



آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۴۰۴

استاد: علی شریفی زارچی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: آرین علوی - محمدحسین اسلامی - سوگل زمانیان - علیرضا میرشفیعیان

مقدمات احتمال و متغیرهای تصادفی گسسته

مهلت ارسال: ۱۷ اسفند

تمرین اول

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده هر کس حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۰ نمره) یک سکه با احتمال شیر آمدن p را آن قدر می‌اندازیم تا برای اولین بار خط بیاید. احتمال این که تعداد دفعات پرتاب سکه در این فرآیند فرد باشد چه قدر است؟ (ساده‌ترین حالت ممکن را بنویسید)
۲. (۱۰ نمره) تعداد ماهی‌ها درون یک دریاچه از توزیع $Pois(\lambda)$ پیروی می‌کند. یک دانشمند نگران است که هیچ ماهی‌ای در دریاچه باقی نمانده باشد، پس به آن یک ماهی اضافه می‌کند. فرض کنید Y تعداد نهایی ماهی‌ها در دریاچه باشد. با توجه به این توضیحات، به سوالات زیر پاسخ دهید. (در هر بخش ساده‌ترین حالت را بنویسید)

(آ) مقدار $E(Y^2)$ را بیابید

(ب) مقدار $E(\frac{1}{Y})$ را بیابید

۳. (۱۵ نمره) نتیجه‌ی آزمایش یک بیماری نادر که ۰.۱ درصد جمعیت کشور دچارش هستند برای شما مثبت شده. به پیش دکتر می‌روید و از او می‌پرسید احتمال این که واقعا دچار این بیماری باشید چه قدر است؟ او پاسخ می‌دهد که آزمایش، به ۹۹ درصد از افرادی که واقعا دچار بیماری هستند نتیجه‌ی مثبت می‌دهد و فقط ۱ درصد از افرادی که بیماری را ندارند، به اشتباه جواب مثبت می‌گیرند. این اعداد و ارقام شما را به شدت نگران کرده و تصمیم می‌گیرید موقعیت را دقیق‌تر تحلیل کنید.

(آ) احتمال این که دچار بیماری باشید چه قدر است؟ راهنمایی: دو متغیر تصادفی sick و result تعریف کنید.

(ب) برای اطمینان خاطر، آزمایش را یک بار دیگر تکرار می‌کنید. متأسفانه برای بار دوم هم نتیجه‌ی آزمایشتان مثبت می‌شود. اگر آزمایش‌ها در دو آزمایشگاه مختلف انجام شوند و از هم مستقل باشند، اکنون با چه احتمالی دچار بیماری هستید؟

(ج) فردی در آزمایشگاه بعد از دیدن چهره‌ی ناراحتان با شما سر صحبت را باز می‌کند. او ادعا می‌کند که ”دکترهای این خیابان کارشان را بلد نیستند” و می‌گوید آزمایشگاهی را می‌شناسد که ”با دقت ۱۰۰ درصد بیماری را تشخیص می‌دهد”. از او می‌پرسید که منظورش از ”دقت ۱۰۰ درصد” چیست و او می‌گوید که ”تمام افرادی که بیماری را دارند نتیجه مثبت گرفته و شناسایی می‌شوند”. اگر این ادعا درست باشد، آیا این آزمایش از آزمایشی که شما دادید بهتر است؟

۴. (۱۵ نمره) شما در یک مسابقه بخت‌آزمایی شرکت کرده‌اید. این مسابقه می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند، و شما در هر مرحله (مستقل از سایر مراحل) با احتمال p یک میلیون تومان جایزه دریافت کرده، ولی با احتمال $1 - p$ خواهید باخت. در صورت باخت از مسابقه خارج شده و تمام جوایز کسب شده تا آن لحظه را نیز از دست می‌دهید. از طرف دیگر، پیش از وقوع یک باخت و در هر زمانی که اراده کنید می‌توانید جایزه جمع‌آوری شده تا آن لحظه را برداشته و از مسابقه خارج شوید.

بر خلاف اصرار معجری برنامه، واضح است که ادامه دادن بی‌حد این مسابقه کار به صلاحی نیست. چون بالاخره در مرحله‌ای خواهید باخت و چیزی عایدتان نمی‌شود. فرض کنید که تصمیم گرفته‌اید در صورت طی شدن m مرحله موفقیت‌آمیز جوایزتان را برداشته و خداحافظی کنید.

(آ) در صورتی که $m = 1$ را انتخاب کنید، میانگین جایزه‌ای که دریافت می‌کنید چند میلیون تومان خواهد شد؟

(ب) فرض کنید $m = 2$ را انتخاب کرده باشید. حالا میانگین جایزه کسب شده چه قدر است؟

(ج) واریانس جایزه کسب شده در حالت ب را محاسبه کنید.

(د) بهترین انتخاب m برای این که میانگین جایزه دریافتی شما بیشینه شود چه قدر است؟

۵. (۱۰ نمره) فرض کنید n کلاه داریم به طوری که هر کلاه یا سبز و یا آبی است. حال مشخص کنید به ازای چه مقادیری از n پیشامد این که «از هر رنگ حداقل یک کلاه داشته باشیم» از پیشامد این که «حداکثر یک کلاه سبز داشته باشیم» مستقل است؟

۶. (۱۵ نمره) در یک جعبه r توپ قرمز و g توپ سبز داریم و r و g دو عدد طبیعی ثابت هستند. به صورت کاملاً تصادفی یک توپ را از جعبه خارج می‌کنیم و آن را به جعبه بازنمی‌گردانیم. سپس یک توپ دیگر را خارج می‌کنیم.

(آ) با استدلال منطقی و بدون محاسبه نشان دهید که چرا احتمال این که توپ اول سبز باشد با احتمال این که توپ دوم سبز باشد برابر است؟

(ب) احتمالات بخش اول را محاسبه کنید و این بار حکم بخش اول را ثابت کنید.

(ج) فرض کنید ۱۶ توپ در جعبه داریم و احتمال این که دو توپ هم‌رنگ باشند و احتمال این که هم‌رنگ نباشند برابر است. تمام حالت‌های ممکن r و g را به دست آورید.

۷. (۱۰ نمره) اگر X و Y دو متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ باشند و Z را به صورت

$$Z = \min\{X, Y\}$$

تعریف کنیم، آنگاه $P(Z \leq 1)$ را به دست آورید.

۸. (۱۵ نمره)

(آ) دو ربات از نقطه‌ی $x = 0$ به حرکت می‌کنند. این دو ربات با هم گام برمی‌دارند و حرکت آن‌ها از یکدیگر مستقل است. (در هنگام برخورد از روی هم رد می‌شوند.) هر ربات در هر گام به احتمال یکسان به چپ یا راست حرکت می‌کند. احتمال اینکه بعد از n گام این دو ربات در محل یکسانی باشند چقدر است؟

(ب) دو ربات در صفحه دو بعدی از مبدأ مختصات شروع به حرکت می‌کنند. دو ربات هم زمان گام برمی‌دارند و در هر گام به اندازه‌ی یک واحد با احتمال یکسان به بالا، پایین، چپ یا راست حرکت می‌کنند. احتمال اینکه پس از n گام دو ربات در محل یکسانی باشند چقدر است؟