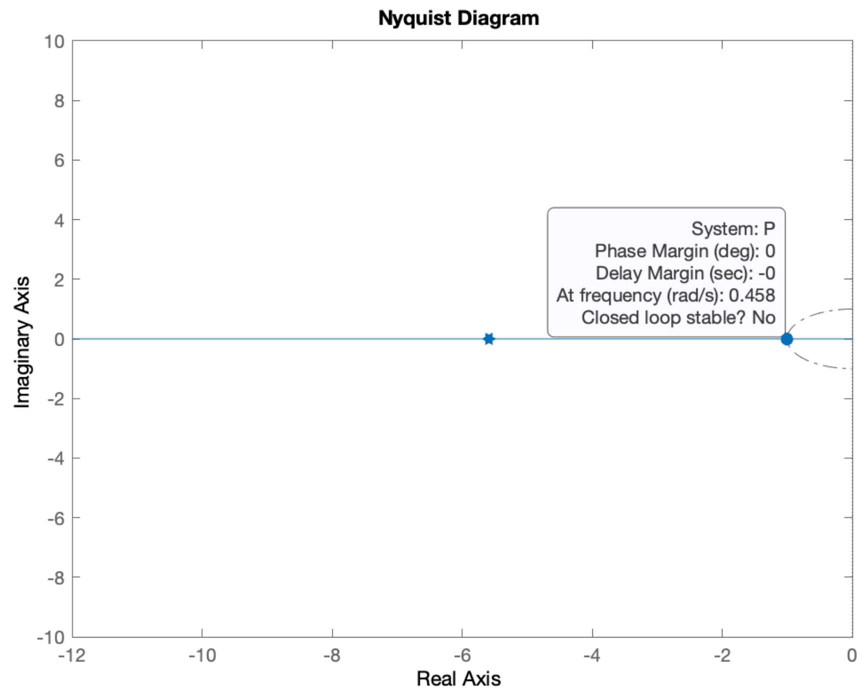


تصویر ۲-۲: نمودار بود

با توجه به نمودار فاز، مشاهده می‌کنیم که فاز سیستم همیشه برابر 180- درجه است و این یعنی pahse margin برابر صفر است. نتیجه می‌گیریم که سیستم ناپایدار است.

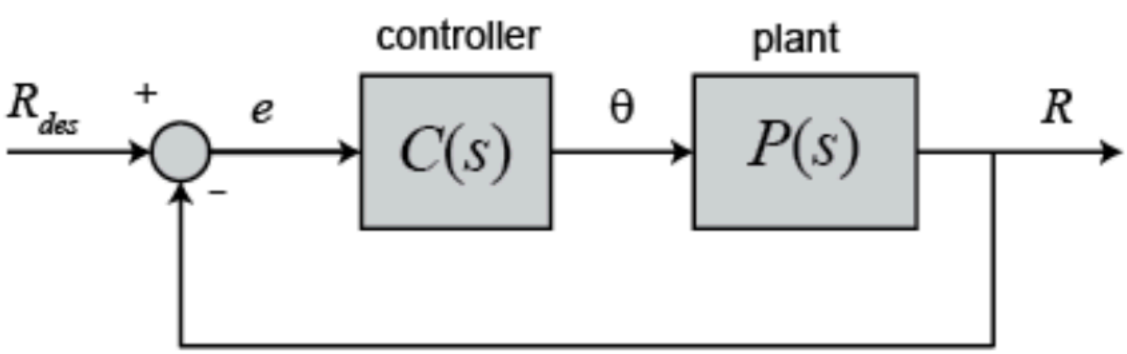
۲-۳- نمودار نایکوییست

با استفاده از دستور nyquist(P) نمودار را رسم می‌کنیم (تصویر ۳-۲). مجدد مشاهده می‌شود در فرکانس0.458 که نمودار نایکوییست دایره واحد را قطع می‌کند، phase margin برابر صفر بوده و بنابراین ناپایداری سیستم نتیجه گرفته می‌شود.



