# ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

**نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳**

مدرس: آبام- کاظمی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | زمان اجرا، تقسیم و حل | زمان آزمون: ۲۸ فروردین

## مسئله‌ی ۱. رشد توابع

توابع زیر را بر حسب درجه رشدشان مرتب کنید.

$$\begin{array}{ccccc}
(\sqrt{2})^{\lg(n)} & n^2 & n! & (\lg(n))! & (\frac{3}{2})^n \\
\lg^2 n & n^3 & \lg(n!) & 2^{2^n} & n^{\frac{1}{\lg n}} \\
\lg(\lg(n)) & n2^n & n^{\lg(\lg(n))} & \lg n & 2^{2^{n+1}} \\
2^{\lg n} & (\lg n)^{\lg n} & n \lg n & 2^{\sqrt{2 \lg n}} & \sqrt{\lg n}
\end{array}$$

## مسئله‌ی ۲. تحلیل شبه کد

پیچیدگی قطعه کدهای زیر را حساب کنید.

الف)

```
for i from 1 to n do
    for j = 0, j ← j + i to n do
        // O(1)
```

ب)

```
int i = 0, j = 1;
while (i < n){
    // O(1)
    i += j;
    j ++;
}
```

## مسئله‌ی ۳. رشد عجیب

زمان اجرای الگوریتمی با $T(n,n)$ را پیدا کنید، به طوری که:

$T(x,c) = \Theta(x)$ برای $c \leqslant 2$

$T(c,y) = \Theta(y)$ برای $c \leqslant 2$

$T(x,y) = \Theta(x+y) + T(x/2, y/2)$ برای کلیه حالات.

## مسئله‌ی ۴. سری‌ها

ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \in \Theta(n\sqrt{n})$

ب) $\sum_{i=0}^{\lceil \log n \rceil} 2^i \log 2^i \in \Theta(n \log n)$

## مسئله‌ی ۵. بازگشتی

- روابط بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ج) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^5 n$

د) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^2 n$

ه) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + 5$

و) $T(n) = (\frac{2}{n})(T(0) + \cdots + T(n-1)) + c,\ T(0) = 0$

- رابطه بازگشتی مربوط به تکه کد زیر را پیدا کنید و سپس با روشی دلخواه پیچیدگی زمانی آن را بدست آورید.

```
int gcd(int a, int b){
    if(a == b) return a;
    if(a > b) gcd(a % b, b);
    gcd(a, b % a);
}
```

## مسئله‌ی ۶. بازگشت عجیب

تابع $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر داده شده است:

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^2 + nT(n-1) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

که $a, b$ اعداد حقیقی و مثبت‌اند.

الف) ثابت کنید $T(n) \in \Theta(n!)$.

ب) رابطه‌ی دقیق و صریح $T(n)$ را بیابید. این رابطه را برحسب $a$ و $b$ و $c$ بنویسید که

$$c = \lim_{n \to \infty} \frac{T(n)}{n!}$$

همچنین بررسی کنید $a \leqslant c \leqslant a + 5b$.

ج) فرض کنید تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ با این رابطه داده شده باشد:

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = ۱ \\ bn^k + ng(n-۱) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید $g(n) \in \Theta(n!)$.

## مسئله‌ی ۷. حدس پیچیده

در هر قسمت، بهترین مرتبه‌ی ممکن را برای $T_۱(n,n)$ و $T_۲(n)$ بیابید.

الف) $T_۱(x,c) = \Theta(x)$ برای $c \leqslant ۲$
$T_۱(c,y) = \Theta(y)$ برای $c \leqslant ۲$
$T_۱(x,y) = \Theta(x) + T_۱(x, y/۲)$ برای کلیه حالات.

ب) $T_۲(n) = ۲T_۲(\frac{n}{۲} + \sqrt{n}) + T_۲(\frac{n}{۲}) + ۱$

## مسئله‌ی ۸. زیر آرایه ها

آرایه‌ای به طول $n$ از اعداد $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ داریم. با استفاده از تقسیم و حل، الگوریتمی از مرتبه زمانی $\mathcal{O}(n \log^۲ n)$ ارائه دهید که تعداد تمام زیر آرایه‌های این آرایه با مجموع کمتر از $t$ بیابد. به عبارت دیگر، تعداد تمام جفت‌های $r, l$ را بیابید که

$$a_l + a_{l+۱} + \cdots + a_{r-۱} + a_r < t$$

## مسئله‌ی ۹. شمارنده دودویی

همان‌طور که قبلاً دیده بودیم هزینه‌ی سرشکن افزایش در یک شمارنده‌ی دودویی از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(۱)$ بود. حالا یک شمارنده دودویی در نظر بگیرید که در آن هزینه تغییر $i$امین بیت برابر $i$ باشد. ثابت کنید در این حالت نیز بازهم هزینه سرشکن عمل افزایش $\mathcal{O}(۱)$ است.

