«فصل اول، منطق و گزاره ها»

منطق (Logic): یک جبر دو مقداری True, False   T : 1 , F : 0

نمادهای عبارات منطقی: $(+, \vee, \cup)$ و $(., \wedge, \cap)$ و $(0, F, \varnothing)$ و (1، T، مربع M)

گزاره (statement): جمله ای که بتوان به آن ارزش T یا F نسبت داد یا جمله ای که حتما یا T باشد یا حتما F.

مثال گزاره، ① پایتخت ایران، تهران است T ② $1+1=4$ F ③ من استاد خیلی خوبی هستم گزاره نیست

④ 1000 عدد بزرگی است گزاره نیست ⑤ در مریخ دیگر موجودات زنده هستند گزاره نیست و ...

* گزاره ها را معمولا با p، q، r، s، t و ... نمایش می دهند.

* گزاره نما یا تابع گزاره ای که شامل x است را با $P(x)$ یا $q(x)$ و اگر شامل x و y باشد با $P(x,y)$ نمایش می دهند.

$P(x): x+1=4 \Rightarrow P(3): 3+1=4$ T $P(2): 2+1=4$ F

$P(x,y): x<y$

گزاره اتمی یا ساده: جمله خبری که یک فعل دارد و قابل تفکیک نیست.

گزاره مرکب: جمله خبری که چند فعل دارد

عملگرها یا رابط های گزاره ای (connectives):

① نقیض (نفی) NoT ، ~ ، ¬ ، ‾ ، ′ $P: \sim P, \text{NoT } P, \neg P, \overline{P}, P'$

② عطف (conjuction) یا AND ، $\wedge$ ، $\cap$ ، . ، "و"

P	¬P
T	F
F	T

P	q	P∧q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

امروز هوا آفتابی است: P
امروز هوا بارانی است: q

$P \wedge q$: امروز هوا آفتابی و بارانی است

③ فصل (disjunction) یا V ، U ، + ، "یا" <= $P \vee q$: امروز هوا آفتابی است یا بارانی است یا هردو.

④ XoR (exclusive or) یا OR انحصاری، OR مانع الجمع، Δ ، $\bar{\vee}$ ، $\underline{\vee}$ ، $\oplus$

$P \oplus q$: امروز هوا آفتابی است یا بارانی است ولی نه هر دو.

⑤ ترکیب شرطی (implication) یا conditional . نمادش: $\Rightarrow$ یا $\longrightarrow$

* اگر P آنگاه q   لازم / حکم / تالی <—— مقدم / فرض / کافی

- اگر امروز آفتابی باشد آنگاه امروز باران می بارد

P: من رییس جمهور می شوم ، q: هر ایرانی 50 تومان دریافت می کند

<= اگر من رییس جمهور شوم آنگاه هر ایرانی 50 تومان دریافت می کند.

* $q \rightarrow P$ برعکس $P \rightarrow q$ (converse)

* $\sim q \rightarrow \sim P$ عکس نقیض $P \rightarrow q$ (contraPositive)

* $\sim P \rightarrow \sim q$ معکوس $P \rightarrow q$ (inverse)

* $P \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim P$

⑥ ترکیب دوشرطی - نمایش: $\longleftrightarrow$ ، P اگر و فقط اگر q ، P لازم و کافی است برای q ، P iff q

شرکت پذیر است. ⊛ $P \leftrightarrow q \equiv \sim(P \oplus q)$ ⊛ $P \leftrightarrow q \equiv (P \to q) \wedge (q \to P)$

* اولویت عملگرها: $\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\to$ ، $\longleftrightarrow$

⑦ عملگر NAND $\uparrow$ $P \uparrow q \equiv \sim(P \wedge q)$

⑧ عملگر NOR $\downarrow$ $P \downarrow q \equiv \sim(P \vee q)$

تعریف هم ارزی: $A \overset{\Leftrightarrow}{\equiv} B$ ، $P \to q \equiv \bar{P} \vee q \equiv \bar{q} \to \bar{P}$

تاتولوژی: به گزاره‌ی همیشه درست می‌گویند. $P \vee \bar{P} \equiv T$

تناقض: به گزاره‌ی همیشه غلط می‌گویند. $P \wedge \bar{P} \equiv F$

سازگاری: گزاره های اتمی P و q سازگارند چون $P \wedge q$ همیشه F نیست

دوگانگی: TF ، FT ، $\wedge\vee$ ، $\vee\wedge$

$A = P \vee q \quad A^d = A^* = P \wedge q$ ، $B = P \vee F \quad B^* = P \wedge T$ ، $C = P \to q \quad C^* = \bar{P} \wedge q$

$D = P \oplus q \equiv (\bar{P} \wedge q) \vee (P \wedge \bar{q}) \equiv (P \vee q) \wedge (\bar{P} \vee \bar{q})$

$\rightarrow D^* = (\bar{P} \vee q) \wedge (P \vee \bar{q}) \equiv P \longleftrightarrow q$

$P \oplus q$ هم نقیض اش و هم دوگان اش میشه $P \longleftrightarrow q$

self dual: تابع A را خود دوگان گویند هرگاه با دوگان اش هم ارز باشد. $A \equiv A^*$

تمرین) ثابت کنید تابع زیر خود دوگان است.

$A = (P \wedge q) \vee (P \wedge r) \vee (q \wedge r) = P.q + P.r + q.r$

اصل duality: $A \equiv B \longleftrightarrow A^* \equiv B^*$ $\quad P \wedge F \equiv F \longleftrightarrow P \vee T \equiv T$

خواص جبر گزاره ها:

① عضوهای (خنثی) identity: $P \vee F \equiv P$ ، $P \wedge T \equiv P$

② عضو غلبه domination: $P \wedge F \equiv F$ ، $P \vee T \equiv T$

③ خودتوانی Idempotency: $P \wedge P \equiv P$ ، $P \vee P \equiv P$

④ جابجایی (تعویض پذیری) commutative: $P \vee q \equiv q \vee P$ ، $P \wedge q \equiv q \wedge P$

⑤ شرکت پذیری (انجمنی) associative: $P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r \equiv P \vee q \vee r$

$P \wedge (q \wedge r) \equiv (P \wedge q) \wedge r = P \wedge q \wedge r$

⑥ توزیع پذیری (پخشی) distributive: $P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$

$P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r)$

⑦ جذب absorbe: $P \wedge (q \vee P) \equiv P$ ، $P \vee (P \wedge q) \equiv P$

⑧ نسبجه (کاهش پذیری): $P \wedge (\bar{P} \vee q) \equiv P \wedge q$ ، $P \vee (\bar{P} \wedge q) \equiv P \vee q$

⑨ مکمل پذیری complementary: $P \wedge \bar{P} \equiv F$ ، $P \vee \bar{P} \equiv T$

⑩ دمورگان: $\overline{(P \vee q)} \equiv \bar{P} \wedge \bar{q}$ ، $\overline{(P \wedge q)} \equiv \bar{P} \vee \bar{q}$

* $P \mapsto q$ یعنی P تنها علت q است یعنی $q \to P$ (عملیت عکس ترکیب شرطی ست)

Subject : Year: Month: Date:

$$A = (P \wedge q) \vee (\overline{P} \wedge r) \Longrightarrow \sim A = (\overline{P} \vee \overline{q}) \wedge (P \vee \overline{r})$$

سوال) آیا ترکیب شرطی شرکت پذیر است؟ خیر

$$\underbrace{P \to (q \to r)}_{T} \not\equiv \underbrace{\underbrace{(P \to q)}_{T} \to r}_{F}$$
(P = 0, q = 0, r = 0)

سوال) آیا NAND شرکت پذیر است؟ خیر

$$\underbrace{P \uparrow (q \uparrow r)}_{1} \not\equiv \underbrace{\underbrace{(P \uparrow q)}_{1} \uparrow r}_{0}$$
(P = 0, q = 0, r = 1)

* عملیات $\vee \; \wedge \; \oplus \; \longleftrightarrow$ شرکت پذیر هستند.

* عملیات $\to \; \uparrow \; \downarrow$ شرکت پذیر نیستند.

سوال: آیا عمل $\wedge$ روی $\oplus$ توزیع پذیر است؟ بله

$$P \wedge (q \oplus r) \equiv (P \wedge q) \oplus (P \wedge r)$$

سوال: آیا عمل $\wedge$ روی $\longleftrightarrow$ توزیع پذیر است؟ خیر

$$\underbrace{\overset{1}{P} \wedge (q \longleftrightarrow r)}_{q \leftrightarrow r} \equiv \underbrace{\overset{1}{P} q \longleftrightarrow \overset{1}{P} r}_{q \leftrightarrow r}$$

$$\underbrace{\overset{0}{P} \wedge (q \longleftrightarrow r)}_{0} \not\equiv \underbrace{\underbrace{Pq}_{0} \longleftrightarrow \underbrace{Pr}_{0}}_{1}$$

سوال) آیا عمل $\wedge$ حذف پذیر است؟ خیر

$$P \wedge q = P \wedge r \Longrightarrow q = r$$

$$\underbrace{\overset{0}{P} \wedge \overset{0}{q}}_{0} = \underbrace{\overset{0}{P} \wedge \overset{1}{r}}_{0} \Longrightarrow \overset{0}{q} = \overset{1}{r} \; \times$$

سوال) آیا عمل $\vee$ حذف پذیر است؟ خیر

$$P \vee q = P \vee r \Longrightarrow q = r$$

$$\underbrace{\overset{1}{P} + \overset{0}{q}}_{1} = \underbrace{\overset{1}{P} + \overset{1}{r}}_{1} \Longrightarrow \overset{0}{q} = \overset{1}{r} \; \times$$

نکته)
$$\left.\begin{array}{l} P \wedge q = P \wedge r \\ P \vee q = P \vee r \end{array}\right\} \Longrightarrow q = r$$

مثال) ثابت کنید
$$P \to (q \to r) \equiv (P \wedge q) \to r \equiv q \to (P \to r)$$

روش جبری: $A = \overline{P} \vee (\overline{q} \vee r) \equiv (\overline{P} \vee \overline{q}) \vee r \equiv (\overline{P \wedge q}) \vee r \equiv (P \wedge q) \to r$

(۱) ارضاپذیری ـ SAT « یک گزاره مرکب به ما داده شده و می خواهیم بررسی کنیم آیا حالتی وجود دارد که این عبارت T شود. اگر چنین حالتی وجود داشت گوییم آن عبارت ارضاپذیر است و اگر چنین حالتی وجود نداشت یعنی اگر عبارت به ازای همه حالات متغیرهایش F شد گوییم ارضاناپذیر است.

$\underline{P \wedge \overline{q}}$ ارضاپذیر است — $\underline{P \vee \sim P}$ تاتولوژی

* عبارت A ارضاناپذیر است اگر و فقط اگر $\sim A$ تاتولوژی باشد.

فرم های نرمال:

لیترال: به یک متغیر یا نقیض آن گویند. P , $\overline{P}$, q , $\overline{q}$

جمله ضرب: به یک جمله ای که یا از لیترال ساخته شده یا AND تعدادی لیترال. $P, \overline{P}, P.q, P.\overline{q}.r, \ldots$

جمله جمع: به یک لیترال یا جمع تعدادی لیترال $P, \overline{P}, P+q, P+q+\overline{r}$

مینترم: جمله ضربی که شامل همه لیترال ها است. یعنی اگر ما سه تا گزاره اتمی P و q و r داریم، با این ها ۸ تا مینترم ساخت:

$\overline{P}\overline{q}\overline{r}, \overline{P}\overline{q}r, \overline{P}q\overline{r}, \overline{P}qr, P\overline{q}\overline{r}, P\overline{q}r, Pq\overline{r}, Pqr$

ماکسترم: جمله جمعی که شامل همه ی لیترال ها است.

$P+q+r, P+q+\overline{r}, P+\overline{q}+r, P+\overline{q}+\overline{r}$
$\overline{P}+q+r, \overline{P}+q+\overline{r}, \overline{P}+\overline{q}+r, \overline{P}+\overline{q}+\overline{r}$

$\circledast (p \leftrightarrow q) = p \odot q$ $\circledast\ \overline{(p \leftrightarrow q)} \equiv p \oplus q = \underbrace{p\bar{q} + \bar{p}q}_{DNF} = \underbrace{(p+q)(\bar{p}+\bar{q})}_{CNF}$

فرم های نرمال فصلی (Disjunctive Normal form _ DNF یا sum of Product _ SoP)

جمع تعدادی جمله ی ضرب. به عنوان مثال با گزاره ی p و q و r:

$pq + p\bar{r}$ و p و $\bar{p}$ و $p\bar{q}$ و $p+q$ و $p+q\bar{r}$

فرم های نرمال عطفی (Conjuctive Normal form _ CNF یا Product of sum _ PoS)

ضرب تعدادی جمله ی جمع $(p+q)(r+\bar{q})$ و $p+q$ و $p.\bar{q}$ و $p.(\bar{q}+r)$

PDNF _ Principle DNF: یعنی DNF اساسی. یعنی DNF (یعنی جمع تعدادی جمله ضرب) که هر جمله ضرب آن یک مینترم باشد. $pq\bar{r} + \bar{p}q\bar{r}$

PCNF _ Principle CNF: یعنی CNF (یعنی ضرب تعدادی جمله جمع) که هر جمله جمع آن یک ماکسترم باشد. $(p+\bar{q}+r)(\bar{p}+\bar{q}+\bar{r})$

مثال) $f(p,q,r) = (p \leftrightarrow q) \wedge (p \to r)$ تابع f را به فرم PDNF و PCNF بنویسید.

$f = (p \to q)(q \to p)(p \to r) = (\bar{p}+q)(\bar{q}+p)(\bar{p}+r)$ CNF

$= (\bar{p}+q+r)(\bar{p}+q+\bar{r})(p+\bar{q}+r)(p+\bar{q}+\bar{r})(\bar{p}+q+r)(\bar{p}+\bar{q}+r)$

$= M_4 . M_5 . M_2 . M_3 . M_6 = \prod(2,3,4,5,6) = m_0 + m_1 + m_7 = \sum m(0,1,7)$

* عبارتی که فقط ضرب داره یا عبارتی که فقط جمع داره هم CNF است هم DNF.

سورها، Quantifier $P(x)$: «x از 10 بزرگتر است»

نامل x ← محمول (دستور)

* سور عمومی universal Quantifier $\forall$

همه ـ به ازای هر ـ همیشه ـ همه مقادیر $\forall x P(x)$ $\forall x : P(x)$ $\forall x (P(x))$

به ازای همه مقادیر از عالم سخن، $P(x)$ درست است.

نکته) x از 10 بزرگتر است: $\forall x$ <= اگر عالم سخن اعداد Z باشد این جمله F است

اگر عالم سخن اعداد $A = \{11, 12, \ldots\}$ باشد این جمله T است.

* سور وجودی Existential $\exists$

بعضی مقادیر ـ حداقل یک مقدار ـ وجود دارد ـ برخی

به ازای حداقل یک x از عالم سخن $P(x)$ درست است. $\exists x P(x)$

نکته) x اول است و زوج: $\exists x$ <= عالم سخن $= \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ T

* سور صفر $\nexists$ هیچ. به ازای هیچ x ای $P(x)$ درست نیست. $\nexists x P(x)$

$P(x)$ در همه عضوهای عالم سخن غلط است. $\nexists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

* سور عمومی در واقع معادل با ترکیب عطفی تعدادی گزاره است.   عالم سخن $= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$

$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots$

* سور وجودی در واقع معادل با ترکیب فصلی تعدادی گزاره است.

$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots$

* سورها اگر یکسان نباشند جابجایی ندارند.

$\forall x \exists y\, P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\, P(x,y)$

$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$

نقیض سورها:

$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$

$A=\{a,b\}$ $\quad \neg(P(a)\wedge P(b)) \equiv \neg P(a) \vee \neg P(b)$

$\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x) \equiv \nexists x\, P(x)$

$\neg(\forall x \exists y: x+y > 2 \longrightarrow x>1) \equiv \exists x \forall y: x+y>2 \wedge x\leq 1$

$\neg(\nexists x: P(x)) \equiv \neg(\forall x: \neg P(x)) \equiv \exists x: P(x)$

«توزیع پذیری سورها روی عملگرها»

$\forall x(\overbrace{P(x)\vee q(x)}^{B}) \not\equiv \forall x\, P(x) \vee \forall x\, q(x)$

$A=\{a,b\}$ $\quad B=(\underbrace{P(a)}_{w}\vee \underbrace{q(a)}_{x})\wedge(\underbrace{P(b)}_{y}\vee\underbrace{q(b)}_{z})$

$C=(\underbrace{P(a)}_{w}\wedge\underbrace{P(b)}_{y})\vee(\underbrace{q(a)}_{x}\wedge\underbrace{q(b)}_{z})$

$\Rightarrow B=(W+x)\cdot(y+z)$ (PoS) $\qquad C = Wy + xZ$ (SoP)

$=\Pi(0,1,2,3,4,8,12) \qquad =\Sigma(10,11,14,15,5,7,13)$

$=\Sigma(5,6,7,9,10,11,13,14,15) \not\equiv \Sigma(5,7,10,11,13,14)$

$\forall x(P(x)\wedge q(x)) \equiv \forall x\, P(x)\wedge\forall x\, q(x)$ ✓

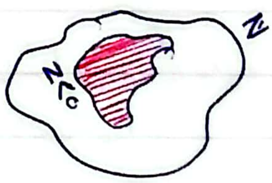
T

سور با دامنه محدود و تبدیل آن به سور کلی

$\forall x<0: x^2>0$ $\qquad$ عالم سخن = $\mathbb{Z}$

T

$\equiv \forall x: x<0 \longrightarrow x^2>0$



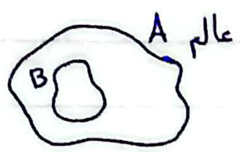
$\forall x<0: x^2>0 \equiv \forall x: x<0 \wedge x^2>0$

$\forall x\in B: P(x)$

$\equiv \forall x: x\in B \longrightarrow P(x)$

$\exists x\in B: P(x) \equiv \exists x: x\in B \wedge P(x)$

نکته:



Subject :   Year: Month: Date:

مثال) جملات فارسی زیر را با سور بیان کنید.

الف) همه دانشجویانی که این ویدیو را تماشا می‌کنند در مقطع ارشد پذیرفته می‌شوند

ب) برخی // // // // // // // // // // // .

$P(x)$: دانشجویانی که این ویدیو را می‌بینند.

$q(x)$: در مقطع ارشد پذیرفته می‌شود.

جواب الف: اگر عالم سخن فقط دانشجویانی باشد که این ویدیو را تماشا کنند. $\forall x\, q(x)$

ولی فرض کنیم عالم سخن همه انسان‌هاى کره زمین هستند. $\forall x : P(x) \rightarrow q(x)$

جواب ب) $\exists x : P(x) \wedge q(x)$

استنتاج (inference) گوییم $A \Rightarrow B$ استلزام منطقی است اگر همیشه درست باشد یعنی تاتولوژی باشد.

$P \wedge q \rightarrow P$ ✓ $P \wedge q \rightarrow q$ ✓ $\underbrace{\underset{T}{P \vee q} \rightarrow \underset{F}{P}}_{F}$ ← $P:F,\ q:T$

- نحوه بررسی یک استلزام مثل $A \Rightarrow B$

روش 1: با جدول درستی یا جبر ثابت کن که $A \rightarrow B$ تاتولوژی است

روش 2: فرض کن $A:T$، ثابت کن $B:T$

روش 3: فرض کن $B:F$، ثابت کن $A:F$

* $A \Rightarrow B$ در چه صورتی معتبر نیست؟ حالتی یافت شود که $A \rightarrow B$، F شود. یعنی $A:T$, $B:F$ شود؟

* هیچ حالتی یافت نشد که $T \rightarrow F$ بدست بیاریم. $(\underset{T}{P} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \underset{F}{r}) \Rightarrow (\underset{T}{P} \rightarrow \underset{F}{r})$

تعدادی فرض داریم مثل P_1 و P_2 و ... و P_n و می‌خواهیم درستی حکم q را نتیجه بگیریم. به عبارتی می‌خواهیم نشان دهیم $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow q$ تاتولوژی است. $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash q$

* $\dfrac{P \rightarrow q \quad P}{\therefore q}$ modus ponens — تفکیک، وضع مقدم، انتزاع

* $\dfrac{P \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg P \quad \neg q}{\therefore \neg P}$ modus tollense — نقیض انتزاع

* $\dfrac{P \vee q \equiv \neg P \rightarrow q \quad \neg P}{\therefore q}$ قیاس فصلی — disjunctive syllogism

* $\dfrac{P \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore P \rightarrow r}$ قیاس سور / فرضی — hypothetical syllogism

* $\dfrac{P \wedge q}{\therefore P,\ q}$ ساده‌سازی عطفی

* $\dfrac{P}{\therefore P \vee q}$ اضافه کردن، ادخال فاصل — Addition

* $\dfrac{P \quad q}{\therefore P \wedge q}$ عطف کردن — resolution

توضیح	اسم قانون	قانون استنتاج
$P(x)$ به ازای هر x درست است پس $P(c)$ درست است.	نمونه‌گیری سور عمومی	① $\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$
$P(c)$ درست است و c نماینده‌ی تمام عضوها دامنه است پس به ازای هر x عبارت $P(x)$ درست است.	تعمیم دادن سور عمومی	② $\dfrac{P(c)\ (\text{برای } c \text{ دلخواه})}{\therefore \forall x P(x)}$
به ازای برخی x ها از دامنه $P(x)$ درست است پس عضوی مثل c در دامنه هست که $P(c)$ درست باشد.	نمونه‌گیری سور وجودی	③ $\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)\ (\text{برای عضوی مثل } c)}$
$P(c)$ درست است که c عضوی مشخص در دامنه است پس وجود دارد x که $P(x)$ درست باشد.	تعمیم دادن سور وجودی	④ $\dfrac{P(c)\ (\text{برای عضوی مثل } c)}{\therefore \exists x P(x)}$
	انتزاع یا تفکیک سور عمومی	⑤ $\dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x)) \quad (a \text{ عنصر خاصی از دامنه است}) \quad P(a)}{\therefore q(a)}$

تابع ارزش Value:

$V: \text{گزاره} \to \{0, 1\}$

$$V(P) = \begin{cases} 0 & \text{if } P = F \\ 1 & \text{if } P = T \end{cases}$$

* $V(P \wedge q) = V(P) \times V(q)$
* $V(P \vee q) = V(P) + V(q) - V(P) \times V(q)$
* $V(\bar{P}) = 1 - V(P)$

تست) $V(P \to q) = 1$ کدام گزینه درست و بهترین گزینه است؟

1) $V(P) < V(q)$ 2) $V(P) \geq V(q)$

3) $V(P) \neq V(q)$ 4) $V(P) \leq V(q)$ ✓

نکته مهم) $P \mapsto q$ یعنی P تناعلت q است. یعنی $q \to P$.

