# آمار و احتمال مهندسی

**بهار ۱۴۰۴**

استاد: علی شریفی زارچی

**دانشگاه صنعتی شریف**

**دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر**

گردآورندگان: رادین چراغی - امیدرضا معصومی - سوگل زمانیان - روژین تقی‌زادگان

تمرین سوم

## توزیع‌های توام، نامساوی‌ها و قضیه حد مرکزی

مهلت ارسال: ۳ اردیبهشت

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال‌شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۰ نمره) متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی توأم $X$ و $Y$ دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} ۱/۵, & ۰ \leq u < ۱, ۰ \leq v < ۱, ۰ \leq u+v < ۱ \\ ۰/۵, & ۰ \leq u < ۱, ۰ \leq v < ۱, ۱ \leq u+v < ۲ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $Y$ را محاسبه کنید.

(ب) حاصل $P(X+Y \geq \frac{۳}{۲})$ را پیدا کنید.

(ج) مقدار $P(X^۲ + Y^۲ \leq ۱)$ را به دست آورید.

۲. (۱۵ نمره) رادین و آرین قرار است برای ناهار همدیگر را ملاقات کنند. آن‌ها زمانی را برای ملاقات در ظهر تعیین کرده‌اند. هر دو قبل از آن کلاس دارند، بنابراین زودتر از موعد نمی‌رسند. هر دو کلاسی دارند که ساعت ۱ بعدازظهر شروع می‌شود، بنابراین بین ۰ تا ۱ ساعت دیر می‌رسند.

فرض کنید $X$ مدت زمانی (به ساعت) است که آرین دیر می‌رسد و $Y$ مدت زمانی (به ساعت) است که رادین دیر می‌رسد.

همچنین فرض کنید تابع چگالی مشترک این متغیرهای تصادفی به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y) = \frac{۵}{۴} - xy$$

(الف) دو تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای را پیدا کنید.

(ب) آیا $X$ و $Y$ مستقل هستند؟

(ج) $Cov(X,Y)$ و $Cor(X,Y)$ را به دست آورید.

(د) بیان کنید (بدون محاسبه) عبارت احتمالی که آرین و رادین حداکثر با فاصله‌ی ۶ دقیقه از یکدیگر برسند و رادین بعد از آرین برسد. انتگرال شما باید روی ناحیه‌ی $R$ در مربع واحد باشد. می‌توانید انتگرال را به صورت

$$\iint_R h(x,y)\,dx\,dy$$

بیان کنید و ناحیه‌ی $R$ را در یک شکل در صفحه نشان دهید. تابع $h(x,y)$ باید به طور کامل مشخص شود.

۳. (۱۵ نمره) با استفاده از نابرابری‌های احتمالاتی، موارد زیر را نشان دهید.

(الف) فرض کنید $Y$ یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح غیرمنفی و با امید ریاضی مثبت باشد. ثابت کنید:

$$\frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[Y^2]} \leq \Pr[Y \neq 0] \leq \mathbb{E}[Y].$$

(ب) نابرابری چبیشف از واریانس یک متغیر تصادفی استفاده می‌کند تا میزان انحراف آن متغیر از امید ریاضی‌اش را کران‌دار کند. ما می‌توانیم از گشتاورهای بالاتر نیز استفاده کنیم. فرض کنید که متغیر تصادفی $X$ و یک عدد صحیح زوج $k$ داشته باشیم که برای آن $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$ مقدار متناهی داشته باشد. نشان دهید که:

$$\Pr\left[|X-\mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt[k]{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]}\right] \leq \frac{1}{t^k}$$

(ج) توضیح دهید چرا در قسمت ب استخراج یک نابرابری مشابه برای $k$ فرد دشوار است؟

۴. (۱۰ نمره) یک سکه متوازن را $2n+1$ بار می‌اندازیم. تعداد خط‌های $n+1$ پرتاب اول را با متغیر تصادفی $X$ و تعداد خط‌های $n+1$ پرتاب آخر را با متغیر تصادفی $Y$ نشان می‌دهیم.

(الف) کوواریانس و همبستگی دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را محاسبه کنید.

(ب) با افزایش $n$، همبستگی چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید این اتفاق را به صورت شهودی توضیح دهید؟

۵. (۱۰ نمره) فرمول استرلینگ یک تقریب فوق‌العاده دقیق برای فاکتوریل‌ها است:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

که در عبارت بالا هنگامی که $n \to \infty$، نسبت دو طرف به ۱ میل می‌کند. در این سوال می‌خواهیم این فرمول را با استفاده از قضیه حد مرکزی ثابت کنیم.

(الف) فرض کنید $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پواسون مستقل و هم‌توزیع با پارامتر $\lambda = 1$ باشند. اگر $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ باشد، با استفاده از قضیه حد مرکزی برای $n$ بزرگ، تقریبی از $P(S_n = n)$ ارائه دهید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) فرمول استرلینگ را ثابت کنید.

۶. (۱۵ نمره) متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ به صورت i.i.d. از چگالی احتمال $f_X(x)$ (و متعاقباً توزیع انباشته احتمال $F_X(x)$) حاصل شده‌اند.

فرض کنید که از این متغیرهای تصادفی نمونه‌گیری شده و آنان را بر حسب مقدارشان به صورت صعودی مرتب کرده باشیم. مقدار یکی مانده به بزرگترین در این بین برای ما مهم است. توزیع آماری آن را به‌دست آورید.

۷. (۱۵ نمره) یک دانشمند هنگام آزمایش، دو اندازه‌گیری انجام می‌دهد. خروجی این دو اندازه‌گیری را متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ در نظر می‌گیریم. دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ مستقل هستند و به طور یکنواخت در بازه $(۰, ۱)$ توزیع شده‌اند. تعریف می‌کنیم:

$$W = \max(X, Y) \quad Z = \min(X, Y)$$

(الف) تابع چگالی احتمال (PDF) متغیرهای زیر را بیابید.

$$R = W - Z \quad S = W + Z$$

(ب) حال فرض کنید خروجی‌های دو اندازه‌گیری به جای توزیع یکنواخت از تویع نرمال استاندارد پیروی کنند. توجه کنید که این دو اندازه همچنان از یکدیگر مستقل هستند. همبستگی میان عدد بزرگتر و کوچکتر را بدست آورید.

۸. (۱۰ نمره) مسابقه‌ی پرش ارتفاع بین تعدادی بازیکن به ترتیب انجام می‌شود. فرض کنید $X_j$ ارتفاع پرش ورزشکار $j$ام باشد، به طوری که $X_۱, X_۲, \ldots$ مستقل و هم‌توزیع (.i.i.d) با توزیع پیوسته باشند. می‌گوییم ورزشکار $j$ام رکورد ثبت می‌کند اگر $X_j$ از تمام $X_{j-۱}, \ldots, X_۱$ بزرگتر باشد.

(الف) ثابت کنید ثبت شدن رکورد توسط بازیکن $i$ام و ثبت شدن رکورد توسط بازیکن $j$ام برای $i \neq j$ دو پیشامد مستقل هستند.

(ب) واریانس تعداد رکوردهای ثبت شده در بین $n$ ورزشکار اول را (به صورت مجموع) پیدا کنید. وقتی $n \to \infty$ برای واریانس چه اتفاقی رخ خواهد داد؟