## مسئله‌ی ۱۰. حذف پر هزینه

فرض کنید $n$ عدد دودویی دارید که در ابتدا همه‌ی آن‌ها برابر یک هستند. در هر مرحله دو عدد دلخواه را انتخاب کرده و از مجموعه حذف می‌کنیم و به جای آن‌ها حاصل جمعشان را قرار می‌دهیم. اگر دو عددی که حذف کردیم $b_۱$ و $b_۲$ بیتی باشند، هزینه‌ی این عمل برابر است با:

$min(b_۱, b_۲)$ به علاوه‌ی تعداد بیت‌های نقلی در جمع که بعد از بیت سمت چپ عدد کوچکتر به وجود می‌آید. مثلا هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۱۰۰ و ۱۰۱۱۰۱۰۰ برابر است با ۷ = ۳ + ۴ و هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۰۱ و ۱۰۰۰۰۱ برابر ۳ است. حال ثابت کنید اگر $m$ بار این عمل را انجام دهیم حداکثر از $\mathcal{O}(m)$ هزینه صرف کرده‌ایم.

## مسئله‌ی ۱۱. کار و بار

تعداد نامعلومی کار باید انجام شود. اگر $i$ به صورت توانی از ۲ بود، انجام کار $i$ام هزینه‌ای برابر با $i$ خواهد داشت و در غیر این صورت هزینه‌ی آن کار ۱ است. با سه روش الف) انبوهه، ب) حسابداری و ج) تابع پتانسیل ثابت کنید که هزینه‌ی سرشکن هر کار $O(۱)$ می‌باشد.

## مسئله‌ی ۱۲. پاره خط‌های موازی محورها

تعدادی پاره خط موازی محور $x$ و تعدادی پاره خط موازی محور $y$ داده شده است. مطلوب است پیدا کردن الگوریتمی که تمامی نقاط برخورد پاره خط ها را گزارش کند. می توانید تعداد پاره خط ها را $n$ و تعداد نقاط گزارش شده را $k$ در نظر بگیرید. الگوریتم شما باید در زمان $\mathcal{O}(n \log n + k)$ مسئله را حل کند.

### مسئله‌ی ۱۳. پشته متفاوت

نوعی از پشته را در نظر بگیرید که عملیاتی به نام $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ را پشتیبانی می‌کند که در آن، ابتدا به تعداد $p$ بار عملیات $pop()$ را فراخوانی کرده و سپس عنصر $x$ را در پشته درج می‌کند. در نتیجه، هنگامی که $p = ۰$، صرفا عنصر $x$ درج خواهد شد.

الف) هزینه واقعی عملیات $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ چه خواهد بود؟

ب) با استفاده از روش حسابداری نشان دهید که هزینه سرشکن عملیات $push\text{-}and\text{-}pop(x,p)$ رشدی فراتر از $\mathcal{O}(۱)$ نخواهد داشت.

ج) نتیجه مشابه را با استفاده از روش تابع پتانسیل هم نشان دهید.

### مسئله‌ی ۱۴. شماره ستون

آرایه دو بعدی $A$ از اعداد حقیقی با ابعاد $m \times n$ داده شده است. می دانیم برای هر $۱ \leqslant i < k \leqslant m$ و $۱ \leqslant j < l \leqslant n$:

$$A[i,j] + A[k,l] \leqslant A[i,l] + A[k,j]$$

به ازای هر $i$، در میان اعدادی از سطر $i$ام که کم‌ترین مقدار را دارند، شماره ستون سمت چپ ترین عدد را $f(i)$ می نامیم. الگوریتمی از مرتبه $\mathcal{O}(m + n\log m)$ ارائه دهید که برای هر سطر $۱ \leqslant i \leqslant m$، $f(i)$ را پیدا کند.

### مسئله‌ی ۱۵. وصل کردن نقطه‌ها

فرض کنید که دو مجموعه از نقاط با نام های $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ داده شده است. مجموعه نخست عبارت است از $\mathcal{P} = \{p_۱, p_۲, \cdots, p_n\}$ که تمام اعضای آن روی خط $y = ۰$ قرار گرفته اند. مجموعه دیگر نیز شامل نقاط $\mathcal{Q} = \{q_۱, q_۲, \cdots, q_n\}$ بوده که تمامی آن‌ها روی خط $y = ۱$ واقع شده اند. به ازای هر $p_i$، به طوری که $۱ \leqslant i \leqslant n$، پاره خطی به اندیس مشابه روی مجموعه $\mathcal{Q}$ وصل می‌کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $\mathcal{O}(n\log n)$ تعیین کند چند جفت از این پاره خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.