روش‌های اثبات: ما به دنبال اثبات درستی $p \to q$ هستیم. روش اثبات یعنی یک بحث معتبر که درستی یک گزاره را نشان می‌دهد. وقتی یک گزاره‌ای درستی‌اش اثبات شد می‌توان بهش گفت قضیه theorem.

در اثبات قضایا ما از اصول که درستی آن‌ها پذیرفته شده است استفاده می‌کنیم. (Postulates, axioms)

قضایای با اهمیت کمتر را می‌گوییم لم Lemma. نتایج گرفته شده از یک قضیه را می‌گن corollary.

یک حدس (conjecture) گزاره‌ای‌ست که درستی آن هنوز اثبات نشده است. حدسی که اثبات شده می‌گیم قضیه.

*** روش مستقیم:** می‌خواهم $p \to q$ را اثبات کنم، کافی است از درستی p به درستی q برسم.

مثال) ثابت کنید اگر n فرد است n^2 نیز فرد است؟ حکم: $n^2=2k'+1$ فرض: $n=2k+1$

حل: $n=2k+1 \longrightarrow n^2=4k^2+4k+1=2\underbrace{(\quad)}_{k'}+1$

*** برهان خلف:** می‌خواهم $p \to q$ را ثابت کنم در عوض $\neg q \to \neg p$ را اثبات می‌کنم.

مثال) ثابت کنید اگر $3n+2$ فرد است آن‌گاه n فرد است.

حل: فرض می‌کنم n زوج است و ثابت می‌کنم $3n+2$ زوج است:

$n=2k \longrightarrow 3n+2=3(2k)+2=2\underbrace{(\quad)}_{k}=2k'$

*** اثبات تهی:** در اثبات $p \to q$ اگر p نادرست باشد q هرچه باشد $p \to q$ درست است.

مثال) فرض کنید $P(n)$: اگر $n>1$ آن‌گاه $n^2>n$، آیا $P(0)$ درست است؟

حل: $P(0)$: اگر $\underbrace{0>1}_{\text{غلط}}$ آن‌گاه $0^2>1$ طبق اثبات تهی درست است.

*** اثبات بدیهی:** اگر q درست باشد p هرچه باشد $p \to q$ درست است.

*** اثبات با تناقض:** می‌خواهیم ثابت کنیم P درست است برای این منظور فرض می‌کنیم P غلط است و به یک تناقض می‌رسیم و در نتیجه P درست است.

مثال) نشان دهید از هر 22 روز دلخواه حداقل 4 روز تا یک روز یکسان در هفته است.

حل: $\neg P$: از هر 22 روز دلخواه حداکثر 3 روز تا یک روز یکسان در هفته است.

مثال) نشان دهید $\sqrt{2}$ گنگ است.

حل: عدد گویا $\frac{p}{q}$ که p و q نسبت به هم اول هستند و $p,q \in \mathbb{Z}$ و $q \neq 0$. فرض می‌کنم $\sqrt{2}$ گویاست و به تناقض می‌رسم. چون $\sqrt{2}$ گویاست پس $\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Rightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p=2k$.

$\Rightarrow (2k)^2=2q^2 \Rightarrow 2k^2=q^2 \Rightarrow q=2k$ ✗

اثبات با حالات: $(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n) \to q \equiv (P_1 \to q) \wedge (P_2 \to q) \wedge \dots \wedge (P_n \to q)$

مثال) اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید $n^2 \geq n$.

حل: ۳ حالت برای n در نظر می‌گیریم: $n=0$ یا $n \geq 1$ یا $n \leq -1$

$n=0 \to 0^2 \geq 0$ ✓

$\times n \to n^2 \geq n$

مثال) نشان دهید رقم یکان هر عدد مربع کامل 1 یا 4 یا 9 یا 5 یا 6 یا 0 است. یعنی عدد مربع کامل یکان اش نمی‌تونه 2، 3، 7 و 8 باشه.

$(257)^2 \to$ یکان $= 9$

یکان هر عدد مثل n می‌تونه 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 باشه.

اثبات وجودی: گاهی من می‌خواهم $\exists x P(x)$ را اثبات کنم. یعنی می‌خوام نشون بدم حداقل یک x با خاصیت P وجود دارد که برای این منظور اگه بتونم یک x پیدا کنم (اثبات سازنده) وگرنه به طریقی نشون می‌دم که حداقل یک x با خاصیت P وجود دارد (اثبات غیرسازنده).

مثال) نشان دهید عدد صحیح مثبتی وجود دارد که به دو شکل مختلف می‌توان به صورت جمع مکعبات دو عدد نوشته شود.

حل: $n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3 \qquad 1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$

مثال) نشان دهید دو عدد گنگ x و y وجود دارد که x^y گویا است.

حل: می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است حال $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ را نمی‌دانیم که گنگ است یا نیست. اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد که اثبات تمام است ولی اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد: $\sqrt{2} =$ گنگ $\qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} =$ گنگ

$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \to$ گویا

اثبات هم‌ارزی:

$P \leftrightarrow q \equiv (P \to q) \wedge (q \to P)$

$P \leftrightarrow q \leftrightarrow r \equiv (P \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to P)$

«مجموعه‌ها، تابع، کاردینالیتی»

مجموعه set: شامل هیچ یا تعدادی اشیا نامرتب است. $A = \{1,2,3,4,5\}$

سازنده مجموعه (set buider) $A = \{x \mid x \in Z , 1 \leq x \leq 5\}$

$B = \{1,2,3,4,\dots,100\}$

$C = \{2, Ali, Tehran\} \quad 2 \in C \quad 3 \notin C$

مجموعه‌ها متناهی (محدود) و نامتناهی (نامحدود):

کاردینالیتی $A = n_A = n(A) = |A| =$ تعداد اعضای A

مجموعه متناهی مجموعه‌ای که کاردینالیتی آن یک عدد صحیح نامنفی باشد و اگر تعداد عضوهایش بی‌نهایت باشد به آن مجموعه نامتناهی گویند. $D = \{x \mid x \in R , 1 \leq x \leq 2\}$ نامتناهی

* تعداد حالاتی که در یک عبارت ریاضی می‌شه پرانتزگذاری کرد، 2 به توان تعداد عملگرهاست. (اگر اولویت عملگرها رو لحاظ کنیم)

Subject: Year: Month: Date:

مجموعه کراندار و بی‌کران:

$E = \{x \mid x \in R , x > 1\}$

$F = \{x \mid x \in Q , \sqrt{2} \leq x \leq 4\}$

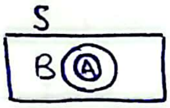
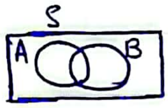
سوپریموم (کوچکترین کران بالا): 4

اینفیموم (بزرگترین کران پایین): ندارد.

* (Natural) $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ * (Zahlen) $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$
* اعداد صحیح مثبت $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$ * اعداد صحیح نامنفی $\mathbb{Z}^{\geq 0} = \mathbb{N}$
* (Quotient) گویا $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z} , q \neq 0\}$
* (Real) اعداد حقیقی $\mathbb{R} = Q \cup Q^c$ * (Complex) $C = \{a+bi \mid a,b \in R , i = \sqrt{-1}\}$

بازه‌های حقیقی: * $[a,b] = \{x \mid x \in R , a \leq x \leq b\}$, * $[a,b) = \{x \mid x \in R , a \leq x < b\}$

مجموعه تهی Null: مجموعه فاقد عضو $\{\}$ $\varnothing$ (تکه) $\{\varnothing\} \neq \varnothing$ مجموعه مرجع: U , M , S

نمودار ون:  زیرمجموعه: $A \subseteq B$ $\forall x \in A \rightarrow x \in B$ 

زیرمجموعه محض (سره): $A \subset B$ $(\forall x \in A \rightarrow x \in B) \wedge A \neq B$ $A = \{1,2,3\}$

$P(A) = 2^A = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

* یک مجموعه n عضوی 2^n تا زیرمجموعه دارد و $2^n - 1$ زیرمجموعه محض دارد.

دو مجموعه مساوی: $A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

مجموعه توانی (Powerset): مجموعه توانی A مجموعه همه‌ی زیرمجموعه‌های A است.

عملیات روی مجموعه‌ها:

1. اجتماع: $A \cup B$ $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. اشتراک: $A \cap B$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. تفاضل: $A - B$ $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. مکمل: $S - A$ ، A^c ، $\bar{A}$ $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$
5. تفاضل متقارن: Δ $\oplus$ $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
6. duality: $A \cup \varnothing = A \Longleftrightarrow A \cap S = A$

هشدار: اصل duality برای تساوی‌های خاص درست نیست بلکه فقط برای تساوی‌هایی که در حالت کلی برقرار هستند درست است.

«ضرب دکارتی» $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A , y \in B\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

$B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

* $A \times B \times C = \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$

* $A \times B \neq B \times A$ * $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$ * $A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} A = \varnothing \\ B = \varnothing \\ A = B \end{cases}$

* $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \neq A \times B \times C$

مثال) فرض کن $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ و $B=\{7,8,\dots,15\}$. مطلوبست : $|A|=10, |B|=9, |A \cap B|=4$

$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2 = 16$

$|\underbrace{(A \times B)}_{90\text{ زوج}} \cup \underbrace{(B \times A)}_{90\text{ زوج}}| = 90 + 90 - 16$

$|A^2 \cap B^2| = |A \cap B|^2 = 16$

$|\underbrace{A^2}_{A \times A} \cap A \times B| = 40 \longrightarrow |A \times (A \cap B)| = |A||A \cap B| = (10)(4)$

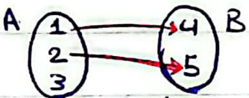
$|A^2 - A \times B| = 60 \longrightarrow |A \times (A - B)| = |A||A - B| = (10)(6)$

* ضرب دکارتی روی Δ $\cap$ $\cup$ ـ توزیع پذیر است.

تابع function : تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می دهد.

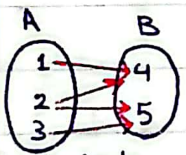
$A = \{1,2,3\}$

$B = \{4,5\}$



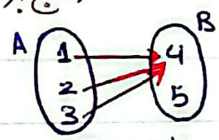
تابع نیست
(تابع جزئی)

$\begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}$



تابع نیست

$\begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}$



تابع هست

$\begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}$

$f: A \longrightarrow B$

$y = f(x)$

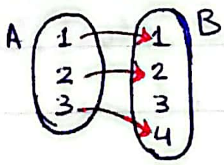
* تابع یک به یک one to one (Injection) : به هر عضو از B حداکثر یک فلش بیاید.

تابع $f: A \longrightarrow B$ را یک به یک گویند هرگاه:

$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

$\forall \quad x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$



* تابع پوشا (surjective یا onto) : تابع $f: A \to B$ پوشا است اگر به هر عضو از B حداقل یک فلش وارد شود.

$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

* تابعی که هم یک به یک و هم پوشا است گویند تابع دوسویه (bijection) یا تناظر یک به یک.

* $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$
* $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$

} اگر f یک به یک $\rightarrow$ $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$

* $|A|\leq|B| \longrightarrow$ می‌شه تابع یک به یک ساخت
* $|A|\geq|B| \longrightarrow$ می‌شه تابع پوشا ساخت
* $|A|=|B| \longrightarrow$ می‌شه تابع دوسویه ساخت

} $f:A\rightarrow b$

$f:A\rightarrow b \quad f=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in b\}$ $\xrightarrow{\text{معکوس تابع}}$ $f^{-1}:B\rightarrow A \quad f^{-1}=\{(y,x)\mid y\in B,\ x\in A\}$

* معکوس یک تابع در صورتی همان تابع است که آن تابع دوسویه باشد.

* توابع یکنوا و اکیدا یکنوا:

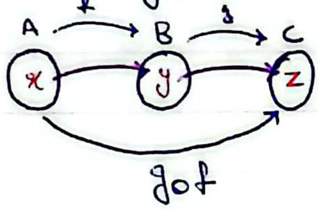
$\forall\ a<b \longrightarrow f(a)\leq f(b)$ صعودی

$a<b \rightarrow f(a)<f(b)$ اکیدا صعودی

$a<b \rightarrow f(a)\geq f(b)$ نزولی

$a<b \rightarrow f(a)>f(b)$ اکیدا نزولی

ترکیب توابع: فرض کن $f:A\rightarrow b$ و $g:b\rightarrow C$ تابع. $g\circ f: A\rightarrow C$.



$(x,y)\in f,\ (y,z)\in g \Rightarrow (x,z)\in g\circ f$

* اگر $g\circ f$ یک به یک باشد f حتما یک به یک است.
* اگر $g\circ f$ پوشا باشد g حتما پوشا است.

$f,g:A\rightarrow A \qquad A=\{1,2,3,4\}$

$f=\{(1,2)(2,3)(3,2)(4,1)\}$

$g=\{(1,4)(2,3)(3,1)(4,2)\}$

$g\circ f=\{(1,3)(2,1)(3,3)(4,4)\}$

$f\circ g=\{(1,1)(2,2)(3,2)(4,3)\}$

$f\circ f=\{(1,3)(2,2)(3,3)(4,2)\}$

$g\circ g=\{(1,2)(2,1)(3,4)(4,3)\}$

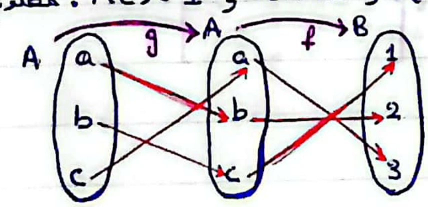
$f,g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$

$f(x)=x^2+1 \qquad g(x)=x-1$

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x-1)=(x-1)^2+1$

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=x^2+1-1=x^2$

مثال: اگر $B=\{1,2,3\}$ و $A=\{a,b,c\}$. g روی A تعریف شده و f از A به B تعریف شده طوری که $g(a)=b$ ، $g(b)=c$ ، $g(c)=a$ ، $f(a)=3$ ، $f(b)=2$ ، $f(c)=1$. مطلوبست ترکیب f و g.



$f\circ g=\{(a,2)(b,1)(c,3)\}$

$g\circ f$ ✗

* $f(C)$ = عضوهایی که اعضای C با اون‌ها رابطه داره
* $f^{-1}(C)$ عضوهایی که با اعضای C رابطه دارن

* $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$
* $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

مجموعه‌ی شمارا (شمارش‌پذیر یا Countable): مجموعه A را شمارا گویند اگر یا متناهی باشد یا اگر نامتناهی است بتوان اعضای آن را در یک دنباله لیست کرد.

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ $\quad Z^+=\{1,2,3,4,\dots\}$

مجموعه A شمارای نامتناهی است اگر از A به Z^+ یا از Z^+ به A بتوان تابع یک به یک و پوشا پیدا کرد.

مثال) نشان دهید Z شمارای نامتناهی است.

حل: روش اول: مجموعه Z را می‌توان به این صورت لیست کرد: $0,1,-1,+2,-2,+3,-3,\dots$

روش دوم: سعی می‌کنیم از Z به Z^+ تابع دوسویه پیدا کنیم.

$Z: 0,+1,-1,+2,-2,+3,-3,\dots$

$Z^+: 1,2,3,4,5,6,7,\dots$

$f: Z \longrightarrow Z^+ \qquad f(n)=\begin{cases}2n & n>0\\ 1-2n & n\leqslant 0\end{cases}$ هم یک به یک و هم پوشا

مثال) آیا مجموعه اعداد گویای مثبت شمارای نامتناهی است؟

حل: بله. $Q^+=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in Z,\ q\neq 0,\ \frac{p}{q}>0\}$

من به طریق اعداد Q^+ را در یک لیست می‌نویسم. اعداد گویای $\frac{p}{q}$ را به این صورت لیست می‌کنم که ابتدا اعدادی را می‌نویسم که $p+q=2$، سپس اعدادی که $p+q=3$، سپس اعدادی که $p+q=4$ و ... در ضمن اگر اعداد تکراری دیدم حذفشان می‌کنم.

$$\begin{array}{ccccc}\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{array}$$

$1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,\dots$

نکته) اجتماع دو مجموعه شمارای A و B حتماً شمارا است.

نکته) اجتماع تعداد شمارا مجموعه‌ها شمارا حتماً شمارا است.

$A_1, A_2, A_3, \dots$

A_i ها همگی شمارا هستند حتی اگر نامتناهی باشند و تعداد A_i هم شمارا باشد حتی نامتناهی، این $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots$ شمارا است.

نتیجه) Z، Z^+، $\mathbb{N}$، Q^+، Q شمارای نامتناهی هستند.

مثال) نشان دهید مجموعه اعداد حقیقی بازه‌ی $(0,1)$ ناشمارا است.

حل: فرض می‌کنیم این طور است و این مجموعه شمارا است، پس می‌شود اعضای آن را لیست کرد. اعضای این مجموعه به حالت $\%XXXXXX$ هستند.

$Z_1=\%a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\dots$
$Z_2=\%a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\dots$
$Z_3=\%a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\dots$

$Z=\%x_1\ x_2\ x_3\ x_4\dots=\%52\dots$

$Z_1=\%23402791\dots$
$Z_2=\%15624539\dots$
$Z_3=\%51704901\dots$
$Z_4=\%0014527\dots$

$Z=\%5255\dots$

* اگر مجموعه A دارای n عضو باشد 2^n تا زیرمجموعه دارد پس مجموعه توانی A دارای 2^n عضو است پس مجموعه توانی A دارای $(2)^{2^n}$ زیرمجموعه است.

Subject : Year: Month: Date:

* مجموعه‌های شمارای نامتناهی بیشمار عضو دارند. } ولی این دو بیشمار یکی نیستند.
* مجموعه‌های ناشمارا نیز بیشمار عضو دارند.

* مجموعه های شمارای نامتناهی که بیشمار عضو دارند، کاردینالیتی شون بی نهایته ولی کوچک ترین بی نهایت که اصطلاحاً به آن «الف صفر» یا «الف نال» یا $\aleph_0$ گویند.

$$|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Z}^+|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$$

$$|\mathbb{Q}^c|=|\mathbb{R}|=|(0,1)|=|[0,1]|=\aleph_1$$

نکته) هر زیرمجموعه یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شماراست.

نکته) اگر A شمارا باشد و $|B|\leqslant|A|$ $\Leftarrow$ B شمارا است.

نکته) اگر A شمارا باشد و بتوان تابع یک به یک $f: B\to A$ پیدا کرد $\Leftarrow$ B شماراست.

نکته) اگر A شمارا باشد و بتوان تابع پوشا $f: A\to B$ پیدا کرد $\Leftarrow$ B شماراست.

نکته) سر ابر مجموعه‌ی یک مجموعه ناشمارا، ناشماراست یعنی اگر A ناشمارا باشد و $A\subseteq B$ $\Leftarrow$ B ناشماراست.

نکته) اگر A ناشمارا باشد و تابع یک به یک $f: A\to B$ وجود داشته باشد $\Leftarrow$ B ناشماراست.

نکته) اگر A ناشمارا باشد و تابع پوشا $f: B\to A$ باشد $\Leftarrow$ B ناشماراست.

نکته) مجموعه توانی A حتماً از خود A بزرگتر است یعنی $|P(A)|>|A|$

نکته) تعداد توابع از A به B برابر است $|B|^{|A|}$

نکته) ضرب دکارتی دو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

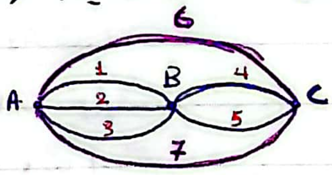
نکته) ضرب دکارتی شمارا تا مجموعه شمارا، شماراست.

«شمارش»: می‌خواهیم تعداد حالات وقوع یک پیشامد را بشماریم.

اصل جمع: فرض کن عملی m حالت و عمل دیگر مستقل از عمل اول n حالت دارد. حال اگر بخواهیم یکی از این دو عمل را انجام بدهیم $m+n$ حالت دارد.

اصل ضرب: فرض کن عملی m حالت و عمل دیگر به ازای هر بار تکرار عمل اول n حالت دارد. این دو عمل باهم $m\times n$ حالت دارند.

مثال)



① $A\to C: 3\times2=6$

② $A\to C\to A: 6\times6=36$

③ $A\to C\to A: 6\times5=30$ رفت و برگشت عیناً مثل هم نباشند

④ $A\to C\to A: 6\times2=12$ رفت و برگشت هیچ اشتراکی نداشته باشند.

