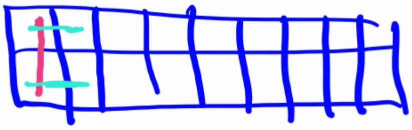
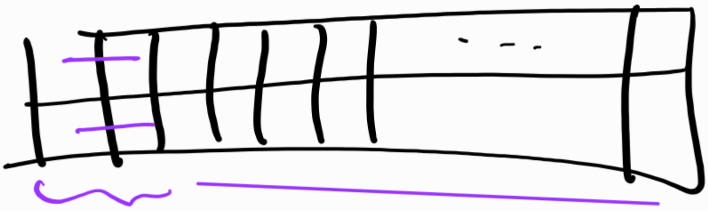


2

n

$$f_n = f_{n-1} + f_n$$



1 n

$$F_n = 1 \times F_{n-1} + 1 \times F_{n-2}$$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 2 \qquad \underline{f_{n\geq 2} = f_{n-1} + f_{n-2}}$$

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_3 = 2 \qquad \dots$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

$$0 + x + \underbrace{x^2 + 2x^3 + \dots}$$

$$n \geq 2 \quad \rightarrow \quad f_n x^n = f_{n-1} x^n + f_{n-2} x^n$$

$$\underbrace{\sum_{n\geq 2} f_n x^n} = x \underbrace{\sum_{n\geq 2} f_{n-1} x^{n-1}} + x^2 \sum_{n\geq 2} f_{n-2} x^{n-2}$$

$$F - x = xF + x^2 F \Rightarrow F(1 - x - x^2) = x$$

$$F = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$\Omega = \{ ۱, \underbrace{۲}_{\text{Observation}}, \dots, ۶ \}$ مشاهده $\longrightarrow$ Sample Space

فضای نمونه

$\underbrace{A = \{ ۲, ۴, ۶ \}}$ رخ داده است

پیشامد A واقعه

$\underbrace{A}_{\text{Event}} \subset \Omega$

Event

واقعه پیشامد

اصل ۱: $P(A) \geq 0$

اصل ۲: $P(\Omega) = 1$

اصل ۳: $B \cap A = \phi \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\phi) =$

$$\phi \cap \Omega = \phi \to \overset{1}{\underline{P(\phi \cup \Omega)}} = \overset{0}{\underline{P(\phi)}} + \overset{1}{\underline{P(\Omega)}}$$

$P(\bar{A}) \Rightarrow$

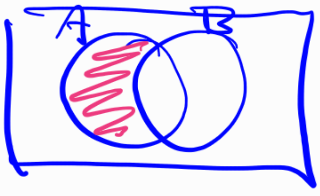
$$\underline{P(A \cup \bar{A})} = P(A) + P(\bar{A})$$

$A \cap \bar{A} = \phi$ $\quad \underline{P(\Omega)}$

$$\underline{1 = P(A) + P(\bar{A})} \to P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

$$A \cup B = \underline{(A - B)} \cup \underline{B}$$



$$P(A\cup B) = \underbrace{P(A-B)+P(B)} = \underbrace{P(A)-P(A\cap B)+P(B)}$$

$$P(A-B) =$$

$$A-B = A-(A\cap B) \rightarrow A = \underbrace{(A-B)} \cup \underbrace{(A\cap B)}$$

$$\underbrace{P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)} \leftarrow$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$

Sensitivity = 99%   فرض کنید یک تست سرطان اختراع کرده‌ایم که

Specificity = 98%

	منفی	مثبت
	نتیجه تست	
سرطان دارد	FN	TP
ندارد	TN	FP

$$\text{Sensitivity} = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$\text{Specificity} = \frac{TN}{TN+FP}$$

در یک شهر احتمال ابتلا به سرطان 0/0001 است. اگر نتیجه تست برای یک نفر مثبت باشد چقدر احتمال دارد که او بیمار باشد؟

A : فرد سرطان دارد B : نتیجه تست مثبت است

$\bar{A}$: ندارد $\bar{B}$: منفی

$$P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{99}{100}$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{98}{100}$$

$$P(A) = \frac{1}{10000}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

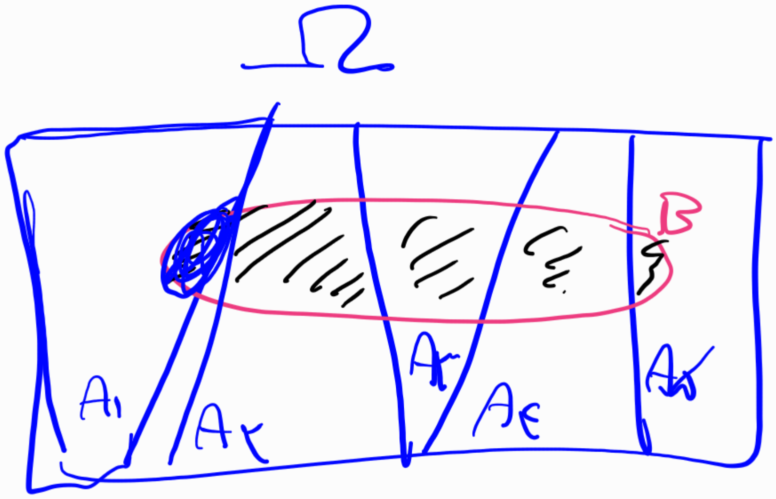
$$= \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10000}}{\frac{99}{10^4} + \frac{2}{100} \times \frac{9999}{10000}} = \frac{99}{99+}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{\cancel{P(A)}}$$

Bayes قانون

قانون احتمال کل :



$$\forall_{i \neq j} : \quad A_i \cap A_j = \phi$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

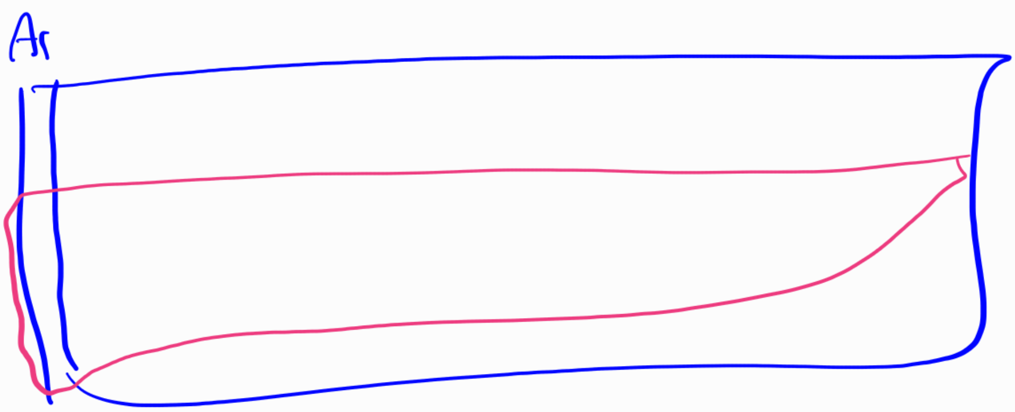
$$P(B) = P\big((B\cap A_1) \cup (B\cap A_2) \cup (B\cap A_3) \cup (B\cap A_4) \cup (B\cap A_5)\big)$$

$$= P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \dots + P(B\cap A_5)$$

$$= \sum_i P(B|A_i)\,P(A_i)$$

$$P(B\cap A_1) = P(B|A_1)\,P(A_1)$$

$$P(B|A_1) = \frac{P(B\cap A_1)}{P(A_1)}$$



دو پیشامد A و B مستقل هستند اگر
iff
اطلاع از روی دادن B اثری در احتمال وقوع A ندارد.

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \longrightarrow \underline{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

اگر A و B مستقل باشند، $\bar{A}$ و B مستقل

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

$$\text{مستقل} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ و } \bar{B} \\ \bar{A} \text{ و } \bar{B} \end{array} \right.$$

A و B و C مستقل هستند اگر:

$$P(A|B,C) = P(A)$$
$$P(B|A,C) = P(B)$$
$$P(C|A,B) = P(C)$$

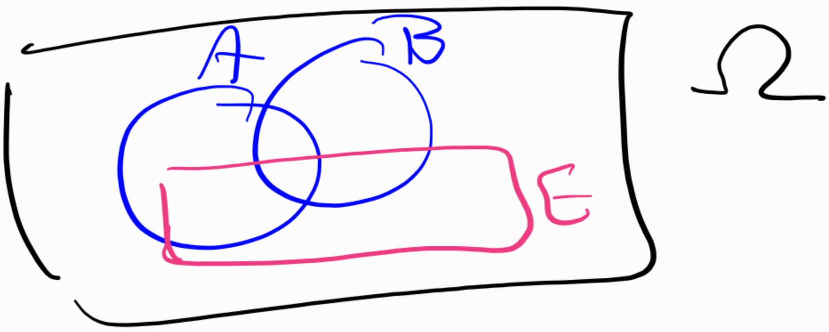
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{array} \right\} \underline{\text{هر سه تا}}$$

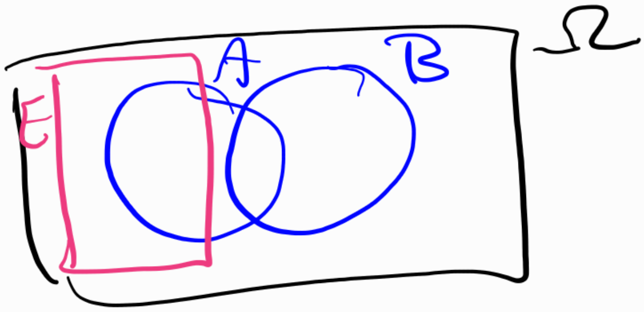
$A_1 \dots A_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر:

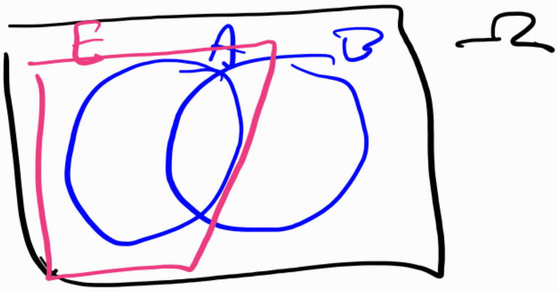
$$\forall_{k \subset \{1, \dots, n\}} \quad P\Big(\bigcap_{j \in k} A_j\Big) = \prod_{j \in k} P(A_j)$$

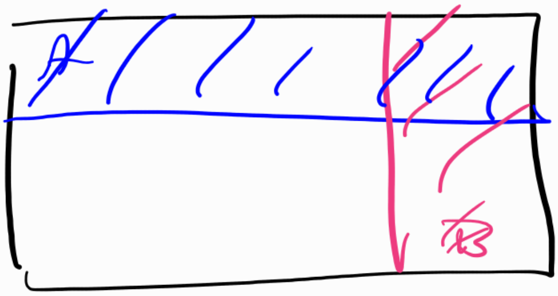
A و B با دانستن E به صورت شرطی مستقل هستند اگر

$$P(A\cap B\mid E)=P(A\mid E)P(B\mid E)$$

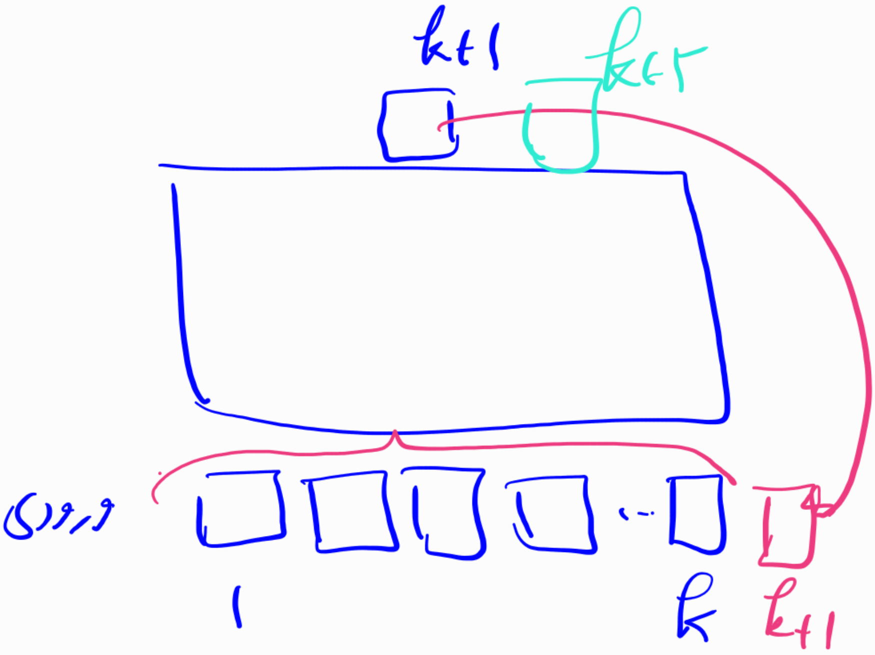






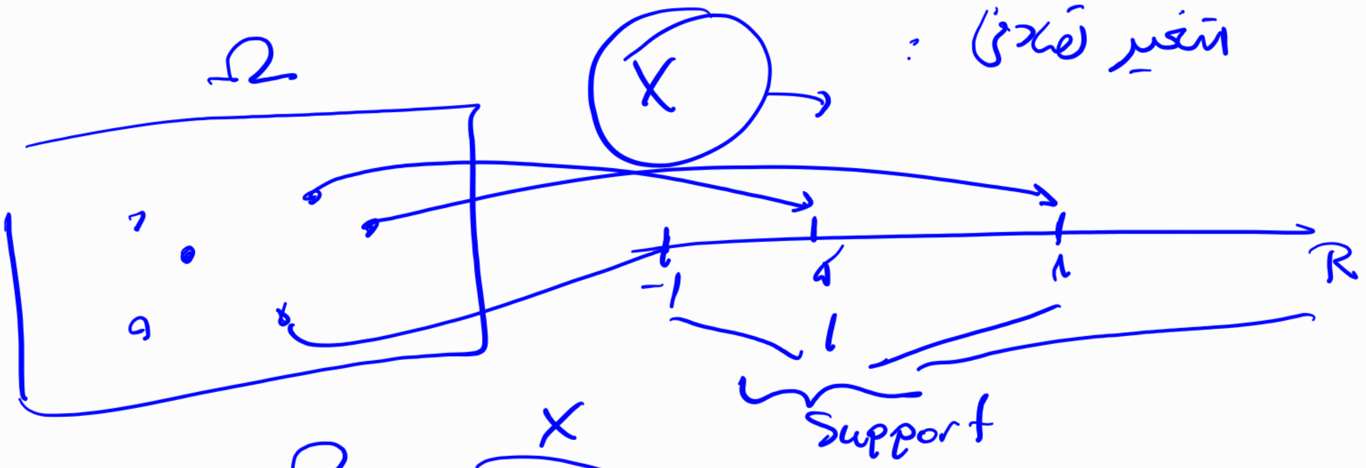


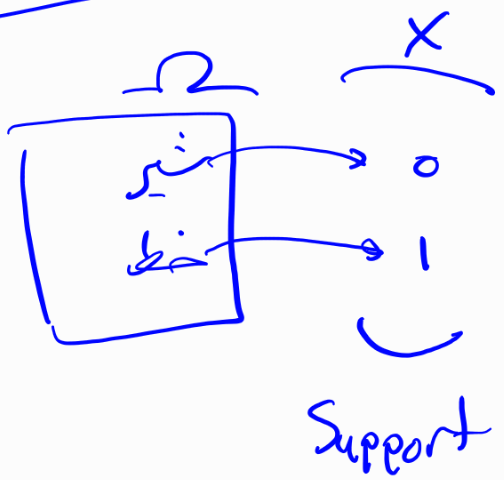
LLM Large Language Model



$$P(X \mid x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

متغیر تصادفی :





$$Y = X + X$$

$$Y\begin{cases}0\\1\\\underbrace{2}_{\text{Support}}\end{cases}$$

$$\underline{Y = ۲X}$$

متغیر تصادفی گسسته: محدود Support

شمارا داشته باشد ← تعداد فرزند

$\sim \mathbb{N}$

سن برحسب سال

پیوسته: ناشمارا Support ← قد

$\sim \mathbb{R}$

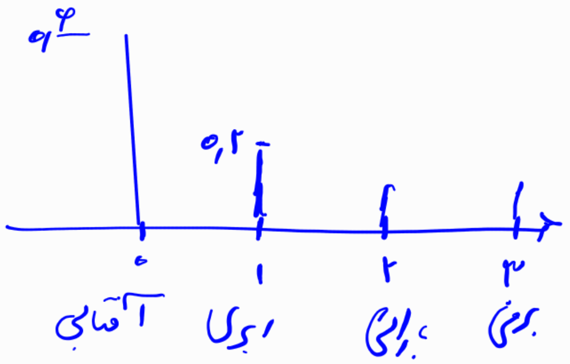
دما

طول عمر

Probability Mass Function PMF

$E(X) = 0.7$

$f_X(x)$



X متغیر تصادفی

$P(X=0)=0.6$ $P(X=2)=0.1$

$P(X=1)=0.2$ $P(X=3)=0.1$

$\rightarrow$ $f_X(0)=0.6$ $f_X(2)=0.1$

$f_X(1)=0.2$ $f_X(3)=0.1$

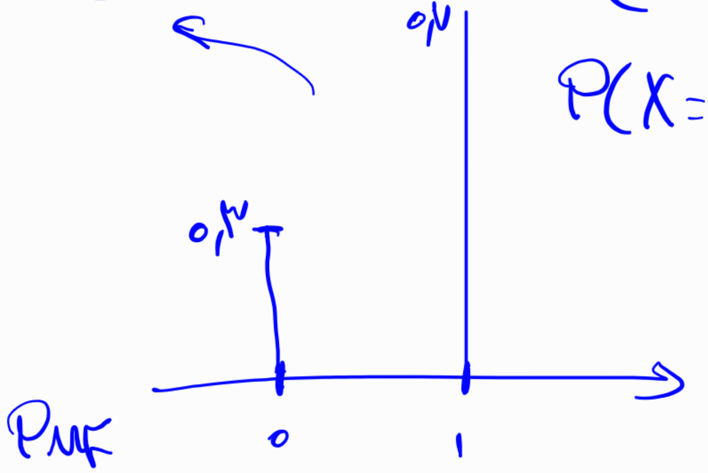
برنولی: انداختن سکه که با احتمال P برابر یک می‌آید و $1-P$ برابر صفر

