مسئله‌ی ۱. کوتاه کردن تدریجی

فرض کنید در یک گراف وزن‌دار (منفی یا مثبت) که وزن همه‌ی دورها در آن مثبت است می‌خواهیم کوتاه‌ترین فاصله از راس s به بقیه راس‌ها را محاسبه کنیم. برای این کار در ابتدا $d(s) = ۰$ و $\forall u \neq s : d(u) = +\infty$ می‌گذاریم. هر بار به دلخواه یک یال (u, v) را که $d(u) + w(u, v) < d(v)$ انتخاب کرده و مقدار $d(v)$ را با مقدار $d(u) + w(u, v)$ بروزرسانی می‌کنیم که $w(u, v)$ وزن یال (u, v) می‌باشد. درستی الگوریتم فوق و چندجمله‌ای بودن زمان اجرای آن در بدترین حالت را بررسی کنید.

مسئله‌ی ۲. جست‌وجو در ژرف

فرض کنید یک گراف ۵ راسی همبند داریم که راس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. فرض کنید از راس ۱ DFS را اجرا می‌کنیم. فرض کنید تمام حالت‌هایی که DFS می‌تواند رئوس را ملاقات کند عبارتند از $< ۱, ۲, ۴, ۳, ۵ >$، $< ۱, ۳, ۴, ۲, ۵ >$ و $< ۱, ۳, ۵, ۴, ۲ >$. حال اگر از راس ۵ DFS را اجرا کنیم ترتیب ملاقات‌ها به چه شکل می‌تواند باشد. دلیل خود را بیان کنید.

مسئله‌ی ۳. دوبینی

فرض کنید یک گراف بدون‌جهت داریم که هر یال آن دارای دو وزن مثبت است. بار اولی که از یک یال عبور می‌کنیم باید به اندازه وزن بیش‌تر آن یال هزینه پرداخت کنیم و بارهای بعدی به اندازه وزن سبک‌تر هزینه پرداخت می‌کنیم. می‌خواهیم از راس u به راس v برویم و در مسیر از راس w عبور کنیم. الگوریتمی از مرتبه $O(n \log n + m)$ ارائه دهید که مسیر با کم‌ترین وزن را پیدا کند که n و m به ترتیب تعداد رئوس و تعداد یال‌های گراف می‌باشند.

مسئله‌ی ۴. کوتاه‌ترین مسیر

فرض کنید گراف G یک گراف وزن‌دار همبند با n راس باشد که دارای دور منفی نیست. رئوس گراف را به ترتیب دلخواه از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید $d(u, v)$ برابر طول کوتاهترین مسیر از u به v باشد. به ازای عدد دلخواه k $(۰ \leqslant k \leqslant n)$ دو تابع فاصله زیر را تعریف می‌کنیم.

۱. $g^k(u, v)$ برابر طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v که تعداد یال‌های مسیر حداکثر k باشد.

۲. $h^k(u, v)$ برابر طور کوتاه‌ترین مسیر از u به v که شماره‌ی راس‌های میانی (به غیر از u و v) حداکثر k باشد.

ابتدا نشان دهید $g^n(u, v) = h^n(u, v) = d(u, v)$ است. سپس مقدار $g^۱(u, v)$ و $h^۰(u, v)$ را محاسبه کنید. نهایتا برای هر دو تابع h و g یک رابطه بازگشتی بنویسید.

مسئله‌ی ۵. رنگ‌آمیزی

دور یک دایره اعداد یک تا n را طوری نوشته‌ایم که هر عدد دقیقاً دو بار آمده است. می‌خواهیم با دو رنگ تمام اعداد را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که هیچ دو عدد متوالی‌ای همرنگ نشوند و هر دو عددی که مقدارشان یکسان است نیز ناهمرنگ شوند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ ارائه دهید که اگر چنین رنگ آمیزی وجود داشت آن را بیابد و اگر وجود نداشت اعلام کند که نمی‌توان این ورودی را حل کرد.

مسئله‌ی ۶. بی‌اف‌اس کم‌عمق

در گراف همبند $G = (V, E)$ شامل n راس، اگر از هر راس BFS را اجرا کنیم ارتفاع درخت BFS حداکثر ۲ می‌شود. نشان دهید برای هر $n - ۱ \leqslant i \leqslant n(n-۱)/۲$ می‌توان گرافی با i یال مثال زد که این ویژگی را داشته باشد.

مسئله‌ی ۷. ترتیب ملاقات

فرض کنید رئوس گراف همبند و بدون جهت G با اعداد $۱, ۲, \dots, n$ شماره‌گذاری شده‌اند. ار راس شماره ۱ الگوریتم BFS را اجرا کرده‌ایم و تریبب ملاقات رئوس از چپ به راست به ترتیب $۱, ۲, \dots, n$ شده است. درستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. بین راس i و $i + ۱$ به ازای هر i یال وجود دارد.

۲. از راس n می‌توان به گونه‌ای BFS را اجرا کرد که ترتیب ملاقات رئوس $n, \dots, ۲, ۱$ شود.

۳. به ازای هر $i > ۱$ حتما یک $j < i$ وجود دارد که بین i و j یک یال وجود دارد.