① $A\to C: 3\times2+2=8$ ، ② $A\to C\to A: 8\times8=64$ ، ③ $A\to C\to A: 8\times7=56$

④ $A\to C\to A: 6\times4+2\times7=38$

مثال) با ارقام 0، 1، 2، 3، 4، 5 چند عدد 3 رقمی می توان نوشت که:

الف) تکرار مجاز باشد: $5\times6\times6=180$　　ب) تکرار مجاز نباشد: $5\times5\times4=100$

مثال) با ارقام 0، 1، 2، 3، 4، 5 چند عدد سه رقمی می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد:

الف) فرد باشد: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underset{3}{\underline{1,3,5}} = 48$

ب) زوج باشد: $\left\{\begin{array}{l} \underline{5}\ \underline{4}\ \underset{1}{\underline{0}} \\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underset{2}{\underline{2,4}} \end{array}\right. \Rightarrow 20+32=52$　　$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{0,2,4}$

ج) مضرب 5 باشد: $\underline{5}\ \underline{4}\ \underset{1}{\underline{0}} + \underline{4}\ \underline{4}\ \underset{1}{\underline{5}} = 36$

د) مضرب 4 باشد: عددی که مضرب 4 است که دو رقم سمت راستش مضرب 4 است.

$\underset{3}{\underline{X12}}$، $\underset{3}{\underline{X24}}$، $\underset{4}{\underline{X40}}$، $\underset{4}{\underline{X20}}$، $\underset{4}{\underline{X04}}$، $\underset{3}{\underline{X32}}$، $\underset{3}{\underline{X52}}$ $\Rightarrow 12+12=24$

ه) مضرب 3 باشد: عددی که مضرب 3 است، جمع ارقامش بر 3 بخش پذیر است.

$\underset{3K}{\underline{0,3}}$　$\underset{3K+1}{\underline{1,4}}$　$\underset{3K+2}{\underline{5,2}}$

$\underset{3!=6تا}{(3,1,5)}$ $\underset{6تا}{(3,4,5)}$ $\underset{6تا}{(3,1,2)}$ $\underset{6تا}{(3,4,2)}$ $\underset{4تا}{(0,1,5)}$ $\underset{4تا}{(0,1,2)}$ $\underset{4تا}{(0,4,5)}$ $\underset{4تا}{(0,4,2)}$

$\boxed{\text{مجموع} = 40\text{تا}}$

و) حداقل یکی از ارقام آن زوج باشد: کل اعداد − همه فرد $= 100-6=94$

* تعداد رشته های باینری به طول n برابر 2^n تا است. * تعداد کلمات انگلیسی با معنی یا بی معنی به طول n، 26^n تاست.

آنالیز ترکیبی: جایگشت (تکرار مجاز یا غیر مجاز) Permutation و ترکیب Combination (تکرار مجاز و غیر مجاز)

جایگشت بدون تکرار: n تا شی متفاوت وجود دارد و ما می خواهیم K شی متفاوت از این n تا انتخاب کنیم و سپس این K شی را جابجا کنیم.

$\underline{\text{مکان }1}$　$\underline{\text{مکان }2}$　$\underline{\text{مکان }3}$　...　$\underline{\text{مکان }K}$

$$n \times n-1 \times n-2 \times \dots \times n-(K+1) = \frac{n!}{(n-K)!} = P(n,K)$$

جایگشت با تکرار: n نوع شی متفاوت وجود دارد و از هر نوع حداقل K تا وجود دارد، ما می خواهیم K شی (که تکرار مجاز است) از این n نوع شی انتخاب کنیم و جابجا کنیم.

$\underline{\text{مکان }1}$　$\underline{\text{مکان }2}$　$\underline{\text{مکان }3}$　...　$\underline{\text{مکان }K}$

$$n \times n \times n \times \dots \times n = n^K$$

K شی متفاوت K! جایگشت دارد.

ترکیب بدون تکرار: n تا شی متفاوت وجود دارد، ما می خواهیم از این n تا شی K تا شی متفاوت انتخاب کنیم و به یک حالت مثلاً صعودی کنار هم بچینیم.

$$\left(\frac{n!}{(n-K)!}\right) \div K! = \frac{n!}{(n-K)!\,K!} = C(n,K) = \binom{n}{K}$$

ترکیب با تکرار: n نوع شی متفاوت وجود دارد و از هر نوع حداقل K تا وجود دارد و ما می خواهیم K شی که تکرار مجاز است انتخاب کنیم و نمی خواهیم این K شی را جابجا کنیم و مثلاً صعودی می خواهیم بچینیم.

$$\binom{n+K+1}{K}$$

مثال) یک گل فروشی سه نوع گل دارد و ما می خواهیم 4 شاخه گل بخریم. به چند حالت می توانیم؟

حل: ترکیب با تکرار　　3 نوع گل $\longrightarrow$ A, B, C

① 4 شاخه گل هم $\longrightarrow$ AAAA, BBBB, CCCC

② 3 شاخه گل هم $\longrightarrow$ AAAB, AAAC, BBBA, BBBC, CCCA, CCCB

* $x_1+x_2+x_3+\dots+x_6 \leqslant 14 \longrightarrow x_1+x_2+\dots+x_6+x_7=14$

برای تبدیل $\leqslant$ به $=$ یکی به سمت چپ معادله اضافه می کنیم.

Subject :　　　　Year:　　Month:　　Date:

③ 2تا 2تا $\longrightarrow$ AABB, AACC, BBCC

④ 2تا مشابه، 1تا 1تا $\longrightarrow$ AABC, BBAC, CCAB

$$\binom{6}{4}=\binom{3+4-1}{4}=15 \Leftarrow K=4 \;,\; n=3$$

مثال) به چند حالت می توان سه عدد صحیح را (a,b,c) انتخاب کرد بطوریکه: $1 \leqslant a < b < c \leqslant 6$

$\{1,2,3,4,5,6\}$

ترکیب بدون تکرار 3 از 6 $\Leftarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{3\times2\times\cancel{3!}} = 20$

مثال) به چند حالت می توان سه عدد صحیح (a,b,c) را انتخاب کرد بطوریکه: $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 6$

$x \leqslant y \longrightarrow x < y+1$

ترکیب با تکرار 3 از 6 $\quad 1 \leqslant a < \underbrace{b+1}_{B} < \underbrace{c+2}_{C} \leqslant 8 \Rightarrow \binom{8}{3}$

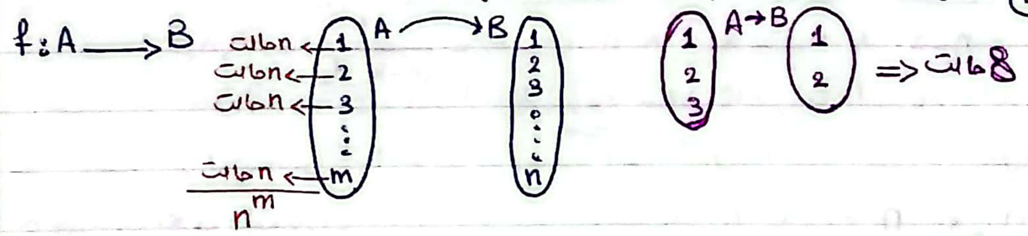
مثال) به چند حالت می توان 4 عدد از دنباله ی $4, 3, 2, 1, -1, -2, -3$ انتخاب کرد بطوریکه حاصل ضرب این 4 عدد مثبت باشد به شرطی که: الف) تکرار مجاز نباشد. ب) تکرار مجاز باشد.

حل: 2تا مثبت و 2تا منفی + 4تا منفی + 4تا مثبت.

الف) $\binom{4}{4}+0+\binom{4}{2}\times\binom{3}{2}=19$ و ب) $\binom{4+4-1}{4}+\binom{3+4-1}{4}+\binom{4+2-1}{2}\times\binom{3+2-1}{2}$

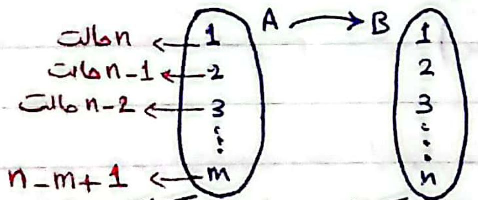
«شمارش توابع»

مثال) چه تعداد تابع از مجموعه A با m عضوی به B با n عضوی وجود دارد؟



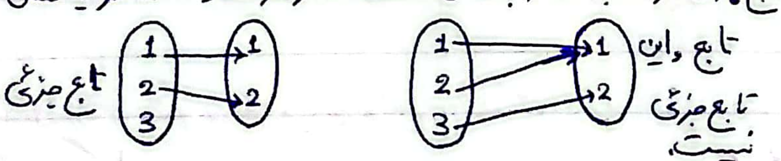
مثال) چه تعداد تابع یک به یک از m عضو به n عضو وجود دارد؟ $m \leqslant n$

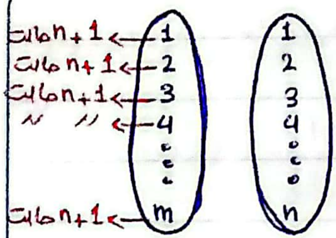
حل:



$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال) از نظر آقای فریالدی تابع جزئی از A به B رابطه ای است که از هر عضو A حداکثر یک فلش خارج شود و تابع کلی نباشد و تهی نباشد.



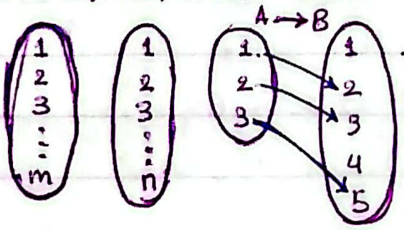


با تعریف کریالدی چند تابع جزئی از m عضو به n عضو وجود دارد؟

$$\Rightarrow (n+1)^m - n^m - 1$$

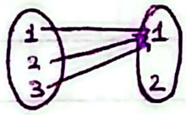
نکته) شمارش تعداد تابع پوشا فعلا امکان پذیر نیست و معلومات بیشتری می خواهد.

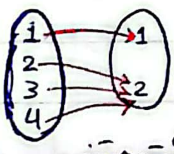
مثال) چه تعداد تابع اکیداً صعودی از m عضو به n عضو وجود دارد؟ $a<b \to f(a)<f(b)$ $\quad m \leqslant n$



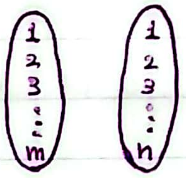
* از n عضوِ B کافی است m عضو متمایز انتخاب کنی که $\binom{n}{m}$ حالت دارد.
از 5 تای B، 3 تا متفاوت انتخاب کن و به ازای هر انتخاب یک تابع اکیداً صعودی وجود دارد پس $10 = \binom{5}{3}$ می شه جواب.

مثال) از m عضو به n عضو چه تعداد تابع صعودی می شه ساخت؟ $a<b \to f(a) \leqslant f(b)$





$$\binom{2+4-1}{4} = 5$$



از n عضو کافی است m عضو انتخاب کنیم ولی تکرار مجاز است و با آن انتخاب فقط یک تابع صعودی می شه ساخت.
$$\binom{n+m-1}{m}$$

جایگشت با وجود اشیای تکراری) من می دانم که سه شی متفاوت a، b و c دارای $3! = 6$ تا جایگشت هستند.

abc, acb, bac, bca, cab, cba

حال سه شی a, a, b چند تا جایگشت دارند؟ 3 تا

aab, aba, baa $\quad \dfrac{3!}{2!} = 3$

تعداد حالات جابجایی یعنی جایگشت n شی اگر متفاوت باشند می شود $n!$ حالت ولی اگر n_1 تا مثل هم، n_2 تا مثل هم، n_3 تا مثل هم و ... و n_k تا مثل هم باشند آنگاه تعداد جایگشت می شه

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

مثال) با حروف کلمه‌ی TALLAHASEE: الف) چند کلمه‌ی 10 حرفی می شه نوشت؟
$$\frac{10!}{2!\;3!\;2!}$$

ب) چند کلمه‌ی 10 حرفی که هر 3 تا A کنار هم باشند می شه نوشت؟

AAA TLLEESH $\quad \dfrac{8!}{2!2!}$

ج) چند کلمه‌ی 10 حرفی که هیچ 2 تا A کنار هم نباشند می شه نوشت؟

$$\uparrow T \uparrow L \uparrow L \uparrow H \uparrow S \uparrow E \uparrow E \uparrow = \frac{7!}{2!2!} \times \binom{8}{3}$$

مثال) 5 پسر و 3 دختر به چند حالت در یک ردیف شامل 8 صندلی می توانن بشینن طوری که:

الف) محدودیت نباشد؟ $8!$

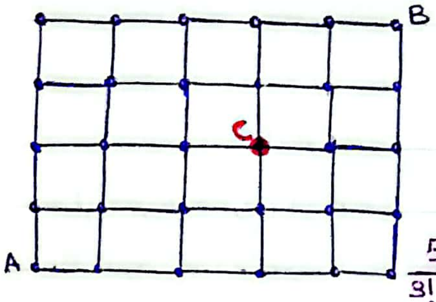
ب) دخترها کنار هم باشند؟ $6! \times 3!$ $\quad$ ddd PPPPP

ج) هیچ دو دختری کنار هم نباشد؟ $\downarrow P \downarrow P \downarrow P \downarrow P \downarrow P \downarrow$ $\quad 5! \times \binom{6}{3} \times 3!$

مثال) 5 گلابی و 3 هلو به چند حالت در یک ردیف کنار هم می شه چید طوری که:

الف) محدودیت نباشد؟ $\dfrac{8!}{5!3!}$ $\quad$ ب) هلوها کنار هم باشند؟ $6 = \dfrac{6!}{5!}$ $\quad$ ج) هیچ دو هلوی کنار هم نباشند؟ $\binom{6}{3}$

مثال) به چند حالت می توان از A رسید به B به شرطی که $\rightarrow$ و $\uparrow$ مجاز به حرکت باشیم.



حل: uuRRRuuRR

$u=4 \quad R=5 \Rightarrow \frac{9!}{4!5!}=126$

مثال) در شکل مقابل به چند حالت می توان از A رسید به B به شرطی که $\rightarrow$ $\uparrow$ مجاز باشیم و: الف) حتما از C عبور کنیم: $60 = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{2!2!}$

ب) از C عبور نکنیم: $126-60=66$

مثال) به چند حالت می توان 4 سیب (یکسان) را بین 3 نفر توزیع کرد؟

حل (روش اول): $x_1+x_2+x_3=4$

a	b	c	
4	0	0	0000||
0	4	0	|0000|
0	0	4	||0000
3	1	0	000|0|
3	0	1	000||0
1	2	1	0|00|0
⋮			

ادعا می کنم هر جایگشتی از 4 تا O (دایره) و 1-3 | (خط) یک جواب مسئله است. $\frac{6!}{4!2!}$

روش دوم: هر جوابی از مسئله متناظر است با انتخاب (ترکیب) با تکرار 4 تا از 3 نفر. $\binom{3+4-1}{4}$

* تعداد حالات توزیع n شی یکسان در k جعبه متمایز طوری که هیچ شرطی وجود نداشته باشد یعنی جعبه ها بتوانند برخی خالی بمانند برابر است با ترکیب با تکرار n تا از k تا یا برابر است با جایگشت های n+k-1 شی که n تا شان مثل هم و k-1 تا شان مثل هم هستند.

$$\binom{k+n-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} \leftarrow \begin{cases} \text{n تا شی یکسان} \\ \text{k جعبه متمایز} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ معادله ی دیوفانتی

* تعداد جواب های صحیح نامنفی $x_1+x_2+x_3+\dots+x_k=n$ برابر است با

مثال) 10 تا سیب به چند حالت می توان بین 4 نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداقل یک سیب داده شود؟

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{\cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 84$$

مثال) معادله ی $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ چند دسته جواب صحیح مثبت دارد؟

$x_i>0$

$$\underbrace{x_1-1}_{x_1} + \underbrace{x_2-1}_{x_2} + \underbrace{x_3-1}_{x_3} + \underbrace{x_4-1}_{x_4} = 6 \rightarrow x_i \geq 0$$

جواب مثل بالاست.

مثال) نامعادله ی $x_1+x_2+x_3 \leq 6$ چند دسته جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل روش اول:

$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow \binom{0+3-1}{3-1}$ +

$x_1+x_2+x_3=1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1}$ +

$x_1+x_2+x_3=2 \Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1}$ +

⋮

$x_1+x_2+x_3=6 \Rightarrow \binom{6+3-1}{3-1}$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{8}{2}$$

حل) روش دوم: ادعای لم تا معادله‌ی سوال رو به صورت معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ می‌تونیم بنویسیم $\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$

مثال) نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4<10$ چند دسته جواب صحیح مثبت دارد؟

حل: $x_1+x_2+x_3+x_4<6 \longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4\leq 5 \longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$

چون گفته صحیح مثبت پس نفری یکی باید بهشون بدیم. $\longrightarrow \binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}$

مثال) معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ چند جواب صحیح دارد طوری که $x_i\geq i$ و $i=1,2,3,4$.

حل: $x_1+x_2+x_3+x_4=4 \longrightarrow \underbrace{(x_1-1)}_{x_1}+\underbrace{(x_2-2)}_{x_2}+\underbrace{(x_3-3)}_{x_3}+\underbrace{(x_4-4)}_{x_4}=4$

$\longrightarrow \binom{4+4-1}{4-1}=\binom{7}{3}$

مثال) معادله‌ی $4x_1+x_2+x_3+x_4=13$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

$x_1=0 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=13 \Rightarrow \binom{13+3-1}{3-1}$

$x_1=1 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=9 \Rightarrow \binom{9+3-1}{3-1}$

$x_1=2 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1}$

$x_1=3 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1}$

* به چند حالت می‌توان n شی متمایز را در k جعبه متمایز توزیع کرد؟ $\longleftarrow k^n$ تابع از n عضو به k عضو

* به چند حالت می‌توان 3 شی متفاوت $\underbrace{}_{a,b,c}$ را بین $\underbrace{2\text{ نفر}}_{x_1,x_2}$ توزیع کرد؟ $(x_1,x_2)=(abc,-)\ (-,abc)\ (a,bc)$

$(bc,a)\ (c,ab)\ (ab,c)$

$(b,ac)\ (ac,b)$

a b c　　x_1 x_2

* تعداد حالات توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز به شرطی که جعبه‌ای خالی نماند $(n\geq k)$ = تعداد تابع پوشا از n عضو به k عضو.

* تعداد حالات توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز به شرطی که در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد $(n\leq k)$ = تعداد تابع یک به یک از n به k $=\frac{k!}{(k-n)!}$

مثال) به چند حالت می‌توان 5 شی یکسان را در 3 جعبه یکسان توزیع کرد؟ 5 حالت

* عدد n را به چند حالت می‌توان افراز کرد به جمع وندهای صحیح مثبت؟

مثال) عدد 5 چند افراز دارد؟ 7 حالت

حل: $5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1$

مثال) عدد 5 چند تا افراز مرتب دارد یعنی چند تا ترکیب دارد؟ $2^4=16$ (یعنی $2+1$ با $1+2$ فرق دارد)

* تعداد افرازهای مرتب عدد n یعنی ترکیب‌ها = عدد n $=2^{n-1}$

مثال) به چند حالت می‌توان 5 شی متمایز $(a\,b\,c\,d\,e)$ را در 3 جعبه یکسان توزیع کرد؟

جعبه	جعبه	جعبه	
5	0	0	$\longrightarrow$ 1 حالت
4	1	0	$\longrightarrow$ 5 حالت $=\binom{5}{1}=\binom{5}{4}$
3	2	0	$\longrightarrow$ 10 حالت $=\binom{5}{2}=\binom{5}{3}$
3	1	1	$\longrightarrow$ 10 حالت $=\binom{5}{3}$
2	2	1	$\longrightarrow$ 15 حالت $\to \frac{1}{2}\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}=\binom{5}{4}\times 3$

* هر وقت مجموع تمام ضرایب رو خواستیم، جای تمام متغیرها باید 1 قرار بدیم.

Subject: Year: Month. Date:

بسط دو جمله‌ای و چند جمله‌ای)

$(a+b)^0=1$ $\qquad$ $(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

بسط نیوتن

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n}a^0b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$a=b=1 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

$a=1,\ b=-1 \Rightarrow \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\dots(-1)^n\binom{n}{n}=0$

$\Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots$

$a=1,\ b=2 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^2+\dots+\binom{n}{n}2^n=3^n \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n}$

مثلث خیام پاسکال

1

1 ⊕ 1

1 ⊕ 2 ⊕ 1

1 ⊕ 3 ⊕ 3 ⊕ 1

1 4 6 4 1

تست) حاصل $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}2^i=?$ چیست؟ ① 2^n+2 ② 4^n ✓ ③ 3^n ④ 5^n-1

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^i=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k=4^n$

بسط چند جمله‌ای) $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ چند جمله دارد؟ و ضریب یک جمله خاص؟

$(x_1+x_2+x_3)^2=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)$

$=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_2^2+x_3^2$

(ضریب) $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k} \xrightarrow{\text{جمع توان‌ها}} n_1+n_2+n_3+\dots+n_k=n \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}$

ضریب یعنی جمله چند بار به وجود میاد. $\underbrace{x_1x_1\dots x_1}_{n_1\ \text{بار}}\ \underbrace{x_2x_2\dots x_2}_{n_2\ \text{بار}}\ \dots\ \underbrace{x_kx_k\dots x_k}_{n_k\ \text{بار}}$

* بسط $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ دارای $\binom{n+k-1}{k-1}$ جمله است ضریب جمله‌ی $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ برابر $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ است.