تصویر ۳-۲: نمودار نایکوییست

۳- طراحی کنترل‌کننده



تصویر ۳-۱: شمای کلی یک سیستم دارای کنترل‌کننده با فیدبک واحد منفی

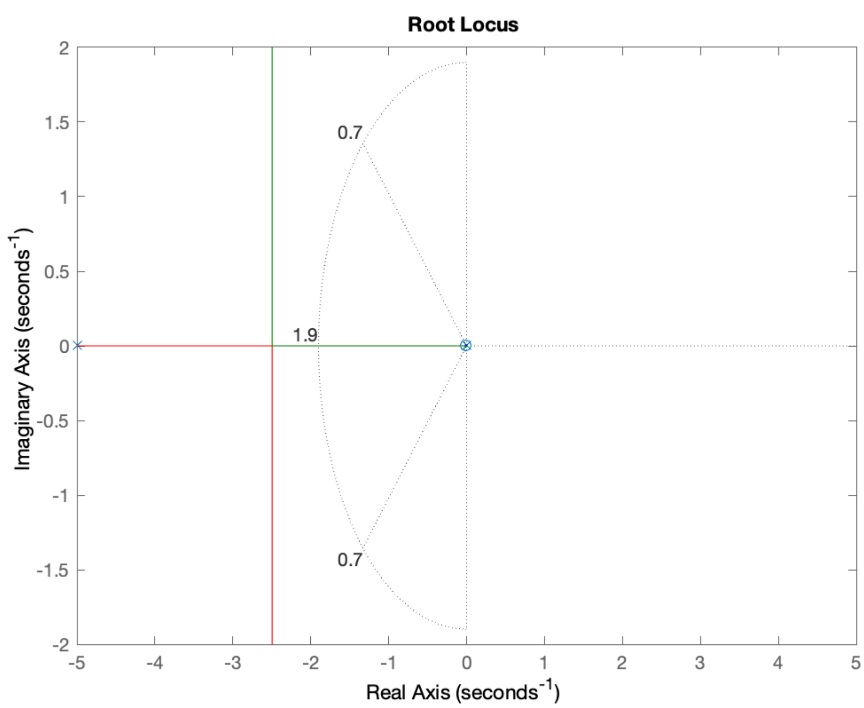
۳-۱- طراحی کنترل کننده با استفاده از مکان هندسی ریشه

با توجه به آنچه در قسمت ۲-۱ گفته شد، باید سعی کنیم تا نمودار مکان هندسی را به سمت چپ بیاوریم تا درون محدوده مشخص شده در تصویر ۲-۱ قرار بگیرد. بنابراین، سعی می‌کنیم که یک lead compensator را به سیستم اضافه کنیم. یک lead compensator فرمی به صورت زیر دارد:

$$C(s) = K_c \frac{s + z_0}{s + p_0}$$

که در عبارت بالا، اندازه z_0 کم‌تر از اندازه p_0 است. موقعیت صفر را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که در نزدیکی مبدا باشد تا اثر یکی از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز را کم‌کند. قطب را نیز در سمت چپ مبدا قرار می‌دهیم تا باعث شود مکان هندسی تصویر ۲-۱ به سمت چپ کشیده شود. برای شروع، مقادیر $z_0 = 0.01$ و $p_0 = 5$ و $K_c = 1$ را در نظر می‌گیریم و با رسم نمودار مکان هندسی تابع حلقه باز جدید، تغییر به وجود آمده را بررسی می‌کنیم:

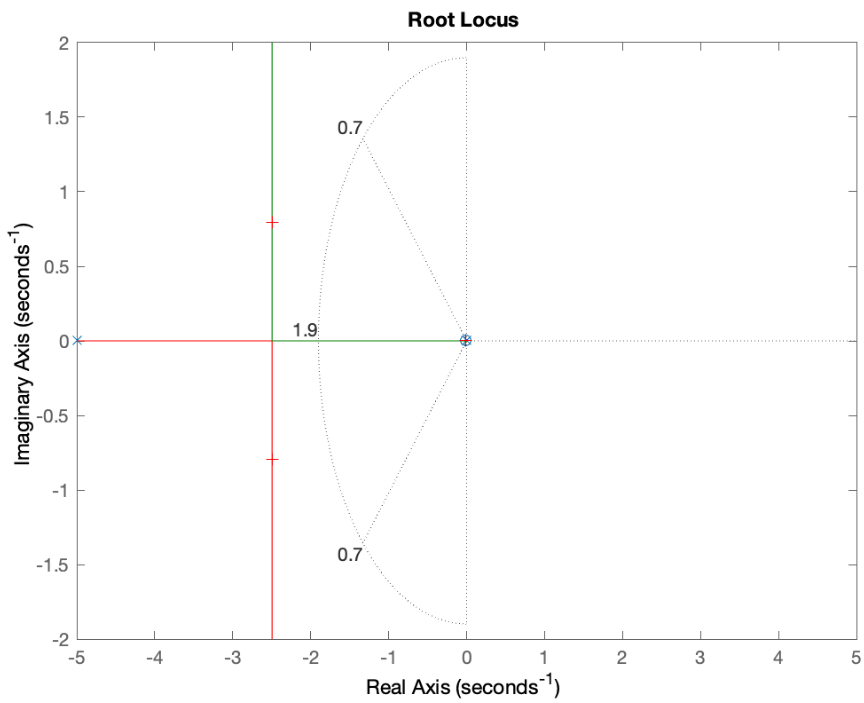
```
z_rlocus = -0.01;
p_rlocus = -5;
C_rlocus = zpk(z_rlocus, p_rlocus, 1);
figure(4)
G_rlocus = C_rlocus * P;
rlocus(G_rlocus)
sgrid(0.7, 1.9)
axis([-5 5 -2 2])
```



