Multiple Linear Regression

Author : Amirhossein Khadivi

Linkedin

Github

ابتدا داده ها را وارد کرده و در غالب یک دیتافریم نمایش میدهیم.

In [20]:

```
import pandas as pd

data = pd.DataFrame(
    {
        'y'  : [1.45,1.93,0.81,0.61,1.55,0.95,0.45,1.14,0.74,0.98,1.41,0.81,0.89
               ,0.68,1.39,1.53,0.91,1.49,1.38,1.73,1.11 ,1.68,0.66,0.69,1.98],
        'x1' : [0.58,0.86,0.29,0.20,0.56,0.28,0.08,0.41,0.22,0.35,0.59,0.22
               ,0.26,0.12,0.65,0.70,0.30,0.70,0.39,0.72,0.45,0.81,0.04,0.20,0.95],
        'x2' : [0.71,0.13,0.79,0.20,0.56,0.92,0.01,0.60,0.70,0.73,0.13,
               0.96,0.27,0.21,0.88,0.30,0.15,0.09,0.17,0.25,0.30,0.32,0.82,0.98,0.00]
    }
    , dtype = float
)
data
```

Out[20]:

	y	x1	x2
0	1.45	0.58	0.71
1	1.93	0.86	0.13
2	0.81	0.29	0.79
3	0.61	0.20	0.20
4	1.55	0.56	0.56
5	0.95	0.28	0.92
6	0.45	0.08	0.01
7	1.14	0.41	0.60
8	0.74	0.22	0.70
9	0.98	0.35	0.73
10	1.41	0.59	0.13
11	0.81	0.22	0.96
12	0.89	0.26	0.27
13	0.68	0.12	0.21
14	1.39	0.65	0.88
15	1.53	0.70	0.30
16	0.91	0.30	0.15
17	1.49	0.70	0.09

	y	x1	x2
18	1.38	0.39	0.17
19	1.73	0.72	0.25
20	1.11	0.45	0.30
21	1.68	0.81	0.32
22	0.66	0.04	0.82
23	0.69	0.20	0.98
24	1.98	0.95	0.00

در ادامه داده های مربوط به متغیر پاسخ را در یک متغیر و داده های متغیرهای توضیحی را هم در یک متغیر دیگر ذخیره میکنیم

و ابعاد متغیر ها را اصلاح میکنیم.

y : متغیر پاسخ

x : ماتریس متغیرهای توضیحی

x1 : متغیر توضیحی اول

x2 : متغیر توضیحی دوم

In [21]:

```
import numpy as np
y = np.array(data['y']).reshape(25,1)
x = np.array(data[['x1','x2']]).reshape(25,2)
```

با کمک کتابخانه statmodels یک مدل خطی چندگانه به داده هایمان برازش میدهیم.

به صورت پیشفرض مدل را بدون عرض از مبدا برازش میدهد ، بنابراین با تابع add_constant عرض از مبدا را به مدل اضافه میکنیم. تابع OLS

In [22]:

```
import statsmodels.api as sm
xc = sm.add_constant(x)
lm1 = sm.OLS(data['y'] , xc).fit()
lms1 = lm1.summary()
lms1
```

Out[22]:

OLS Regression Results

Dep. Variable:	y	**R-squared:**	0.940
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.934
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	172.0
Date:	Fri, 15 Apr 2022	**Prob (F-statistic):**	3.70e-14
Time:	15:07:56	**Log-Likelihood:**	20.696
No. Observations:	25	**AIC:**	-35.39
Df Residuals:	22	**BIC:**	-31.74
Df Model:	2		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
const	0.4335	0.066	6.571	0.000	0.297	0.570
x1	1.6530	0.095	17.355	0.000	1.455	1.851
x2	0.0039	0.075	0.053	0.958	-0.151	0.159