* $(a+b+c)^7$ ضریب $a^2b^2c^4$ چند است؟ صفر

* $(a+b+c)^7$ ضریب $a^2b^2c^3$ چند است؟ $\frac{7!}{2!\,2!\,3!}$

* $(2a+3b-c)^7$ ضریب $a^2b^2c^3$ چند است؟ $\longrightarrow 2^2\times3^2\times(-1)^3\times\frac{7!}{2!\,2!\,3!}$

مثال) در عبارت $(a+a^2+b)^7$ ضریب a^6b^3 چند است؟

حل: $a^{n_1+2n_2}b^{n_3}=(a)^{n_1}(a^2)^{n_2}(b)^{n_3}=a^6b^3$

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3=7\\ n_3=3\\ n_1+2n_2=6 \Rightarrow n_1=2,\ n_2=2\end{cases} \qquad \frac{7!}{2!\,2!\,3!}$$

تمرین) در عبارت $(a+a^2+a^3)^7$ ضریب a^{18} چند است؟

$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } a} a^7\underbrace{(1+a+a^2)^7}_{\text{ضریب } a^{11}} \Rightarrow (1)^x(a)^y(a^2)^z=a^{11}$

$\Rightarrow a^{y+2z}=a^{11}$

$$\begin{cases} x+y+z=7\\ y+2z=11\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=1 \to z=5 \to x=1\\ y=3 \to z=4 \to x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{7!}{1!\,1!\,5!}+\frac{7!}{0!\,3!\,4!}$$

$=42+35=77$

Subject Year: Month: Date:

خواص ترکیب

$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ ، $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

$\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$ ، $\binom{n}{3}=\binom{n}{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

قاعده پاسکال ① $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

قاعده واندرموند ② $\binom{m+n}{k}=\binom{m}{k}\binom{n}{0}+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{0}\binom{n}{k}$

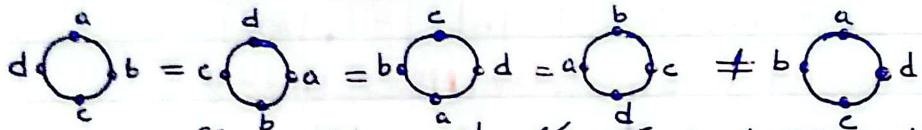
اگر در قاعده واندرموند $m=n$ باشد، نتیجه داریم $\Leftarrow$ ③ $\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$

④ $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$

⑤ $\binom{n+k+1}{n+1}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}$

جایگشت دایره ای) n تا شی متفاوت دور یک دایره به چند حالت چیده می شوند؟ در یک ردیف $n!$ حالت وجود دارد، در دایره چرخش اشیا حالت جدید نیست؟

$n=4 \longrightarrow abcd \xrightarrow{\text{ردیف}} 4!=24$



$\frac{4!}{4}=3!=6$

n تا شی متمایز در یک ردیف $n!$ جایگشت دارند ولی دور یک میز گرد $\frac{n!}{n}$ یعنی $(n-1)!$ جایگشت دارند چون هر n تا حالت ردیف می شه یک حالت میز گرد.

سوال) n تا شی متمایز دور یک دایره چند جایگشت دارند اگر دو جایگشت که در آن هر شی همسایه هایش یکی هستند را یکسان فرض کنیم. دو جایگشت در صورتی متمایز هستند که حداقل یک شی باشد که همسایگان آن در دو جایگشت یکسان نباشند (مسئله گردنبند یا دستبند): $\frac{(n-1)!}{2}$

مثال) ۳ پسر و ۳ دختر به چند حالت می تونن دور یک میز گرد بنشینند به شرطی که: ← یکی ثابت، بقیه جایگشت

الف) محدودیت نباشد $5!$ ب) پسرها کنار هم $3!\times 3!=36$ ج) یک در میان $3!\times 2!=12$

مثال) به چند حالت می توان از بین 10 نفر که در یک ردیف نشسته اند 3 نفر انتخاب کرد به شرطی که افراد کنار هم انتخاب نشوند؟

$\{1,2,3,\dots,10\}$

a	b	c
(1 ,	3 ,	7)
(2 ,	5 ,	9)
(3 ,	5 ,	7)
⋮		

$1\leqslant a<b<c\leqslant 10$

$1\leqslant a<b-1<c-2\leqslant 8$

$=\binom{8}{3}$

* اگر سوال گفته بود به چند طریق می توانیم از یک مجموعه انتخاب کنیم بطوری که $A\subseteq B\subseteq C$ باید بگیم: ① توی C باشه و توی بقیه نباشه ② توی C و B باشه و در A نباشه ③ توی هر سه باشه، پس به 3^n حالت انتخاب داریم.

مثال) مجموعه $S=\{1,2,\dots,30\}$ چند زیرمجموعه 4 عضوی دارد که اختلاف اعضا حداقل 3 باشد؟

$\{a,b,c,d\}$ $\qquad 1\leq a<b<c<d\leq 30$

$1\leq a<b-2<c-4<d-6\leq 24 \longrightarrow \binom{24}{4}$

مثال) چند رشته باینری به طول n وجود دارد که دارای دقیقا دو 10 باشد؟

$n\leq 3 \to$ جواب ندارد

$n=4 \to 1010$ $\qquad n=5 \to 01010,\ 10100,\ 10101,\ 11010,\ 10010,\ 10110$

$n\geq 4$ $\quad \boxed{\ }\,10\,\boxed{\ }\,10\,\boxed{\ }$

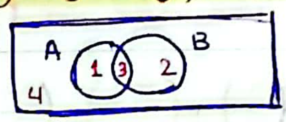
x_1 تا صفر، y_1 تا یک — x_2 تا صفر، y_2 تا یک — x_3 تا صفر، y_3 تا یک

$x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=n-4$

جواب $=\binom{n-4+6-1}{6-1}=\binom{n+1}{5}$

کاربرد مجموعه ها در شمارش - اصل شمول و عدم شمول (طرد و شمول)

$|A|=n(A)=n_A=\mathrm{card}(A)$



① $|A\cup B|=|A|+|B|-|AB|$

② $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|AB|-|AC|-|BC|+|ABC|$

③ $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_iA_j|+\sum|A_iA_jA_k|-\dots$

④ $|\bar A|=|S|-|A|$

⑤ $|\bar A.\bar B|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|AB|$

⑥ $|\bar A.\bar B.\bar C|=|S|-|A|-|B|-|C|+|AB|+|AC|+|BC|-|ABC|$

⑦ $|\bar A_1\bar A_2\dots\bar A_n|=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_iA_j|-\dots(-1)^n|A_1A_2\dots A_n|$

⑧ $|A-B|=|A|-|AB|$

⑨ $|A\Delta B|=|A|+|B|-2|AB|$ $\qquad$ اجتماع A و B منهای اشتراک A و B

مثال) $A\Delta B\Delta C$ را در نمودار ون نشان بدهید.

$A\oplus B\oplus C=\bar A\bar B C+\bar A B\bar C+A\bar B\bar C+ABC$

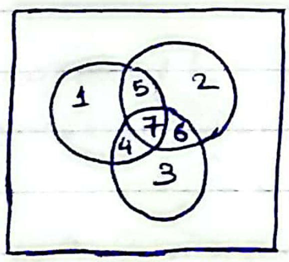
* Δ همون XOR است.

$\underline{(A\Delta B)}\,\Delta\, C$

$1,2,4,6$

$1,2,3,7$

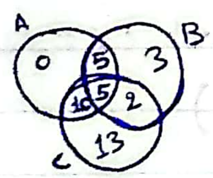
$\underbrace{\bar A B}_{2,6}+\underbrace{A\bar B}_{1,4}$



مثال) در یک کلاس 200 تا دانشجو: 20 تا درس A، 15 تا درس B، 30 تا درس C، 10 تا دروس A و B، 15 تا دروس A و C، 7 تا دروس B و C و 5 نفر در هر سه درس مردود شده اند.

الف) چند نفر حداقل یک درس مردود شده اند؟ 38 نفر

ب) چند نفر در هیچ درسی مردود نشده اند؟ $200-38$



مثال) چند عدد 3 رقمی وجود دارد که: $S=\{100,101,\dots,999\}$ $|S|=900$

الف- مضرب 3 باشد؟ $100\leq 3K\leq 999 \to 34\leq K\leq 333 \Rightarrow 333-34=299+1=300$

ب- مضرب 5 باشد؟ $100\leq 5K<1000 \to 20\leq K<200 \Rightarrow 200-20=180$

ج- مضرب 3 و 5 باشد؟ $|A.B|$ $100\leq 15K\leq 999 \to 7\leq K\leq 66 \to 60$

د- مضرب 3 یا 5 (یا هردو) باشد؟ $|A\cup B|$ $300+180-60$

هـ) مضرب 3 یا 5 ولی نه هردو باشد؟ $|A\Delta B|$ $300+180-2\times 60$

و) مضرب 3 باشد ولی 5 نباشد؟ $|A-B|$ $300-60$

ز) مضرب 3 نباشد و مضرب 5 نباشد؟ $|\bar{A}.\bar{B}|=|S|-|A|-|B|+|AB|=900-300-180+60$

مثال) چند عدد در $S=\{1,\dots,1000\}$ وجود دارد که مضرب $\underset{A}{2}$ یا $\underset{B}{3}$ یا $\underset{C}{5}$ نباشد؟

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}|$$
$$=|S|-|A|-|B|-|C|+|AB|+|AC|+|BC|-|ABC|$$
$$=1000-\left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{10}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor$$

مثال) چند عدد در $S=\{1,2,\dots,1000\}$ وجود دارد که: مضرب 2 نباشد، مضرب 4 نباشد و مضرب 6 نباشد؟

مضرب 4 و 6 نیست $\Leftarrow$ مضرب 2 نیست ، مضرب 2 هست $\Leftarrow$ مضرب 4 هست

500 عدد هست که مضرب 2 نیست.

مثال) چند عدد $S=\{1,2,\dots,1000\}$ وجود دارد که: مضرب 2 نیست، مضرب 3 نیست، مضرب 4 نیست؟

$A=$ مضارب 2 $\quad |\bar{A}.\bar{B}|=1000-\left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor$

$B=$ مضارب 3

مثال) چند عدد در مجموعه $S=\{1,2,\dots,1000\}$ وجود دارد که مضرب 4 نیست، مضرب 6 نیست؟

$A=$ مضارب 4 $\quad |\bar{A}.\bar{B}|=1000-\left\lfloor\frac{1000}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{12}\right\rfloor$

$B=$ مضارب 6

مثال) با ارقام 1,2,3,4 چند عدد 5 رقمی می‌توان نوشت که حتماً شامل ارقام 1، 2 باشد؟

$A=$ اعداد 5 رقمی که 1 ندارند $\quad |\bar{A}.\bar{B}|=4^5-3^5-3^5+2^5$

$B=$ اعداد 5 رقمی که 2 ندارند

مثال) معادله $x_1+x_2+x_3=12$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟ $x_1\leq 4,\ x_2\leq 5,\ x_3\leq 6$

حل:

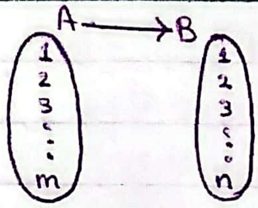
$A=$ نیست $x_1\leq 4 \xrightarrow{\text{یعنی}} x_1\geq 5$

$B=$ نیست $x_2\leq 5 \xrightarrow{\text{یعنی}} x_2\geq 6$

$C=$ نیست $x_3\leq 6 \xrightarrow{\text{یعنی}} x_3\geq 7$

$$|\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}|=\binom{12+3-1}{3-1}-\binom{7+3-1}{3-1}-\binom{6+3-1}{3-1}-\binom{5+3-1}{3-1}+\binom{1+3-1}{3-1}+\binom{0+3-1}{3-1}+0-0$$

* تعداد توابع پوشا از n عضو به n عضو یا تعداد تابع یک به یک از n عضو به n عضو برابر $n!$ است.



مثال) تعداد توابع پوشا از m عضو به n عضو؛ $m \geq n$

توزیع m شیء متمایز در n جعبه متمایز طوری که جعبه‌ها خالی نمانند. تابعی که 1 را پوشش ندهد $= A_1$

$A_2 =$ 〃 〃 〃 2 〃 〃

⋮

$A_n =$ 〃 〃 〃 n 〃 〃

$$|\bar{A_1} . \bar{A_2} . \dots . \bar{A_n}| = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \dots (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$ ← فرمول تابع پوشا

مثال) مسئلهٔ Derangement (عدم تطبیق - پریش - نابه‌جایی - منشی گیج - پستچی گیج - کلاه تماشاچیان). صورت سوال: اعداد 1 تا n چند تا جایگشت دارند طوری که هیچ عددی در مکان صحیح خودش نباشد؟

$n=1$ مسئله جواب ندارد، $n=2$ یک جواب دارد $\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}$، $n=3$ دو جواب دارد $\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{matrix}$

حل: جایگشت‌هایی که 1 در مکان 1 هست $= A_1$

جایگشت‌هایی که 2 در مکان 2 هست $= A_2$

⋮

$A_n =$ 〃 n 〃 〃 n 〃 〃 〃

$$|\bar{A_1} . \bar{A_2} . \dots . \bar{A_n}| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \frac{(-1)^n}{n!}\right) = D(n)$$ ← فرمول Derangement *

تعداد حالات رخ دادن پریش

$$D(4) = 4!\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{1!}} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 12 - 4 + 1 = 9$$

سوال) n تا رخ (قلعه) یکسان در صفحه $n \times n$ به چند حالت قابل چیده شدن هستند طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ $n!$

سوال) n تا رخ متمایز در صفحه $n \times n$ به چند حالت قابل چیده شدن هستند طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ $(n!)^2$

سوال) n تا رخ یکسان به چند حالت می‌توان در صفحه $n \times n$ چید به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند و نسبت به قطر متقارن باشند؟

$a_n =$ تعداد حالات این مسئله $\quad a_1 = 1$ $\boxed{X}$ $\quad a_2 = 2$ $\begin{matrix}K & O\\ O & K\end{matrix}$ $\quad a_3 = 4$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

چند جمله‌ای رخی: فرض کنید یک صفحه $m \times n$ می‌باشد که برخی از خانه‌های آن هاشور خورده‌اند. تعریف می‌کنیم r_k برابر با تعداد حالات چیدن k تا رخ در خانه‌های سفید این صفحه بدون تهدید. می‌پذیریم که:

$r_0 = 1$

$r_1 =$ تعداد حالات چیدن یک رخ

$r_2 =$ 〃 〃 〃 دو رخ

چندجمله‌ای رخی $r(c,x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + \dots$

روابط بازگشتی) یک رابطه بازگشتی برای دنباله ی $a_0, a_1, a_2, \dots$ رابطه ای است که a_n را برحسب جملات قبلی بیان کند.

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$

$a_0=0,\ a_1=1,\ n\geq 2 \longrightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

مثال) چه تعداد رشته باینری به طول ده فاقد 00 وجود دارد؟

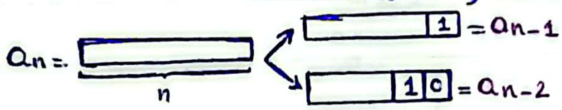
حل:

1111111111, 0101101011, ...

روش غیر بازگشتی: صفر ندارند + 1 صفر + 2 صفر + 3 صفر + 4 صفر + 5 صفر

$$=1+\binom{10}{1}+\binom{9}{2}+\binom{8}{3}+\binom{7}{4}+\binom{6}{5}=144$$

روش بازگشتی: تعداد رشته های باینری به طول n فاقد 00 = a_n , $a_{10}=?$



$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=3$

$\hookrightarrow 2,3,5,8,13,21,34,55,89,\underbrace{144}_{a_{10}}$

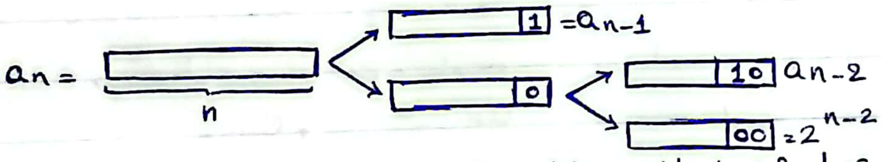
تست) اگر a_n تعداد رشته ها باینری به طول n شامل 00 باشد آنگاه:

(1) $a_n=2^n-(a_{n-1}+a_{n-2}) \Rightarrow a_2=2^2-(0+0)$ ✗ (2) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \Rightarrow a_2=a_1+a_0=0$ ✗

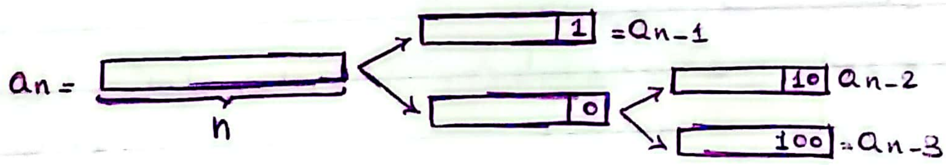
(3) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-1} \Rightarrow a_2=a_1+a_0+2^1$ ✗ (4) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$ ✓

روش اول: آزمایش گزینه ها $a_2=1,\ a_1=0,\ a_0=0$

روش دوم (روش درست):



مثال) یک رابطه بازگشتی برای تعداد رشته های باینری به طول n فاقد 000 بیابید. $a_n=$

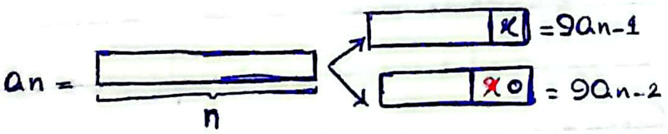


$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$

$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=4$

مثال) یک رابطه بازگشتی برای تعداد رشته ها دهدهی به طول n فاقد 00 بیابید؟

حل: $x=1,2,3,\dots,9$



$a_n=9(a_{n-1}+a_{n-2})$

$a_0=1,\ a_1=10$

مثال) در مزرعه یک جفت خرگوش تازه متولد شده رها کرده‌ایم. هر جفت خرگوش پس از دو ماهگی در هر ماه یک جفت تولید می‌کند. اگر a_n تعداد جفت در ماه n ام باشد، a_{10} را بیابید. در ماه صفرم هیچ خرگوشی در مزرعه نیست.

ماه صفرم	ماه یکم	ماه دوم	ماه سوم	ماه چهارم	ماه پنجم
$a_0=0$	$a_1=1$	$a_2=1$	$a_3=2$	$a_4=3$	$a_5=5$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

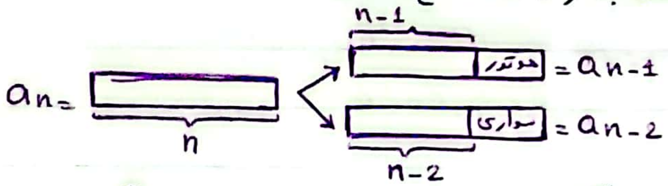
مثال) در مسئله قبل فرض کن هر جفت خرگوش پس از یک ماهگی 3 جفت و پس از دو ماهگی هر ماه 2 جفت تولید کند، برای تعداد جفت ماه n ام رابطه بازگشتی بیابید.

ماه صفرم	ماه یکم	ماه دوم	ماه سوم	ماه چهارم
$a_0=0$	$a_1=1$	$a_2=4$	$a_3=15$	$a_4=15+4\times2+11\times3$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3(a_{n-1}+a_{n-2}) = 4a_{n-1} - a_{n-2}$$

مثال) در یک پارکینگ n تا جای پارک کردن وجود دارد که موتور یا سواری پارک می‌کنند. موتور یک جا پارک می‌خواهد و سواری 2 جای پارک اشغال می‌کند. اگر فرض کنیم موتورها یکسان هستند و سواری‌ها نیز یکسان هستند و قرار باشد همه n جای پارک پر شود، تعداد حالات این مسئله به ازای $n=10$ چند تا است؟

حل:

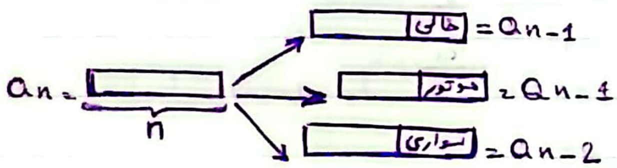


$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_1 = 1 \, , \, a_2 = 2$$

$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \overset{a_{10}}{89}$

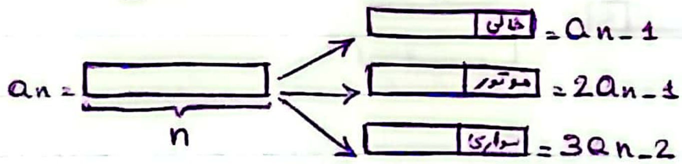
مثال) در مسئله قبل فرض کنید لزومی ندارد از همه فضای پارک استفاده شود. حال a_n را بیابید؟



$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1 \, , \, a_1 = 2 \, , \, a_2 = 5$$

مثال) در مسئله قبل فرض کنید که فضای خالی داشت و موتورها 2 نوع مختلف و سواری‌ها 3 نوع مختلف باشند. a_n را بیابید.



$$a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

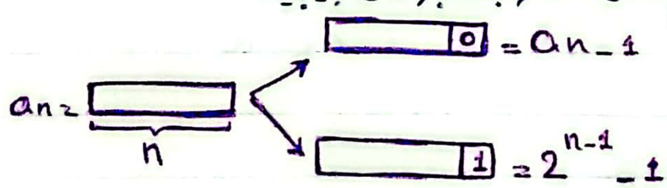
$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 12$$

مثال) یک پلکان n تا پله دارد و می‌خواهیم برویم بالا. در هر گام یک یا دو پله رو رد می‌کنیم. برای تعداد حالات بالا رفتن رابطه بازگشتی بیابید. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$

مثال) برای تعداد رشته‌های باینری به طول n شامل 01 رابطه بازگشتی بیابید؟

حل:



$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} - 1$$

نکته) فرمول مستقیم مسئله‌ی جوزف: $J(n)=2(n-2^{\lfloor \lg n \rfloor})+1$

Subject : Year: Month: Date:

مثال) برای تعداد رشته‌ها باینری به طول n فاقد 010 رابطه بازگشتی بیابید؟

$a_n = \underbrace{\boxed{\quad\quad}}_{n}$ → $\boxed{\quad\quad 1} = a_{n-1}$

→ $\boxed{\quad\quad 0}$ → $\boxed{\quad\quad 110} = a_{n-3}$ ، $\boxed{\quad\quad 00} \cdots$ (ادامه دارد)

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \cdots$ (full History)

$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-5} + \cdots$

$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-2} \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$

مثال) برای تعداد رشته‌های مبنای 3 (شامل 0، 1، 2) به طول n فاقد 00 و 11 رابطه بازگشتی بیابید. (ternary)

$a_n = \underbrace{\boxed{\quad\quad}}_{n}$ → $\boxed{\quad\quad 2} = b_n = a_{n-1}$

→ $\boxed{\quad\quad {}^{2}_{0}1} = c_n = b_{n-1} + d_{n-1}$

→ $\boxed{\quad\quad {}^{2}_{1}0} = d_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

$a_n = b_n + c_n + d_n = \underbrace{b_n}_{a_{n-1}} + \underbrace{b_{n-1} + d_{n-1} + c_{n-1}}_{a_{n-1}} + \underbrace{b_{n-1}}_{a_{n-2}}$

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 3$

مثال) برای تعداد رشته‌ها دهدهی به طول n که تعداد صفرهای آن‌ها زوج است رابطه بازگشتی بیابید؟

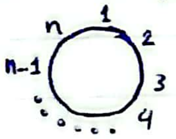
$a_n = \underbrace{\boxed{\quad\quad}}_{n}$ → $\overbrace{\boxed{\quad\quad}}^{n-1}\boxed{x} = 9a_{n-1}$ ، $\underbrace{\boxed{\quad\quad}}_{n-1}\boxed{0} = 10^{n-1} - a_{n-1}$

$x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

$a_0 = 1$

مسئله Josephus) اعداد 1 تا n را دور یک دایره در جهت عقربه ساعت نوشته‌ایم، از عدد 2 یکی در میان حذف می‌کنیم. آخرین عدد را $J(n)$ می‌نامیم. $J(n) = ?$



$J(2n) = 2J(n) - 1$ و $J(2n+1) = 2J(n) + 1$

$J(1) = 1$ ، $J(9) = 2J(4) + 1 = 3$

$J(4) = 2J(2) - 1$ و $J(2) = 1$

نکته) برای یافتن جواب جوزف کافی‌ست عدد داده شده را باینری بنویسیم و آن را چرخش به چپ دهیم.