$X \sim Bern(0.7)$

پیروی می‌کند

$P(X=0) = 0.3$

$P(X=1) = 0.7$



$f_X(0) = 0.3$

$f_X(1) = 0.7$

PMF :

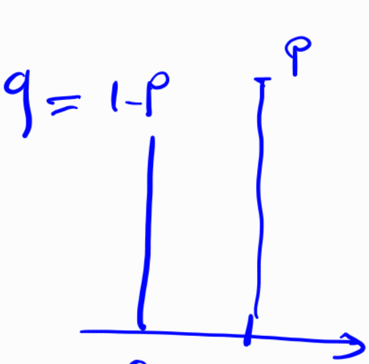
- در شمارا فقط مقدار غیرصفر داشته باشد.
- همیشه مقدار این تابع ≥ 0 باشد
- مجموع مقادیر آن برابر 1 باشد.

دوجمله‌ای Binomial

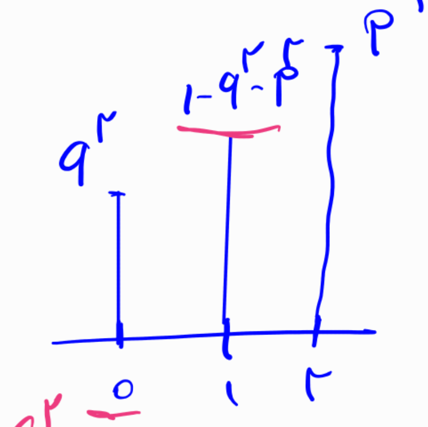
- برنولی را n بار تکرار کنیم و جمع آن را حساب کنیم (متغیر)

- مثلاً سکه را n بار پرتاب کنیم و بشماریم چند بار شیر آمده.
اگر که با احتمال p شیر می‌آید

$n=1$



$n=2$



$X \sim Binom(p, n)$

$n=2$

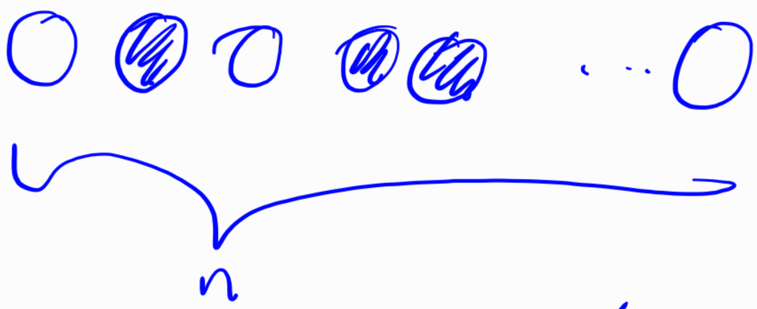
$P(\underbrace{X=2}_{k}) = \underbrace{\binom{2}{2}}_{1} p^2 \underbrace{q^0}_{1} = p^2$

$P(X=1) = \binom{2}{1} p^1 q^1 = 2pq = 2p(1-p) = \underline{2p-2p^2}$

$1+p^2-2p$

$1-(1-p)^2-p^2 =$
$-p^2+2p-p^2 = \underline{-2p^2+2p}$

$f_X(k) = P(X=k)$ $\qquad$ $X \sim Binom(p, n)$



$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$f_X(k)$: n بار سکه‌ای که در هر بار، به احتمال p جایزه می‌شود را به صورت مستقل بیندازیم، چقدر احتمال دارد که «دقیقاً» k بار 1 بیاید.

در یک شبکه احتمال ارسال موفق هر بسته ۰٫۷ است.

اگر ۱۰ بسته ارسال کنیم چقدر احتمال دارد ۷ بسته

مقصد برسند؟

$$\binom{10}{7}\, 0.7^{7}\, 0.3^{3}$$

$$\underbrace{(x+y)^n} = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n}$$

$x =$ Success

$y =$ Failure

$$\binom{n}{k}\, \underbrace{x^{k}\, y^{n-k}}$$

ضریب اهمیت

Expected Value امید ریاضی

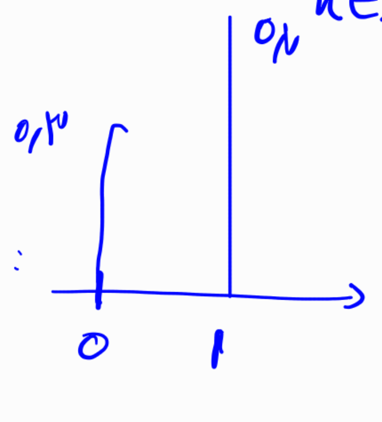
$E(X) \rightarrow$ Expected Value of X

امید ریاضی X

اگر X گسسته باشد :

$$E(X) = \sum_{x \in Support(X)} x\, P(X = x) = \sum_{x} x\, f_X(x)$$

X :



$E(X) = ۰,۷$

می‌خواهید به یک جلسه کاری مهم برسید. اگر با تاکسی اینترنتی بروید حتما به جلسه می‌رسید ولی اگر با اتوبوس بروید به احتمال ۰٫۳ دیر می‌رسید. دیر رسیدن به جلسه باعث خسارت ۵۰۰ هزار تومانی شما می‌شود. هزینه اسنپ ۱۰۰ هزار تومان و اتوبوس ۵ هزار تومان است.

چه تصمیمی می‌گیرید؟

$$E(\text{Loss} \mid \text{اسنپ}) = 100000$$

$$E(\text{Loss} \mid \text{اتوبوس}) = 5000 + \underbrace{0.3}_{P(X=x)} \times \underbrace{500000}_{x} = 150000 + 5000 = 155000$$

در یک مسابقه تلویزیونی ۱۰ هزار نفر شرکت می‌کنند.

Random

- یک نفر برنده ۱۰ میلیون تومان
- ۵ نفر برنده ۱ میلیون تومان می‌شوند.

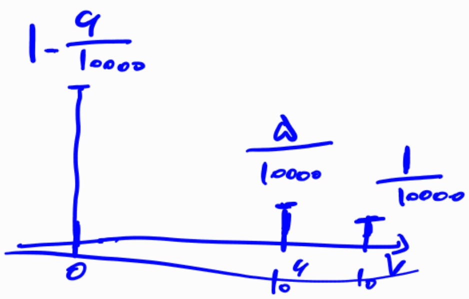
هزینه شرکت در مسابقه چقدر باید پایین‌تر باشد حضور می‌یابید؟

$$E(\text{gain}) = -5000 + \underbrace{E(\text{Award})}$$

$$E(\text{award}) = \sum x P(X=x) = 0 \times \ldots + \frac{10^6 \times 5}{10000} + \frac{10^7}{10000}$$

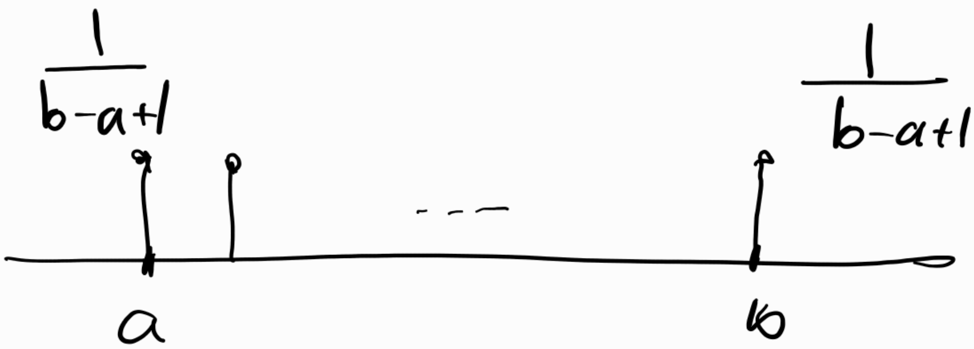
$$= 500 + 1000 = \underline{1500}$$

Award ~



Uniform

یکنواخت



$a, b \in \mathbb{N}$

تاس:

$X \sim Uniform(a, b)$

$E(X) =$

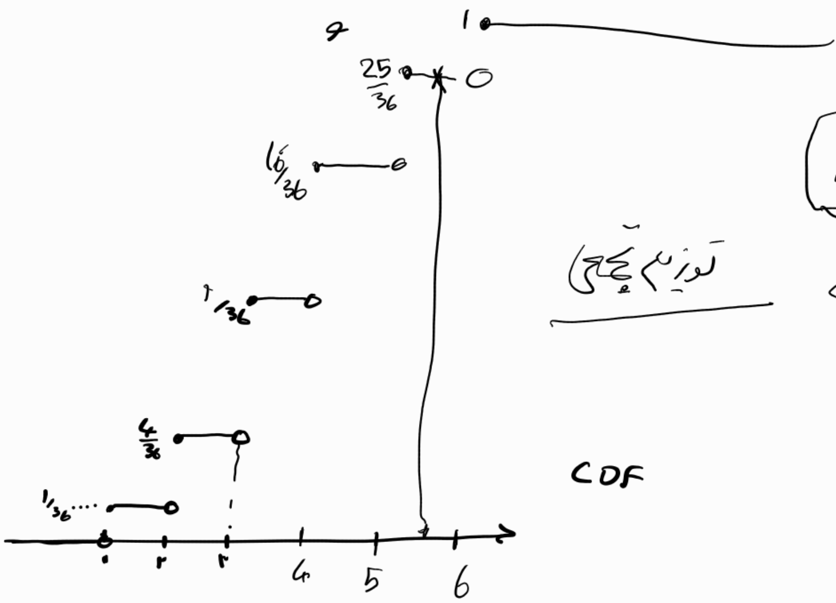
$$\frac{(b-a)^2}{12} \qquad \frac{a+b}{2} \qquad \frac{1}{b-a+1}\sum_{i=a}^{b} i$$

✓

$$a \quad \ldots \quad b$$
$$\underbrace{b}_{a+b} \quad \ldots \quad a$$

$$\frac{(a+b)\cancel{(b-a+1)}}{\cancel{(b-a+1)}\,2}$$

$\frac{1}{36}$ $\frac{4}{36}$ $\frac{9}{36}$ $\frac{16}{36}$ $\frac{25}{36}$ $\frac{36}{36}$



$\boxed{F(۵,۵) = \frac{۲۵}{۳۶}}$

توزیع تجمعی

$P(X \leq ۵,۵) = \frac{۲۵}{۳۶}$

$\forall x \quad F_X(x) = P(X \leq x)$

$x \to -\infty \to P(X \leq x) \to 0$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

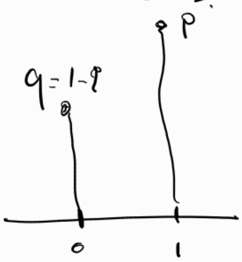
$P(X \leq x)$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$x < y \to F(x) \leq F(y) \to$ F صعودی است

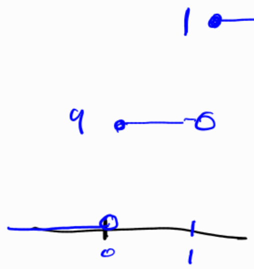
$$P(X > x) = 1 - \underbrace{P(X \leq x)}_{F(x)} = 1 - F_X(x)$$

برنولی



PMF

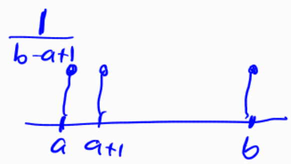
$f_X(x)$



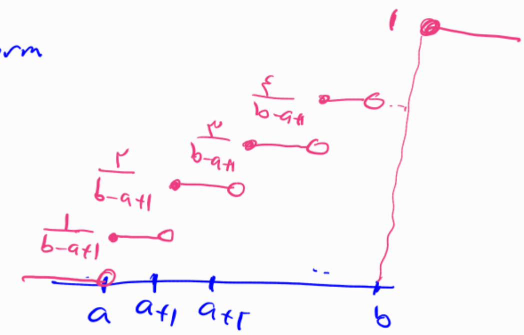
CDF

$F_X(x)$

Uniform



PMF



CDF

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Binomial

دوجمله‌ای

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{10} x f_X(x) = \underline{\sum x \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}}$$

خطی بودن امید ریاضی

$$E(aX) = a\,E(X)$$

a عدد ثابت

$$E(aX+b) = \underbrace{aE(X)+b}$$

a و b ثابت LOTUS

$$\underbrace{E(aX+b)} = \sum_{x \in Support(X)} (ax+b)\,P(X=x) = a\underbrace{\sum x\,P(X=x)} + b\underbrace{\sum_{x} P(X=x)}_{1} = \overline{aE(X)+b}$$

$$E(3X) = 3E(X) = 9$$

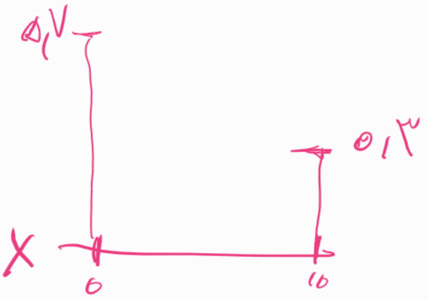
$$X \sim \underline{Binom(0.3, 10)} \qquad E(X) = \sum_{x=0}^{10} x\,P(X=x) = \underbrace{\sum_{x=0}^{10} x\,f_X(x)} = 3$$

$$E(X) = \underline{3}$$

$$E(X) = E(Y+Y+\dots+Y) = \underbrace{E(Y)}_{0.3} + \underbrace{E(Y)}_{0.3} + \dots + \underbrace{E(Y)}_{0.3} = 3$$

$$X \sim Binom(0.3, 10) \qquad \boxed{X = \overbrace{Y+Y+Y+\dots+Y}^{10}} \qquad \underline{Y \sim Bern(0.3)}$$

$$\underline{X = 10Y}$$ → یک سکه با احتمال ۰٫۳ را یک بار انداختم، مقدار آن را ضربدر ۱۰ کرده‌ام