Omnibus:	6.353	**Durbin-Watson:**	2.228
Prob(Omnibus):	0.042	**Jarque-Bera (JB):**	4.413
Skew:	0.963	**Prob(JB):**	0.110
Kurtosis:	3.724	**Cond. No.**	6.29

Notes:

[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

خروجی مدل را به جدول آنالیز واریانس ، ضرایب و آزمون فرض ها ، آماره های مهم تقسیم. میکنیم

در جدول اول ستون اول تعداد نمونه(25) ، درجه آزادی مانده ها(22) ، درجه آزادی مدل(2) و در ستون دوم ضریب تعیین(0.94)،ضریب تعیین

تعدیل شده (0.934) ، آماره فیشر برای بررسی مناسبت مدل (172) و پی-مقدار آن تقریبا (0.000) محاسبه شده است

تحلیل ضریب تعیین در اینجا یعنی 94 درصد تغییرات توسط مدل بیان میشود.

همچنین به دلیل کوچکتر بودن پی-مقدار آماره فیشر از سطح معناداری 0.05 ، فرض جانشین آزمون ، یعنی مناسبت مدل یا مخالف صفر بودن ضرایب

تایید میشود.

در جدول دوم ، عرض از مبدا (0.4335) ، خطای استاندارد آن(0.066) ، همچنین برای آزمون فرض آن ، آماره تی محاسبه شده(6.571) و پی-مقدار آن(0.000) محاسبه شده است که به دلیل کوچکتر بودن آن از سطح معناداری 0.05 ، فرض

جانشین آزمون ، یعنی مخالف صفر بودن عرض از مبدا تایید میشود.

ضریب متغیر توضیحی اول(1.653) ، خطای استاندارد آن(0.095) ، همچنین برای آزمون فرض آن ، آماره تی محاسبه شده (17.355) و پی-مقدار آن (0.000) به

دست آمده است که به دلیل کوچکتر بودن از سطح معناداری 0.05 ، فرض جانشین آزمون یعنی مخالف صفر بودن ضریب متغیر تایید میشود

ضریب متغیر توضیحی دوم (0.0039) ، خطای استاندارد آن(0.075) ، همچنین برای آزمون فرض آن ، آماره تی محاسبه شده (0.053) و پی-مقدار آن(0.958) به

دست آمده است که به دلیل بزرگتر بودن از سطح معناداری 0.05 ، فرض صفر آزمون ، صفر بودن ضریب این متغیر تایید میشودو نتیجتا باید

باید از مدل حذف شود(البته با توجه به نزدیک صفر بودن براورد ضریب و خطای استاندارد آن که باعث پوشش دادن صفر میشود نیز میتوان به عدم

لزوم وجود این متغیر در مدل پی برد.

همچنین برای عرض از مبدا و ضرایب متغیرهای توضیحی فاصله اطمینان 95 درصدی محاسبه شده است:

عرض از مبدا : (0.297,0.57)

ضریب متغیر توضیحی اول : (1.455,1.851)

ضریب متغیر توضیحی دوم : (-0.151,0.159)

با توجه به طویل بودن بازه اطمینان ضریب متغیر توضیحی دوم و پوشش دادن صفر توسط این بازه نیز میتوانیم به عدم لزوم وجود این متغیر در مدل پی ببریم

در جدول سوم نیز آماره دوربین واتسون و همچنین آماره جارکی برا به همرا پی-مقدارش ارئه شده. که آماره دوربین واتسون به دلیل نزدیک بودن به 2