استرلینگ نوع یک: تعداد حالات نشستن n نفر دور m تا میز گرد یکسان طوری که هیچ میزی خالی نماند.

$S(n,m)$ ، $S(n,1) = (n-1)!$ ، $S(n,n) = 1$ ، $S(n,m) = 0 \quad n<m$

$S(n,n-1) = \binom{n}{2}$ ← دو نفر سر یک میز

$S(n,n-2) = \binom{n}{3} \times 2! + \binom{n}{4} \times 3$

فرمول بازگشتی استرلینگ نوع 1:

$* \; S(n,m) = S(n-1,m-1) + S(n-1,m) \times (n-1)$

$S(n,2) = (n-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$

استرلینگ نوع دو : تعداد حالا = توزیع n شی متمایز در m جعبه یکسان به شرطی که جعبه خالی نماند.

$S(n,1)=1$ و $S(n,n)=1$ و $\underset{n<m}{S(n,m)=0}$ و $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$

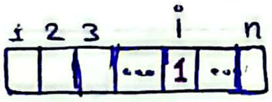
$S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$ $\quad$ $S(n,2)=\frac{2^n-2}{2}=2^{n-1}-1$

فرمول بازگشتی استرلینگ نوع 2

* $S(n,m)=S(n-1,m-1)+m\times S(n-1,m)$

$$\longrightarrow S(n,m)=\frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n}{m!}$$

مثال) فرض کنید D_n تعداد جایگشت‌ها n شی متمایز است که هیچ یک در جای طبیعی خود نیستند. برای D_n فرمول بازگشتی بیابید.



حل: $D_n=(n-1)\times D_{n-2}+(n-1)\times D_{n-1}$

Derangement فرمول بازگشتی $\rightarrow D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$

حل روابط بازگشتی:

مثال) مطلوب است حل رابطه بازگشتی $a_n=2a_{n-1}+1$ و $a_0=0$. (مرتبه یک ناهمگن)

* ناهمگن یعنی غیر از جملات بازگشت، جمله دیگه‌ای هم جمع و تفریق شده.

$$\left.\frac{a_0=0}{2^0-1},\ \frac{a_1=1}{2^1-1},\ \frac{a_2=3}{2^2-1},\ \frac{a_3=7}{2^3-1},\ \frac{a_4=15}{2^4-1}\right\}\ a_n=2^n-1$$

مثال) پاسخ $T(n)=T(n-1)+n$ و $T(0)=0$.

$$T(n)=T(n-1)+n=1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال) با فرض اینکه n توانی از 2 باشد مطلوبست حل $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n-1$ و $T(1)=0$ ؟

حل: جایگذاری از بالا

$$\begin{aligned}
T(n)&=2\left[2T(\tfrac{n}{4})+\tfrac{n}{2}-1\right]+n-1\\
&=2^2T(\tfrac{n}{4})+(n-2)+(n-1)\\
&=2^2\left[2T(\tfrac{n}{8})+\tfrac{n}{4}-1\right]+(n-2)+(n-1)\\
&=2^3T(\tfrac{n}{8})+(n-2^2)+(n-2)+(n-1)\\
&\ \vdots\\
&=2^k\cancel{T(\tfrac{n}{2^k})}+(n-2^{k-1})+\dots+(n-2)+(n-1)\\
&=nk-(1+2+4+\dots+2^{k-1})\\
&=nk-(2^k-1)=nk-2^k+1\Rightarrow n\lg n-n+1
\end{aligned}$$

$\frac{n}{2^k}=1$

$n=2^k\Rightarrow k=\lg n$

حل روابط بازگشتی همگن خطی ضریب ثابت) $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_ka_{n-k}$

مثال) بررسی کنید کدام یک از a_n های زیر می‌تواند جواب یک حل رابطه بازگشتی $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ باشد؟

$a_n=2^n$ ✓, 5×2^n ✓, 3^n ✓, 7×3^n ✓, $5\times2^n+7\times3^n$ ✓, 4^n ✗

$a_n=2^n\longrightarrow 2^n=5\times2^{n-1}-6\times2^{n-2}=\frac{5}{2}\times2^n-\frac{3}{2}\times2^n=2^n$ ✓

$a_n=3^n\longrightarrow 3^n=5\times3^{n-1}-6\times3^{n-2}=\frac{5}{3}\times3^n-\frac{2}{3}\times3^n=3^n$ ✓

$a_n=4^n\longrightarrow 4^n=5\times4^{n-1}-6\times4^{n-2}=\frac{5}{4}\times4^n-\frac{3}{8}\times4^n\neq4^n$ ✗

Subject : Year: Month: Date:

ثابت می‌شود جواب روابط بازگشتی همگن خطی ضریب ثابت به شکل x^n است که x ثابت است. حال برای یافتن x می‌توان x^n را در رابطه بازگشتی صدق داد:

$a_0 = 1 , a_1 = 2$

$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \xrightarrow{a_n = x^n} x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2} \longrightarrow x^2 = 5x + 6$

$\longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow x = 2, 3 \longrightarrow a_n = \alpha_1 \times 2^n + \alpha_2 \times 3^n$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ a_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \alpha_1 = 1 , \alpha_2 = 0 \Longrightarrow a_n = 2^n$$

* نحوه‌ی حل معادله درجه دو) معادله را به شکل روبرو می‌نویسیم: $ax^2 + bx + c = 0$

که در آن a و b و c ضرایب معادله هستند. برای به دست آوردن ریشه‌ها (یا جواب‌ها x) دو روش اصلی داریم:

① استفاده از فرمول درجه دو (فرمول حل معادله):

1.1 - محاسبه دلتا (مشتق دوم یا «بیان مقدار زیر رادیکال»): $\Delta = b^2 - 4ac$

1.2 - تحلیل دلتا: • اگر $\Delta > 0$، دو ریشه واقعی و متمایز داریم.

• اگر $\Delta = 0$، یک ریشه واقعی و تکراری (ضریب 2) داریم.

• اگر $\Delta < 0$، دو ریشه مختلط مزدوج داریم.

1.3 - محاسبه ریشه‌ها: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

• درحالت $\Delta > 0$ یا $\Delta = 0$، $\sqrt{\Delta}$ عددی واقعی است.

• درحالت $\Delta < 0$، $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$ و ریشه‌ها به شکل مختلط در می‌آیند.

- روش دوم، کامل کردن مربع است که نیازی بهش نیست و روش بالا کافیه.

* مثال عددی) فرض کنید معادله زیر را داریم: $2x^2 - 3x - 5 = 0$، ضرایب $\left.\begin{matrix} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{matrix}\right\}$

حال دلتا را محاسبه می‌کنیم: $(-3)^2 - 4(\underline{2 \times -5}) = 9 + 40 = 49$

$-4 \times -10 = 40$

چون $\Delta = 49 > 0$ دو ریشه واقعی داریم: $\dfrac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} = \dfrac{3 \pm 7}{4} \begin{cases} \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{10}{4} = 2.5 \\ \dfrac{3-7}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$

* حل دستگاه معادلات خطی دو مجهولی) برای حل دستگاه معادلات خطی دو مجهولی (که روی دستگاه مختصات به صورت تقاطع دو خط در صفحه نمایش داده می‌شود) معمولا از سه روش اصلی استفاده می‌شود:

① روش جایگذاری (substitution): 1.1 - یکی از معادلات را طوری بازنویسی کنید که یک مجهول برحسب مجهول دیگر بیان شود.

مثال: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \longrightarrow x = y + 1 \end{cases}$

1.2 - مقدار بدست آمده را در معادله‌ی دوم جایگذاری کنید

1.3 - سپس مجددا به مقدار مجهول دوم در معادله‌ی اول مراجعه کنید تا مجهول اول را بیابید.

جایگذاری توی اولی: $2(1+y) + y = 5 \Longrightarrow 2 + 2y + y = 5$

$\Longrightarrow 3y = 3 \Longrightarrow y = 1$

سپس داریم: $x = y + 1$ و $y = 1 \xleftarrow{\text{آنگاه}} x = 1 + 1 = 2$ پس $\Leftarrow x = 2 , y = 1$

Subject: Year: Month: Date:

② روش حذف (Elimination): 2.1- یکی از مجهول ها را طوری حذف کنید تا با ضرب معادلات یا جمع/تفریق آن ها، ضریب آن مجهول برابر صفر شود.

همان مثال: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

2.2- معادله باقی مانده را حل کنید، سپس مقدار حاصل را به یکی از معادلات اصلی برگردانید تا مجهول دیگر را بیابید.

• جمع دو معادله: $(2x+y)+(x-y)=5+1 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$، حال در معادله دوم جایگذاری می کنیم: $2-y=1 \Rightarrow y=1$

③ روش کرامر (Cramer's rule): اگر دستگاه را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

آنگاه دترمینان اصلی را محاسبه می کنیم:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$ ← ماتریس ضرایب

سپس:

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

و در نهایت:

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}$$

اگر $D=0$، هر دو D_x و D_y هم صفر باشند، بی نهایت جواب (معادلات وابسته)

اگر $D\neq 0$، دقیقاً یک جواب یکتا داریم.

اگر $D=0$ ولی یکی از D_x یا D_y صفر نباشد، هیچ جوابی وجود ندارد.

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_ka_{n-k}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\dots-c_k=0$

$x_1,x_2 \Rightarrow a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n$

$x_1,x_2,x_3 \Rightarrow a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n+\alpha_3x_3^n$

$x_1=x_2 \Rightarrow a_n=(\alpha_1+\alpha_2 \cdot n)x_1^n$

$x_1=x_2=x_3 \Rightarrow a_n=(\alpha_1+\alpha_2 \cdot n+\alpha_3 \cdot n^2)x_1^n$

$x_1,x_2=a\pm bi \Rightarrow a_n=(\sqrt{a^2+b^2})^n[\alpha_1 \cdot \cos\theta n+\alpha_2\sin n\theta]$

$$\theta=\arctan\frac{b}{a}$$

* اگر در معادله ی بازگشتی خطی درجه دو، مثلاً $a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$ معادله ی مشخصه $r^2-pr-q=0$ دارای دلتای $\Delta=p^2+4q$ منفی باشد یعنی $\Delta=p^2+4q<0$ آنگاه ریشه ها صوری (موهومی) اند و می نویسیم:

$$r_{1,2}=\frac{p}{2}\pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\equiv a\pm ib$$

① حل کلی (فرم مختلط): برای هر دو ریشه مختلط $a\pm bi$ جواب کلی بازگشتی به صورت $a_n=c_1(a+bi)^n+c_2(a-bi)^n$ است که c_1, c_2 را از شروط اولیه (a_0,a_1) به دست می آوریم.

Subject : Year: Month: Date:

② تبدیل به فرم حقیقی (سوجی): چون دنباله‌ی ما فرضاً حقیقی است، می‌توانیم این را بصورت ترکیبی از کسینوس و سینوس بنویسیم. ابتدا قدر مطلق و زاویه هر ریشه: $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

آنگاه: $(a+bi)^n=\rho^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$ و نهایتاً $a_n=\rho^n[A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)]$.

که پارامترهای A و B هم از شرایط اولیه تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases}\alpha_0=A\\ \alpha_1=\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)\end{cases}$$

حالا که A رو داریم برای محاسبه‌ی B هم می‌توانیم در خط دوم جایگزین کنیم:

$$\alpha_1=\rho(\alpha_0\cos\theta+B\sin\theta)\Rightarrow\frac{\alpha_1}{\rho}=\alpha_0\cos\theta+B\sin\theta$$

پس داریم:

$$B=\frac{\frac{\alpha_1}{\rho}-\alpha_0\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\alpha_1/\rho-\alpha_0\cos\theta}{\sin\theta}$$

در نتیجه در فرم سوجی:

$$a_n=\rho^n\left[\alpha_0\cos(n\theta)+\frac{\alpha_1/\rho-\alpha_0\cos\theta}{\sin\theta}.\sin(n\theta)\right]$$

که کاملاً به مقادیر اولیه a_0 و a_1 بستگی دارد.

* θ چیه؟ تتا زاویه ریشه های مختلط در دستگاه اعداد مختلط است. به عبارت دیگر اگر ریشه ها را به صورت $a\pm bi$ نمایش دهیم، θ زاویه‌ای است که این بردار با محور حقیقی می‌سازد. برای محاسبه‌ی θ معمولاً از تابع کمانی تانژانت معکوس استفاده می‌کنیم $\theta=\arctan\frac{b}{a}$.

مثال) روابط زیر را حل کنید؟

① $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $F_0=0$, $F_1=1$. $\Rightarrow x^2-x-1=0\rightarrow\Delta=(-1)^2-4(1\times-1)$

$\Rightarrow\Delta=1+4=5\longrightarrow x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$ دو تا ریشه حقیقی داریم.

$$F_n=\alpha_1.\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$\begin{array}{l}F_0=\\F_1=\end{array}\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\longrightarrow\alpha_2=-\alpha_1\\ \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+\underbrace{\alpha_2}_{-\alpha_1}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=1\Rightarrow\alpha_1\underbrace{\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt5}{2}-\frac{\cancel{1}-\sqrt5}{2}\right)}=1\end{cases}$$

$$\alpha_1\left(\frac{\cancel{2}\sqrt5}{\cancel{2}}\right)\Rightarrow\alpha_1\sqrt5=1\Rightarrow\alpha_1=\frac{1}{\sqrt5}$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

② $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$, $a_0=1$, $a_1=4\Rightarrow x^2-\underbrace{4x+4}_{x_1=x_2=2}=0\Rightarrow\Delta=\underbrace{16-16=0}_{\text{ریشه مضاعف}}$

$$a_n=(\alpha_1+\alpha_2.n).2^n$$

$$a_0=\begin{cases}\alpha_1=1\\(\alpha_1+\alpha_2).2\Rightarrow2\underbrace{\alpha_1}_{1}+2\alpha_2=4\Rightarrow2+2\alpha_2=4\Rightarrow2\alpha_2=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha_2=\frac{2}{2}=1$$

$$\alpha_1=1,\alpha_2=1\Rightarrow a_n=(1+n).2^n\Rightarrow a_n=2^n+n.2^n$$

* توی معادله‌ی مشخصه مربوط به رابطه بازگشتی جای x عدد میذاریم (مثلا ۱، ۲، ...) و بررسی می‌کنیم آیا حاصل صفر می‌شه یا نه. اگر صفر شد یعنی اون عدد ریشه رابطه است.

Subject : Year: Month: Date:

③ $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \; a_0 = 1, \; a_1 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4$

$x_1, x_2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{4}}_{2} \times \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \Rightarrow \dfrac{2 \pm 2i}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{2}(1 \pm i)}{\cancel{2}} = 1 \pm i = 1 \pm \sqrt{-1}$

$a_n = (\sqrt{2})^n \left[\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta)\right]$

$\theta = \arctan \dfrac{b}{a} \Rightarrow \arctan \dfrac{1}{1} \Rightarrow \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\to a_n = (\sqrt{2})^n \left[\alpha_1 \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + \alpha_2 \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right]$

$$\begin{aligned} a_0 &= \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \sqrt{2}\left[\underbrace{1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\alpha_2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{\alpha_2\sqrt{2}}{2}}\right] = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow \alpha_2 = 1 \end{cases} \\ a_1 &= \end{aligned}$$

حل روابط بازگشتی ناهمگن خطی ضریب ثابت) $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} + f(n)$

روش اول - روش یعنی: اون $f(n)$ بصورت ضرب یک چندجمله‌ای با درجه d در یک مقدار نمایی باید باشه.

$f(n) = b^n \cdot P(n)$ $\quad b^n \overset{\text{مثلا}}{=} 2^n, 3^n, \dots$ $\quad P(n) \overset{\text{مثلا}}{=} \underbrace{3n+6}_{\text{درجه } 1}, \underbrace{2n^2+n+7}_{\text{درجه } 2}$

حل $\Rightarrow (x^k - C_1 x^{k-1} - \dots - C_k)(x - b)^{d+1} = 0$

مثال) مطلوب است حل $T(n) = T(n-1) + n$, $T(0) = 0$ ؟

$T(n) = T(n-1) + 1^n(n^1) \Rightarrow (x-1)(x-1)^2 = 0 \longrightarrow 1, 1, 1$

$T(n) = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot n + \alpha_3 n^2) = \dfrac{1}{2} n + \dfrac{1}{2} n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned} T(0) &= \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 3 \end{cases} \\ T(1) &= \\ T(2) &= \end{aligned}$$

مثال) فرم جواب $a_{n+1} = 4a_{n-1} + 3n \times 2^n + 2^{n+4} + n^2 - 1$ به چه صورت است؟

$a_{n+1} = 4a_{n-1} \Rightarrow (x^2 - 4)$

$3n \times 2^n + 2^{n+4} + n^2 - 1 \Rightarrow 2^n(3n + 16) + 1^n(n^2 - 1)$

$\Rightarrow \underbrace{(x^2 - 4)}_{-2, 2} \underbrace{(x-2)^2}_{2, 2} \underbrace{(x-1)^3}_{1, 1, 1} = 0$

$\Rightarrow a_n = \alpha_1(-2)^n + (\alpha_2 + \alpha_3 \cdot n + \alpha_4 \cdot n^2) 2^n + (\alpha_5 + \alpha_6 \cdot n + \alpha_7 n^2) 1^n$

نکته) بعد از اینکه حالت کلی جواب بدست اومد با توجه به شرط اولیه مثلا یه بار جای n مقدار صفر میذاریم و یه بار یک و ....، جلوشون هم (جلوی T وی) همون مقدار شرط اولیه رو میذاریم.

* اگر جمع ضرایب معادله مشخصه 0 شد یکی از ریشه ها جمله سوم اون معادله مشخصه است.

* وقتی فهمیدیم مثلاً 1 ریشه معادله مشخصه است، از معادله مشخصه مشتق میگیریم و مجدد بررسی می کنیم که 1 ریشه اون هم هست یا خیر، به همین ترتیب ادامه میدیم تا بفهمیم که 1 چندبار ریشه است.

Subject :   Year: Month: Date:

روش جواب خصوصی برای حل رابطه ناهمگن)

$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$

$*\ f(n) = b^n \times P(n)$ $\qquad a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

* $a_n^{(p)}$: اگر b ریشه معادله مشخصه قسمت همگن نباشد آنگاه $a_n^{(p)}$ دقیقاً به شکل $f(n)$ است یعنی $a_n^{(p)} = b^n \times q(n)$ و حال اگر b ریشه قسمت همگن باشد و از مرتبه t باشد آنگاه جواب خصوصی $a_n^{(p)} = n^t \times b^n \times q(n)$ است.

مثال) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + f(n)$ مطلوبست شکل جواب خصوصی اگر

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow 2,2$

$\Delta = 0 \Rightarrow [(-4)^2 - 4(4\times1)]$

$f(n) = 2^n \times n \longrightarrow a_n^{(p)} = n^2 \times 2^n \times (c_1 . n + c_0)$

$f(n) = 3n+1 \longrightarrow a_n^{(p)} = 1^n (c_1 . n + c_0)$

$f(n) = n^2 \longrightarrow a_n^{(p)} = 1^n . (c_2 . n^2 + c_1 . n + c_0)$

$f(n) = 2^n \times (n^2 + 3n) \longrightarrow a_n^{(p)} = n^2 \times 2^n \times (c_2 . n^2 + c_1 . n + c_0)$

نکته) برای این که ببینیم a ریشه مرتبه چند است باید هی مشتق بگیریم تا جایی که به غیر صفر برسیم.