$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

a, b, c ثابت

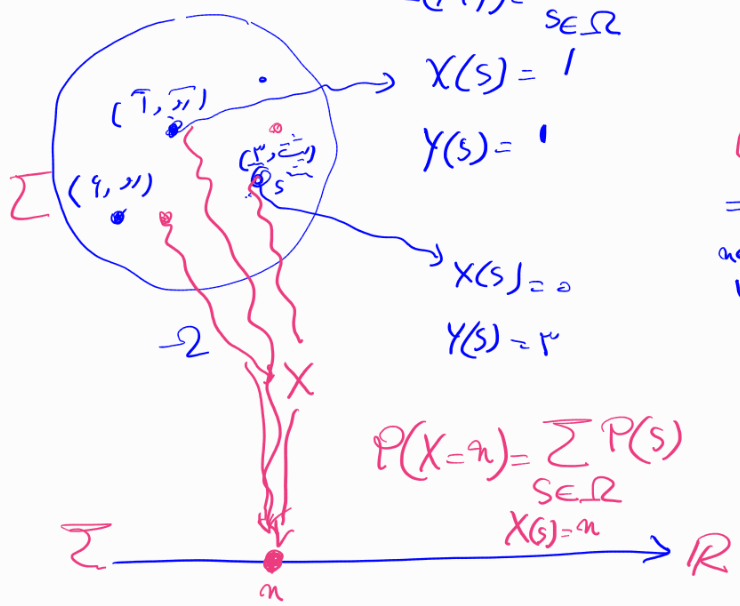
خطی بودن امید ریاضی

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + a_0) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n) + a_0$$

هیچ نیازی به مستقل بودن متغیرهای تصادفی نیست و
در هر شرایطی برقرار است.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+Y) = \sum_{s\in\Omega} P(s)(X+Y)(s) = \sum_{s} P(s)\big(X(s)+Y(s)\big)$$



$X(s) = ۱$

$Y(s) = ۱$

$X(s) = ۰$

$Y(s) = ۳$

$$= \sum_{s\in\Omega} P(s)X(s) + \sum P(s)Y(s)$$

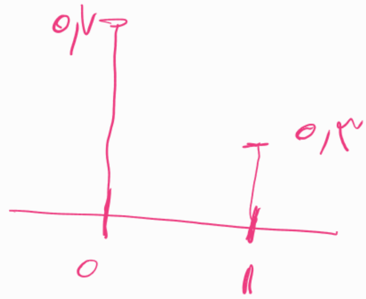
$$= \underbrace{\sum_{x\in Support(X)} x\,P(X=x)}_{E(X)} + \underbrace{\sum_{y\in Support(Y)} y\,P(Y=y)}_{E(Y)}$$

$$E(X) + E(Y)$$

$$P(X=x) = \sum_{\substack{s\in\Omega \\ X(s)=x}} P(s)$$

$X \sim Bern(۰٫۳)$

$$E(X^۲) = \sum \overset{۱}{x^۲}\, \overbrace{P(X=x)}^{۰٫۳}$$



$X \sim Uniform(۱,۵)$ $\quad E(X^۲) = ?$

$$\sum_{x=1}^{۵} x^۲ \overbrace{P(X=x)}^{۱/۵}$$

$$(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۵^۲)\frac{۱}{۵}$$

LOTUS

Law Of The Unconscious Statistician — تعمیم نابدیهی و نیاز به اثبات

$$E(g(X)) = \sum_{x \in Support(X)} g(x) P(X=x) = \sum g(x) f_X(x)$$

$E(Y + Z) = E(Y) + E(Z)$

$$E(\sin(X) + X^2) = E(\sin(X)) + E(X^2)$$

$\underbrace{\sin(X) + X^2}$ خطی است

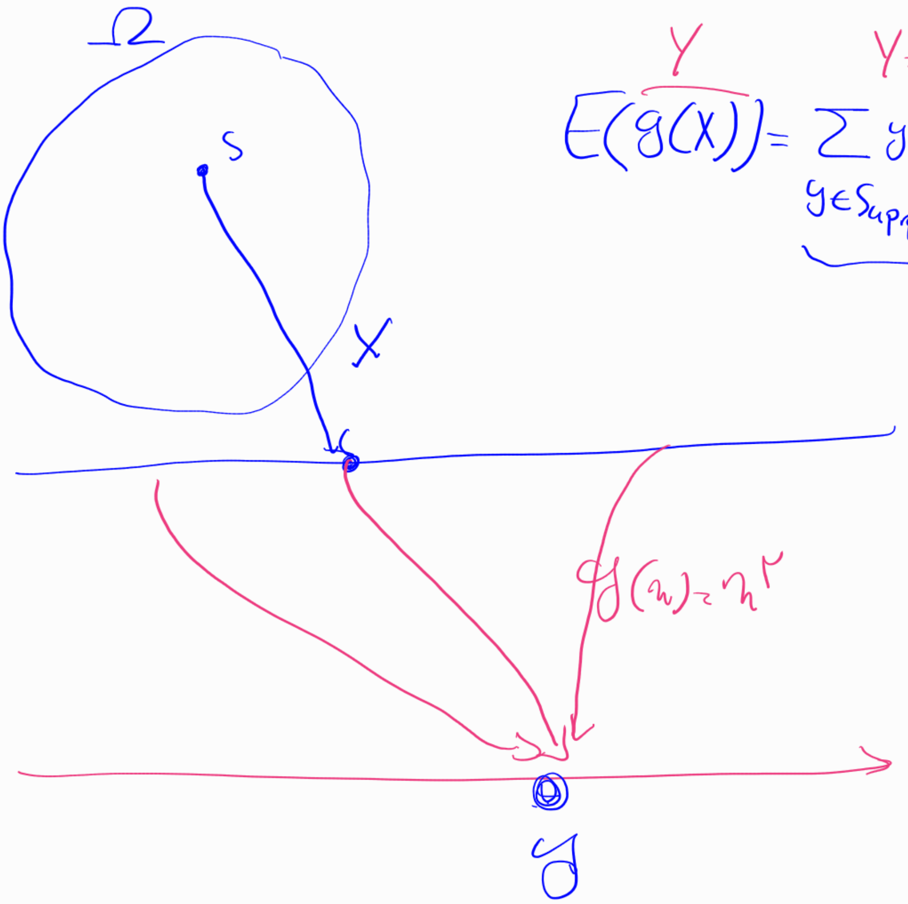
$\cancel{\sin(E(X))}$ $\cancel{(E(X))^2}$

$$E(X^2) = \sum_{x \in Support(X)} x^2 P(X=x)$$

$$E(\sin(X)) = \sum_{x} \sin(x) P(X=x)$$

$Y = g(X)$

$$E(\overbrace{g(X)}^{Y}) = \underbrace{\sum_{y \in Support(Y)} y\, P(Y=y)} = \underbrace{\sum_{x \in Support(X)} g(x) P(Y=g(x))}$$



LOTUS

Law of the Unconscious Statistician

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)\, P(X=x) = \sum_x g(x)\, f_X(x)$$

نیاز به اثبات دارد.

X متغیر تصادفی

g تابع

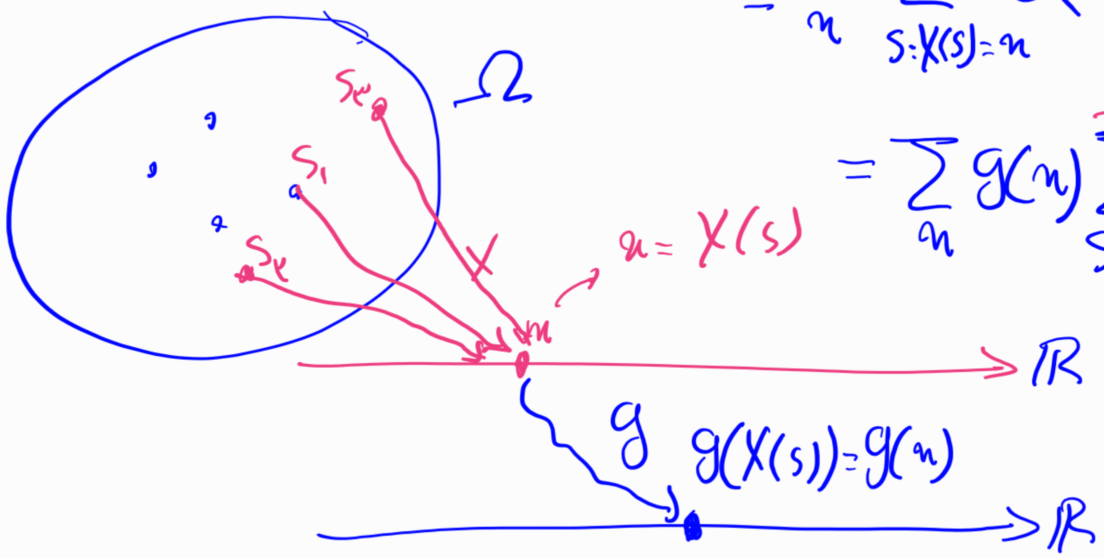
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

شبیه یک متغیر تصادفی

$$E(g(X)) = \sum_{s\in\Omega} g(X(s))\, P(\{s\})$$

$$= \sum_x \sum_{s:X(s)=x} g(\overbrace{X(s)}^{x})\, P(\{s\})$$

$$= \sum_x g(x) \overbrace{\sum_{s:X(s)=x} P(\{s\})}^{P(X=x)} = \sum_x g(x) P(X=x)$$



Hypergeometric Variable

فوق هندسی

$X \sim HGeom(w, b, n)$

کیسه $\begin{cases} w \text{ تا توپ سفید} \\ b \text{ تا توپ سیاه} \end{cases}$

n توپ بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم.

$X \leftarrow$ چند توپ سفید است.

$$P(X=k) = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\min(n,w)} k \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$E(X) = E(I_1 + I_2 + \dots + I_n) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) \overset{(1)}{=} \frac{nw}{w+b}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

نیازی نیست X و Y مستقل باشند

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

I_i indicator variable $\begin{cases} 1 & \text{اگر توپی که بار i ام از کیسه بیرون می‌آوریم سفید باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت (سیاه باشد)} \end{cases}$

$$E(I) = 0 \times P(I=0) + 1 \times P(I=1) = P(I=1)$$

$$E(I_2 \mid I_1 = 0) = P(I_2 = 1 \mid I_1 = 0) = \frac{w}{w+b-1}$$

w سفید — b-1 سیاه

$$E(I_2) = \frac{w}{w+b} \quad (1)$$

فرض کنید سال ۳۶۵ روز است. احتمال آن که در یک جامعه ۴۰ نفره حداقل دو نفر با روز تولد یکسان حضور داشته باشند؟ (سال تولد مهم نیست)

$$1-\frac{\binom{365}{40}\times 40!}{365^{40}}$$

فرض کنید روی یک تقویم ۳۶۵ روزه هر نفر روز تولد خود را علامت می‌زند. ممکن است یک روز چند بار علامت بخورد. تعداد متوسط روزهای علامت خورده چقدر است؟

$$E\left(I_1+I_2+\cdots+I_{365}\right)=\sum_{i=1}^{365}P(I_i=1)=365\times P(I_1=1)$$

$$=365\left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{40}\right)$$

$$I_i=\begin{cases}1 & \text{اگر روز } i \text{ ام علامت بخورد}\\ 0 & \text{نخورد}\end{cases}$$

$$P(I_1=1)=1-P(I_1=0)=1-\left(\frac{364}{365}\right)^{40}$$

مثل این که ۴۰ گلوله به تقویم شلیک کنیم و هیچ کدام به روز ۱ نخورد

Geometric Distribution

توزیع هندسی

$X \sim Geom(p)$

یک سکه را که با احتمال p در هر بار ۱ می‌آید آن‌قدر بیاندازیم که برای نخستین بار ۱ بیاید. تعداد صفرها قبل از آن $\leftarrow X$

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 0}_{X=4}\ 1$$

تعداد تلاش ناموفق قبل از اولین تلاش موفق اگر احتمال موفقیت در هر تلاش p باشد و مستقل باشند

PMF: $P(X=k) = p(1-p)^k$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty} k q^k = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$p\sum_{k=0}^{\infty} k q^k =$$

$$Q = 1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q}$$

$$Q' = \frac{dQ}{dq} = 0+1+2q+3q^2\cdots$$

$$Q'q = q+2q^2+3q^3\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k$$

$$q\frac{dQ}{dq} = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}$$

$\frac{q}{1-q}$	$\frac{q^2}{1-q}$	$\frac{q^3}{1-q}$
q	q^2	q^3
q^2	q^3	
q^3		

$0<x<1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{q^i}{1-q} = \frac{1}{1-q}\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} q^i}_{\frac{q}{1-q}} = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}$$

مثال: در یک شهر w نفر واکسن زدند و b نفر واکسن نزدند. اگر فرض کنیم که واکسن بر احتمال ابتلا بی‌تاثیر است و n نفر مبتلا شده باشند چقدر محتمل است که k نفر از مبتلایان واکسن زده باشند؟

$X \sim \text{HyperGeom}(w, b, n)$ ← Null Hypothesis فرض صفر

فرض جایگزین Alternative Hypothesis ← واکسن بر احتمال ابتلا موثر است.
احتمال ابتلا را کاهش می‌دهد.

PMF(X)

$$P(X = k) = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

توزیع هندسی: یک سکه با احتمال p هر بار ۱ می‌آید. چند صفر ببینیم قبل از آن که اولین بار ۱ بیاید (تعداد Failure ها قبل از اولین Success)

توزیع اولین موفقیت First Success: سکه را چند بار بیندازیم تا اولین بار ۱ بیاید.

اگر $X \sim Geom(p)$ و تعریف کنیم $Y = 1+X$ آنگاه $Y \sim \text{First Success}(p)$

$$E(Y) = 1 + E(X) = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p} = \frac{1}{p}$$

مثال: فرض کنید هر قوطی حاوی یک تصویر از بازیکنان فوتبال باشد و در مجموع n نفر از بازیکنان تصادفی‌شان در قوطی‌ها باشند. به طور متوسط چند قوطی را بخرم تا تصویر کل بازیکنان را داشته باشم؟ بودن تصویر هر یک از n بازیکن در هر قوطی توزیع یکنواخت است.

تعداد کل قوطی‌هایی که باید بخرم

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

هر بار که یک بازیکن جدید می‌بینم یک موفقیت به حساب می‌آید. X_i تعداد قوطی است که بعد از $i-1$ امین موفقیت باز می‌کنم تا موفقیت i ام به دست آید.

$X_1 = 1 \longrightarrow$ اولین قوطی هم موفقیت است

$X_2 \sim \text{First Success}\left(\frac{n-1}{n}\right)$ چون تنها وقتی شکست می‌خوریم که همان بازیکن موفقیت اول را ببینیم.

$X_3 \sim \text{Firs Success}\left(\frac{n-2}{n}\right) \longrightarrow E(X_3) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-2}$

$\vdots$

$X_n \sim \text{FirstSuccess}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + n$$

توزیع هندسی: اگر سکه با احتمال p یک بیاید
چندبار صفر ببینیم قبل از اولین یک.

توزیع Negative Binomial: اگر سکه با احتمال p یک بیاید
دوجمله‌ای منفی: چندبار صفر ببینیم قبل از r امین یک.

توزیع دوجمله‌ای: تعداد پرتاب ثابت بود

توزیع دوجمله‌ای منفی: تعداد موفقیت ثابت است.

مثال: تاس را چندبار بیاندازیم که ۳ بار ۶ بیاید (آخرین پرتاب حساب نیست)

$$X \sim \text{Negative Binom}\left(p=\frac{1}{6}, r=3\right)$$

$$X \sim \text{NegBinom}(p, r) \to \underset{f_X(k)}{\text{PMF}} \quad P(X=k) = \binom{k}{r-1} p^r q^{k-r+1}$$

r امین یک

$$\underbrace{0\ 1\ 0\ 0\ 1 \cdots 1\ 0 \cdots 0}_{k}\ 1$$

$$E(X) = \sum_{k=r-1}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=r-1}^{\infty} k \binom{k}{r-1} p^r q^{k-r+1}$$

→ سخت است!