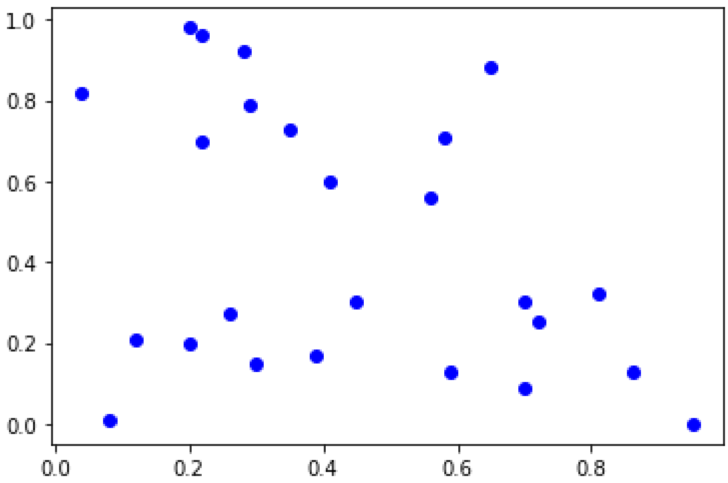
نشان از ناهمبسته بودن باقیمانده ها و پی-مقدار آماره جارکی برا به دلیل بزرگتر بودن از سطح معناداری 0.05 نشان از نرمال بودن توزیع مانده ها دارد

با توجه به عدم لزوم وجود متغیر توضیحی دوم در مدل با توجه آزمون فرض ضریب آن و همچنین تاییدیه های محک مدل بنابر آزمون مناسبت مدل

و ضریب تعیین چندگانه ، امکان وجود همخطی میان متغیرهای توضیحی وجود دارد که این ادعا را مورد بررسی قرار میدهیم

In [23]:

```
plt.scatter(x = data['x1'] , y = data['x2'] , color = 'blue')
plt.show()
```



نمودار پراکندگی متغیر توضیحی دوم را در مقابل متغیر توضیحی اول رسم میکنیم که هیچ الگویی در نمودار مشاهده نمیشود ، بنابراین نتیجه میگیریم که

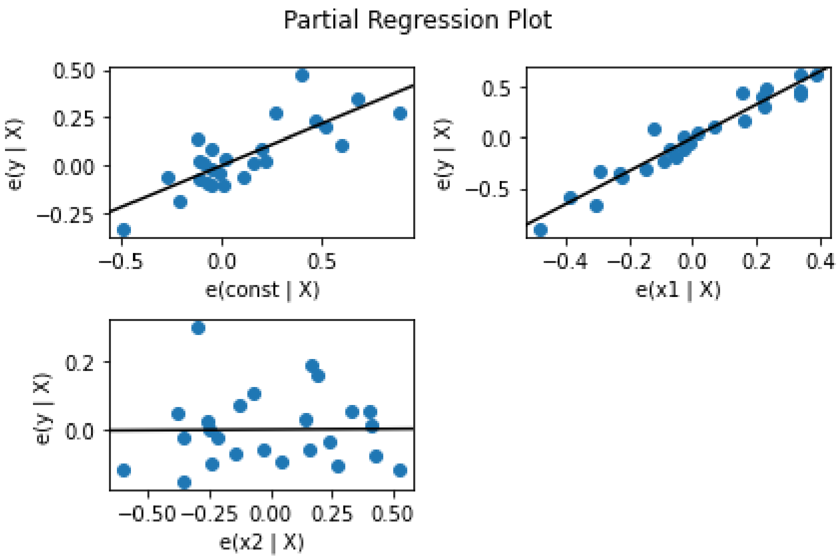
همخطی میان متغیرهای توضیحی وجود ندارد.

البته راه های استنباطی بیشتری برای بررسی همخطی وجود دارد که ما در اینجا به از طریق نمودار پراکندگی متغیرهای توضیحی بسنده میکنیم

حال برای بررسی فرض خطی بودن مدل و مشاهده نوع رابطه متغیرهای توضیحی با متغیر پاسخ ، نمودار متغیرهای اضافه شده را رسم میکنیم

In [24]:

```
z = sm.graphics.plot_partregress_grid(lm1)
z.tight_layout(pad=1.0)
```



با توجه به نمودار سمت راست سطر اول یک رابطه خطی تقریبا قوی میان متغیرپاسخ و متغیر توضیحی اول مشاهده میشود