$f(a) = 0 \xrightarrow{1} f'(a) = 0 \xrightarrow{2} f''(a) = 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow f^{n-1}(a) = 0 \longrightarrow f^n(a) \neq 0$

← در این حالت a ریشه مرتبه‌ی n است.

نکته) جواب خصوصی در رابطه بازگشتی صدق می کند.

مثال) مطلوبست حل $T(n) = T(n-1) + n$ و $T(0) = 0$ با روش خصوصی؟

$T(n) = T(n-1) \longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow$ ریشه $= 1$ $\quad$ و $\quad n \longrightarrow 1^n (n)$

حل: $T^{(p)}(n) = n \times 1^n (c_1 . n + c_0) = c_1 n^2 + c_0 n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

$\Rightarrow c_1 n^2 + c_0 n = c_1 (n-1)^2 + c_0 (n-1) + n$

$= c_1 n^2 - 2c_1 n + c_1 + c_0 n - c_0 + n$

$= c_1 n^2 + (-2c_1 + c_0 + 1) n + c_1 - c_0$

$$\begin{cases} c_0 = -2c_1 + c_0 + 1 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{2},\ c_0 = \frac{1}{2} \\ 0 = c_1 - c_2 \end{cases}$$

$T(n) = \alpha + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

$T(0) = \alpha = 0$

مثال) مطلوبست حل روابط بازگشتی زیر:

1) $a_n = 3a_{n-1} - 2n(n-1) a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

$\frac{a_n}{n!} = 3 \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} - 2 \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} \longrightarrow b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \longrightarrow 1,2 \longrightarrow b_n = \alpha_1 (2^n) + \alpha_2 (1^n) = 2^n$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$$

② $a_n = \dfrac{a^3_{n-1}}{a^2_{n-2}}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ $\longrightarrow \lg a_n = 3\lg a_{n-1} - 2\lg a_{n-2}$

$\Rightarrow b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$, $b_0 = 0, b_1 = 1$

$\Rightarrow \lg a_n = b_n \longrightarrow a_n = 2^{b_n}$

③ $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) - 4T(\frac{n}{4}) + n.\lg^2 n$ $\quad n = 2^m$

$\Rightarrow T(2^m) = 4T(2^{m-1}) - 4T(2^{m-2}) + 2^m . m^2$

$\Rightarrow a_m = 4a_{m-1} - 4a_{m-2} + 2^m . m^2$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4)(x-2)^3 = 0 \longrightarrow 2, 2, 2, 2, 2$

$a_m = (\alpha_1 + \alpha_2 . m + \alpha_3 . m^2 + \alpha_4 . m^3 + \alpha_5 . m^4)(2^m)$

$\rightarrow T(n) = (\alpha_1 + \alpha_2 \lg n + \alpha_3 \lg^2 n + \alpha_4 \lg^3 n + \alpha_5 \lg^4 n) n \quad = \Theta(n \lg^4 n)$

④ $T(n) = \sqrt{\frac{1}{2} T^2(n-1) + \frac{1}{2} T^2(n-2) + n}$

$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2} a_{n-2} + n$

$\Rightarrow (x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(x-1)^2 = 0 \longrightarrow a_n = \alpha_1 (-\frac{1}{2})^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n + \alpha_4 n^2)$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

مثال خیلی مهم: مطلوب است حاصل یک دترمینان 10×10 سه قطری که همه‌ی درایه‌های قطر اصلی
آن -2، درایه‌های قطر بالای قطر اصلی -3 و درایه‌های قطر زیر قطر اصلی 1 باشد.

$$a_n = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -3 \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \overbrace{\begin{vmatrix} -2 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix}}^{a_{n-1}} + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}_{1 \times a_{n-2}}$$

$a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2} \longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \longrightarrow 1, 3$

$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 (-3)^n \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{3}{4}$

$$a_n = \begin{vmatrix} p & q & & \\ r & p & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & q \\ 0 & \cdots & r & p \end{vmatrix} \Rightarrow a_n = p . a_{n-1} - q . r . a_{n-2}$$

$a_0 = 1, a_1 = p, a_2 = p^2 - qr$

* به عنوان مثال در تابع $4-3x^5$ اگر بخواهیم بررسی کنیم مولد چه دنباله‌ای است باید ببینیم چه ضرایبی رو دارد. مثلا در همین تابع ضریب x^0 برابر 4 است و ضریب x^5 برابر 3 است.

Subject : Year: Month: Date:

دنباله $\{a_n\}_{n\geq 0} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ تابع مولد (Generating Function)

تابع مولد $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$f(x) = 4 - 3x^5 \longrightarrow$ دنباله: $4, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, \ldots$

$h(x) = 4x^2 + 2x^6 \longrightarrow$ دنباله: $0, 0, 4, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, \ldots$

$g(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \longrightarrow$ دنباله: $1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$

مثال) تابع مولد دنباله‌های زیر را بیابید.

① $a_n = 1 \quad (n=0,1,2,\ldots) \Rightarrow 1, 1, 1, 1, \ldots \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

مشتق تابع کسری

② $a_n = n+1 \quad (n=0,1,2,\ldots) \Rightarrow 1, 2, 3, 4, \ldots \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$$= (1 + x^2 + x^3 + \ldots)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

③ $a_n = n \quad (n=0,1,2,\ldots) \Rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

$$= x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)-1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

④ $a_n = n^2 \quad (n=0,1,2,\ldots) \Rightarrow 0, 1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = 0 + 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

مشتق

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ضرب در x

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

مشتق

$$1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \ldots = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$$

ضرب در x

$$x + 2^2 x^2 + 3^2 x^2 + 4^2 x^4 + \ldots = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

* در مثال اول این صفحه، برای محاسبه‌ی A، ریشه مخرج‌اش رو به یک است می‌گذاریم توی صورت سوال ولی نه اینجا که صفر می‌شه (منظور $x-1$ است).

Subject: Year: Month: Date:

⑤ $a_n = b \times c^n \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b.c^n x^n = b + b(cx) + b(cx)^2 + \dots = \frac{b}{1-cx}$
$n=0,1,2,\dots$

مثال) تابع مولد دنباله‌ای است؟ $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\overset{-3}{A}}{x-1} + \frac{\overset{5}{B}}{x-2} = \frac{3}{1-x} + \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow a_n = 3 \times 1^n - \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثال) مطلوب است حل $a_0=2, a_n=3a_{n-1}$ ؟

حل: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n}_{} \rightarrow 3a_0x + 3a_1x^2 + \dots = 3x\underbrace{(a_0 + a_1x + \dots)}_{g(x)}$

$$g(x) - a_0 = 3x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

* برای این که مشخص کنیم که سیگما رو از کجا شروع کنیم به اندیس رابطه بازگشتی نگاه می‌کنیم. مثلاً در $3a_{n-1}$ چون 1 داریم پس سیگما از 1 شروع می‌شه.

$g(x) - 2 = 3x\,g(x)$

$$\longrightarrow g(x)(1-3x) = 2 \longrightarrow g(x) = \frac{2}{(1-3x)} \Rightarrow a_n = 2 \times 3^n$$

مثال) $a_0 = 1,\ a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

حل: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1} + 10^{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8a_{n-1}x^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n}_{}$

$= (x + 10x^2 + 10^2x^3 + \dots)$ تصاعد هندسی با قدر نسبت $10x$

$$g(x) - a_0 = 8x\,g(x) + \frac{x}{1-10x}$$

$$\Rightarrow g(x)(1-8x) = 1 + \frac{x}{1-10x} \Rightarrow g(x)(1-8x) = \frac{1-9x}{1-10x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-8x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-10x}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \times 8^n + \frac{1}{2} \times 10^n$$

$1-8x \Rightarrow 1 = 8x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{8}} \Rightarrow 1 - 10\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow 1 - \frac{10}{8} = -\frac{2}{8}$

$\Rightarrow \frac{1-9x}{-\frac{2}{8}}$ $\qquad \frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{2}{8}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

* $1 - 9x \Rightarrow 1 - 9\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow 1 - \frac{9}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8}$

* اگر یک دنباله داد و گفت تابع مولدش چیه؟ اول یکم دنباله رو باز می‌کنیم و چند تا عبارتش رو می‌نویسیم تا یکم دستمون بیاد که دنباله به چه صورت است. بعد آن‌ها رو تبدیل می‌کنیم مثلاً سری هندسی شه یا ... و تابع مولدش رو به‌دست میاریم.

Subject : Year: Month: Date:

مثال) فرض کن $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب مولد دنباله‌های a_n و b_n هستند. با توجه به دستگاه زیر مطلوب است $f(x)$. $a_1=1,\ b_0=1,\ a_0=0$

حل:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1}+b_{n-1} \end{cases} \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

روش اول: سعی می‌کنم b رو حذف کنم.

$$\left.\begin{array}{l} b_{n-1}=a_n-a_{n-1} \\ b_n=a_{n+1}-a_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+1}=2a_n+a_{n-1} \longrightarrow a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$f(x)-a_0-a_1x = 2x(f(x)-a_0)+x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)-x = 2xf(x)+x^2f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)(1-2x-x^2)=x \longrightarrow f(x)=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1}+b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n \end{array}$$

$$\begin{cases} f(x)-a_0 = xf(x)+xg(x) \\ g(x)-b_0 = 2xf(x)+xg(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x)f(x)-xg(x)=0 \\ -2xf(x)+(1-x)g(x)=1 \end{cases}$$

حل با روش کرامر:

$$f(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -2x & 1-x \end{vmatrix}} = \frac{x}{(1-x)^2-2x^2} = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

$$g(x)=\frac{\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ -2x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -2x & 1-x \end{vmatrix}} \Rightarrow \frac{1-x}{(1-x)^2-2x^2} = \frac{1-x}{1-2x+x^2-2x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{1-2x-x^2}$$

* به ما هر تابعی که میدن و میگن مولد چه دنباله‌ای هست، باید اون رو به شکل $\sum a_n x^n$ در بیاریم و ببینیم که ضریب x^n چیه. اون میشه جواب.

Subject:　　　　Year:　　Month:　　Date:

بحث ریاضی)

$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ ، تعمیم ترکیب $\binom{m}{n}=\begin{cases}1 & n=0\\ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} & n\neq 0\end{cases}$

① $\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=\frac{1}{16}$

② $\binom{-2}{4}=\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)(-2-3)}{4!}=5$

③ $\binom{-2}{4}=(-1)^4\binom{2+4-1}{4}=\binom{5}{4}=5$

نکته) $\binom{-m}{n}=(-1)^n\binom{m+n-1}{n}$

* $(a+b)^m=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}a^{m-n}b^n \xrightarrow{a=1,b=x} (1+x)^m=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n$

* اگه توان طبیعی نبود بعد تعمیم یافته میدهیم (بالای سیگما ∞ میذاریم)

مثال) در عبارت $\sqrt{1-4x}$ مطلوب است ضریب x^3.

حل: $(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \Rightarrow n=3 \Rightarrow \binom{\frac{1}{2}}{3}(-4)^3=\frac{1}{16}(-4)^3=-4$

مثال) در عبارت $(x+x^2+x^3+\cdots)^7$ ضریب x^{18} چند است؟

$\left(\frac{x}{1-x}\right)^7=x^7(1-x)^{-7}$

ضریب x^{11} $\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-7}{n}(-x)^n \Rightarrow n=11 \Rightarrow \binom{-7}{11}(-1)^{11}$

$\Rightarrow (-1)^{11}\binom{7+11-1}{11}(-1)^{11} \Rightarrow \binom{17}{11}$

مثال) در عبارت $(x+x^2+x^3)^7$ ضریب x^{18} چند است؟

حل:

$\left(\frac{x(1-x^3)}{1-x}\right)^7=x^7(1-x^3)^7(1-x)^{-7}$

$=\left[\sum_{n=0}^{7}\binom{7}{n}(-x^3)^n\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-7}{m}(-x)^m\right]$

$=[n=0,m=11+n=1,m=8+n=2,m=5+n=3,m=2]$

$=-\binom{7}{0}\binom{-7}{11}-\binom{7}{1}\binom{-7}{8}-\binom{7}{2}\binom{-7}{5}-\binom{7}{3}\binom{-7}{2}$

$=\binom{17}{11}-7\binom{14}{8}+21\binom{11}{5}-\binom{7}{3}\binom{8}{2}=77$

نکته) $\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n$

نکته) $\frac{1}{(1+x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}x^n$

* دنباله‌ی $a_n=\binom{m+n-1}{n}$ یا $a_n=\binom{n+m-1}{m-1}$ مولدش $\frac{1}{(1-x)^m}$ است.

Subject : Year: Month: Date:

⊛ $g(x)=\frac{1}{1-x} \longrightarrow a_n=1$ ⊛ $g(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \longrightarrow a_n=n+1$

⊛ $g(x)=\frac{1}{(1-x)^3} \longrightarrow a_n=\binom{n+2}{2}$ ⊛ $\frac{x}{(1-x)^2} \longrightarrow a_n=n$

⊛ $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \longrightarrow a_n=n^2$ ⊛ $\frac{b}{1-cx} \longrightarrow a_n=b\times c^n$

اعداد کاتالان : $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $C_0=1, C_1=1, C_2=2, C_3=5, C_4=14, C_5=42$

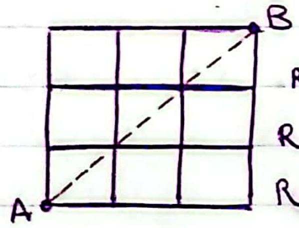
رشد کاتالان از $\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ بیشتره در نتیجه از 2^n بیشتره.

① تعداد دنباله های $2n$ بیتی حاوی n تا 1 و n تا 0 به طوری که از ابتدای دنباله هر زیر رشته ای که در نظر بگیریم تعداد 1 ها از تعداد 0 ها بیشتر یا مساوی باشد.

$n=3 \longrightarrow 111000, 110100, 101100, 101010, 110010$

② تعداد مسیرهای از A به B به شرطی که $\rightarrow$ $\uparrow$ حرکت کنیم در یک شکل $n\times n$ و به شرطی که زیر قطر AB حرکت کنیم.

$n=3$



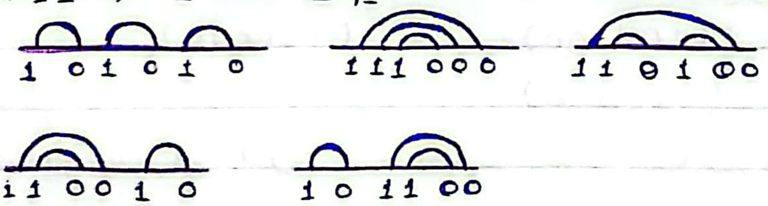
RRRUUU RURRUU
RRURUU RURURU
RRUURU

تعداد مسیرهای زیر قطر $= C_n$

تعداد مسیرهای بالای قطر $= C_n$ تعداد مسیرهای که قطر رو قطع می کنن $=\binom{2n}{n}-2C_n$

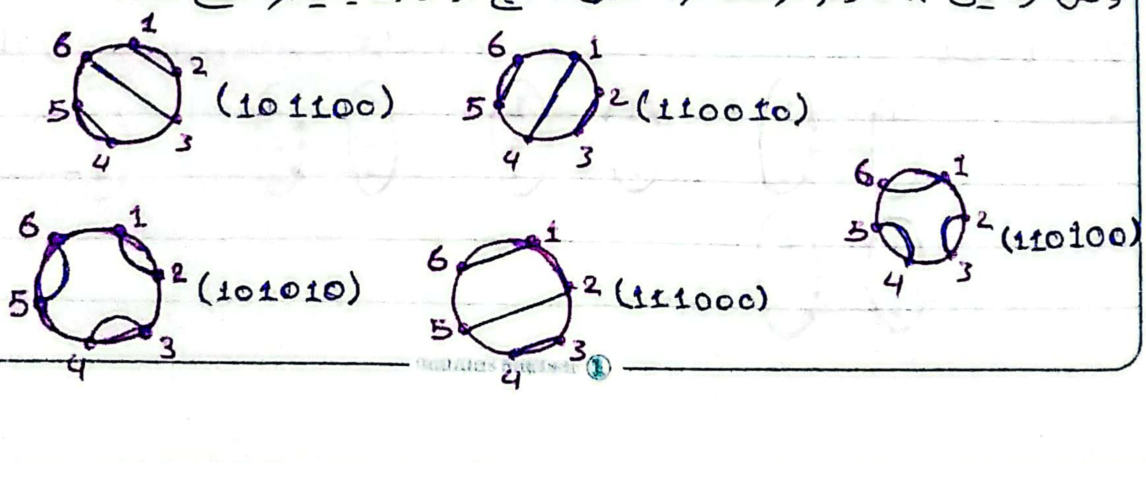
③ تعداد حالاتی که می توان روی یک خط صاف ——— n تا نیم دایره $\cap$ کشید طوری که یکدیگر رو قطع نکنند.

$n=3$



④ $2n$ نقطه روی محیط یک دایره قرار گرفته. تعداد حالاتی که می توان این $2n$ نقطه را دو به دو وصل کرد یعنی n تا وتر درست کرد طوری که هیچ دو وتری یکدیگر را قطع نکنند.

$n=3$



⑤ تعداد حالاتی که می‌توان اعداد 1 تا $2n$ را در یک مستطیل $2\times n$ چید طوری که در هر سطر و ستون اعداد صعودی باشند.

$n=3 \longrightarrow 1,2,3,4,5,6$

1	2	3
4	5	6

111000

1	2	4
3	5	6

110100

1	2	5
3	4	6

110010

1	3	4
2	5	6

101100

1	3	5
2	4	6

101010

⑥ تعداد حالات پرانتزگذاری ضرب $n+1$ ماتریس یا متغیر.

$n=3$

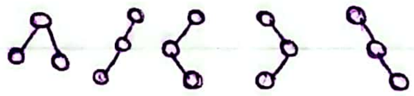
$((A_1 \cdot A_2)\cdot(A_3 \cdot A_4))$ $(((A_1 \cdot A_2)\cdot A_3)\cdot A_4)$

$((A_1(A_2 \cdot A_3))\cdot A_4)$ $(A_1(A_2(A_3 \cdot A_4)))$ $(A_1((A_2 \cdot A_3)A_4))$

* پرانتز باز 1، متغیر 0 (بجز متغیر آخر).

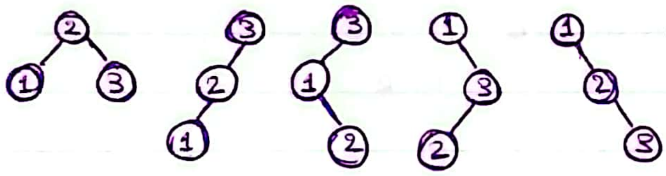
⑦ تعداد درخت‌های دودویی با n نود.

$n=3$



⑧ تعداد BST ها با اعداد 1 تا n.

$n=3$



⑨ یک پشته داریم و اعداد 1 تا n در ورودی داده شده‌اند. این اعداد به ترتیب به پشته پوش می‌شوند و هر وقت دلمان خواست پاپ می‌شوند و در خروجی نوشته می‌شوند. تعداد خروجی‌های قابل تولید؟

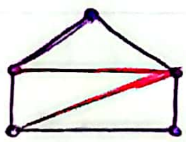
Push = 1 123 (101010) 231 (110100)

Pop = 0 132 (101100) 213 (110010)

321 (111000)

⑩ تعداد حالاتی که می‌توان داخل یک $n+2$ ضلعی محدب $n-1$ قطر غیرمتقاطع کشید که n مثلث ایجاد شود.

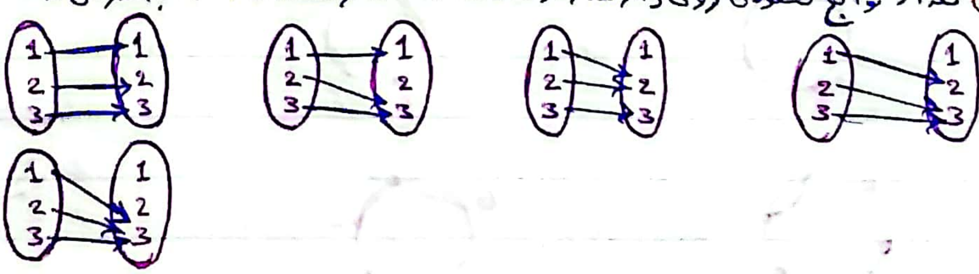
$n=3$



.....