راه ساده‌تر محاسبه $E(X)$ وقتی $X \sim NegBinom(p, r)$:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$$

$X_1 \sim FirstSuccess(p)$ $\quad X_2 \sim FirstSuccess(p) \cdots \quad X_r \sim Geom(p)$

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 1}_{X_1}\ \underbrace{0\ 0\ \cdots\ 0\ 1}_{X_2}\ 0\ 0\ \cdots\ \underbrace{\cdots\ 1}_{X_{r-1}}\ \underbrace{0\ 0\ \cdots\ 0}_{X_r}\ 1$$

آخرین ۱ را لحاظ نمی‌کنم.

$$E(X) = \underbrace{E(X_1)}_{\frac{1}{p}} + \underbrace{E(X_2)}_{\frac{1}{p}} + \cdots + \underbrace{E(X_{r-1})}_{\frac{1}{p}} + \underbrace{E(X_r)}_{\frac{q}{p}}$$

$$= \frac{r-1+q}{p} = \frac{q+r-1}{p}$$

متوسط تعداد پرتاب لازم قبل از این که

مثال: تاس سه بار ۶ بیاید

$X \sim NegBinom\left(\frac{1}{6}, 3\right)$ $\quad E(X) = \dfrac{\frac{5}{6} + 3 - 1}{1/6} = \dfrac{\frac{17}{6}}{\frac{1}{6}} = 17$

تعداد کل پرتاب‌ها به طور متوسط (شامل پرتاب آخر): ۱۸

توزیع پواسون Poisson Distribution

فرض کنید رویدادی (عبور ماشین از جلوی دانشگاه، ورودی بسته اطلاعات به یک سوئیچ شبکه، بازدید مشتری از سایت آنلاین، درخواست تاکسی اینترنتی ...) به طور متوسط λ بار در واحد زمان رخ می‌دهد. احتمال اینکه در یک واحد زمان k بار رخ دهد چقدر است؟

مثال: در هر ثانیه به طور متوسط ۲۰ درخواست تاکسی به تاکسی اینترنتی داده می‌شود. سرورهای این تاکسی حداکثر ۱۰۰ درخواست در ثانیه را پشتیبانی می‌کنند. احتمال بروز Overloading روی سرورها چقدر است؟

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 20)$

$$P(X > 100)? = 1 - \sum_{k=0}^{100} \frac{e^{-20}\, 20^k}{k!}$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

اثبات توزیع پواسون:

Binomial

بازه زمانی: طول ۱ واحد زمان

تقسیم: n لحظه

$n \to \infty$

n بار سکه را می‌اندازیم هر بار احتمال $P = \frac{\lambda}{n}$

$$X \sim \text{Binomial}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \quad \lim_{n\to\infty} P(X=k)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{A} \underbrace{\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{B} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \overbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k}}}^{=1} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$B = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\boxed{n-k}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k = 1}$$

این جمله را می‌توانیم ضرب در جمله بالا کنیم تا توان n شود

بسط تیلور:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{۱!}(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\frac{f'''(a)}{۳!}(x-a)^{۳}+\cdots$$

$$f(x)=e^{x} \qquad a=0 \longrightarrow e^{x}=1+\frac{x}{۱}+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=\sum \underbrace{\binom{n}{k}}\, 1^{n-k}\left(\frac{-\lambda}{n}\right)^{k}$$

$$=\sum \frac{\cancel{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}{k!}\,\frac{(-\lambda)^{k}}{\cancel{n^{k}}}=\underbrace{e^{-\lambda}}$$

$$n\to\infty$$

Variance

Moment

$$\underbrace{\sum_x x^i P(X=x)}_{\text{raw Moment امین } i}$$

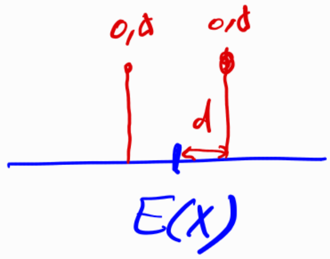
$$\underbrace{\sum_x (x-E(X))^i P(X=x)}_{\text{Central Moment امین } i}$$

Moment شماره	raw	Central
1	Expected Value	0
2		Variance

$$\underbrace{\sum_x (x-E(X))P(X=x)}_{\text{Central Momentum اولین}} = \underbrace{\sum_x xP(X=x)}_{E(X)} - \underbrace{\sum \underbrace{E(X)}_{\text{عدد ثابت}} P(X=x)}_{E(X)\times 1} = 0$$

$$Var(X) = \underbrace{\sum (x-E(X))^2 P(X=x)}_{\text{Central Momentum دومین}}$$

$Var(X) = 0.5 \times d^2 + 0.5 \times d^2 = d^2$



$X \sim Bern(p)$

$$Var(X) = \sum_x (x-\underbrace{E(X)}_{p})^2 P(X=x) = p^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p =$$

$$p(1-p)(\underbrace{p+1-p}_{1}) = pq$$

$$\begin{cases} p=1 \rightarrow Var(X)=0 \\ q=1 \rightarrow Var(X)=0 \quad (p=0) \\ \underbrace{\arg\max_p (Var(X))}_{\text{p ای که مقدار Var(X) بیشینه شود}} = \frac{1}{2} \rightarrow p=1 \Rightarrow Var(X) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$X \sim Binom(p, n) \qquad E(X) = np$$

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}\right]}_{P(X=k)} \underbrace{(k-np)^2}_{(x-E(X))^2}$$

توضیح:

$$Var(X) = E(\underbrace{(X-E(X))^2}_{\text{متغیر تصادفی جدید}})$$

$$g(X) = (X-E(X))^2$$

$$\underset{\text{LOTUS}}{E[g(X)]} = E((X-E(X))^2) \underset{\text{Lotus}}{=} \sum_{x} g(X) P(X=x) = \underbrace{\sum ((x-E(X))^2) P(X=x)}_{Var(X)}$$

توضیح:

$$E((X-E(X))^2) = E[X^2 + \underbrace{E(X)^2}_{\text{عدد ثابت}} - 2XE(X)] \underset{\text{خطی بودن امید ریاضی}}{=} E(X^2) + E(X)^2 - 2E[X\underbrace{E(X)}_{\text{ثابت}}]$$

$$= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)^2$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

$E(X^2) \rightarrow$ از متغیر تصادفی X^2 امید ریاضی بگیریم $\underset{\text{LOTUS}}{=} \sum x^2 P(X=x)$

$E(X)^2 \longrightarrow$ $E(X)$ را حساب و بعد به توان ۲ برسانیم

توضیح:

$$E(X\underbrace{E(X)}_{\text{عدد ثابت}}) = E(X)E(X) = E(X)^2$$

قضیه

$$Var(X+Y) = \underbrace{E((X+Y)^2)}_{\substack{E(X^2+Y^2+2XY) \\ E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)}} - \underbrace{E(X+Y)^2}_{\substack{[E(X)+E(Y)]^2 \\ E(X)^2+E(Y)^2+2E(X)E(Y)}} =$$

حاصل $= \underbrace{[E(X^2)-E(X)^2]}_{Var(X)} + \underbrace{[E(Y^2)-E(Y)^2]}_{Var(Y)} + 2\underbrace{[E(XY)-E(X)E(Y)]}_{Cov(X,Y)}$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

اگر X, Y مستقل باشند:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

LOTUS: $\sum_{x,y} xy \underbrace{P(X=x, Y=y)}_{\text{مستقل بودن } X, Y} = \sum_{x,y} xy P(X=x)P(Y=y) = \underbrace{\sum_{x} xP(X=x)}_{E(X)} \underbrace{\sum_{y} yP(Y=y)}_{E(Y)}$

X, Y مستقل

$$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \rightarrow Cov(X,Y) = 0$$

$$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

مثال:

$Var(X)$ $\quad X \sim Binom(p, n)$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

X_i ها independent and identically Distributed

$$\underbrace{i.i.d}$$

$$\underbrace{X_i \sim Bern(p)}_{\text{identically distributed}}$$

$\underbrace{X_i \text{ ها مستقل از هم}}_{\text{independent}}$

چون X_i ها مستقل‌اند:

$$Var(X) = \underbrace{Var(X_1)}_{pq} + \underbrace{Var(X_2)}_{pq} + \cdots + \underbrace{Var(X_n)}_{pq}$$

$$= npq$$

$X \sim Uniform(a, b)$ $\quad E(X) = \frac{a+b}{2}$

$$Var(X) = \sum_{x=a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a+1} = \text{به عهده‌ی خودتان}$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

بسط تیلور

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

$a=0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1$$

حاصل جمع PMF توزیع پواسون برابر یک است

براساس x مشتق بگیریم

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} \rightarrow \underbrace{e^{-\lambda} e^{\lambda}}_{1} \lambda = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}_{E(X)} = \lambda$$

اگر $x=\lambda$ و دو طرف را در $e^{-\lambda}\lambda$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda)^2 P(X=k) = \sum (k-\lambda)^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

محاسبه دشوار

روش دوم:

$$Var(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{\lambda^2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\cancel{2}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{\cancel{k!}\,(k-1)!}$$

LOTUS

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \underset{k-1+1}{k}\, \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[\underbrace{\lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!}}_{k'=k-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{k'=k-1 \;\to\; \underbrace{\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}}_{e^{\lambda}}}\right]$$

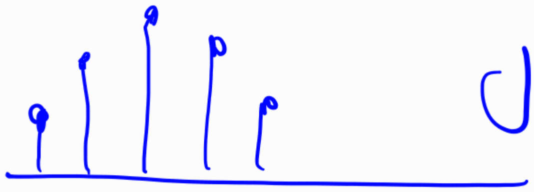
کل این عبارت e^{λ} است

$$\lambda e^{-\lambda}\left[\lambda e^{\lambda} + \overset{e^{\lambda}}{e^{\lambda}}\right] = \underbrace{\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}}_{1}\left[\lambda + 1\right] = \lambda^2 + \lambda$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\lambda}$$

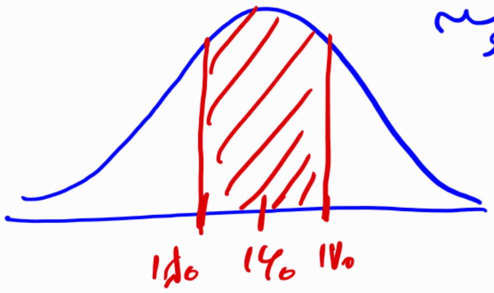
$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \begin{cases} E(X) = \lambda \\ Var(X) = \lambda \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی پیوسته:



جرم احتمال

PMF



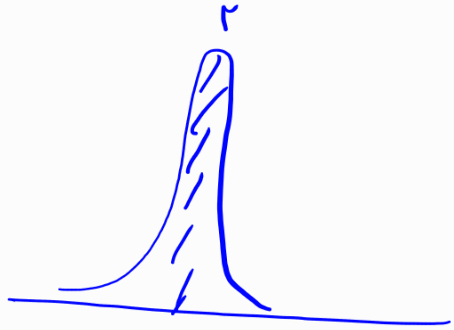
پیوسته

تابع چگالی احتمال

احتمال قد

Probability Density Function

$f_X(x)$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

o خصوصیات $f_X(x)$

۱. $\forall_{x \in R} \quad f_X(x) \geq 0$

۲. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

برای هر a و b

o احتمال پیشامد آنکه $a \leq X \leq b$ باشد برابر $\int_a^b f_X(x)$

تعریف تابع چگالی احتمال

برای متغیر تصادفی پیوسته:

احتمال $X=a$

$$P(X=a)=0$$

a عدد ثابت

مثال: احتمال این که قد یک نفر دقیقا $140\,cm$ باشد یعنی

$140{,}0000$ ... — — —

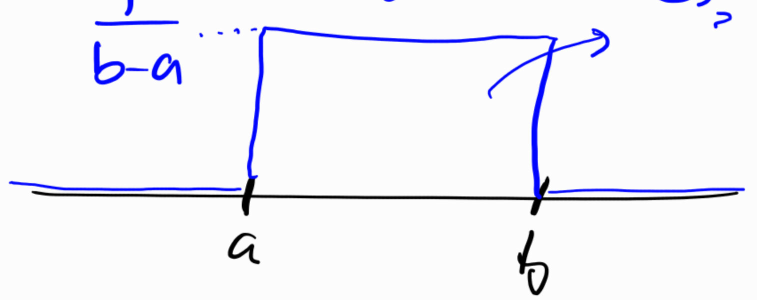
همیشه احتمال متغیر تصادفی پیوسته را روی یک بازه یا مجموعه (بی‌نهایت عضو) تعریف می‌کنیم

مثال: توزیع یکنواخت از a تا b:

$$X \sim \text{Uniform}(a,b)$$

$$f_X(x) =$$

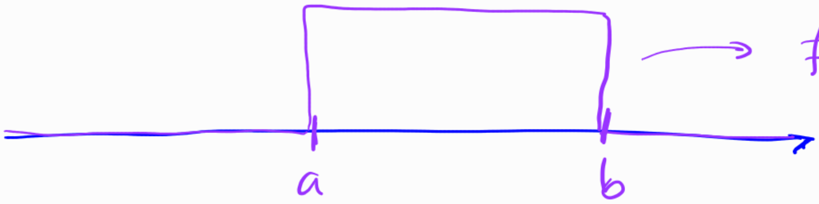
چون مساحت مستطیل برابر ۱ است.



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \Rightarrow$$

$$E(X) \underset{X \sim \text{Uniform}(a,b)}{=} \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

یادآوری: توزیع یکنواخت پیوسته



پیوسته
$X \sim \text{Unif}(a,b)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,x\,dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx$$

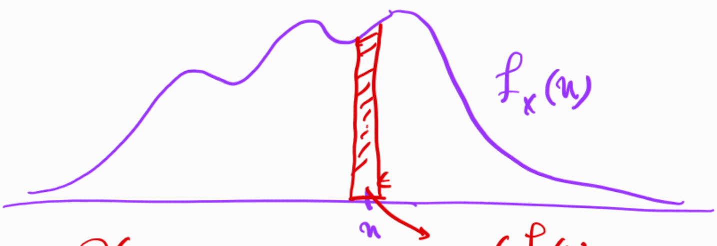
$$Var(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2}$$

$$E(X^2) = \underbrace{\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx}_{\text{LOTUS}} = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$E(g(X)) \underset{\text{LOTUS}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

LOTUS
برای متغیر تصادفی پیوسته

$$Var(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$



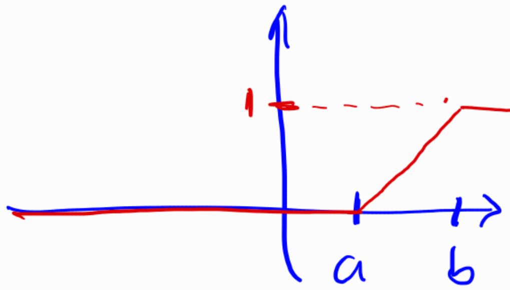
$P(x-\frac{\epsilon}{2} \le X \le x+\frac{\epsilon}{2}) =$ مساحت $\sim \epsilon f_X(x)$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_a^x \frac{dx}{b-a}$$

$x < a \rightarrow F_X(x) = 0$

$a \le x \le b$

$$F_X(x) = \frac{u}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

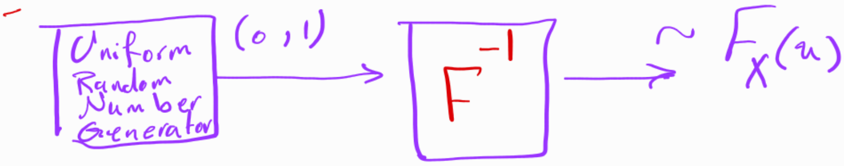


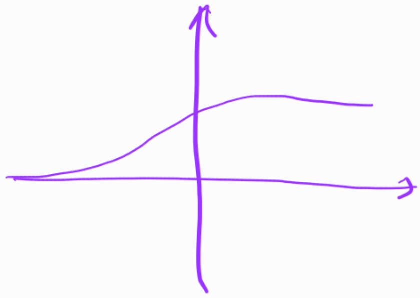
$$x > b \rightarrow F_X(x) = 1$$

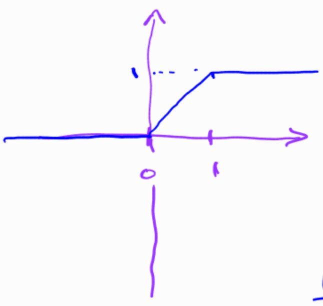
$$X \sim Unif(a,b) \rightarrow F_X(x) \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

Universality of Uniform Distribution

سوال: فرض کنید من یک تولیدکننده اعداد تصادفی دارم که از Uniform(0,1) نمونه تولید می‌کند.
حالا چطور با استفاده از آن، اعداد تصادفی از یک توزیع دلخواه شبیه‌سازی کنم؟

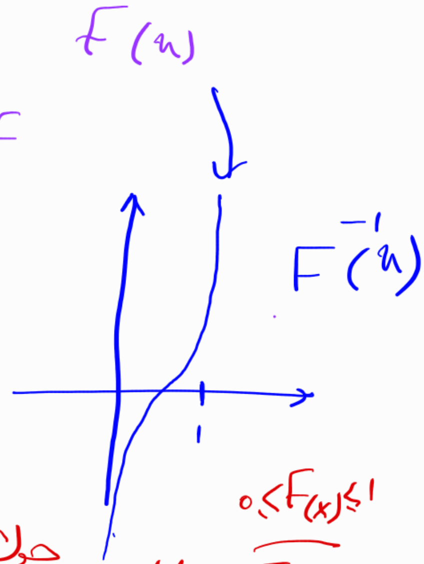






فرض کنیم F اکیدا صعودی است   CDF

$F^{-1}(x)$



Vorası

$$P(U \leq a) = a$$

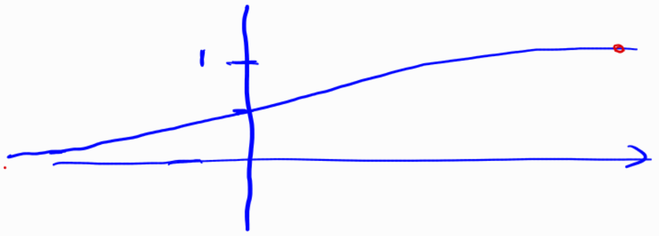
$U \sim Uniform(0,1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ چون F صعودی است $0 \leq F(x) \leq 1$

$\underline{X} = F^{-1}(U)$ $U \leq F(x)$

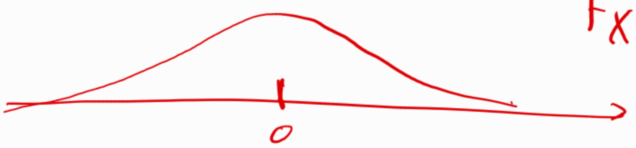
$$\underline{P(X \leq x)} = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) = \underline{F(x)}$$

$X \sim F$

مثال: $F = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ سیگموید



CDF



$f_X(x)$ PDF

$$y = \frac{e^x}{1+e^x} \rightarrow y + ye^x = e^x \qquad e^x(1-y) = y \rightarrow e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$y = F(x)$$

$$x = F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$U \sim \mathrm{Uniform}(0,1) \longrightarrow \ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim \mathrm{Sigmoid}$$

توزیع نمایی Exponential

اگر به طور متوسط در هر واحد زمان λ بار یک اتفاق بیافتد، چقدر باید صبر کنیم تا اولین بار آن اتفاق رخ دهد؟

مثال: در ایران سالانه حدود یک میلیون نوزاد متولد می‌شود. از همین لحظه چقدر باید صبر کنیم تا نخستین نوزاد بعدی متولد شود.

