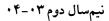
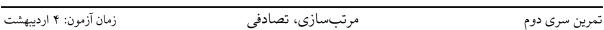
ساختمان دادهها و طراحى الگوريتمها







مسئلهی ۱. بیت های بدون بایاس

فرض کنید به منبعی از بیت های بدون بایاس دسترسی داریم.

- p الف) نشان دهید چگونه می توان با امید ریاضی تنها O(1) بیت تصادفی یک متغیر تصادفی با بایاس ساخت، که با احتمال p یک و با احتمال p صفر خواهد شد. (راهنمایی: ابتدا تشان دهید چگونه چنین متغیری را می توان با تعداد دلخواه بیت تصادفی ساخت. سپس نشان دهید ریاضی تعداد بیت های مذکور مقداری کوچک است.)
- ب) نشان دهید چگونه می توان از بازه [n] نمونه برداری کرد، با احتمال های p_1, p_7, \cdots, p_n ، تنها با امید ریاضی تعداد $\mathcal{O}(\log n)$

مسئلهی ۲. عدد پر تکرار

n/r یک آرایه یn عضوی از اعداد صحیح داده شده است. در زمان O(n) عضوی را در صورت وجود پیدا کنید که بیش از O(n) بار تکرار شده باشد.

مسئلهی ۳. مرتبسازی محدود

آرایهای از n عدد صحیح در بازهی ۰ تا ۱n ۱ داریم. روشی ارائه دهید که این اعداد را در O(n) مرتب کند.

مسئلهی ۴. چاه نفت

تعداد n چاه نفت در یک نقشه ی دوبعدی داریم. چاه نفت iام در مختصات x_i و y_i قرار دارد. میخواهیم یک لوله ی افقی اصلی با مختصات y=c از بین این چاهها بگذرانیم و هر چاه را با یک لوله ی عمودی به این لوله ی افقی متصل کنیم. در زمان y=c مقدار z را طوری تعیین کنید که مجموع طول لولههای عمودی کمینه شود.

مسئلهي ٥. جمع آوري كوپن ها

محمدحسین جعبه ای دارد که شامل n توپ بوده، به نحوی که هر توپ برچسبی از ۱ تا n دارد. او هر بار یک توپ را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان بیرون می آورد، سپس آن را به داخل جعبه باز می گرداند. او این کار را تا جایی که همه توپ ها را دیده باشد، تکرار می کند. مطلوب است محاسبه امید ریاضی تعداد برچسب هایی که محمدحسین تنها یک بار دیده است.

مسئلهی ۶. یافتن k امین عنصر بزرگ

الگوریتم تصادفی یافتن میانه را برای پیدا کردن k امین عنصر بزرگ در یک مجموعه n تایی از اعداد برای هر k دلخواه، عمومیت ببخشید. ثابت کنید که الگوریتم شما صحیح است و زمان اجرای آن را نیز تعیین نمایید.

مسئلهی ۷. مرتب سازی حبابی

یک لیست n تایی از اعداد متمایز به صورت a_1, a_2, \cdots, a_n در نظر بگیرید. می گوییم a_i و a_j به صورت نابجا قرار گرفته اند، اگر i < j ولی $a_i > a_j$ باشد. الگوریتم مرتب سازی حبابی، دو به دو اعداد نابجا قرار گرفته را جابجا می کند تا زمانی که هیچ نابجایی ای باقی نمانده باشد. فرض کنید که ورودی الگوریتم مرتب سازی حبابی یک جایگشت تصادفی از اعداد باشد. طوری که هر جایگشت با احتمال یکسانی ظاهر شود. امید ریاضی تعداد نابجایی هایی را که مرتب سازی حبابی می بایست تصحیح کند، بیابید. همچنین، واریانس تعداد نابجایی ها را تعیین نمایید.

مسئلهی ۸. کوچکترین عنصرها

میخواهیم از بین n عدد، kامین کوچکترین عنصر، kامین کوچکترین عنصر و به همین ترتیب تا $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ امین کوچکترین عنصر را پیدا کنیم. روشی از $\mathcal{O}(n \log \frac{n}{k})$ برای این کار ارائه دهید.

مسئلهی ۹. حد پایین مقایسه ها

فرض کنید لیست مرتب شده ای از n عدد، به شکل مقابل داریم: $x_1 \leqslant x_1 \leqslant x_1 \leqslant x_1 \leqslant x_1 \leqslant x_1$. از ما خواسته شده است مرتب شده ای از $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$. از ما خواسته شده ای الگوریتم هایی الگورتیمی ارائه دهیم که تشخیص دهد آیا عناصر لیست انجام می دهند. به این صورت که عملیاتی مانند (COMPARE(i,j) هستیم که مقایسه میان یک جفت از عناصر لیست انجام می دهند. به این صورت که عملیات در صورت یافتن فراخوانی می شود و بر اساس نسبت میان $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x$

مسئلهی ۱۰. جایگشت مرتب

 $\sigma_i=i$ فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا σ باشد. امیدریاضی تعداد σ هایی را بدست آورید که

مسئلهی ۱۱. وارونه یابی

فرض کنید σ یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. امیدریاضی تعداد وارونهها را بدست آورید. یک وارونه، یک زوج σ اما $\sigma(i) > \sigma(j)$ اما $\sigma(i) > \sigma(j)$ است بطوری که $\sigma(i) > \sigma(j)$

مسئلهی ۱۲. مرتبسازی با معکوس

A[i..j] ریرآرایهی A از n عدد دلخواه داده شده است. فرض کنید عملیات A[i..j] میلا عدد دلخواه داده شده است. فرض کنید عملیات A[i+k] را درون A[i+k] قرار می دهد. با چند بار استفاده از این عملیات می توان آرایه ی A را مرتب کرد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئلهی ۱۳. خروجی تصادفی

الگوریتمی را در نظر بگیرد که ورودی a_1,\ldots,a_n شامل a_1,\ldots,a_n شامل a_2 عدد مجزا را به ترتیب داده شده می خواند و هنگام خواندن a_1,\ldots,a_n مقدار a_i را به احتمال a_i برابر a_i قرار می دهد. الگوریتم در پایان مقدار a_i را به عنوان خروجی گزارش می کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر a_i است؟

مسئلهی ۱۴. زیر آرایههای مرتب

آرایه ی A از n عدد دلخواه متمایز داده شده است و k یک عدد از پیش مشخص است. فرض کنید عملیات sort(i) به ازای $i \le n$ را مرتب میکند. در بدترین حالت چند عملیات sort برای مرتب کردن آرایه ی $i \le n - k + 1$ را مرتب میکند. در بدترین حالت چند عملیات $i \le n - k + 1$ آرایه ی $i \le n - k + 1$ آر