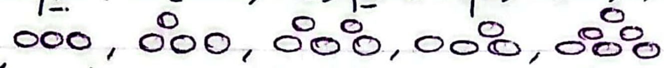
⑪ تعداد توابع صعودی روی $A=\{1,2,\dots,n\}$ ($f: A\longrightarrow A$) به شرطی که $\forall i: f(i)\geq i$

$n=3$



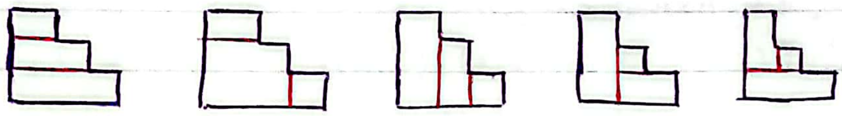
(12) n تا سکه در یک ردیف قرار دارد در کنار هم. حالا می‌تونیم روی هر دو سکه‌ی کنار هم یک سکه بذاریم ⚬⚬ تعداد حالات چه؟

n=3



(13) یک پلکان n پله‌ای. تعداد حالاتی که فضای زیر این پلکان را می‌شه به n مستطیل افراز کرد.

n=3



- اثبات کنیم که فرمول بازگشتی C_n حل‌اش می‌شه $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$\{C_n\}_{n\geq 0} \longrightarrow$ مولدش $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \Rightarrow f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots$

$f^2(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots)$

$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$: کاتالان اثبات کردن فرمول بازگشتی کاتالان می‌شه این

$= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}\right)x^n} \longrightarrow C_0C_0x + (C_0C_1 + C_1C_0)x^2 + \dots$$

$$\longrightarrow f(x) - C_0 = x\cdot f^2(x) \Rightarrow x\cdot f^2(x) - f(x) + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4x$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \xrightarrow{\text{ادعا}} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n}{2x} \Rightarrow \text{ضریب } x^n = C_n = \frac{-\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1}}{2}$$

$(-4)^{n+1} \rightarrow (-4)^n(-4)$

$$\Rightarrow \cancel{2} \times (-4)^n \times \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow (-4)^n(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!}$$

$$= 4^n \times \frac{1\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)}{2^n(n+1)!} = 4^n \times \frac{\frac{(2n)!}{2^n \times n!}}{2^n(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

نکته: $1\times 3\times 5\times \dots \times(2n-1) = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times\dots\times 2n}{2\times 4\times 6\times 8\times\dots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\times(1\times 2\times 3\times\dots\times n)}$

$= \frac{2n!}{2^n\times n!}$

Subject : Year: Month: Date:

رابطه (Relation): رابطه از A به B یعنی زیرمجموعه $A\times B$ $\qquad R: A\to B$

$R\subseteq A\times B$

$2^{|A||B|}$ = تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ = تعداد روابط از A به B

$2^{|A|^2}$ = تعداد زیرمجموعه‌های $A\times A$ = تعداد روابط روی A

$A=\{1,2\} \qquad A^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R_1=\{\} \qquad R_2=\{(1,1)\} \qquad R_3=\{(1,1),(1,2)\}$

خواص رابطه) فرض می‌کنیم رابطه R روی مجموعه A تعریف شده $\quad R\subseteq A^2$

بازتابی انعکاسی (reflexive): رابطه R بازتاب است اگر: $\quad \forall x\in A: (x,x)\in R$

$A=\{1,2,3,\dots,n\}\longrightarrow$ رابطه بازتاب $=\{(1,1),(2,2),(3,3),\dots,(n,n),\dots\}$

$I=\Delta=\underbrace{\{(1,1),(2,2),\dots,(n,n)\}}_{\text{رابطه تساوی}}=\{(x,x)\mid x\in A\} \Rightarrow$ بازتاب R $\Leftrightarrow \Delta\subseteq R$

ضدبازتابی (irreflexive): رابطه R ضدبازتاب است اگر: $\quad \forall x\in A: (x,x)\notin R$

$\hookrightarrow R\cap\Delta=\varnothing \Longleftrightarrow$ ضدبازتاب R

تقارنی (symmetric): رابطه R متقارن است اگر: $\quad \forall x,y\in A: xRy \Longleftrightarrow yRx$

$\hookrightarrow (a,b)\in R\equiv aRb$

$A=\{1,2,3\} \qquad \Delta=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$R=\{(1,2),(1,3),(3,1),(2,2)\}$ متقارن نیست.

$R^{-1}=\{(2,1),(3,1),(1,3),(2,2)\} \qquad R\cap R^{-1}=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$

متقارن R $\Longleftrightarrow R=R^{-1}$

$S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)\}$
$S^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,3),(3,2)\}$
$\Big\}\ S=S^{-1} \Longleftrightarrow$ S متقارن است

پادتقارنی (antisymmetric): رابطه R پادمتقارن است اگر و فقط اگر:

$\forall x,y\in A: xRy,\ yRx \Rightarrow x=y \qquad R\cap R^{-1}\subseteq\Delta \Longleftrightarrow$ R پادمتقارن است

$xRy,\ x\neq y \Rightarrow y\not R x$

آسیمتریک (asymmetric): رابطه R آسیمتریک است اگر:

$\forall x,y\in A: xRy\longrightarrow y\not R x$

* رابطه آسیمتریک یعنی رابطه پادمتقارن ضدبازتاب

تعدی، ترایایی، ترآنذری، انتقالی (transitive):

متعدی R: $\forall x,y,z\in A: xRy,\ yRz\longrightarrow xRz$

مثال) روابط زیر روی $A=\{1,2,3\}$ تعریف شده اند، خواص آن ها را بررسی کنید.

$R_1=\{\}$ ضد بازتاب، تقارنی، پادتقارنی، آسیمتریک، تعدی

$R_2=\{(1,2)\}$ ضد بازتاب، پادتقارنی، آسیمتریک، تعدی

$R_3=\{(1,1)\}$ تقارنی، پادتقارنی، تعدی

$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ بازتابی، تقارنی، پادتقارنی، تعدی

$R_5=\{(1,2),(2,1),(1,1),(1,3)\}$

$R_6=\{(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(1,1),(2,2)\}$ تعدی

مثال) روی $A=\{1,2,3\}$ رابطه ای با کمترین تعداد زوج بنویسید که:

الف) فقط بازتاب باشد ($n+3$ عضو) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3)\}$

ب) فقط متقارن باشد. (2 عضو) $\{(1,2),(2,1)\}$

ج) فقط پادمتقارن باشد. (2 عضو) $\{(1,2),(2,3)\}$

د) فقط متعدی باشد. $\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

هـ) فقط بازتاب و متقارن باشد. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$

و) فقط بازتاب و پادمتقارن باشد. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$

ز) فقط بازتاب و متعدی باشد. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3)\}$

* روی مجموعه 3 عضوی رابطه ی فقط متعدی حداقل 6 زوج می خواهد.
* روی مجموعه $n\geq 4$ عضوی رابطه ی فقط متقارن حداقل 5 زوج می خواهد.
* روی مجموعه 3 عضوی رابطه ی فقط بازتاب و متعدی حداقل $n+4$ زوج می خواهد.
* روی مجموعه $n\geq 4$ عضوی رابطه ی فقط بازتاب و متعدی حداقل $n+3$ زوج می خواهد.

ح) فقط متقارن و پادمتقارن باشد. X

ط) فقط متقارن و متعدی $\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$

ی) فقط پادمتقارن و متعدی $\{(1,2)\}$

ک) فقط بازتاب نباشد. $\{\ \}$

ل) فقط متقارن نباشد. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$

م) فقط پادمتقارن نباشد. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

ن) فقط متعدی نباشد. X

$R_1 \Delta R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$

Subject: Year: Month: Date:

مثال) روی مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ چند رابطه می‌توان نوشت که:

الف) بازتاب باشد. 2^{n^2-n}

ب) متقارن باشد. $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

ج) پادمتقارن باشد. $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

د) بازتاب و متقارن باشد. $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

هـ) بازتاب و پادمتقارن باشد. $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

و) متقارن و پادمتقارن باشد. 2^n

مثال) روی مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ چند رابطه پادمتقارن شامل $(1,2)$ و ناشامل $(2,3)$ وجود دارد؟

حل: $2^4 \times 1 \times 2 \times 3^4 = 2^5 \times 3^4 = 32 \times 81$

$A^2 = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(1,2)(2,1)(2,3)(3,2)\dots\}$

مثال) روی مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,n\}$، الف) رابطه پادمتقارن حداکثر چه تعداد زوج می‌تواند داشته باشد

ب) چند رابطه ی پادمتقارن با حداکثر تعداد زوج وجود دارد؟

الف) $n+\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ ب) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

عملیات روی روابط) اگر R و S دو تا رابطه روی A باشند:

R (دوگان) معکوس: R^{-1} $(x,y)\in R \longleftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$

R مکمل: $\overline{R}$ یا R^c $(x,y)\in R \longleftrightarrow (x,y)\in \overline{R}$ $\Leftarrow$ $\overline{R} = A^2 - R$

$:R\cup S$ $(x,y)\in R\cup S \longleftrightarrow (x,y)\in R \vee (x,y)\in S$

$:R\cap S$ $(x,y)\in R\cap S \longleftrightarrow (x,y)\in R \wedge (x,y)\in S$

مثال) $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,3)\}$

$S=\{(1,1),(1,2),(3,1),(1,3)\}$

$R^{-1} = \{(2,1),(1,2),(3,1),(3,3)\}$

$\overline{R} = \{(1,1),(2,2),(3,1),(3,2),(2,3)\}$

$R\cup S = \{(1,1),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$

$R\cap S = \{(1,3),(1,2)\}$ $(R\cap S)^{-1} = \{(3,1),(2,1)\}$

$R-S = \{(2,1),(3,3)\}$

نکته) R بازتاب $\longleftrightarrow$ $\overline{R}$ ضد بازتاب

R متقارن $\longleftrightarrow$ $\overline{R}$ متقارن

R پادمتقارن $\longleftrightarrow$ $\overline{R}$ نمی‌شه نظر داد.

R متعدی $\longleftrightarrow$ $\overline{R}$ نمی‌شه نظر داد.

نکته) R و S بازتاب $\longrightarrow$ $R\cup S$ بازتاب

R و S متقارن $\longrightarrow$ $R\cup S$ متقارن

R و S پادمتقارن $\longrightarrow$ $R\cup S$ نمی‌شه نظر داد

R و S متعدی $\longrightarrow$ $R\cup S$ نمی‌شه نظر داد

نکته) R هر خاصیتی داشته باشد R^{-1} نیز آن خاصیت را دارد و برعکس.

⊛ $x \overset{9}{\equiv} y \leftrightarrow x-y=9k$

⊛ $(S\cup T)oR=(SoR)\cup(ToR)$

⊛ $(S\cap T)oR \neq (SoR)\cap(ToR)$

Subject: Year: Month: Date:

$R=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$

$S=\{(2,3),(3,2),(1,3)\}$

$R\cap S=\{(1,3)\}$

نکته) R و S بازتاب $\longleftrightarrow$ $R\cap S$ بازتاب

R و S متقارن $\longleftarrow$ $R\cap S$ متقارن

R و S پادمتقارن $\longleftarrow$ $R\cap S$ پادمتقارن

R و S متعدی $\longleftarrow$ $R\cap S$ متعدی

نتیجه) R و S هر خاصیتی داشته باشند آنگاه $R\cap S$ نیز آن خاصیت را دارد.

مثال: R و S بازتاب $\longleftarrow$ $R-S$ ضد بازتاب

R,S متقارن $\longleftarrow$ $R-S$ متقارن

R,S پادمتقارن $\longleftarrow$ $R-S$ پادمتقارن

R,S متعدی $\longleftarrow$ $R-S$ نمی‌شه نظر داد

مثال: R و S بازتاب $\longleftarrow$ $R\Delta S$ ضد بازتاب

R و S متقارن $\longleftarrow$ $R\Delta S$ متقارن

R و S پادمتقارن $\longleftarrow$ $R\Delta S$ نمی‌شه نظر داد.

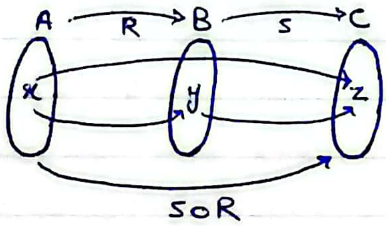
R و S متعدی $\longleftarrow$ $R\Delta S$ نمی‌شه نظر داد.

نکته) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$, $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

$\overline{(R\cup S)}=\overline{R}\cap\overline{S}$, $\overline{(R\cap S)}=\overline{R}\cup\overline{S}$

ترکیب روابط:

$R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$



$(x,y)\in R,(y,z)\in S \Rightarrow (x,z)\in SoR$

مثال) $A=B=C=\{1,2,3,4\}$

* فقط خاصیت بازتاب در $R_1 o R_2$ به حاصل منتقل میشه.

$R=\{(1,2),(1,3),(2,4),(4,3)\}$

$S=\{(3,3),(3,1),(1,3),(4,2)\}$

$SoR=\{(1,3),(1,1),(2,2),(4,3),(4,1)\}$

$RoS=\{(3,2),(3,3),(4,4)\}$

$RoR=R^2=\{(1,4),(2,3)\}$

$SoS=S^2=\{(3,3),(3,1),(1,3),(1,1)\}$

نکته) $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$

$(x,y)\in(RoS)^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in RoS \Leftrightarrow (y,z)\in S , (z,x)\in R$

$\Leftrightarrow (z,y)\in S^{-1},(x,z)\in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in S^{-1}oR^{-1}$

بیان ریاضی خواص روابط:

① R بازتاب است $\longleftrightarrow$ $\Delta\subseteq R$

② R متقارن است $\longleftrightarrow$ $R=R^{-1}$

③ R پادمتقارن است $\longleftrightarrow$ $R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$

④ R متعدی است $\longleftrightarrow$ $R^2\subseteq R$

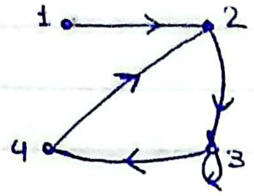
$R : A \longrightarrow B$ ⟸ $R(x) = \{y \mid y \in B,\ xRy\}$ ⟵ y های عضو B که x با هاشون رابطه داره

$R \subseteq A\times B$ ⟹ $A_1 \subseteq A \Rightarrow R(A_1) = \{y \in B \mid xRy,\ x \in A_1\}$

Subject: $R(A_1 \cap A_2) \neq R(A_1) \cap R(A_2)$ Year. Month: Date:

توان رابطه - $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,2),(3,3)\}$

مثال :



$R\circ R = R^2 = \{(1,3),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3)\}$

$R^3 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

* $(x,y) \in R^2 \Longleftrightarrow$ از x به y مسیری (گشتی) به طول 2 باشد.

$R^\infty = R^+ = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

* $(x,y) \in R^\infty \Longleftrightarrow$ از x به y مسیری به هر طولی وجود داشته باشد. (از x به y حداقل یک مسیر به طول حداقل یک وجود داشته باشد).

$R^\infty = R\cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$, $|A| = n \Rightarrow R^\infty = R\cup R^2\cup R^3 \cup \dots \cup R^n$

$R^* = R^\infty \cup \Delta$ رابطه دسترس پذیری ، $(x,y) \in R^* \Longleftrightarrow$ از x به y مسیری به طول حداقل صفر باشد.

$A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{\ \} \Rightarrow R^\infty = \{\ \}$, $R^* = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)\}$

بستارها (closure):

① بستار بازتاب رابطه R کوچکترین رابطه شامل R است که بازتاب باشد. $R\cup\Delta$

② بستار متقارن رابطه R کوچکترین رابطه شامل R است که متقارن باشد. $R\cup R^{-1}$

③ بستار متعدی رابطه R کوچکترین رابطه شامل R است که متعدی باشد. R^∞

مثال) $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

بستار بازتاب R $= \{(1,2)(2,3)(3,4)(4,3)(4,4)(1,1)(2,2)(3,3)\}$

بستار متقارن R $= \{(1,2)(2,3)(3,4)(4,3)(4,4)(2,1)(3,2)\}$

بستار متعدی R $= \{(1,2)(2,3)(3,4)(4,3)(4,4)(1,3)(2,4)(3,3)(1,4)\}$

مثال) درست یا غلط؟

الف) بستار متقارن یک رابطه متعدی، متعدی است. ✗ $R = \{(1,2)\} \longrightarrow \{(1,2),(2,1)\}$ ✗

ب) بستار متعدی یک رابطه متقارن، متقارن است. ✓

ج) بستار متقارنِ بستار متعدی رابطه R با بستار متعدیِ بستار متقارن R مساوی است. ✗

د) بستار متقارنِ بستار بازتاب R با بستار بازتابِ بستار متقارن R مساوی است. ✓

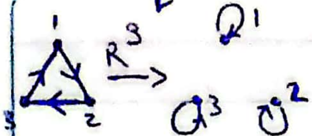
$R \xrightarrow{\text{بستار بازتاب}} R\cup\Delta \xrightarrow{\text{بستار متقارن}} (R\cup\Delta)\cup(R\cup\Delta)^{-1} = R\cup\Delta\cup R^{-1}$

$R \xrightarrow{\text{بستار متقارن}} R\cup R^{-1} \xrightarrow{\text{بستار بازتاب}} R\cup R^{-1}\cup\Delta$

* $A\cup B$ کوچکترین مجموعه شامل A و B است.

* $A\cap B$ بزرگترین مجموعه زیرمجموعه A و B است.

* فرض کنید در گراف یک رابطه، k تا سیکل جدا از هم داریم که سیکل C_i شامل m_i راس است و $m_1+m_2+\dots+m_k=m$ که m تعداد اعضای مجموعه A است. رابطه R هم روی مجموعه A تعریف شده. اگر رابطه R رو به توان مینیمم m_iها برسونیم در یکی از سیکل ها (سیکل با راس مینیموم) طوقه پدید می آید.



مثال) فرض کنید R و S روابطی متعدی روی مجموعه A باشند. مطلوبست:

الف) کوچکترین رابطه متعدی شامل R و S $\quad (R\cup S)^{\infty}$

ب) بزرگترین رابطه متعدی زیرمجموعه R و S $\quad R\cap S$

ج) بزرگترین رابطه متعدی شامل R و S $\quad A^2$

د) کوچکترین رابطه متعدی زیرمجموعه R و S $\quad \varnothing$

ماتریس روابط)

$A=\{1,2,3\}$

$R=\{(1,1)(1,3)(2,3)(3,2)\}$

$S=\{(1,1)(2,1)(2,3)(3,1)(3,3)\}$

$$M_R=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1&2&3\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array} \qquad M_S=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1&2&3\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

* $\underset{\text{Join}}{M_R \vee M_S}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=M_{R\cup S}$ $\qquad$ * $\underset{\text{meet}}{M_R \wedge M_S}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=M_{R\cap S}$

* $\underset{\text{ضرب بولی}}{M_R \odot M_S}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}=M_{S\circ R}$

$\ll$ به معنی ضعیف تر بودن است.

خواص روابط از روی ماتریس)

رابطه R بازتاب است $\longleftrightarrow$ $I \ll M_R$ $\qquad \Delta \subseteq R$

رابطه R متقارن است $\longleftrightarrow$ $M_R=M_R^t$ $\qquad R=R^{-1}$

رابطه R پادمتقارن است $\longleftrightarrow$ $M_R \wedge M_R^t \ll I$ $\qquad R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$

رابطه R متعدی است $\longleftrightarrow$ $M_R\odot M_R \ll M_R$ $\qquad R^2\subseteq R$

مثال) با کمک ماتریس مقابل خواص R را بررسی کنید؟

$$M_R=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

بازتاب ✓ تقارن ✗ پادتقارن ✓ تعدی ✗

رابطه هم‌ارزی (Equivalence): رابطه ای که بازتاب، متقارن و متعدی باشد.

* رابطه موازی بودن در بین خطوط صفحه ✓
* رابطه داشتن حداقل یک زاویه مساوی در بین مثلث ها ✗
* رابطه برادری روی مجموعه انسان ها ✗
* رابطه برادری روی مجموعه مرد ها ✗

* رابطه بازگشتی افرازهای یک مجموعه n عضوی: $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}P_k$

افراز: Partition: مجموعه‌ها $A_1, A_2, \dots, A_n$ را یک افراز برای مجموعه A گویند هرگاه ۳ شرط زیر برقرار باشند:

① A_i ها هیچ یک تهی نباشند $A_i\neq\varnothing$

② A_i ها دو به دو متمایز باشند $A_i\cap A_j=\varnothing$ $\quad i\neq j$

③ اجتماع A_i ها A باشد $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A$

سوال) مجموعه 3 عضوی چند تا افراز دارد؟ $A=\{1,2,3\}$

$P_1=[\{1\},\{2\},\{3\}] \longleftrightarrow R_1=\{(1,1)(2,2)(3,3)\}$

$P_2=[\{1,2\},\{3\}] \longleftrightarrow R_2=\{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)(3,3)\}$

$P_3=[\{1,3\},\{2\}] \longleftrightarrow R_3=\{(1,1)(1,3)(3,1)(3,3)(2,2)\}$

$P_4=[\{2,3\},\{1\}] \longleftrightarrow R_4=\{(2,2)(2,3)(3,2)(3,3)(1,1)\}$

$P_5=[\{1,2,3\}] \longleftrightarrow R_5=A^2$

سوال) مجموعه ۴ عضوی چند تا افراز (چند تا رابطه هم‌ارزی) دارد؟ $A=\{1,2,3,4\}$

$x,x,x,x \longrightarrow 1$

$xx,x,x \longrightarrow 6$

$xxx,x \longrightarrow 4$

$xx,xx \longrightarrow 3 \longrightarrow \binom{4}{2}\frac{1}{2}=\frac{4\times3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$

$xxxx \longrightarrow 1$

$\longrightarrow$ 15 حالت

مثال) روی $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ رابطه $R=\{(x,y)\mid$ $x-y$ بر 3 بخش‌پذیر است$\}$ چه تعداد زوج مرتب دارد؟

$R=\{(1,1)(2,2)\dots(10,10)(1,4)(4,1)\dots\}$

بازتاب / تقارن / تعدی /

$[\{1,4,7,10\},\{2,5,8\},\{3,6,9\}]$ $\quad x-y=3k$

$y-z=3k'$

$x-z=3k''$

$|R|=16+9+9=34$

نتیجه: رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه m روی مجموعه $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}$ را به m کلاس افراز می‌کند:

$\underbrace{\{mk\}}_{[0]}, \underbrace{\{mk+1\}}_{[1]}, \underbrace{\{mk+2\}}_{[2]}, \dots, \underbrace{\{mk+(m-1)\}}_{[m-1]}$

مثال) روابط زیر روی مجموعه R^2 تعریف شده‌اند. کدام هم‌ارزی است و اگر هست R^2 یا صفحه را چگونه افراز می‌کند؟

روابط $\subseteq R^2\times R^2 \quad ((a,b),(c,d))$

① $(a,b)R(c,d): a+d=b+c$

بازتاب: $\forall(a,b)\in R^2: (a,b)R(a,b): a+b=b+a$ ✓

تقارن: $\forall(a,b),(c,d)\in R^2: (a,b)R(c,d)\longrightarrow(c,d)R(a,b)$ ✓

$a+d=b+c \qquad c+b=d+a$

Subject : Year: Month: Date:

$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in R^2 : \underbrace{(a,b)R(c,d)}_{a+d=b+c}, \underbrace{(c,d)R(e,f)}_{c+f=d+e} \rightarrow \underbrace{(a,b)R(e,f)}_{a+f=b+e}$

$\Rightarrow a+\cancel{d}+\cancel{c}+f=b+\cancel{c}+\cancel{d}+e \Rightarrow a+f=b+e$ ✓ تعدی

$[a]=\{x \mid xRa\}$ $\quad [(a,b)]=\{(x,y)\mid \underbrace{(x,y)R(a,b)}_{x+b=y+a}\} \Rightarrow y=x+b-a$

$[(0,0)]=\{(x,y)\mid \underbrace{(x,y)R(0,0)}_{x+0=y+0}\} \Rightarrow x=y$

2) $(a,b)R(c,d) : \underline{a+b=c+d}$ ✓

$y=-x+a+b \leftarrow a+b=x+y$

3) $(a,b)R(c,d) : a+c=b+d$ ✗

4) $(a,b)R(c,d) : ad=bc$

$(3,4)R(0,0),\ (0,0)R(5,6) \rightarrow (3,4)R(5,6)$ ✗

رابطه‌ی شماره‌ی 4 روی R^2 تعدی ندارد پس هم‌ارزی نیست ولی روی $R^2-\{(0,0)\}$ هم‌ارز هست.

