



## ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۴

مدرس: آدام- کاظمی

تمرین سری دوم

مرتب‌سازی، تصادفی

زمان آزمون: ۴ اردیبهشت

## مسئله‌ی ۱. بیت های بدون بایاس

فرض کنید به منبعی از بیت های بدون بایاس دسترسی داریم.

الف) نشان دهید چگونه می توان با امید ریاضی تنها  $O(1)$  بیت تصادفی یک متغیر تصادفی با بایاس ساخت، که با احتمال  $p$  یک و با احتمال  $1-p$  صفر خواهد شد. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید چگونه چنین متغیری را می توان با تعداد دلخواه بیت تصادفی ساخت. سپس نشان دهید امید ریاضی تعداد بیت های مذکور مقداری کوچک است.)

ب) نشان دهید چگونه می توان از بازه  $[n]$  نمونه برداری کرد، با احتمال های  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، تنها با امید ریاضی تعداد  $O(\log n)$  بیت تصادفی.

## مسئله‌ی ۲. عدد پر تکرار

یک آرایه‌ی  $n$  عضوی از اعداد صحیح داده شده است. در زمان  $O(n)$  عضوی را در صورت وجود پیدا کنید که بیش از  $n/3$  بار تکرار شده باشد.

## مسئله‌ی ۳. مرتب‌سازی محدود

آرایه‌ای از  $n$  عدد صحیح در بازه‌ی  $0$  تا  $n^2 - 1$  داریم. روشی ارائه دهید که این اعداد را در  $O(n)$  مرتب کند.

## مسئله‌ی ۴. چاه نفت

تعداد  $n$  چاه نفت در یک نقشه‌ی دوبعدی داریم. چاه نفت  $i$ ام در مختصات  $x_i$  و  $y_i$  قرار دارد. می‌خواهیم یک لوله‌ی افقی اصلی با مختصات  $y = c$  از بین این چاه‌ها بگذرانیم و هر چاه را با یک لوله‌ی عمودی به این لوله‌ی افقی متصل کنیم. در زمان  $O(n)$  مقدار  $c$  را طوری تعیین کنید که مجموع طول لوله‌های عمودی کمینه شود.

## مسئله‌ی ۵. جمع آوری کوپن ها

محمدحسین جعبه‌ای دارد که شامل  $n$  توپ بوده، به نحوی که هر توپ برچسبی از  $1$  تا  $n$  دارد. او هر بار یک توپ را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان بیرون می آورد، سپس آن را به داخل جعبه باز می گرداند. او این کار را تا جایی که همه توپ ها را دیده باشد، تکرار می کند. مطلوب است محاسبه امید ریاضی تعداد برچسب هایی که محمدحسین تنها یک بار دیده است.

مسئله‌ی ۶. یافتن  $k$  امین عنصر بزرگ

الگوریتم تصادفی یافتن میانه را برای پیدا کردن  $k$  امین عنصر بزرگ در یک مجموعه  $n$  تایی از اعداد برای هر  $k$  دلخواه، عمومیت بخشید. ثابت کنید که الگوریتم شما صحیح است و زمان اجرای آن را نیز تعیین نمایید.

## مسئله ۷. مرتب سازی حبابی

یک لیست  $n$  تایی از اعداد متمایز به صورت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  در نظر بگیرید. می گوییم  $a_i$  و  $a_j$  به صورت نابجا قرار گرفته اند، اگر  $j < i$  ولی  $a_i > a_j$  باشد. الگوریتم مرتب سازی حبابی، دو به دو اعداد نابجا قرار گرفته را جابجا می کند تا زمانی که هیچ نابجایی ای باقی نمانده باشد. فرض کنید که ورودی الگوریتم مرتب سازی حبابی یک جایگشت تصادفی از اعداد باشد. طوری که هر جایگشت با احتمال یکسانی ظاهر شود. امید ریاضی تعداد نابجایی هایی را که مرتب سازی حبابی می بایست تصحیح کند، بیابید. همچنین، واریانس تعداد نابجایی ها را تعیین نمایید.