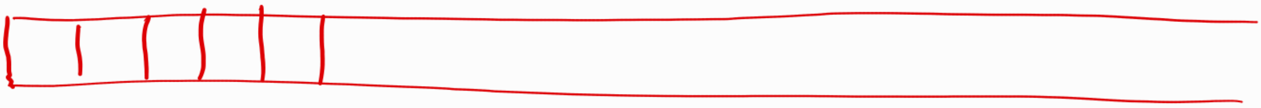
زمان ← از یک توزیع تبعیت می‌کند.

← احتمال آن که زمان انتظار تا تولد نخستین نوزاد بعدی بیش از یک ساعت باشد چقدر است؟

$$\text{Bern} \xrightarrow{\text{تکرار}} \text{Binomial} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \text{Poisson}$$

به جای شمردن تعداد ها، تعداد دفعات تا اولین ۱ را بشمریم

$$\text{Geometric} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \text{Exponential}$$



در هر واحد زمان n بار سکه می‌اندازیم. با احتمال $p=\frac{\lambda}{n}$ سکه یک می‌آید. X را متغیر تصادفی تعداد انداختن سکه تا قبل از آمدن اولین یک در نظر می‌گیریم. اگر $n\to\infty$، X از چه توزیعی پیروی می‌کند؟

λ: متوسط تعداد وقوع اتفاق در هر واحد زمان

$\lambda = 1000000$ واحد زمان: سال

$$P(X>\overset{\text{زمان}}{t}) = (1-p)^{tn} \rightarrow$$

در tn بار اول باید سکه همیشه صفر بیاید

$X \sim \text{Geometric}$

تعداد دفعات سکه انداختن در t زمان: $t\,n$

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{tn} \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}\lambda t} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\lambda t} = e^{-\lambda t} \quad (1)$$

$$w=\frac{n}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{w}=\frac{\lambda}{n}$$

$$\lim_{w\to\infty}\left(1-\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{e} \qquad \lim_{w\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right) = e$$

$$(1) \rightarrow P(X\le t) = \underbrace{1-e^{-\lambda t}}_{CDF} \Rightarrow F_X(t) \qquad t<0 \rightarrow F_X(t)=0$$

توزیع نمایی

$$\underbrace{f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}}_{PDF}$$

توزیع نمایی

فرض :

مثال: تولید مولد عدد تصادفی که از توزیع نمایی تبعیت کند:

$$t > 0 \rightarrow y = F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \rightarrow 1 - y = e^{-\lambda t}$$

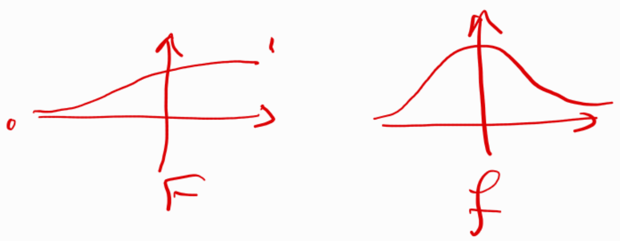
$$\ln(1-y) = -\lambda t$$

$$F^{-1}(y) = t = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

$$P(X \le x) = \overbrace{F_X(x)}^{CDF} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(t)}_{PDF} \, dt$$

برای همه توزیع های پیوسته :

Commulative Distribution function

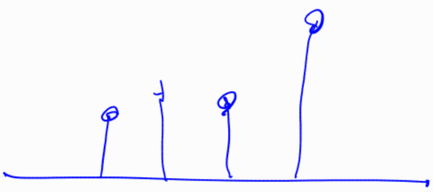


پیوسته:

F انتگرال f است

f مشتق F است.

Probability Density Function



گسسته :

F : CDF

f : Probability Mass Function

$X \sim \text{Exponential}(\lambda)$

Exponential

$$f_X(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f'}\,dx = -xe^{-\lambda x} + \underbrace{\int e^{-\lambda x}\,dx}_{-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}} = \underbrace{-e^{-\lambda x}\left[x+\frac{1}{\lambda}\right]\Big|_0^{\infty}}$$

$f = -e^{-\lambda x}$

جزء به جزء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int f'g = fg - \int g'f$$

$$\underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{0} + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

LOTUS

جزء به جزء

$$\frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = Var(X)$$

بدون حافظه بودن توزیع نمایی:

← هندسی: اگر بگویند تا الان سکه ۱۰ بار صفر آمده از الان چند بار باید بیندازیم تا شیر بیاید؟

A

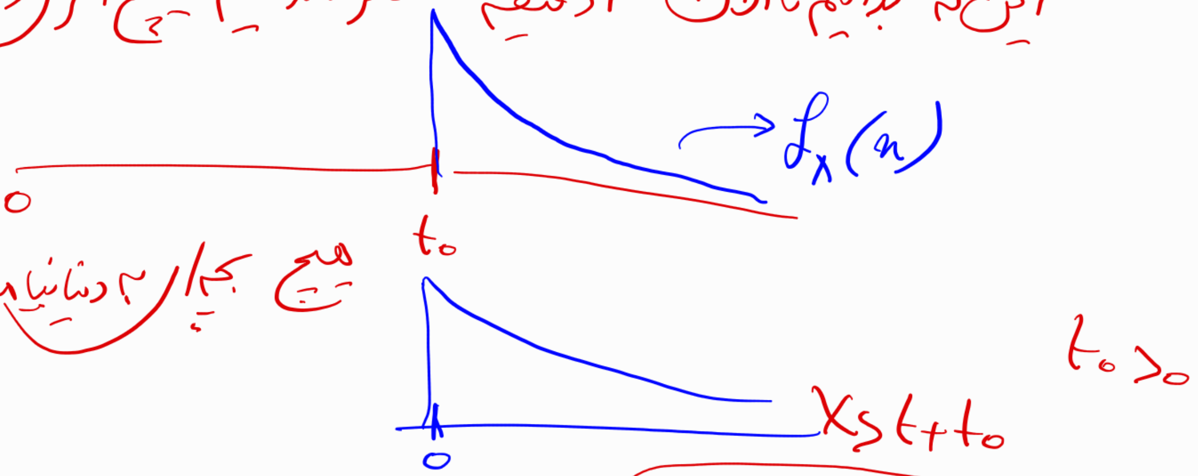
B

B مستقل از A است ← توزیع هندسی بی‌حافظه است

درمورد توزیع نمایی هم عین همین است:

مثلاً اگر فرض کنیم زمان قبول کردن تاکسی اینترنتی از توزیع نمایی پیروی می‌کند

این که بدانیم تا الان ۳ دقیقه منتظر مانده‌ایم هیچ اثری در زمان قبول ندارد



هیچ بجای ۳ دقیقه نیامد

$$P(X > t + t_0 \mid X > t_0) = \frac{P(X > t + t_0 \cap X > t_0)}{P(X > t_0)} = \frac{P(X > t + t_0)}{P(X > t_0)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

یعنی اگر مبدأ زمان را در همین لحظه بذاریم و هیچ اطلاعی از این که در زمان t_0 قبلی ما اتفاقی نیفتاده است.

فرض کنید $X_1 \dots X_n \sim D$ و $X_1 \dots X_n$ مستقل

$\underbrace{D}$: $E(D) = E(X_i) = \mu$

$Var(X_i) = \sigma^2$

i i d

independent, identically Distributed

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 + \dots X_n}$$

$$E(Y) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) \dots + E(X_n) = n\mu$$

n زیاد

$n \to \infty$

$$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$$

چون X_i ها مستقل هستند

$$Var(Y) = n\sigma^2$$

Y

از چه توزیعی پیروی می‌کند؟

$$Z = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma} E(Y - n\mu) = 0$$

هر عدد ثابت دلخواه — هر متغیر تصادفی دلخواه

$$Var(aX) = E\left(\left(aX - E(aX)\right)^2\right) =$$

$$E\underbrace{(aX)^2}_{a^2X^2} + \underbrace{E(aX)^2}_{(aE(X))^2} - 2aX\underbrace{E(aX)}_{aE(X)} =$$

$$a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 = a^2 Var(X)$$

هر متغیر تصادفی دلخواه — هر عدد ثابت

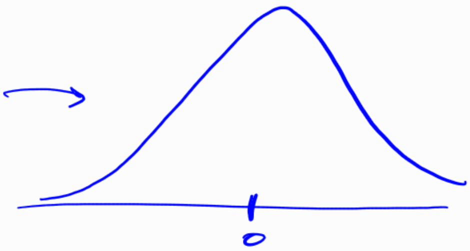
$$Var(X + a) = Var(X)$$

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{Y - n\mu}{\underbrace{\sqrt{n}\,\sigma}_{\text{ضریب ثابت}}}\right) = \frac{1}{n\sigma^2} Var(Y - \overbrace{n\mu}^{\text{عدد ثابت}}) = \frac{1}{n\sigma^2} \overbrace{Var(Y)}^{n\sigma^2} = 1$$

(کلاً به ازای هر متغیر تصادفی دلخواه X با هر توزیع دلخواه مجهول می‌کنند اگر $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ آن‌گاه $E(Z) = 0$, $Var(Z) = 1$)

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots X_n \qquad \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}} = Z \rightarrow$$



$$n \longrightarrow \infty$$

نرمال استاندارد

$$E(Z) = 0 \qquad Var(Z) = 1 \qquad f_Z(z) \sim \boxed{e^{-\frac{z^2}{2}}}$$

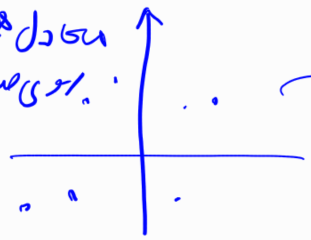
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\varphi(Z) = f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)\,dz = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw\,dz$$

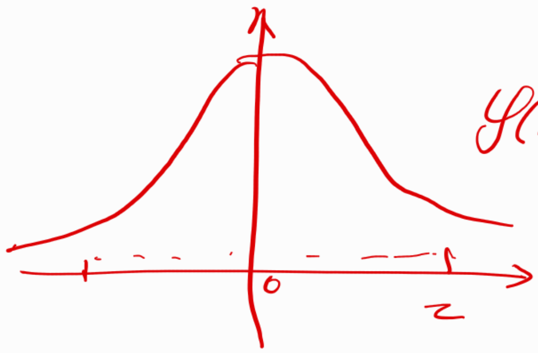
معادل همه نقاط

روی صفحه دوبعدی



Polar $\rightarrow = 2\pi$

r, θ



$$\varphi(Z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

متقارن

حول صفر

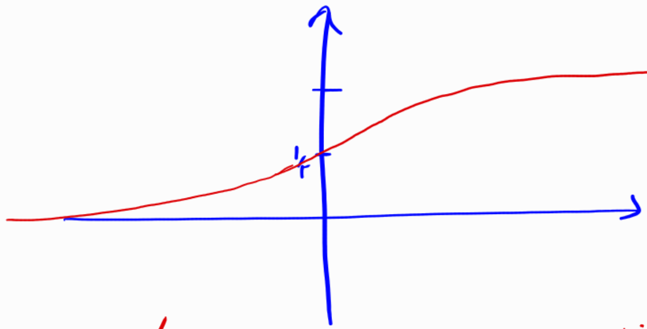
$$\varphi(Z) = \varphi(-Z) \rightarrow \text{PDF}$$

تابع چگالی احتمال

$$\Phi(Z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^{Z} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

CDF

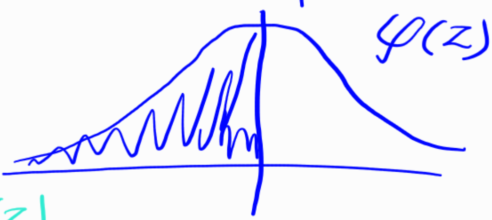
تابع احتمال تجمعی



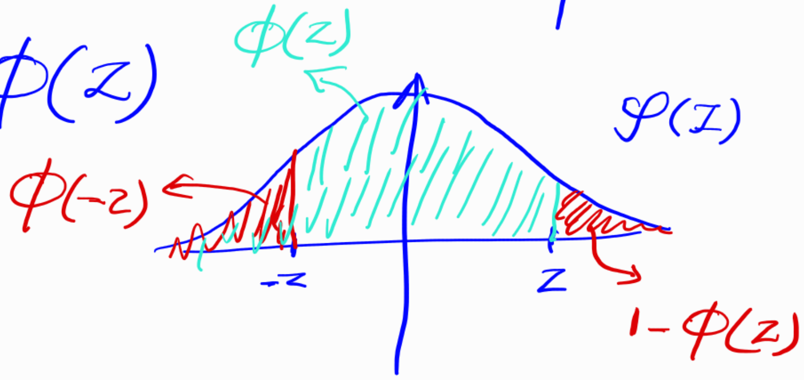
$\Phi(Z)$

شکل بسته از تابع $\Phi(Z)$ موجود نیست.

