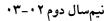
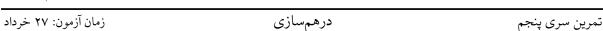
# ساختمان دادهها و طراحي الگوريتمها







## ۱ مسائل اصلی تمرین

### مسئلهی ۱. درهمسازی زنجیرهای

فرض کنید برای درهمسازی n کلید متمایز از روش درهمسازی زنجیرهای استفاده شده است. تابع درهمسازی ساده و یکنوا و اندازه آرایه m میباشد. امید ریاضی تعداد برخوردها (تعداد جفت کلیدهایی که به یک خانه نگاشت می شوند) برحسب m و m چه پیچدگی محاسباتی دارد؟

#### مسئلهی ۲. ترتیب اعداد

فرض کنید از روش آدرس دهی باز با استفاده از وارسی خطی برای درهمسازی استفاده شده است. اندازه جدول درهمسازی ۱۰ هرض کنید درهم ساز ۲۰ میر (۱۷, ۵۳, ۱۲۳, ۳۷, ۵۲, ۴۹, ۳۰, ۱۱ و تابع درهم ساز ۴۰ میر (از چپ به راست) باشد، اعداد به چه ترتیب در جدول ذخیره می شوند.

## مسئلهی ۳. رفع تصادم

وضعیت فعلی یک جدول درهمساز در زیر آمده است. فرض کنید برای رفع مشکل تصادم از روش وارسی خطی استفاده شده است. با در نظر گرفتن فرض یکنواختی تابع درهمساز، کلید بعدی با چه احتمالی در خانهی دوم قرار میگیرد؟ (خانههای جدول از چپ به راست از ۱ تا ۱۸ شماره گذاری شدهاند.)

$$H[1./1\Lambda] = \{9, -, 1, -, 7, -, 19, -, 9, 7, -, 11, -, -, -, \cdot, 9, 5\}$$

#### مسئلهی ۴. وضعیت جدول

فرض کنید از آدرس دهی باز و وارسی خطی برای درهم سازی استفاده شده و تابع درهم سازی  $i^{\gamma}$  به پیمانه  $\gamma$  است. بعد از دریافت همه اعداد  $\gamma$  به بیمانه  $\gamma$  است. بعد از دریافت همه اعداد  $\gamma$  به بیمانه  $\gamma$  است.

$$A[\:\raisebox{.4ex}{$\raisebox{3.5pt}{$\scriptscriptstyle\bullet$}},..,{\rm P}] = \:\raisebox{.4ex}{$\raisebox{.4ex}{$\scriptscriptstyle\bullet$}},{\rm P},{\rm P},{\rm P},{\rm N},{\rm A},{\rm Y}$$

به ازای چند جایگشت ورودی وضعیت جدول درهمساز به شکل بالا خواهد بود.

### مسئلهی ۵. احتمال نگاشت

جدول درهمسازی ۱۰ خانهای و تابع درهمساز ۱۰  $\max$  سن است.  $h(x) = rx + 0 \mod 1۰$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است. توضیح دهید.

- ۱. احتمال آن که ورودی x = 4 به خانه ۷ نگاشت شود برابر x = 1/1 است.
  - ۲. احتمال آن که ورودی x=1 به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱ است.
  - ۳. احتمال آن که ورودی x = x به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱ است.
- ۴. احتمال آن که دو ورودی مختلف به یک خانه نگاشت شوند برابر ۱/۱۰ است.

#### مسئلهي ٤. تعداد صفرها

فرض کنید x عدد x را برابر تعداد x یک تابع درهمساز یکنواخت باشد. برای ورودی x عدد x را برابر تعداد صفرهای سمت راست  $x \geqslant c \log n$  قرار میدهیم. برای عدد  $x \geqslant c \log n$  احتمال  $x \geqslant c \log n$  از چه مرتبهای است؟ فرض کنید  $x \geqslant c \log n$  ثابت است.

#### مسئلهي ٧. روش جستجو

فرض کنید میخواهیم درون یک جدول درهمسازی با خانههای  $\{ •, 1, ..., m - 1 \}$  دنبال عنصر داده شده k بگردیم. همچنین تابع درهمسازی  $\{ •, 1, ..., m - 1 \}$  که  $\{ •, 1, ..., m - 1 \}$  نمایش دهنده ی فضای عناصر میباشد را در اختیار داریم. روش جست وجوی ما در زیر آمده است:

را محاسبه کن و  $i \leftarrow h(k)$  قرار بده. (۱

۲) در درایهی i به دنبال k بگرد. اگر آن را یافتی یا اگر درایه خالی بود جست وجو را متوقف کن.

و  $j \leftarrow (j+1) \mod m$  قرار بده و به مرحله  $j \leftarrow (j+1) \mod m$  و  $j \leftarrow (j+1) \mod m$ 

فرض کنید m توانی از  $\gamma$  است.

- ۱. نشان دهید که این روش یک روش از روش کلی وارسی درجه ۲ است. این کار را با تعیین مقدارهای مناسب برای ثابتهای  $c_1$  و  $c_2$  انجام دهید.
  - ۲. ثابت کنید این الگوریتم در بدترین حالت هر درایه از جدول را وارسی میکند.

## ۲ مسائل اضافهتر برای علاقهمندان

### مسئلهی ۸. توپ و سطل

نشان دهید زمانی که n توپ با احتمال یکسان و به صورت مستقل درون n سطل پرتاب شوند، احتمال اینکه بیشترین تعداد توپ در یک سطل از n n اد n تجاوز کند، حداکثر n خواهد بود، برای n به حد کافی بزرگ.

#### مسئلهی ۹. سطلهای بیشتر

نشان دهید که به ازای هر  $\epsilon>0$ ، اگر n توپ با احتمال یکسان و مستقلا در  $n^{r+\varepsilon}$  سطل پرتاب شوند، با احتمال  $n-1/n^\varepsilon$  هیچ سطلی بیش از دو توپ ندارد.

#### مسئلهی ۱۰. Universal Hashing

نشان دهید که اگر یک خانواده  $\mathcal H$  از توابع درهمسازی  $\mathbf Y$  – universal است.

## مسئلهی n تایی tuple مسئلهی

فرض کنید U یک universe از tuple های مانند  $x=\langle x.,x_1,\cdots,x_{n-1}
angle$  و برگرفته شده از

$$\mathbb{Z}_p = \{ \cdot, 1, \cdots, p - 1 \}$$

باشد، که در آن p عددی اول است. برای هر tuple مانند p مانند p مانند p مانند p مانند و به این p عددی اول است. برای هر مانند p مانند p مانند p می می شود:

$$h_a(x) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j\right) \mod p$$

می دانیم که خانواده توابع درهمسازی  $\mathcal{H}=\{h_a\}$  یک خانواده از توابع universal است. نشان دهید  $\mathcal{H}$  یک خانواده  $\mathsf{Y}$ -universal نیست.

## مسئلهی ۱۲. همچنان tuple های n تایی

فرض کنید در توابع درهمسازی سوال قبل، تغییر زیر را اعمال کردیم:

$$h_a(x) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + b\right) \mod p$$

که در آن،  $b \in \mathbb{Z}_p$  است. نشان دهید که خانواده جدید توابع درهمسازی 1-universal است.