نمودار سطر دوم نشان میدهد که هیچ رابطه ای میان متغیرپاسخ و متغیرتوضیحی دوم وجود ندارد که دلیل بر عدم لزوم وجود این متغیر در مدل است

با توجه به استدلال های بصری و استنباطی ای که داشتیم متغیرتوضیحی دوم را از مدل حذف کرده و یک مدل خطی ساده میان متغیرپاسخ و متغیر توضیحی اول برازش میدهیم

بنابراین یک مدل خطی ساده میان متغیر پاسخ و متغیر توضیحی اول برازش میدهیم

In [25]:

```
xc1 = sm.add_constant(x[:,0])
lm2 = sm.OLS(data['y'] , xc1).fit()
lms2 = lm2.summary()
lms2
```

Out[25]:

OLS Regression Results

Dep. Variable:	y	**R-squared:**	0.940
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.937
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	359.6
Date:	Fri, 15 Apr 2022	**Prob (F-statistic):**	1.54e-15
Time:	15:08:13	**Log-Likelihood:**	20.695
No. Observations:	25	**AIC:**	-37.39
Df Residuals:	23	**BIC:**	-34.95
Df Model:	1		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
const	0.4361	0.044	9.913	0.000	0.345	0.527
x1	1.6512	0.087	18.963	0.000	1.471	1.831

Omnibus:	6.216	**Durbin-Watson:**	2.229
Prob(Omnibus):	0.045	**Jarque-Bera (JB):**	4.300
Skew:	0.954	**Prob(JB):**	0.116

Kurtosis:	3.697	**Cond. No.**	4.75

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

خروجی مدل را به جدول آنالیز واریانس ، ضرایب و آزمون فرض ها ، آماره های مهم تقسیم میکنیم.

در جدول اول ستون اول تعداد نمونه(25) ، درجه آزادی مانده ها(23) ، درجه آزادی مدل(1) و در ستون دوم ضریب تعیین(0.94)،ضریب تعیین

تعدیل شده (0.937) ، آماره فیشر برای بررسی مناسبت مدل (369.6) و پی-مقدار آن تقریبا (0.000) محاسبه شده است

تحلیل ضریب تعیین در اینجا یعنی 94 درصد تغییرات توسط مدل بیان میشود.

همچنین به دلیل کوچکتر بودن پی-مقدار آماره فیشر از سطح معناداری 0.05 ، فرض جانشین آزمون ، یعنی مناسبت مدل یا مخالف صفر بودن ضرایب

تایید میشود.

در جدول دوم ، عرض از مبدا (0.4361) ، خطای استاندارد آن(0.044) ، همچنین برای آزمون فرض آن ، آماره تی محاسبه شده(9.913) و پی-مقدار آن(0.000) محاسبه شده است که به دلیل کوچکتر بودن آن از سطح معناداری 0.05 ، فرض

جانشین آزمون ، یعنی مخالف صفر بودن عرض از مبدا تایید میشود.

ضریب متغیر توضیحی (1.6512) ، خطای استاندارد آن(0.087) ، همچنین برای آزمون فرض آن ، آماره تی محاسبه شده (18.963) و پی-مقدار آن (0.000) به

دست آمده است که به دلیل کوچکتر بودن از سطح معناداری 0.05 ، فرض جانشین آزمون یعنی مخالف صفر بودن ضریب متغیر تایید میشود

همچنین برای عرض از مبدا و ضریب متغیر توضیحی فاصله اطمینان 95 درصدی محاسبه شده است:

عرض از مبدا : (0.345,0.527)

ضریب متغیر توضیحی اول : (1.471,1.831)

در جدول سوم نیز آماره دوربین واتسون و همچنین آماره جارکی برا به همرا پی-مقدارش ارئه شده که آماره دوربین واتسون به دلیل نزدیک بودن به 2 .