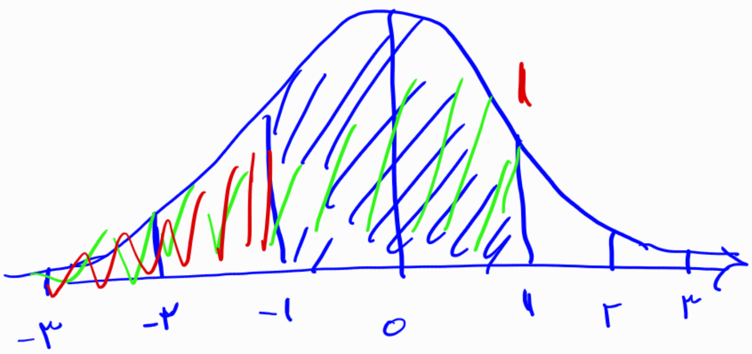
$\lim_{x\to -\infty} \Phi(x) = ۰$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} \Phi(x) = ۱$ $\qquad$ $\Phi(۰) = ۱/۲$



$$\underline{\Phi(-Z)} = ۱ - \Phi(Z)$$



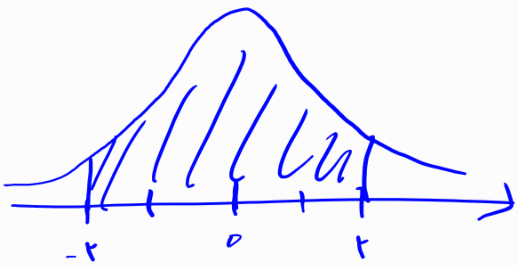
مثال :



$$\int_{-۱}^{۱} \varphi(z)\,dz = \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} dz = \Phi(۱) - \overbrace{\Phi(-۱)}^{۱-\Phi(۱)} = ۲\Phi(۱) - ۱ = \boxed{۰٫۶۸}$$

$$\Phi(۱) = ۰٫۸۴۱۳ \rightarrow ۲\Phi(۱) - ۱ = \boxed{۰٫۶۸}$$

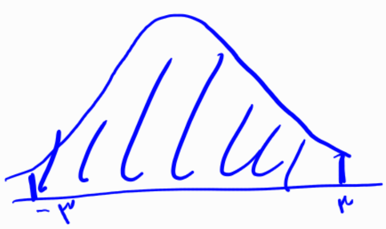
$$۱٫۶۸۲۶ - ۱ =$$



$$\int_{-۲}^{۲} \varphi(z)\,dz = ۲\Phi(۲) - ۱ = \boxed{۰٫۹۵}$$

$$\Phi(۲) = ۰٫۹۷۷۲$$

$$۲\Phi(۲) - ۱ = ۰٫۹۵۴۴$$



$$\int_{-۳}^{۳} \varphi(z)\,dz = ۲\Phi(۳) - ۱ = ۰٫۹۹۷$$

قاعده ۶۸ - ۹۵ - ۹۹/۷

هرگاه یک متغیر نرمال استاندارد Z داشته باشید

$Z \sim N(0,1)$

$\sigma = 1 \rightarrow$ انحراف معیار

$\sigma^2 = 1 \rightarrow$ واریانس

$$P(-1 \le Z \le 1) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 68\%$$

$$P(-2 \le Z \le 2) = 95\%$$

$$P(-3 \le Z \le 3) = 99.7\%$$

توزیع نرمال در حالت کلی:

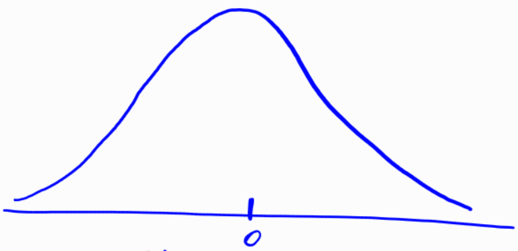
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X) = \mu$

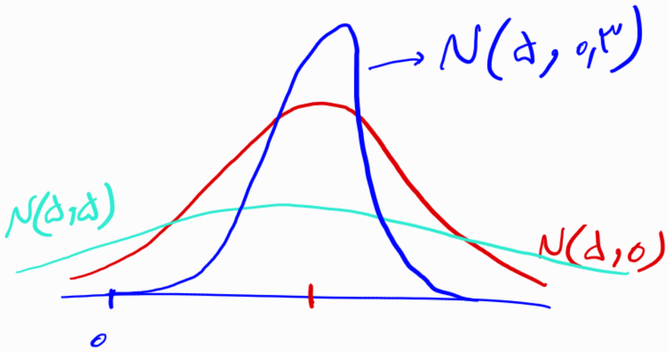
$Var(X) = \sigma^2$

PDF: $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \rightarrow$$ فرم بسته ندارد.



نرمال استاندارد



Moments

$$E(X^n) = M_n(X) \qquad M_1(X) = E(X) = \text{Expected Value}$$

$$\underbrace{E(X^n)}_{\text{Raw Moment}}$$

$$\underbrace{E\left(\left(X-E(X)\right)^n\right)}_{\substack{\text{Central Moment} \\ \text{of order } n}} =$$

گشتاور مرکزی مرتبه n

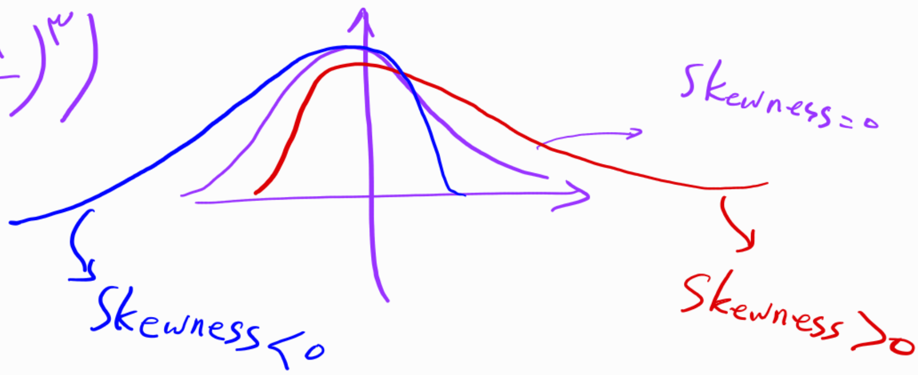
گشتاور مرکزی مرتبه ۲: $E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right) = Var(X)$

$$E\left(\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n\right) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^n\right] \rightarrow$$ گشتاور استاندارد مرتبه n

$\mu = E(X) \qquad \sigma = \sqrt{Var(X)}$

گشتاور استاندارد مرتبه ۳ = Skewness چولگی

$$E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right)$$

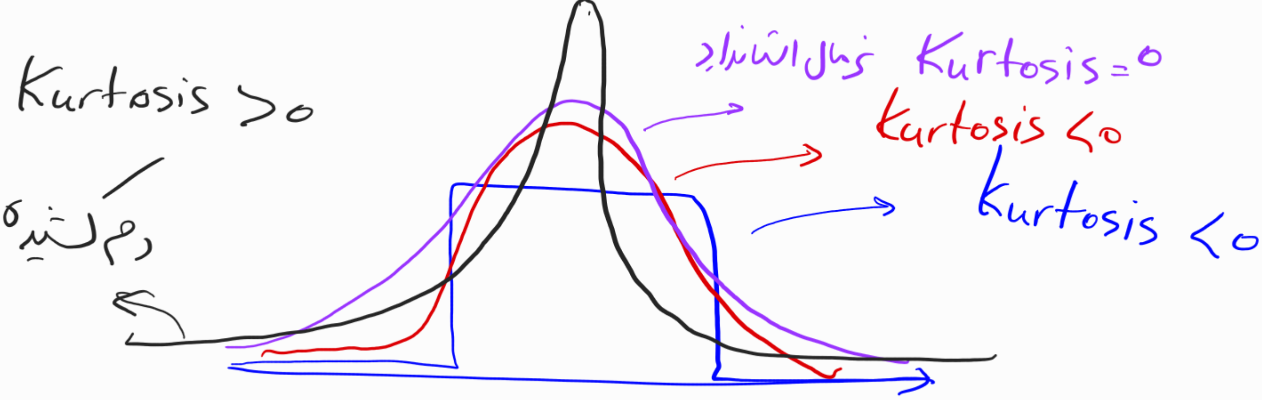


گشتاور استاندارد مرتبه ۴

$$\text{Kurtosis} = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right) - 3$$

(3 ← توزیع نرمال استاندارد)

Kurtosis: کشیدگی



سوال: چگونه Momentهای مرتبه بالاتر یک توزیع دلخواه را حساب کنیم؟

راه سخت: $E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)\, dx$

پیوسته

$$E(X^3) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k^3 P(X=k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k^3 f_X(k)$$

راه زیبا: استفاده از تابع مولد گشتاور Moment Generating Function

MGF:

$$M(t) = E(e^{tX})$$

مثال: تابع مولد گشتاور توزیع برنولی:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{1} e^{tk} P(X=k) = pe^t + (1-p)e^0 = pe^t + q$$

سوال: $M(0) = ?$

$$M(0) = E(e^{0X}) = 1$$

همیشه بدیهی است MGF می‌توانیم برای $t=0$ آن را چک کنیم که مقدارش ۱ باشد.

$t=0 \to pe^{0}+q = p+q = 1$

سوال: MGF برای توزیع Binomial:

$X_i \sim Bern(p)$

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

MGF $Y = X_1 + X_2$?

MGF

$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1+X_2)})$

$= E(e^{tX_1} \times e^{tX_2}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2})$

اگر X_1 و X_2 مستقل باشند

$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t)$

اگر X_1 و X_2 مستقل باشند $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$

$M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i ها مستقل باشند

جواب: $M_{X_i}(t) = pe^{t}+q$

درنتیجه: $\underbrace{(pe^{t}+q)(pe^{t}+q)\dots(pe^{t}+q)}_{n \text{ بار}} = (pe^{t}+q)^{n}$

توزیع نمایی:

$X \sim \text{Exponential}(\lambda) \qquad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)}\,dx$$

$$\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x\underbrace{(t-\lambda)}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$t < \lambda$ فرض کنیم

سوال: از MGF چه استفاده ای می‌توانم بکنم؟

$$\underbrace{E(X^n)}_{\text{گشتاور خام مرتبه } n \text{ ام } X} = M^{(n)}(0) \quad ?$$

مثال: برنولی

$$M(t) = pe^t + q$$

$M'(t) = pe^t \qquad M'(0) = p = E(X) \qquad X \sim \text{Bern}(p)$

$M''(t) = pe^t \qquad M''(0) = p = E(X^2)$

واریانس برنولی

$$\underset{E(X^2) - E(X)^2}{Var(X)} = M''(0) - M'(0)^2 = p^2 - p = p(1-p) = pq$$

دوجمله‌ای

$$M(t) = (pe^t+q)^n$$

$$M'(t) = \underbrace{npe^t}\underbrace{(pe^t+q)^{n-1}} \qquad M'(0) = np = E(X)$$

$$X \sim Binomial(p, n)$$

$$M''(t) = np\left[\underbrace{\underbrace{e^t}_{1}(\underbrace{pe^t+q}_{1})^{n-1}} + \underbrace{e^t}_{1}\,p\underbrace{e^t}_{1}(n-1)(\underbrace{pe^t+q}_{1})^{n-2}\right]$$

$$M''(0) = np(1+p(n-1)) = E(X^2)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = M''(0) - M'(0)^2 = np(1+p) - (np)^2 =$$

$$np(1+p(n-1) - np) = \underbrace{npq}$$

$$\underbrace{1+\cancel{np}-p}-\cancel{np}$$

$$1-p=q$$

اثبات

$$\underbrace{E(X^n)} = M^{(n)}(0)$$

مومنت خام مرتبه nام

$$M(t) = M(0) + M'(0)(t) + \frac{M''(0)t^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(k)}(0)\,t^k}{k!}$$

$$M(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k \frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!} \rightarrow M^{(k)}(0) = E(X^k) \quad \forall_{0\leq k}$$

Joint Distribution توزیع توام

در حالت گسسته: X و Y را احتمال $P(X=x, Y=y)$ را به ازای مقادیر مختلف همه در یک جدول نمایش داده‌ایم:

X \ Y	-۱	۰	۱
۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱
۲	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۲
۳	۰	۰	۰

→ Probability Mass Function

PMF

توزیع توام

مجموع مقادیر کل جدول باید ۱ باشد.

$$P(X=2, Y=0) = P(X=2 \wedge Y=0) = P(X=2 \cap Y=0) = 0.3$$

مثال:

سکه اول \ سکه دوم	رو	پشت	
رو	$\frac{2}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ رو
پشت	$\frac{25}{100}$	$\frac{55}{100}$	$\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ پشت
سکه اول احتمال	رو $\frac{27}{100}$	پشت $\frac{73}{100}$	

→ احتمال حاشیه‌ای Marginal

→ این دو سکه از هم مستقل نیستند!!

در حالت مستقل با ضرب توزیع‌های حاشیه‌ای PMF این است

$\frac{27}{500}$	$\frac{73}{500}$
$\frac{108}{500}$	$\frac{292}{500}$

اگر PMF دو متغیر تصادفی با توزیع توام Joint Dist. را داشته باشیم

می توانیم بر اساس آن احتمال جداگانه هر یک از دو متغیر را محاسبه کنیم:

$$P(X=x) = \sum_{y} P(X=x, Y=y)$$

توزیع حاشیه‌ای

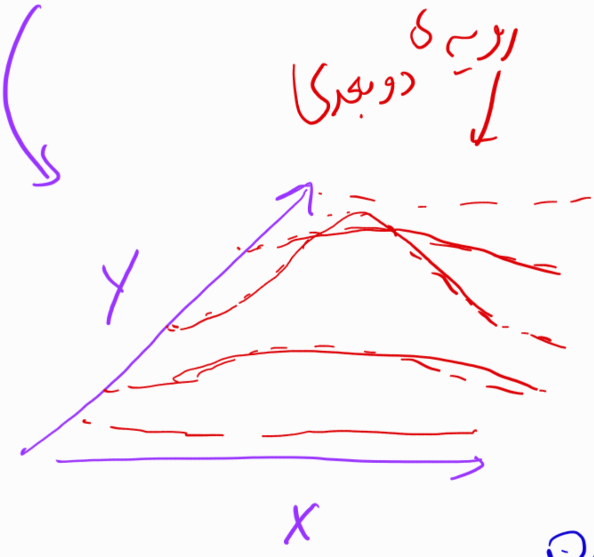
Marginal Distribution

در چه حالت دو متغیر تصادفی با توزیع توام داده شده مستقل از یکدیگر هستند؟

$$\underbrace{P(X=x, Y=y)}_{\text{توزیع توام}} = \underbrace{P(X=x)}_{\substack{\text{توزیع حاشیه‌ای} \\ X}} \underbrace{P(Y=y)}_{\substack{\text{توزیع حاشیه‌ای} \\ Y}} \quad \forall x, y$$

در حالت پیوسته: PMF نداریم: به جای آن PDF توام داریم: و CDF

$$\underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{PDF} \qquad \underbrace{F_{X,Y}(x,y)}_{CDF} = P(X \le x, Y \le y)$$

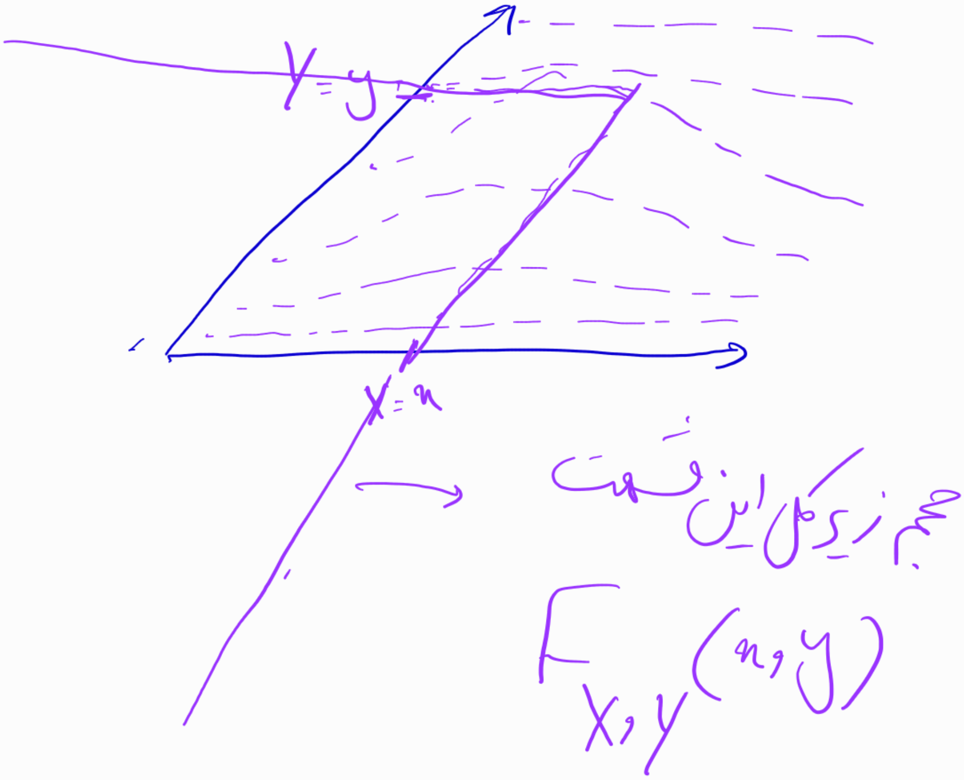


$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = 1$$

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

f مشتق F است:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,dy$$



در حالت پیوسته دو متغیر تصادفی با توزیع توام مستقل هستند اگر و تنها اگر:

به ازای هر x و y:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

از $f_{X,Y}(x,y)$ چطور مقدار $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را پیدا کنیم؟

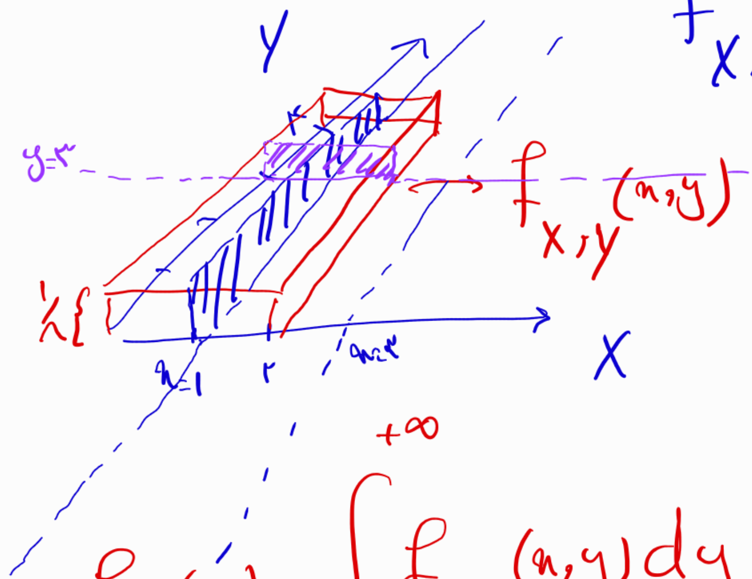
راه حل: توزیع حاشیه‌ای Marginal

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

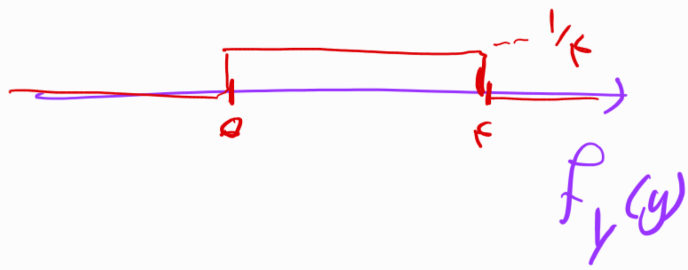
مثال: فرض کنید

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



مثال: یک مرغ N تخم می‌کند $N \sim Poisson(\lambda)$

و روی آن‌ها می‌نشیند. با احتمال p هر تخم جوجه می‌شود و با احتمال $q = 1-p$ جوجه نمی‌شود.