تصویر ۲-۳: نمودار مکان هندسی بعد از طراحی کنترلر

در ادامه، یکی از مقادیر ممکن برای بهره، که قطب‌های سیستم را در ناحیه مدنظر قرار می‌دهد انتخاب کرده و به ازای آن، پاسخ پله سیستم را پیدا می‌کنم. برای یافتن مقدار بهره از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
[k, poles] = rlocfind(G_rlocus)
```



تصویر ۳-۳: موقعیت انتخاب شده برای دو ریشه سیستم

مقدار بهره متناظر با این نقاط برابر با 32.88 است. اکنون که بهره سیستم را یافتیم، در تکمیل این روند نیاز است که تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را نیز بیابیم. این کار را با دستور زیر و به ازای فیدبک منفی واحد انجام می‌دهیم:

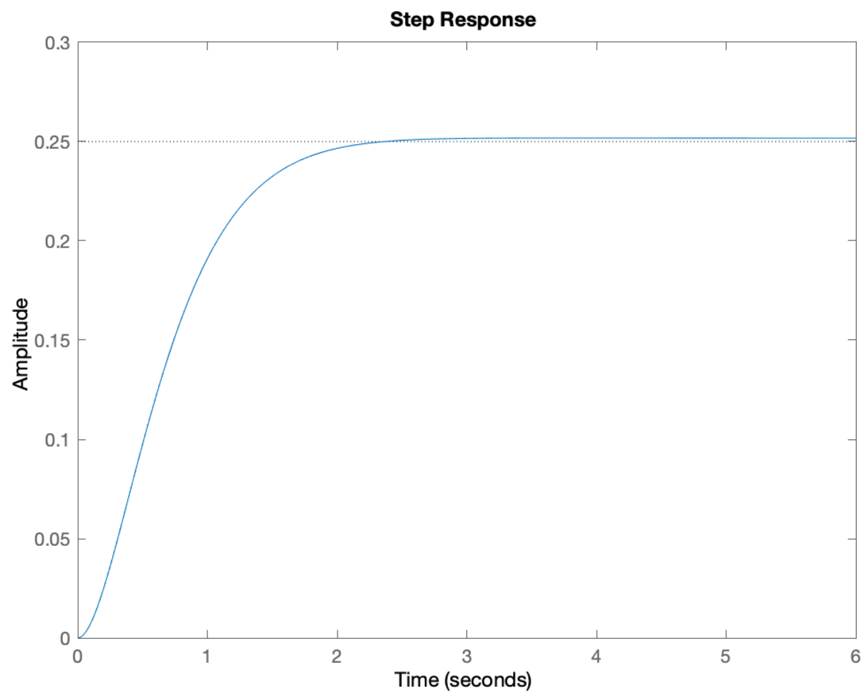
```
CL_rlocus = feedback(k*G_rlocus, 1);
```

محدوده رسم پاسخ پله را شش ثانیه در نظر می‌گیریم:

```
t = 0:0.01:6;
```

درنهایت با دستور زیر پسخ سیستم را به ازای پله 0.25 رسم می‌کنیم:

```
step(0.25*CL_rlocus, t)
```



تصویر ۴-۳: پاسخ سیستم نهایی به ورودی پله 0.25m

۲-۳- طراحی کنترل‌کننده با استفاده از پاسخ فرکانسی

مطابق آنچه در قسمت ۲-۲ توضیح داده شد، phase margin برابر صفر است و نیاز داریم که آن را تا مقداری دلخواه افزایش دهیم. بنابرایت، از یک pahse-lead compensator استفاده می‌کنیم که فرم چنین کنترلری در نوع مرتبه یک آن به صورت زیر است:

$$C(s) = K\frac{1+Ts}{1+aTs}$$

یک phase-lead compensator در بازه $\frac{1}{aT}$ و $\frac{1}{T}$ فاز مثبت به سیستم اضافه می‌کند. مقدار بیشینه فاز اضافه شده برابر 90درجه است. طبق یک مقدار تجربی، برای رسیدن به overshoot مطلوب، مقدار کمینه phase margin لازم برابر با 100ζ است. بنابراین مقدار phase margin را بزرگ‌تر از 70درجه در نظر می‌گیریم. (به عبارتی، حداقل phase margin برابر 70درجه است.)

ابتدا لازم است که center frequency را پیدا کنیم. انجام این کار از روی نمودار فازی که یک خط با مقدار ثابت است، ممکن نیست، اما از رابطه‌ای که میان زمان نشست و فرکانس پهنای باند وجود دارد، به

$\omega_r \approx 1.92$ می‌رسیم.. در ادامـه، center frequency را کمی قـبل‌تـر از این مـقدار در نـظر می‌گیریم؛ یعنی:
center frequency = 1.5

حال مقدار a را تعیین می‌کنیم که تعیین‌کننده فضای بین صفر و قطب برای ماکسیمم فاز اضافه شده است:

$$a = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} = 0.0076$$

در رابـطه بـالا، ϕ بیانـگر phase margin در نـظر گـرفـته شـده اسـت که این مـقدار را بـرابـر 80 درجـه در نـظر می‌گیریم. در ادامه، مقادیر T و aT را می‌یابیم:

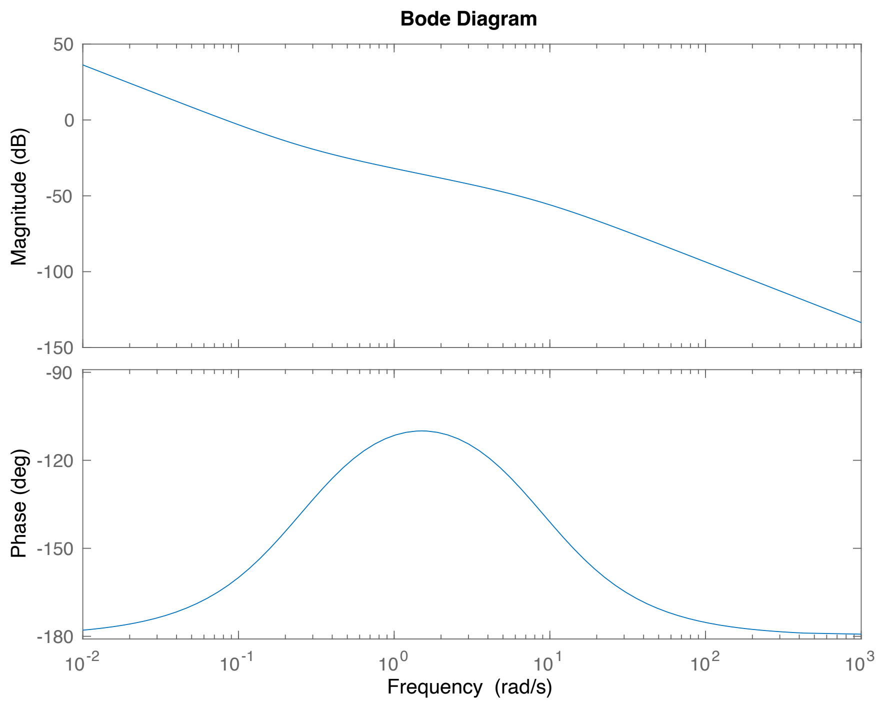
$$T = \frac{1}{\omega\sqrt{a}} = 3.78$$

$$aT = \frac{\sqrt{a}}{\omega} = 0.117$$

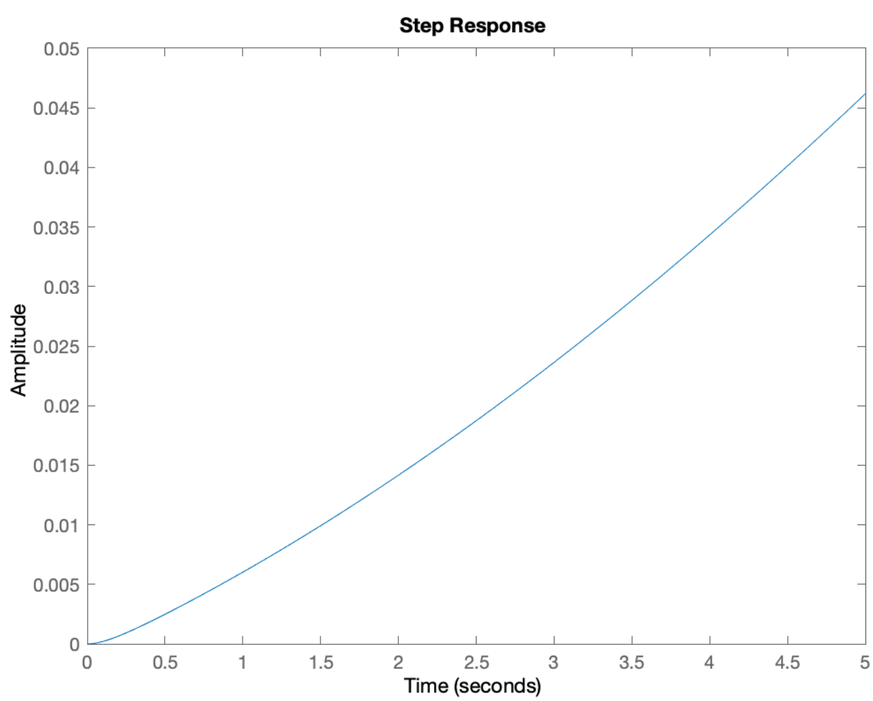
با در نظر گرفتن بهره یک برای کنترل‌کننده، دستورات زیر را می‌نویسیم:

```
phi = 80*pi/180;
a = 0.031;
w = 1.5;
T = 3.78;
k = 1; %gain of controller
z_f = -1/T;
p_f = -1/(a*T);
C_f = zpk(z_f, p_f, k);
G_f = C_f*P;
bode(G_f)
CL_f = feedback(k*G_f, 1);
step(0.25*CL_f, t)
```

نمودارهای خروجی در صفحه بعد قابل مشاهده هستند:

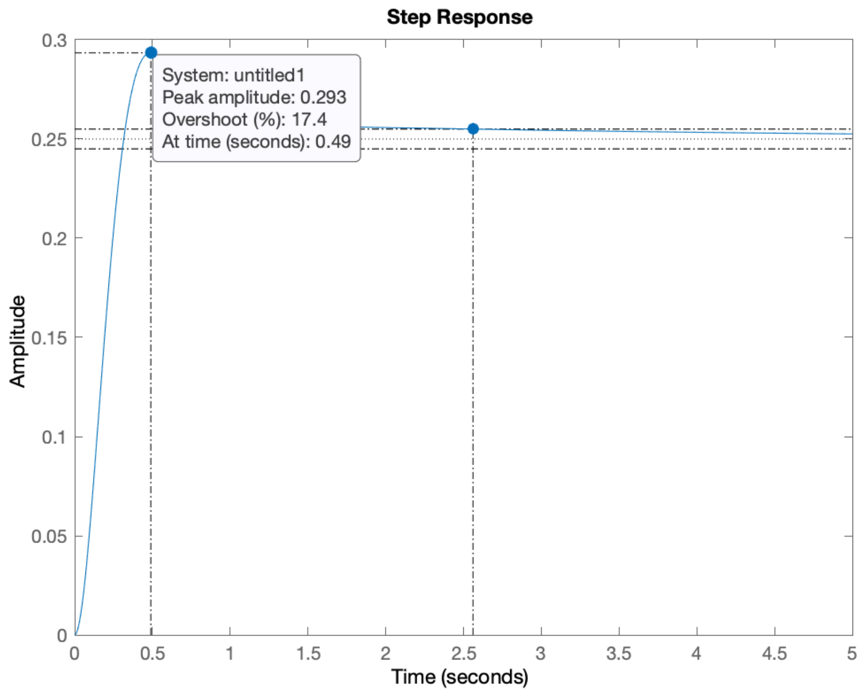


تصویر ۵-۳؛ نمودار بود سیستم بعد از اعمال کنترل‌کننده



تصویر ٦-۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته نهایی به پله 0.25m

مشاهده می‌شود که پاسخ سیستم ناپایدار است. از طرفی با افزایش بهره k مشاهده می‌شود که زمان نشست سیستم کاهش می‌یابد، اما اوورشوتی بسیار بیش‌تر از آنچه مدنظر است پیدا می‌کند. تصویر زیر به ازای k=17 رسم شده:



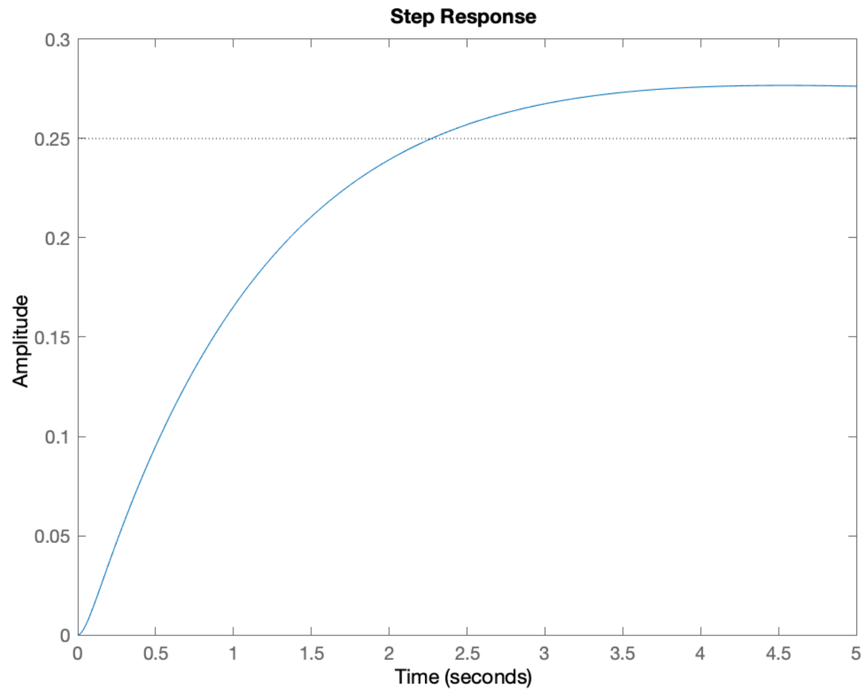
تصویر ۷-۳

از آنجا که مقدار زاویه در حال حاضر 80درجه است و بیش‌تر از 90درجه نیز نمی‌تواند باشد، مقداری به اندازه کافی قابل اعتماد دارد. بنابراین تغییر را در ω لحاظ می‌کنیم و مقدار آن را بیش‌تر می‌کنیم.($\omega = 1.9$)

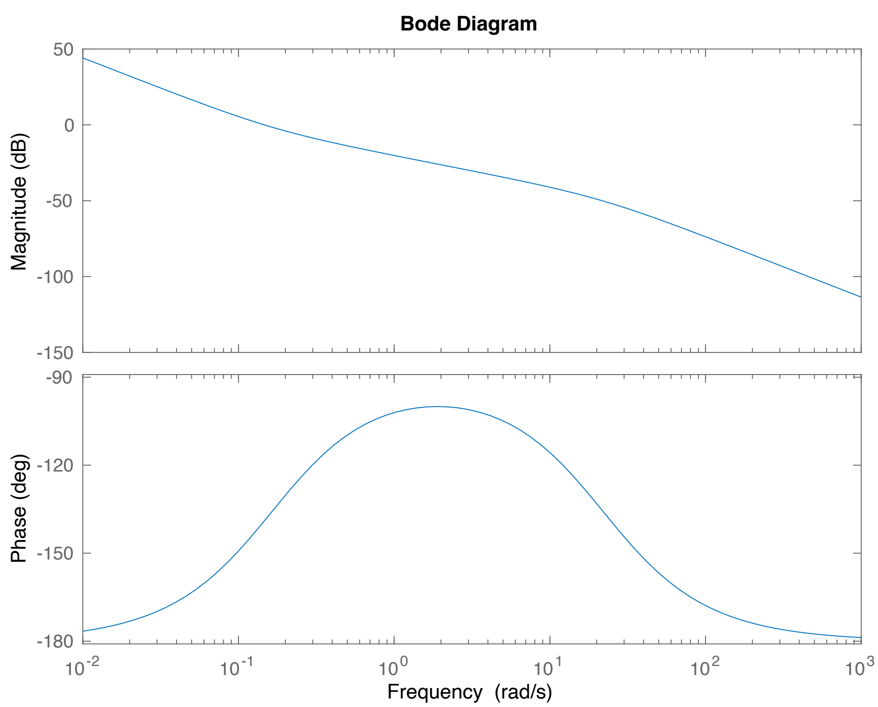
با توجه به روابط آورده شده، پارامترهای مختلف را دوباره حساب می‌کنیم:

$$T = 6.016 \quad aT = 0.0457$$

مقادیر جدید را در کد نیز اعمال می‌کنیم و دوباره نمودارها را رسم می‌کنیم. تصاویر در صفحه بعد قابل مشاهده هستند:

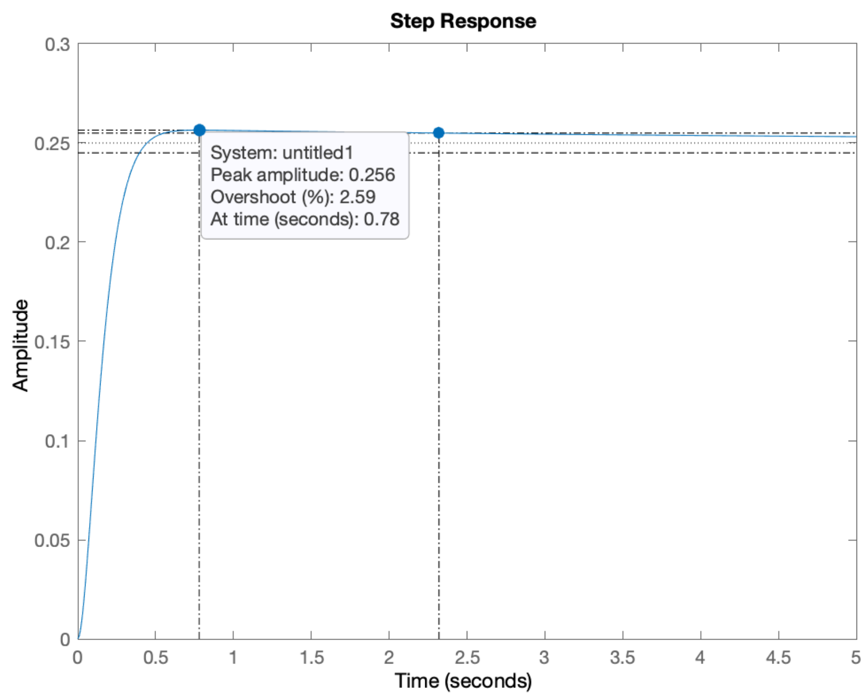


تصویر ۸-۳؛ نمودار بود سیستم بعد از اعمال کنترل‌کننده به ازای $\omega = 1.9$