## مسئله ۸. کوچکترین عنصرها

می خواهیم از بین  $n$  عدد،  $k$  امین کوچکترین عنصر،  $2k$  امین کوچکترین عنصر و به همین ترتیب تا  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  امین کوچکترین عنصر را پیدا کنیم. روشی از  $O(n \log \frac{n}{k})$  برای این کار ارائه دهید.

## مسئله ۹. حد پایین مقایسه ها

فرض کنید لیست مرتب شده ای از  $n$  عدد، به شکل مقابل داریم:  $X = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . از ما خواسته شده است الگوریتمی ارائه دهیم که تشخیص دهد آیا عناصر تکراری در لیست وجود دارند؟ اما ما تنها محدود به استفاده از الگوریتم هایی هستیم که مقایسه میان یک جفت از عناصر لیست انجام می دهند. به این صورت که عملیاتی مانند  $\text{COMPARE}(i, j)$  فراخوانی می شود و بر اساس نسبت میان  $x_i$  و  $x_j$  یکی از سه مقدار  $<, =, >$  را بر می گرداند. الگوریتم باید در صورت یافتن عناصر تکراری، اندیس های دو عنصر تکراری را برگرداند و در غیر این صورت گزارش کند که عناصر غیر تکراری هستند. یک الگوریتم با کمترین استفاده از عملیات  $\text{COMPARE}$  ارائه دهید که در صورت وجود چند عنصر غیر متمایز، یکی را به عنوان پاسخ برگرداند. حد پایین مناسبی برای تعداد فراخوانی عملیات  $\text{COMPARE}$  پیشنهاد دهید.

## مسئله ۱۰. جایگشت مرتب

فرض کنید  $\sigma$  یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا  $n$  باشد. امید ریاضی تعداد  $i$  هایی را بدست آورید که  $\sigma_i = i$ .

## مسئله ۱۱. وارونه یابی

فرض کنید  $\sigma$  یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا  $n$  باشد. امید ریاضی تعداد وارونه ها را بدست آورید. یک وارونه، یک زوج  $(i, j)$  است بطوری که  $i < j$  اما  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

## مسئله ۱۲. مرتب سازی با معکوس

آرایه ای  $A$  از  $n$  عدد دل خواه داده شده است. فرض کنید عملیات  $\text{reverse}(i, j)$  ( $1 \leq i < j \leq n$ )، زیرآرایه ای  $A[i..j]$  را معکوس می کند، یعنی به ازای هر  $0 \leq k \leq j - i$ ،  $A[j - k]$  را درون  $A[i + k]$  قرار می دهد. با چند بار استفاده از این عملیات می توان آرایه ای  $A$  را مرتب کرد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

## مسئله ۱۳. خروجی تصادفی

الگوریتمی را در نظر بگیرید که ورودی  $a_1, \dots, a_n$  شامل  $n$  عدد مجزا را به ترتیب داده شده می خواند و هنگام خواندن  $a_i$  مقدار متغیر  $x$  را به احتمال  $1/i$  برابر  $a_i$  قرار می دهد. الگوریتم در پایان مقدار  $x$  را به عنوان خروجی گزارش می کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر  $a_i$  است؟

## مسئله ۱۴. زیر آرایه های مرتب

آرایه ای  $A$  از  $n$  عدد دل خواه متمایز داده شده است و  $k$  یک عدد از پیش مشخص است. فرض کنید عملیات  $\text{sort}(i)$  به ازای  $1 \leq i \leq n - k + 1$ ، زیرآرایه ای  $A[i..i + k - 1]$  را مرتب می کند. در بدترین حالت چند عملیات  $\text{sort}$  برای مرتب کردن آرایه ای  $A$  لازم است؟