اگر X متغیر تصادفی تعداد تخم مرغ‌هایی باشد که جوجه می‌شوند و Y تعداد آن‌هایی که جوجه نمی‌شوند

توزیع توام PMF $(X+Y=N)$ X,Y را به دست آورید.

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x, N=x+y) = \underbrace{P(X=x \mid N=x+y)}_{۱}\underbrace{P(N=x+y)}_{۲}$$

$$P(A,B) = P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$$

۱ $$P(X=x \mid N=x+y) = \binom{x+y}{x} p^x q^y$$

۲ $$P(N=x+y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+y}}{(x+y)!}$$

$$P(X=x, Y=y) = \binom{x+y}{x} p^x q^y \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+y}}{(x+y)!}$$

$$= \frac{\cancel{(x+y)!}\, p^x q^y e^{-\lambda}\lambda^x \lambda^y}{x!\, y!\, \cancel{(x+y)!}} = \underbrace{\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}}_{۱}\ \underbrace{\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^y}{y!}}_{۲}$$

$$p+q=1 \rightarrow e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q}$$

① → متغیر پواسون $A\sim \text{Poisson}(\lambda p)$

② $B\sim \text{Poisson}(\lambda q)$

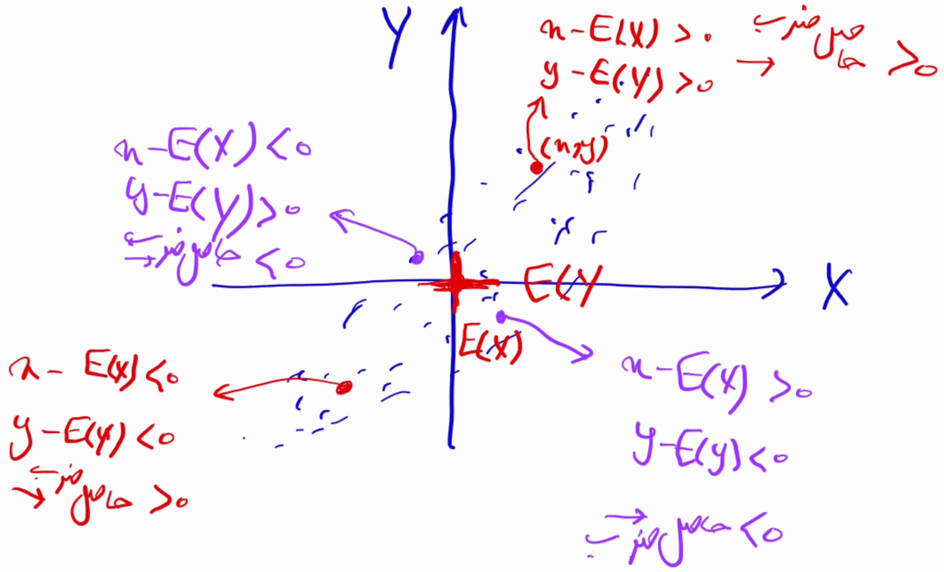
A و B مستقل از یکدیگر هستند.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

$a,b\in\mathbb{R}$

X, Y $$Cov(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

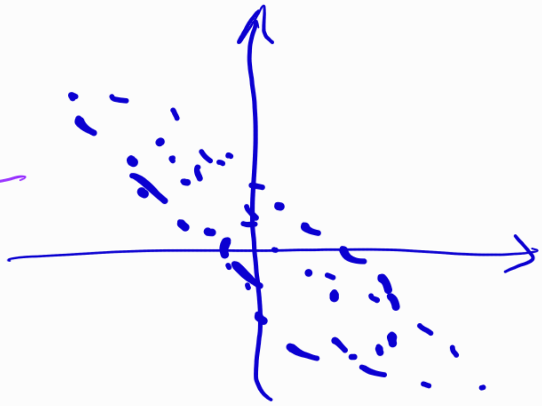


تعداد نقاط با حاصل ضرب مثبت > نقاط با حاصل ضرب منفی

↓

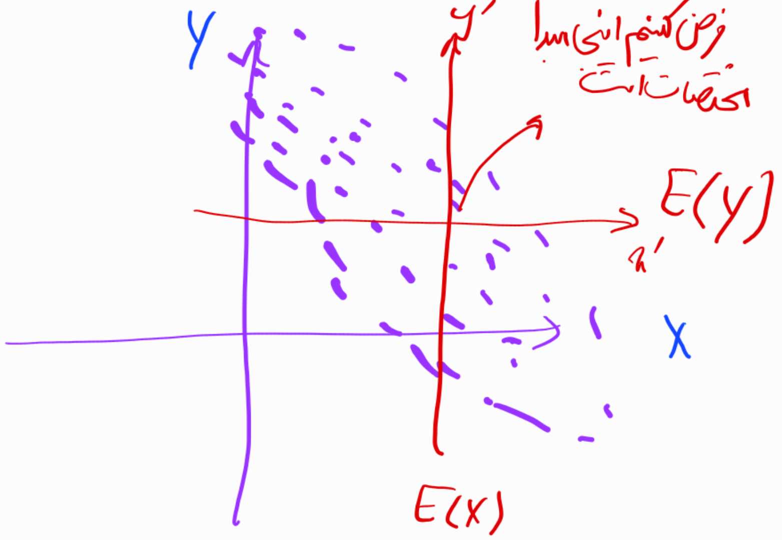
$Cov(X,Y)>0$

$Cov(X,Y)<0$ ←



$x' = x - E(X)$

$y' = y - E(Y)$



چون تعداد نقاط با $x'y'<0$ بیشتر از

تعداد نقاط با $x'y'>0$ است پس

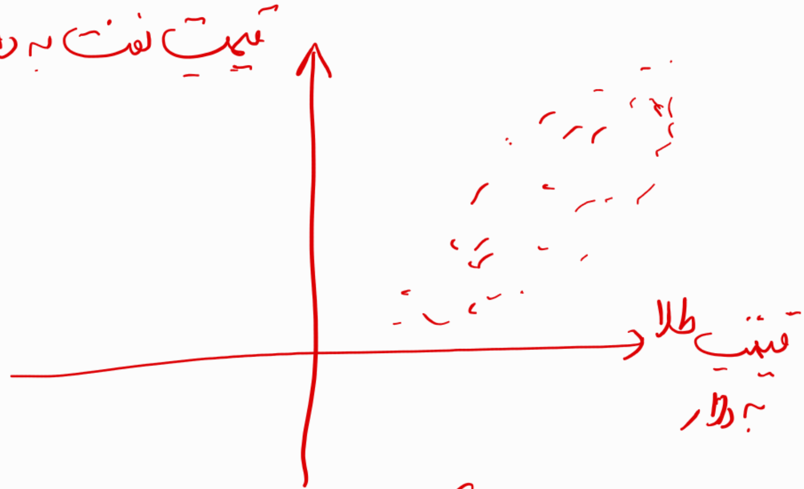
$Cov(X,Y)<0$

بیان ساده $Cov(X,Y)>0$ اگر افزایش X معمولا همراه با افزایش Y باشد.

کاهش X 〃 〃 کاهش Y 〃 〃.

مثلاً قد و وزن Cov مثبت دارند.

یا مثلاً وزن یک خودرو و میزان شتاب (صفر تا صد) COV منفی دارند.



$Cov(X,Y)=0$ اگر دو متغیر تصادفی X,Y مستقل باشند.

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

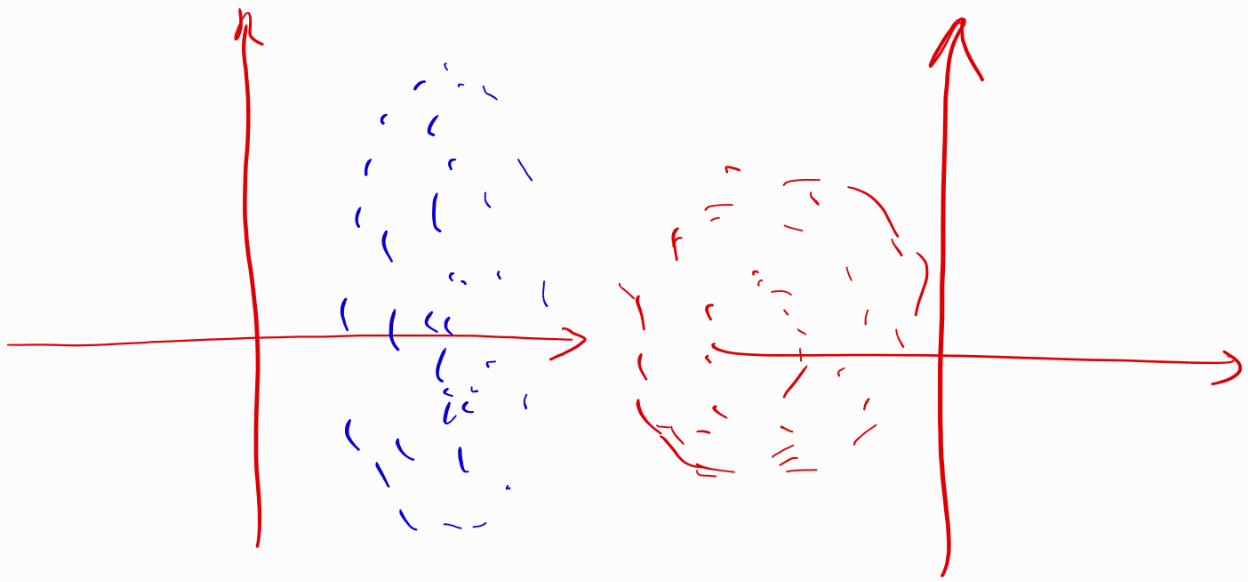
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)(y-EY)\, f_{XY}(x,y)\, dx\,dy = \int \underbrace{(x-\overset{\text{عدد ثابت}}{EX})\, f_X(x)\, dx}_{} \int \underbrace{(y-\overset{\text{عدد ثابت}}{EY})\, f_Y(y)\, dy}_{0}$$

2D LOTUS

چون X,Y مستقل هستند $= f_X(x)\, f_Y(y)$

$$\underbrace{\int x f_X(x)dx}_{E(X)} - EX \underbrace{\int f_X(x)\, dx}_{1} = 0$$

2D LOTUS: $E(g(X,Y)) = \iint g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$



$Cov(X,Y) = 0$

در حالت کلی (چه X و Y مستقل باشند یا نباشند):

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$Var(X-Y) = Var(X+Z) = Var(X) + \underline{Var(Z=-Y)} + 2Cov(X,-Y)$$

$Z = -Y$

$(-1)^2 = 1 \rightarrow Var(-Y) = Var(Y)$

$$Cov(X,-Y) = E\Big[(X-E(X))(\underbrace{-Y-\underbrace{E(-Y)}_{-E(Y)}}_{-(Y-E(Y))})\Big] = -E((X-EX)(Y-EY))$$

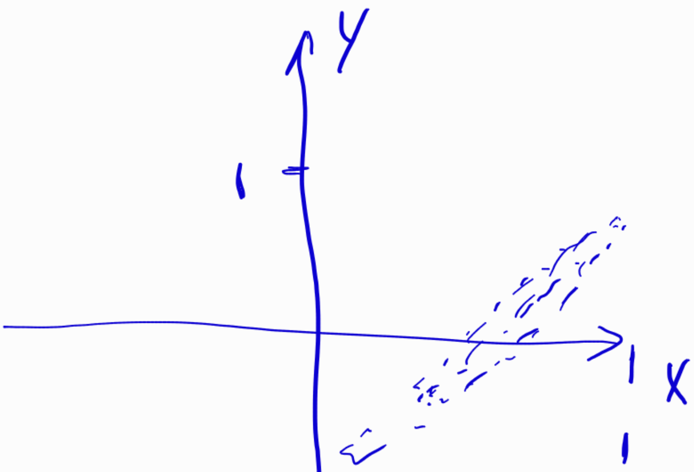
$$= -Cov(X,Y)$$

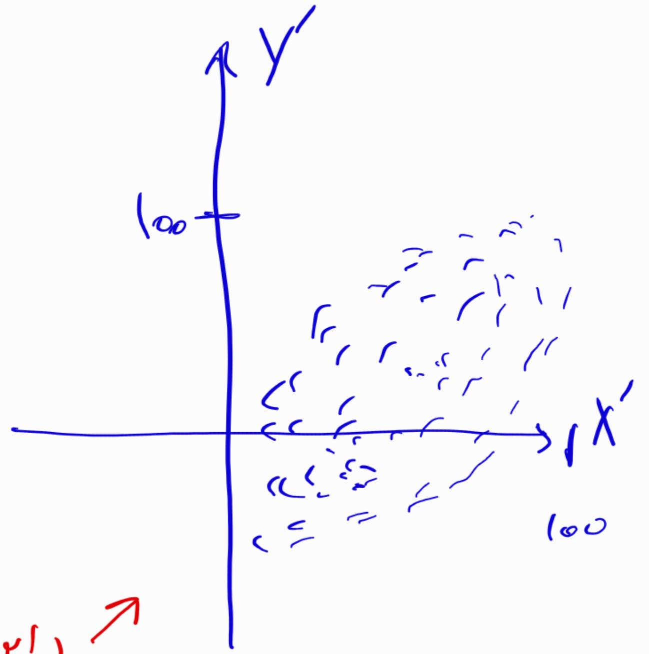
$$\Rightarrow Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

$$Cov(aX,Y) = E\big((aX-\underbrace{E(aX)}_{aE(X)})(Y-EY)\big) = aE[(X-EX)(Y-EY)]$$

$$a \in \mathbb{R} \qquad \underbrace{aX - aE(X)}_{a(X-EX)}$$

$$= a\,Cov(X,Y)$$





$Cov(X',Y') \gg Cov(X,Y)$ در این شکل

$Corr(X',Y') < Corr(X,Y)$

$Cov(X,Y)$ $\qquad$ $Cov(X',Y')$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\,SD(Y)}$$

SD: Standard Deviation

قضیه : $\quad -1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$

لم ۱: $\quad Corr(aX,Y) = Corr(X,Y)$

$$Corr(aX,Y) = \frac{Cov(aX,Y)}{\sqrt{\underbrace{Var(aX)}_{a^2Var(X)}\,Var(Y)}} = \frac{a\,Cov(X,Y)}{a\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = Corr(X,Y)$$