$ay=bx \rightarrow y=\frac{b}{a}x$

5) $(a,b)R(c,d) : ab=cd$ $\quad ab=xy \Rightarrow y=\frac{ab}{x}$

6) $(a,b)R(c,d) : a^2+d=c^2+b$

بازتاب $\quad (a,b)R(a,b) : a^2+b=a^2+b$ ✓

تقارن $\quad (a,b)R(c,d) \rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

$\quad a^2+d=c^2+b \qquad c^2+b=a^2+d$

تعدی $\quad (a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f) \rightarrow (a,b)R(e,f)$ ✓

$\quad a^2+d=c^2+b \qquad c^2+f=e^2+d \qquad a^2+f=e^2+b$

$\quad a^2+\cancel{d}+\cancel{c^2}+f=\cancel{c^2}+b+e^2+\cancel{d}$

$\quad a^2+y=x^2+b \rightarrow y=x^2+b-a^2$

Subject : Year: Month. Date:

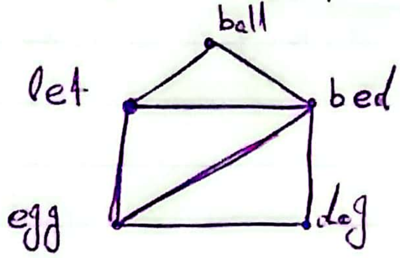
رابطه سازگاری: رابطه‌ای است که بازتابی و متقارن باشد.

تعداد روابط سازگاری روی مجموعه n عضوی: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

مثال) روی مجموعه $A=\{ball, bed, dog, egg, let\}$ ، رابطه‌ی $R=\{(x,y) \mid$ x و y حرف مشترک دارد$\}$

چه خواصی دارد؟ چند زوج مرتب دارد؟

حل: بازتابی، تقارنی ✓ تعدی ✗ سازگاری هست ولی هم‌ارزی نیست $R=\{(ball,ball), \dots\}$



رابطه بین کلمات رو با ماتریس هم می‌تونیم نشون بدیم.

اصل لانه کبوتر: فرض کن n کبوتر وارد k لانه شده‌اند طوری که $n>k$. آنگاه لانه‌ای وجود دارد که در آن دست‌کم 2 کبوتر خواهند بود.

مثال) نشان دهید اگر 6 عدد متفاوت از $\{1,2,3,\dots,10\}$ انتخاب کنیم حتماً 2 عدد وجود دارند که جمع‌شان 11 می‌شود.
$\{\underbrace{1,10},\underbrace{2,9},\underbrace{3,8},\underbrace{4,7},\underbrace{5,6}\}$

مثال) حداقل چند عدد متفاوت از مجموعه $\{1,2,3,\dots,11\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم جمع 2 عدد 12 می‌شود؟ 7 تا
$\{\underbrace{1,11},\underbrace{2,10},\underbrace{3,9},\underbrace{4,8},\underbrace{5,7},6\}$

مثال) حداقل چند عدد متفاوت از دنباله‌ی $1,4,7,10,\dots,100$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم جمع 2 عدد 104 می‌شود؟
$1\leq 3k+1\leq 100 \longrightarrow 0\leq k\leq 33$

19 تا
$1,\underbrace{4,100},\underbrace{7,97},\dots,\underbrace{52}$

34 تا عدد داریم، میشه 16 جفت و دو تا تک. اگه من 19 تا انتخاب کنم حتماً دو عدد جمع‌شون 34 میشه.

مثال) حداقل چند نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 3 قرار دهیم تا مطمئن شویم فاصله حداقل 2 تا از این نقاط از 1 کمتر است؟ 10 تا

مثال) در مدت 30 روز مسابقه، تیم A روزی حداقل یک مسابقه می‌دهد. این تیم در مدت 30 روز حداکثر 45 مسابقه می‌دهد. نشان دهید روزهای متوالی وجود دارند که مجموع بازی‌های تیم A در این روزها 14 است؟

$a_n =$ جمع بازی‌های تیم A در n روز اول

$a_1 =$ جمع تعداد بازی روز اول تیم A

$a_2 =$ " " " اول و دوم تیم A

$a_3 =$ جمع تعداد بازی در 3 روز اول

$a_i - a_j = 14$

$a_{30} =$ کل بازی‌های تیم A

$1\leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{30} \leq 45$

$\downarrow +14$

$15 \leq a_1+14 \leq \dots \leq a_{30}+14 \leq 59$

$1\leq a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14 \leq 59$

* اگر سوال گفته بود چند تا عدد انتخاب کنیم یا اینکه چند نفر در مسابقه شرکت کنند تا جمع شون برابر فلان مقدار شه یا دو تا هم اختلاف‌شون، میاییم حالت های مختلف را بررسی می کنیم (دسته بندی اعداد یا جمع امتیازات در حالات مختلف) و سپس به جواب میرسیم.

Subject : Year: Month: Date:

مثال) نشان بدهید که اگر $n+1$ عدد متفاوت از $\{1,2,3,\dots,2n\}$ انتخاب کنیم، آنگاه:

الف - حداقل 2 عدد انتخاب شده‌اند که اختلاف‌شان n باشد.

ب - حداقل 2 عدد انتخاب شده‌اند که جمع آن‌ها $2n+1$ است.

ج - حداقل 2 عدد انتخاب شده‌اند که نسبت به هم اول هستند.

الف) $\{\underbrace{1,n+1}, \underbrace{2,n+2}, \underbrace{3,n+3}, \dots, \underbrace{n,2n}\}$

ب) $\{1,2n, 2,2n-1, 3,2n-2, \dots, n,n+1\}$

ج) $\{1,2, 3,4, 5,6, \dots, 2n-1,2n\}$

تعمیم لانه کبوتر: 4 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 2 کبوتر است.

5 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 2 کبوتر است.

6 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 2 کبوتر است.

7 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 3 کبوتر است.

8 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 3 کبوتر است.

9 کبوتر وارد 3 لانه می شوند ← حداقل یک لانه شامل حداقل 3 کبوتر است.

* n کبوتر وارد k لانه شوند آنگاه حداقل یک لانه شامل حداقل $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ کبوتر است.

* در سال کنکور 98، 1400 نفر ویدیوی گسسته را تهیه کردند، حداقل چند نفر از این افراد ماه تولد یکسان دارند؟

$$\left\lceil \frac{1400}{12} \right\rceil = 117$$

مثال - در یک کیسه بی‌شمار توپ به 3 رنگ مختلف و ساخت 4 کشور مختلف وجود دارد. حداقل چند توپ به تصادف از این کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم حداقل 5 توپ یک‌جور (رنگ و کشور یکی) خارج کرده‌ایم؟

انواع توپ $= 3 \times 4 = 12$ $\qquad \left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil = 5 \longrightarrow n_{min} = ?$

$$n_{min} = 4 \times 12 + 1 = 49$$

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = P \longrightarrow n_{min} = (P-1) \times K + 1$$

رابطه ترتیب (جزئی): بازتابی، پادمتقارن، متعدی

$A = \{1,2,3\}$

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2)\}$

$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (1,3)\}$

* تابع یک به یک و پوشا = ایزومورفیسم (هم‌ریختی) | * مجموعه خوش ترتیب یعنی اولاً عضو آغاز داشته باشه و ترتیب کلی باشه

Subject: Year: Month: Date:

ترتیب کامل: ترتیبی است که هر دو عضو از A با هم رابطه داشته باشند یعنی اگر $x,y \in A$ حتماً یا xRy یا yRx.

مثال) رابطه $\leq$ روی $\mathbb{Z}$: $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ a \leq b\}$

بازتاب: $a \leq a$ | پادتقارن: $a \leq b,\ b \leq a \to a = b$ | تعدی: $a \leq b,\ b \leq c \to a \leq c$

مثال) رابطه $\subseteq$ روی $P(A)$: Powerset(A)

$A = \{1,2\}$

$P(A) = \{\{\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\subseteq$ روی $P(A)$ $= \{(\{\},\{\})(\{\},\{1\})(\{\},\{2\})(\{\},\{1,2\})(\{1\},\{1\})$
$(\{1\},\{1,2\})(\{2\},\{2\})(\{2\},\{1,2\})(\{1,2\},\{1,2\})\}$

XYZ: $x \subseteq x$

$x \subseteq y,\ y \subseteq x \longrightarrow x = y$

$x \subseteq y,\ y \subseteq z \longrightarrow x \subseteq z$

مثال) رابطه عاد کردن روی $\mathbb{Z}$: $a \mid b \longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ak$

بازتاب: $a \mid a$ ✓ | پادتقارن: $a \mid b,\ b \mid a \Rightarrow a = \pm b$ ✗

تعدی: $a \mid b,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c$

پاست (Partially ordered set) یا مجموعه با ترتیب جزئی:

مثال) $(D_{12}, \mid)$ یک پاست است. گراف آن را بکشید.

$D_n =$ مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت عدد n

$D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

D_{12} عاد کردن روی $= \{(a,b) \mid a,b \in D_{12},\ a \mid b\} = \{(1,1) \dots\}$

- پاست بازتاب است پس همه رئوس طوقه دارند و لازم نیست طوقه‌ها را نشان دهیم

- پاست متعدی است یعنی اگر aRb و bRc حتماً aRc. یعنی اگر یال (a,b)، (b,c) وجود دارند حتماً یال (a,c) هم وجود دارد پس (a,c) را نکش.

- پاست پادمتقارن است پس همه یال‌ها یک سویه هستند پس می‌شه گراف را طوری کشید که جهت‌ها به سمت بالا باشند. پس جهت‌ها را نشان نمی‌دهیم.

① $(D_{20}, \mid)$ ② $(D_6, \mid)$ ③ $(D_{30}, \mid)$ ④ $(P(A), \subseteq)$ $A = \{a,b\}$

⑤ $(P(A), \subseteq)$ $A = \{a,b,c\}$ ⑥ $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ ⑦ $(D_{16}, \mid)$

⑧ $(\{2,3,4,5,6,25,8,7\}, \mid)$

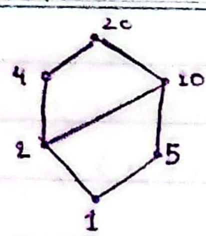
① $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$

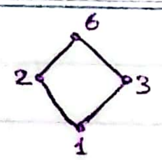
* اگر پاست A متناهی باشد و فقط یک ماکسیمال داشته باشد، آن ماکسیموم است.

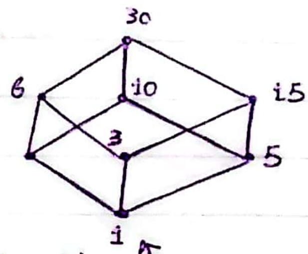
* مجموعه $n,\dots,0,1$ عضوی A، مجموعه A^2 دارای $(n+1)^2$ عضو دارد.

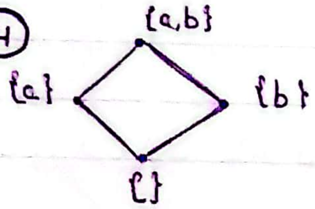
Subject :

Year: Month: Date:

①


②


③


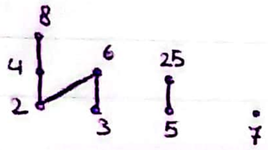
④


⑤ اینو معرف با شکل شماره ی 3

⑥


زنجیر (ترتیب خطی)

⑦


⑧


مینیمال و ماکسیمال: فرض کن (A,R) یک پاست است. $a\in A$ را مینیمال گویند هرگاه $\nexists x\in A: xRa$ $(x\neq a)$

و $a\in A$ را ماکسیمال گویند هرگاه: $\nexists x\in A: aRx$ $(x\neq a)$

مینیمم و ماکسیموم: فرض کن (A,R) یک پاست است $a\in A$ را مینیمم گویند هرگاه $\forall x\in A: aRx$

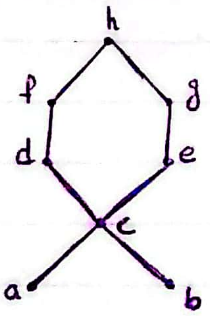
و $a\in A$ را ماکسیمم گویند هرگاه $\forall x\in A: xRa$

* پاست محدودی که فقط یک مینیمال دارد، آن مینیمال، مینیمم است.
* پاست محدودی که فقط یک ماکسیمال دارد، آن ماکسیمال ماکسیمم است.

کران بالا و کران پایین: فرض کن (A,R) یک پاست است و $B\subseteq A$، آنگاه $a\in A$ را کران بالای B گویند هرگاه: $\forall x\in B: xRa$

$a\in A$ را کران پایین B گویند هرگاه: $\forall x\in B: aRx$

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$



$B=\{d,e\}$ کران بالا $=\{f,g,h\}$ ، کران پایین $=\{c,a,b\}$

$D=\{d,f,g\}$ کران بالا $=\{h\}$ ، کران پایین $=\{d,c,a,b\}$

$E=\{a,b,g\}$ کران بالا $=\{g,h\}$ ، کران پایین $=\{\ \}$

برای محاسبه ب.م.م دو عدد 12 و 6، مقسوم علیه های هر کدام رو جداگونه حساب کن سپس از بین اون ها اشتراک بگیر و بزرگترین شون رو بردار.

$12, 6$ ب.م.م $\Rightarrow D_{12} = \{1,2,3,4,6\}$ و $D_6 = \{1,2,3,6\}$

Subject: Year: Month: Date:

کوچکترین کران بالا (Least upper bound (LUB)) سوپریمم

بزرگترین کران پایین (Greatest Lower bound (GLB)) اینفیمم

سوال) در $(D_n, |)$ اگر $\{a,b\} \subseteq D_n$ داریم:

$LUB\{a,b\} = LCM(a,b)$ ک.م.م

$GLB\{a,b\} = GCD(a,b)$ ب.م.م

$(D_{900}, |)$ $LUB\{30,45\} = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

$GLB\{30,45\} = 3 \times 5 = 15$

سوال) در $(P(A), \subseteq)$، $\underset{\text{اجتماع}}{\underline{LUB}}$ و $\underset{\text{اشتراک}}{\underline{GLB}}$ چه مفهومی دارد؟ $A = \{a,b,c\}$

$LUB(\{a\},\{b\}) = \{a,b\}$

$GLB(\{a\},\{b\}) = \{\ \}$

لاتیس (شبکه - مشبکه): یاست (A,R) را لاتیس گویند هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی از A هم LUB و هم GLB داشته باشد.

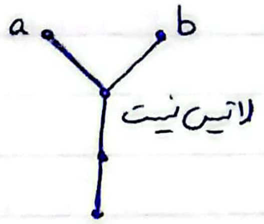
$LUB\{a,b\} = a \vee b$

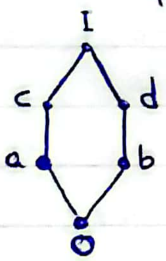
$GLB\{a,b\} = a \wedge b$

نتیجه: لاتیس محدود هم مینیمم دارد و هم ماکسیمم.

مینیمم $= 0$

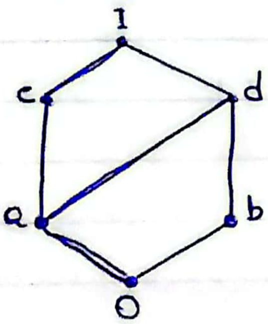
ماکسیمم $= I$





$a \vee b = I$ $a \wedge b = 0$

$a \vee c = c$ $a \wedge c = a$



$a \vee b = d$ $c \vee d = I$

$a \wedge b = 0$ $c \wedge d = a$

$a \vee c = c$

$a \wedge c = a$

نتیجه: $(D_n, |)$ ، $(P(A), \subseteq)$ و زنجیرها همگی لاتیس هستند.

خواص لاتیس: فرض کن (A,R) لاتیس است و $a,b,c,d \in L$

1) $a \leq b \iff a \vee b = b$ ، $a \wedge b = a$

2) $a \vee 0 = 0$ ، $a \wedge I = a$ عضو همانی

3) $a \vee I = I$ ، $a \wedge 0 = 0$ عضو غلب

4) $a \vee a = a$ ، $a \wedge a = a$ خودتوانی

5) $a \vee b = b \vee a$ ، $a \wedge b = b \wedge a$ جابجایی

6) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ، $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ شرکت پذیری

7) $a \vee (a \wedge b) = a$ ، $a \wedge (a \vee b) = a$ جذب

* رابطه تماماً مرتب: زنجیر * رابطه $(P(A), \subseteq)$ وقتی $|A|=n$، دارای $n!$ زنجیر ماکسیمال است

* ضرب دو ترتیب کلی لزوماً نمیشه ترتیب کلی (زنجیر)

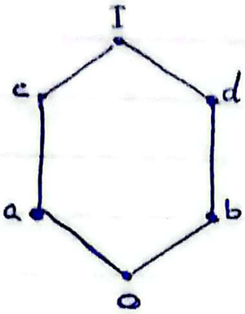
Subject : * اتم در لاتیس اول‌های هستن که مینیمم بعدشون O باشه. Year: Month: Date:

⑧ $a \le b,\ a \le c \Rightarrow a \le b \wedge c \Rightarrow a \le b \vee c$

⑨ $b \le a,\ c \le a \Rightarrow b \vee c \le a \Rightarrow b \wedge c \le a$

(اول گره‌های در لاتیس که مقدم بلافصل‌شون نود O باشه.)

مکمل: a و b را مکمل هم گویند هرگاه $a \wedge b = O$ و $a \vee b = I$



* وقتی تحویل ناپذیر در لاتیس
اول‌های هستن که دو تا مقدم
بلافصل نداشته باشن.

 وقت تحویل ناپذیر نیست.

$\bar{a} = b, d$ $\quad a \vee b = I,\ a \wedge b = O$

$a \vee d = I,\ a \wedge d = O$

$\bar{b} = a, c$ $\quad \bar{d} = a, c$

$\bar{c} = b, d$ $\quad \bar{O} = I$

* رشد تحویل ناپذیر یعنی عنصر
که از And دو عنصر دیگه پدید نیاد.

این رشد تحویل ناپذیر نیست!

نکته) $(D_n, |)$ در صورتی مکمل پذیر است که n به اعداد اول متمایز تجزیه گردد یعنی وقتی n را تجزیه کردیم همه عوامل توان یک داشته باشند.

$(D_{30}, |)$ $\quad 30 = 2 \times 3 \times 5$ همه عضوهای D_{30} مکمل دارند

$\bar{2} = 15,\ \bar{3} = 10,\ \bar{5} = 6,\ \bar{6} = 5$

$(D_{20}, |)$ $\quad 20 = 2^2 \times 5$ مکمل پذیر نیست

$\bar{4} = 5,\ \bar{5} = 4,\ \bar{2} = \times,\ \overline{10} = \times$

$(D_{900}, |)$ $\quad 900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ مکمل پذیر نیست

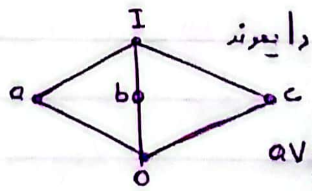
$\bar{4} = 9 \times 25,\ \bar{9} = 2^2 \times 5^2,\ \overline{2^2 \times 3^2} = 5^2,\ \bar{2} = \times,\ \bar{6} = \times$

لاتیس توزیع پذیر: لاتیس $(L, \le)$ را توزیع پذیر گویند هرگاه:

$\forall a, b, c \in L:$ ① $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

② $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$\bar{a} = b, c$



$\underbrace{a \vee \underbrace{(b \wedge c)}_{O}}_{a} \neq \underbrace{\underbrace{(a \vee b)}_{I} \wedge \underbrace{(a \vee c)}_{I}}_{I}$

نکته - اگر در لاتیسی عضوی بیش از یک مکمل داشت آنگاه توزیع پذیر نیست.

← به عنوان مثال شکل بالا سمت چپ صفحه توزیع پذیر نیست.

زیرشبکه (sublattice): فرض کن $(A, \le)$ یک لاتیس است و $B \subseteq A$، $(B, \le)$ را زیرشبکه $(A, \le)$ گویند هرگاه: اولاً $(B, \le)$ خود یک لاتیس باشد. ثانیاً هر دو عضو $a, b \in B$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ بشود همانی که در A هست.