مسئله‌ی ۸. میزبانی جام ملت‌های آسیا

قرار است میزبان جام ملت‌های آسیا دوره‌ی بعد بزودی مشخص شود. لیست نامزدها مشخص است و کنفدراسیون فوتبال آسیا (ای‌اف‌سی) بررسی‌های لازم خود را از کشورهای نامزد انجام داده است. باتوجه به بررسی‌های انجام شده، درحال حاضر مشخص است اگر ای‌اف‌سی بخواهد بین دو کشور نامزد A و B یکی را انتخاب کند کدام کشور را انتخاب خواهد کرد. سیستم انتخاب میزبان توسط ای‌اف‌سی بدین‌شکل است. در هر مرحله از بین نامزدهای باقی‌مانده، دو نامزد را بطور کاملا تصادفی انتخاب می‌کند و نامزدی که رای ای‌اف‌سی با او نیست را حذف می‌کند. با فرض آنکه نظر ای‌اف‌سی را در مورد هر دو کشور نامزد می‌دانیم، می‌خواهیم کشورهایی که شانس کسب میزبانی را دارند را پیدا کنیم. برای این کار یک گراف جهت‌دار n راسی می‌سازیم که n تعداد کشورهای نامزد است و هر راس متناظر با یک کشور نامزد است. برای هر دو راس A و B یک یال بین آن‌ها می‌گذاریم و جهت یال را به سمت کشوری می‌گذاریم که نظر ای‌اف‌سی با آن کشور است.

۱. نشان دهید کشور A شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همه‌ی رئوس به راس A مسیر وجود داشته باشد.

۲. الگوریتمی با زمان اجرای $\Theta(n^۲)$ ارائه دهید که تمام کشورهایی که شانس میزبانی را دارند را پیدا کند. دقت کنید که تعداد یال‌های گراف از $\Theta(n^۲)$ است.

مسئله‌ی ۹. بلندترین مسیر کوتاه

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با وزن‌های دلخواه $w:E\rightarrow\mathbb{Z}$ و دو راس $s,t\in V$ را در نظر بگیرید. الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(|V|^۳)$ ارائه دهید که بتواند کمینه وزن هر گشتی از s به t که شامل حداقل $|V|$ یال است را بیابد.

مسئله‌ی ۱۰. درخت مینیمال

در گراف‌های وزن‌دار، «درخت دایگسترای راس s» درختی ریشه‌دار از راس s است که فاصله‌ی هرراس در آن (جمع وزن یال‌ها) تا ریشه (راس s) برابر کمینه فاصله‌ی آن راس تا ریشه در گراف اصلی است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O((n+m)\log n)$ ارائه دهید که از بین درخت‌های دایگسترای راس s، درختی که جمع وزن یال‌های آن کمینه است را پیدا کند.

مسئله‌ی ۱۱. به وقت ملاقات

در کشور آبادستان، n شهر وجود دارد که با m جاده دو طرفه به یکدیگر راه دارند. علی در شهر شماره ۱ و اکبر در شهر شماره n است. زمان طی کردن یک جاده برای هر دو نفر دقیقا یک واحد زمان است. علی می‌خواهد به شهر n برود و اکبر می‌خواهد به شهر ۱ برود. آنها نمی‌خواهند در هیچ لحظه‌ای یکدیگر را ببینند اما دیدار در طول یک جاده (زمانی که هر کدام در جهت مخالف یکدیگر حرکت می‌کنند) مجاز است. آنها تا زمانی که هر دو به مقصد نرسند، نمی‌توانند در یک شهر متوقف بمانند و همچنین می‌خواهند در کمترین زمان ممکن هر دو همزمان به مقصد خود برسند. الگوریتمی از $O(n^۲+nm)$ ارائه دهید که کمترین زمان ممکن را بیابد، یا گزارش کند که چنین کاری ممکن نیست.

مسئله‌ی ۱۲. راس حیاتی

فرض کنید یک گراف ساده‌ی n راسی $G=\langle V,E\rangle$ به همراه دو راس s و t در V به ما داده شده است. می‌دانیم که هر مسیر میان این دو راس در گراف G بیش از $\frac{n}{۲}$ یال خواهد داشت. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n+m)$ ارائه دهید که راس h را بیابد که با حذف آن از گراف، دیگر مسیری میان s و t وجود نداشته باشد.

مسئله‌ی ۱۳. قدرت مغول

یک درخت n راسی ریشه‌دار در اختیار داریم. چنگیز و چونه روی این درخت با یکدیگر بازی می‌کنند. در ابتدای بازی یک مهره بر روی راس ریشه قرار گرفته است. بازی به صورت نوبتی انجام می‌شود و هرکس در نوبت خود می‌تواند مهره را از راس کنونی به یکی از راس‌های فرزند آن راس انتقال بدهد. اگر در نوبت کسی مهره در یک راس برگ باشد (فرزندی نداشته باشد) او بازنده خواهد شد. به کمک الگوریتمی در مرتبه زمانی $O(n)$ مشخص کنید در صورتی که دو نفر به بهترین شکل ممکن بازی کنند، چه کسی برنده‌ی بازی خواهد شد.

مسئله‌ی ۱۴.

گرافی با n راس و m یال داریم.

الف) حداکثر تعداد یال‌های ممکن را بیابید که با حذف کردن آنها، از راس a به راس b و از راس c به راس d همچنان مسیر باقی بماند.

ب) به کمک الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^۲+nm)$ حداکثر تعداد یال‌های ممکن را بیابید که با حذف کردن آنها، از راس a به راس b مسیری به طول حداکثر $l_۱$ و از راس c به راس d مسیری به طول حداکثر $l_۲$ باقی بماند.

مسئله‌ی ۱۵. گراف باینری

گراف وزن‌دار $G(V, E)$ را در نظر بگیرید. وزن هر یال در این گراف برابر صفر یا یک است. حال الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(m+n)$ فاصله‌ی همه‌ی راس‌ها را تا یک راس مشخص حساب کند (m تعداد یال‌ها و n تعداد راس‌های گراف است).