



آمار و احتمال مهندسی

بهار ۱۴۰۴

استاد: علی شریفی زارچی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: دانیال پرنیان - دنیا جعفری - درسا شریفی - محمد علیزاده - علیرضا میرشفیعیان

مهلت ارسال: ۱۹ اردیبهشت

واریانس شرطی و توزیع‌های چندمتغیره

تمرین چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۰ نمره) سکه‌ای داریم که با احتمال p شیر می‌آید. سکه را تا زمانی که ۲ بار پشت سر هم شیر بیاید پرتاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد پرتاب‌ها چند است؟

۲. (۱۰ نمره) فرض کنید شما یک وبسایت دارید. متغیرهای زیر را در نظر بگیرید:

• X = تعداد افرادی که در یک روز از سایت شما بازدید می‌کنند. داریم: $X \sim \text{Bin}(100, 0.5)$.

• Y_i = تعداد دقیقی که بازدیدکننده‌ی i در سایت سپری می‌کند. داریم: $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

• متغیرهای X و تمامی Y_i ها مستقل هستند.

مجموع زمان صرف شده توسط تمام بازدیدکنندگان در یک روز برابر است با:

$$W = \sum_{i=1}^X Y_i$$

مقدار امید ریاضی $E[W]$ چقدر است؟

۳. (۱۵ نمره) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشند به طوری که تابع چگالی توام احتمال آنها به شکل زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2} & ; 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & ; \text{otherwise.} \end{cases}$$

$E[Y|X=x]$ را بیابید (راهنمایی: جواب نهایی $\frac{n-1}{n} + \frac{x}{n}$ است).

۴. (۲۰ نمره) فرض کنید N تعداد تماس های تلفنی انجام شده توسط مشتریان یک شرکت مخابراتی در یک ساعت مشخص باشد و بدانیم که $N \sim Poisson(\beta)$ و β مقداری مثبت و ثابت دارد. فرض کنید X_i طول مدت تماس تلفنی i ام برای $i = 1, 2, \dots, N$ باشد. همچنین X_i ها از یکدیگر و N مستقلند و هر یک، از توزیع $Exponential(\lambda)$ پیروی می کنند. حال متغیر تصادفی Y را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

مقادیر $E[Y]$ و $Var(Y)$ را بدست آورید.

۵. (۱۵ نمره) فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و مثبت باشند که دارای توابع چگالی احتمال (PDF) به صورت f_X و f_Y هستند. حال متغیر جدیدی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T = XY$$

تابع چگالی احتمال آن را با گرفتن لگاریتم از دو طرف معادله $T = XY$ و تبدیل آن به یک convolution، سپس تبدیل دوباره به تابع چگالی احتمال T به دست آورید.

۶. (۱۵ نمره) فرض کنید $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. (الف) تابع چگالی احتمال (PDF) متغیر تصادفی Z^3 را پیدا کنید. (ب) تابع چگالی احتمال Z^4 را پیدا کنید. (ج) تابع چگالی احتمال $|Z|$ را پیدا کنید.

۷. (۱۵ نمره) یک پدر و مادر ۶ فرزند دارند. ۸ قد در خانواده (بر حسب سانتی متر) متغیرهای تصادفی $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ هستند (با توزیع یکسان، اما لزوماً مستقل نیستند).

(الف) برای این بخش فرض کنید که قدها همگی مستقل هستند. به طور میانگین، چند نفر از فرزندان بلندتر از هر دو والدین هستند؟

(ب) فرض کنید X_1 قد مادر، X_2 قد پدر، و Y_1, \dots, Y_6 قد فرزندان باشند. فرض کنید $(X_1, X_2, Y_1, \dots, Y_6)$ یک توزیع نرمال چندمتغیره باشد، با حاشیه های (Marginals) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ و $\text{Corr}(X_1, Y_j) = \rho$ برای $1 \leq j \leq 6$ ، که در آن $\rho < 1$. به طور میانگین، چند نفر از فرزندان بیش از ۱ سانتی متر بلندتر از مادرشان هستند؟