تصویر ۹-۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته نهایی به پله 0.25m به ازای $\omega = 1.9$

مشاهده می‌شود که به ازای k=10 پاسخ سیستم، به مراتب بهتر شده است. بنابراین مجددا بهره را افزایش می‌دهیم. پاسخ زیر به ازای k=25 رسم شده است:



تصویر ۱۰-۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته نهایی به پله 0.25m

مشاهده می‌شود که با این میزان بهره، هم مقدار اوورشوت مطلوبی داریم (۲.۵۹ ثانیه) و هم زمان نشست آن مطلوب است.

۳-۳- طراحی کنترل‌کننده PID

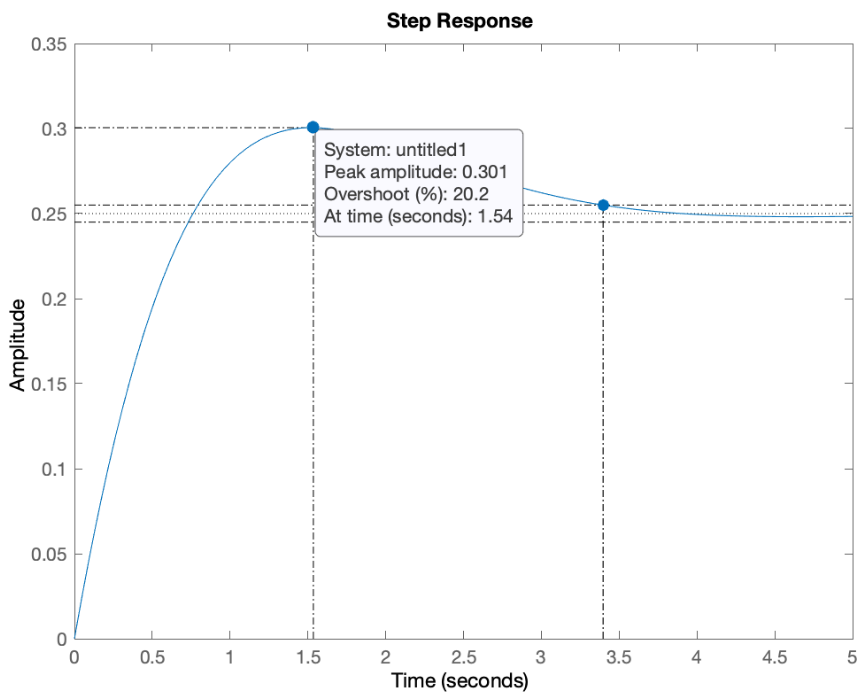
می‌دانیم که تابع تبدیل یک کنترل‌کننده PID به صورت زیر است:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

با مقادیر $K_p = 10\ ,\quad K_d = 10$ ادامه می‌دهیم و کد زیر را می‌نویسیم:

```
Kp = 10;
Kd = 10;
C_pid = pid(Kp, 0, Kd);
G_pid = C_pid * P;
CL_pid = feedback(G_pid, 1);
step(0.25*CL_pid)
```

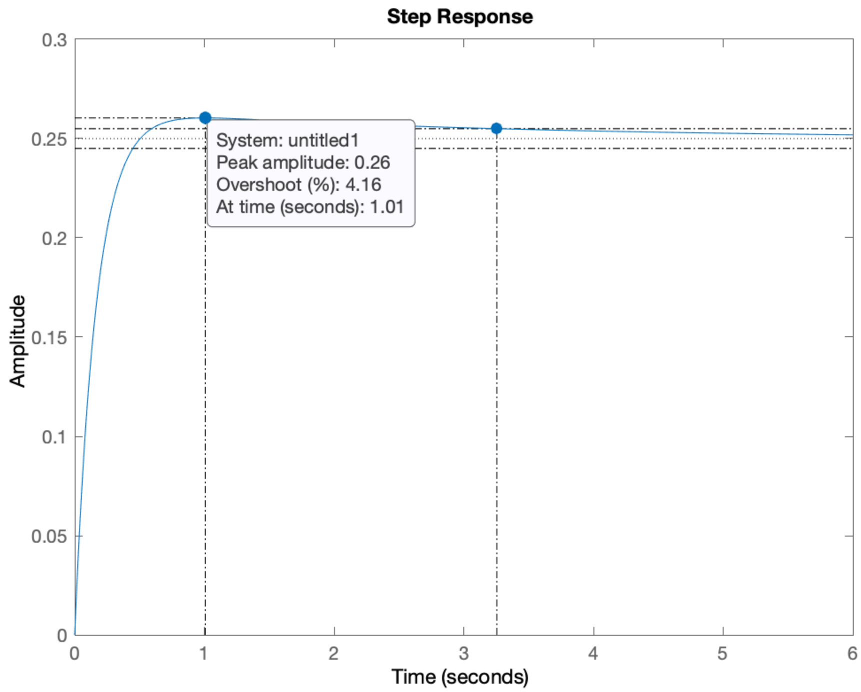
پاسخ سیستم به صورت در می‌آید:



تصویر ۱۱-۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته به پله 0.25m به ازای $K_p = 10\ , \quad K_d = 10$

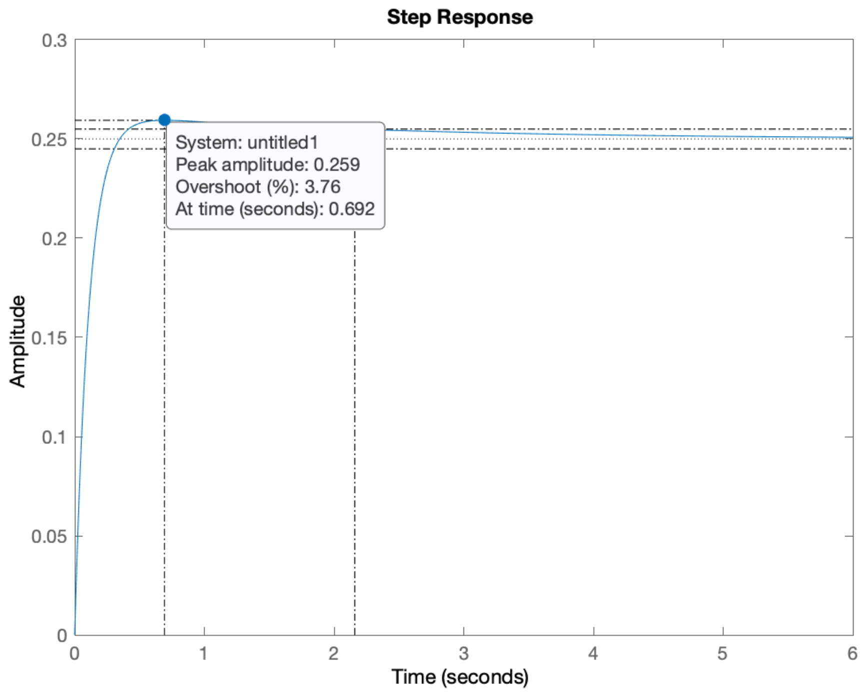
مشاهده می‌شود که مقادیر اوورشوت و زمان نشست با مقدار مطلوب فاصله دارند. بنابراین مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده را تغییر می‌دهیم:

$K_p = 10\ , \quad K_d = 20$



تصویر ۱۲-۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته به پله 0.25m به ازای $K_p = 10\ ,\quad K_d = 20$

می‌بینیم که با افزایش ضریب دیفرانسیلی، درصد فراجهش خواسته طراحی را ارضا می‌کند، اما همچنان با آنچه در رابطه با زمان نشست مدنظر است فاصله داریم. برای اصلاح آن، این‌بار مقدار K_p را کمی افزایش می‌دهیم. از آنجا که افزایش K_p باعث افزایش فراجهش نیز می‌شود، همزمان با افزایش آن، مقدار K_d را نیز برای تثبیت فراجهش در محدوده مورد نظر، افزایش می‌دهیم. در نهایت به‌ازای مقادیر $K_p = 20\ ,\quad K_d = 45$ ، نمودار پاسخ پله سیستم را رسم می‌کنیم. این پاسخ که شرایط مطلوب طراحی را برآورده می‌کند در صفحه بعد قابل مشاهده است.



تصویر ۳-۱۳؛ نمودار پاسخ سیستم حلقه بسته به پله 0.25m به ازای $K_d = 45$, $K_p = 20$