اثبات قضیه

بدون اینکه از کلیت قضیه کم شود فرض می‌کنم

$Var(Y) = 1 \quad , Var(X) = 1$

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{1\times 1}}=Cov(X,Y)=\rho$$

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=1+1+2\rho=2(1+\rho)$$

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)=1+1-2\rho=2(1-\rho)$$

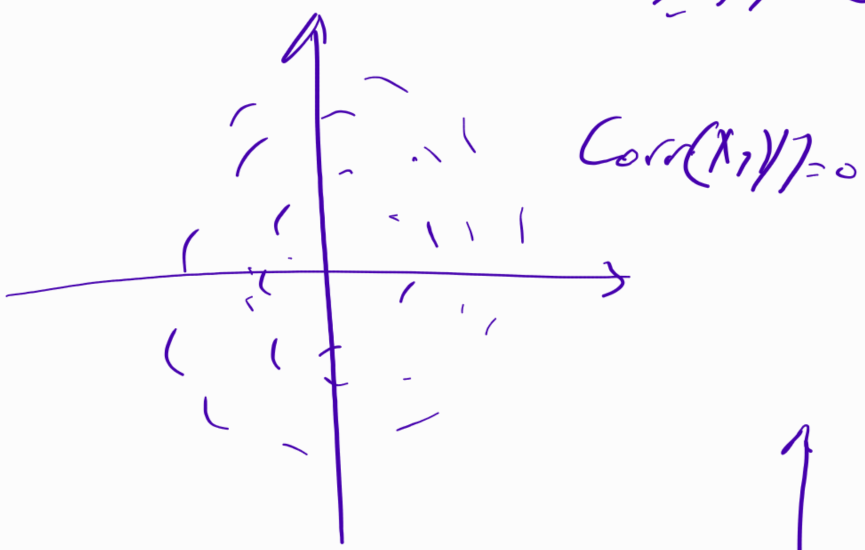
$$Var(X+Y)\geq 0 \rightarrow 1+\rho\geq 0$$

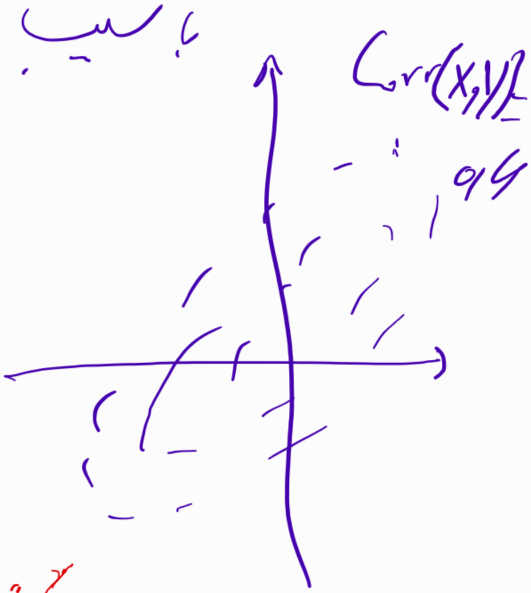
$$Var(X-Y)\geq 0 \rightarrow 1-\rho\geq 0$$

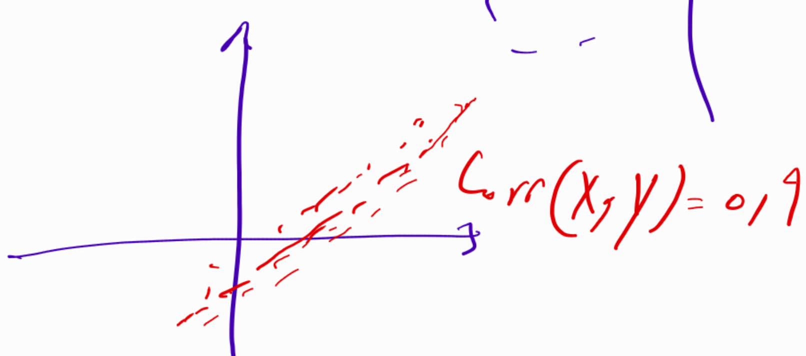
$$\rightarrow -1\leq\rho\leq 1$$

می‌توان اثبات کرد که تنها در صورتی $Corr(X,Y)=1$ است که تمام نقاط X و Y روی یک خط با شیب مثبت قرار گیرند.

تنها در صورتی $Corr(X,Y)=-1$ است که روی خطی با شیب منفی قرار گیرند.







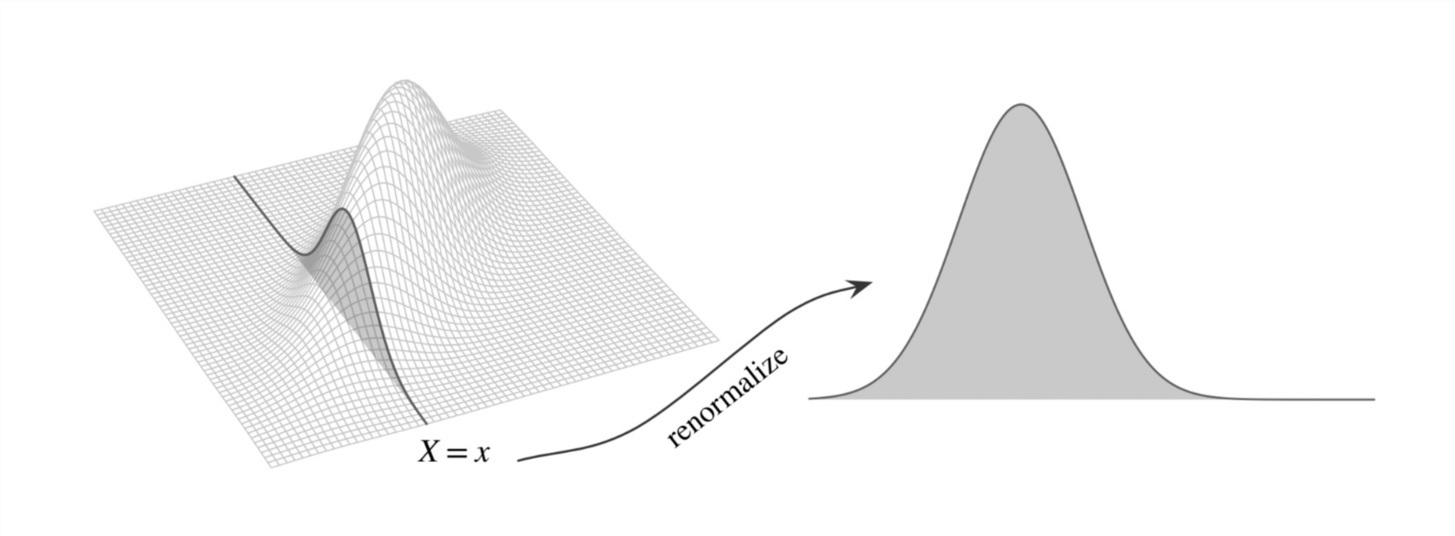
تعریف: فرض کنید چگالی توأم دو متغیر X و Y را داریم: $f_{X,Y}(x,y)$

آن‌گاه چگالی شرطی $X|Y$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx}$$

مارجینال روی y

$$P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$$



نابرابری های مهم احتمالاتی (فصل ۱۲ کتاب)

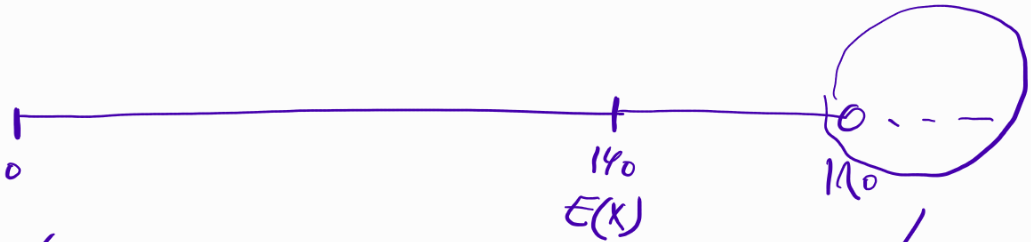
نابرابری مارکوف : Markov Inequality

به ازای متغیر تصادفی X و $\forall a>0$

$$P(|X|\geq a)\leq \frac{E(|X|)}{a}$$

مثال: X قد افراد است. $E(X)=160\ cm$.

$$P(X\geq 180)\leq \frac{160}{180}$$



اگر جرم بزرگی اینجا باشد $E(X)$ را به زور جابجا می‌کند.

چون $X\geq 0$ ، اگر مثلاً ٪۹۰ جمعیت قد ۱۸۰ به بالا داشته باشند، حتی اگر قد بقیه جمعیت صفر باشد هم:

$$E(X)\geq 0{,}9\times 180=162>160$$

پس اگر متوسط قد جمعیت ۱۶۰ باشد، امکان ندارد ٪۹۰ جمعیت قد ۱۸۰ به بالا داشته باشند.

اثبات Markov : ابتدا متغیر تصادفی Y را به ازای $\frac{|X|}{a}$ در نظر بگیرید.

عددی بزرگتر یا مساوی صفر

یک Indicator Variable در نظر می‌گیریم:

$$I(Y\geq 1)=\begin{cases}0 & Y<1 \rightarrow \frac{|X|}{a}<1\\ 1 & Y\geq 1 \rightarrow \frac{|X|}{a}\geq 1\end{cases}$$

ادعا: $I(Y\geq 1)\leq Y$

اثبات:

$I(Y\geq 1) = \begin{cases} 0 \rightarrow & Y\geq 0 \rightarrow \underbrace{I(Y\geq 1)}_{\text{صفر}} \leq \underbrace{Y}_{0\leq Y} \\ 1 \rightarrow & \text{این اتفاق تنها زمانی می‌افتد که } Y\geq 1 \rightarrow \underbrace{I(Y\geq 1)}_{1} \leq \underbrace{Y}_{\geq 1} \end{cases}$

فقط دو مقدار دارد

$\hookrightarrow I(Y\geq 1)\leq Y$

حال از طرفین Expected می‌گیریم:

$$\underbrace{E(I(Y\geq 1))}_{\text{Indicator Variable ِ Expected}} = P(I(Y\geq 1)=1) = \underbrace{P(Y\geq 1)\leq E(Y)}$$

برابر $P(I=1)$ است.

$$P\left(\frac{|X|}{a}\geq 1\right)\leq E\left(\frac{|X|}{a}\right)=\frac{E|X|}{a}$$

$$\hookrightarrow P(|X|\geq a)\leq \frac{E|X|}{a}$$

نامساوی Markov خیلی tight نیست چون فقط از $E(|X|)$ استفاده می‌کند. آیا می‌توانیم با استفاده از $Var(X)$ نامساوی محکم‌تری پیدا کنیم؟

نابرابری Chebyshev چبیشف

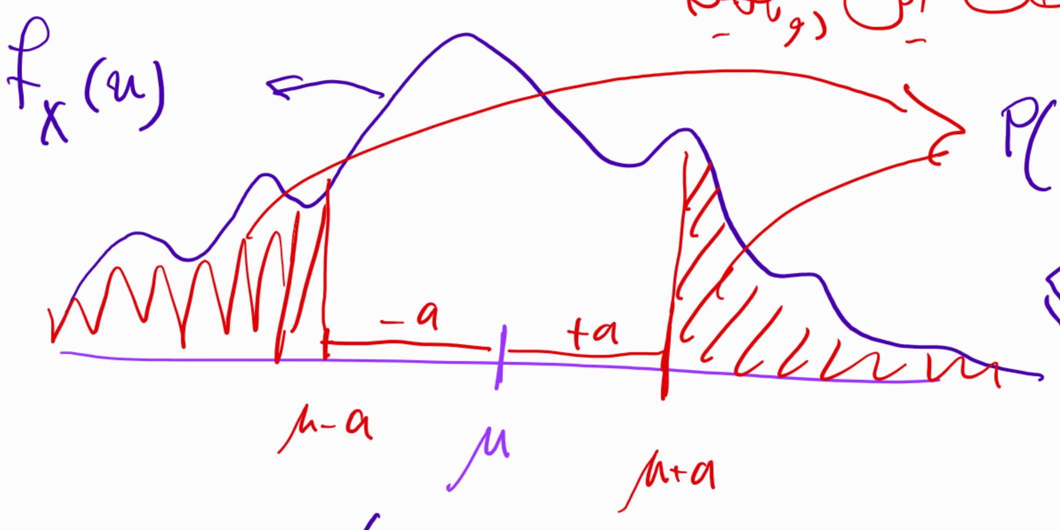
$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

به ازای هر متغیر تصادفی X، $E(X)=\mu$ ، $Var(X)=\sigma^2$ داریم:

مثال: اگر بدانیم $E(X)=140^{cm}$ و $Var(X)=15$ آن گاه:

$$P(|X-140| \geq 20) \leq \frac{15}{20^2} = \frac{15}{400} = \frac{3}{80}$$

$$= P(X \geq 160 \vee X \leq 120)$$



اثبات نابرابری چبیشف: از مارکوف شروع می‌کنم:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$$

$$Y = (X-\mu)^2$$

طبق مارکوف

$$P(Y \geq a^2) = P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$$E(Y) = E((X-EX)^2) = Var(X) = \sigma^2$$

Law of Large Numbers — قانون اعداد بزرگ

بیان خیلی ساده: اگر از یک متغیر تصادفی X تعداد زیادی نمونه مستقل بگیریم، متوسط نمونه به سمت $E(X)$ میل می‌کند.

مثلاً اگر یک تاس (منصفانه) را بارها بیاندازیم متوسط اعداد خوانده شده به ۳٫۵ میل می‌کند.

به عبارت دقیق‌تر: اگر X_1 ، X_n از یک توزیع یکسان و مستقل باشند i.i.d

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \bar{X} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} = \underbrace{E(X)}_{\text{امید ریاضی توزیع یا همان } E(X_i)}$$

اثبات:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{nE(X_i)}{n} = E(X_i) = E(X)$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = Var\left(\frac{X_1}{n}\right) + Var\left(\frac{X_2}{n}\right) + \dots + Var\left(\frac{X_n}{n}\right)$$

چون X_i ها مستقل هستند

$$= \frac{Var(X_1)}{n^2} + \frac{Var(X_2)}{n^2} + \dots + \frac{Var(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

طبق نابرابری چبیشف:

$$P(|\bar{X}-\mu| > a) \leq \frac{Var(\bar{X})}{a^2}$$

به ازای $\epsilon > 0$:

$$P(|\bar{X}-\mu| > \epsilon) = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0 \xrightarrow{\text{یعنی}}$$

احتمال آنکه $|\bar{X}-\mu|$ بیشتر از ϵ باشد صفر است.

به عبارت دیگر اگر تعداد نمونه خیلی زیاد باشد $n \to \infty$ احتمال آن که $\bar{X}$ از مقدار واقعی μ بیش از ϵ خطا داشته باشد (به ازای هر $\epsilon > 0$ هرچقدر هم کوچک) به صفر میل می‌کند.

نابرابری کوشی شوارتز:

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

اثبات:

به ازای هر مقدار t:

$$E((Y-tX)^2) \geq 0$$

اگر $t = \frac{E(XY)}{E(X^2)}$ (t عدد ثابت)

$$E((Y-tX)^2) = E(Y^2) + t^2E(X^2) - 2tE(YX) \geq 0$$

با جایگذاری $t = \frac{E(XY)}{E(X^2)}$

$$E(Y^2) + \frac{E(XY)^2}{E(X^2)^2}E(X^2) - 2\frac{E(XY)}{E(X^2)}E(XY) =$$

$$E(Y^2) + \frac{E(XY)}{E(X^2)}\left(\cancel{E(XY) - 2E(XY)}\right) \geq 0$$

$-E(XY)$

$$\to E(Y^2) - \frac{E(XY)^2}{E(X^2)} \geq 0$$

$$E(X^2)E(Y^2) \geq E(XY)^2$$

$$\Rightarrow |E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

مثال: اگر $E(X)=0$ و $E(Y)=0$ $\Leftarrow$

$$|E(XY)| = |E[(X-EX)(Y-EY)]| = |Cov(X,Y)|$$

راه‌حل:

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} = \sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{0} = E(X^2)$$

$$\frac{|Cov(X,Y)|}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = |Corr(X,Y)| \leq 1$$