نشان از ناهمبسته بودن باقیمانده ها و پی-مقدار آماره جارکی برا به دلیل بزرگتر بودن از سطح معناداری 0.05 نشان از نرمال بودن توزیع مانده ها دارد

In [26]:
```
fit_value = lm2.predict(xc1)
fit_value
```

Out[26]:
```
array([1.39379267, 1.85613123, 0.91494201, 0.76633319, 1.36076848,
       0.89842992, 0.56818809, 1.11308711, 0.79935737, 1.01401456,
       1.41030476, 0.79935737, 0.86540574, 0.63423646, 1.50937731,
       1.59193777, 0.9314541 , 1.59193777, 1.08006293, 1.62496195,
       1.17913548, 1.77357077, 0.50213972, 0.76633319, 2.00474005])
```

در سلول کد بالا بردار مقادیر برازش شده را محاسبه کرده ایم.

در آخر نیز به تحلیل مانده ها میپردازیم.

باقیمانده های مدل را جدا کرده و با مقادیر برازش یافته که در سلول کد قبل محاسبه کرده ایم در غالب یک دیتافریم نمایش میدهیم

In [27]:

```
resi = lm2.resid
data1 = pd.DataFrame({'resi': resi , 'fit_value': fit_value})
data1
```

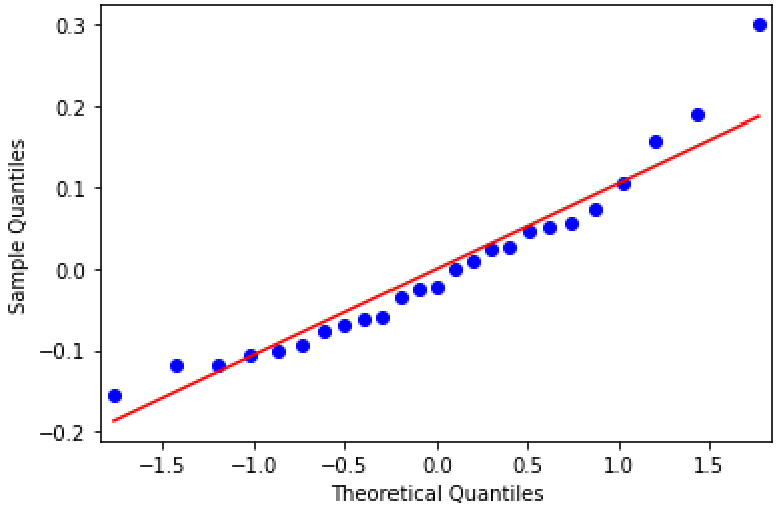
Out[27]:

	resi	fit_value
0	0.056207	1.393793
1	0.073869	1.856131
2	-0.104942	0.914942
3	-0.156333	0.766333
4	0.189232	1.360768
5	0.051570	0.898430
6	-0.118188	0.568188
7	0.026913	1.113087
8	-0.059357	0.799357
9	-0.034015	1.014015
10	-0.000305	1.410305
11	0.010643	0.799357
12	0.024594	0.865406
13	0.045764	0.634236
14	-0.119377	1.509377
15	-0.061938	1.591938
16	-0.021454	0.931454
17	-0.101938	1.591938
18	0.299937	1.080063
19	0.105038	1.624962
20	-0.069135	1.179135
21	-0.093571	1.773571
22	0.157860	0.502140
23	-0.076333	0.766333
24	-0.024740	2.004740

In [28]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from statsmodels.graphics import gofplots as sgg
sgg.qqplot(data1['resi'] , line = 's')
plt.show()
```

```
C:\Users\Persian\Anaconda3\envs\Rpy\lib\site-packages\statsmodels\graphics\gofplots.
py:993: UserWarning: marker is redundantly defined by the 'marker' keyword argument
and the fmt string "bo" (-> marker='o'). The keyword argument will take precedence.
  ax.plot(x, y, fmt, **plot_style)
```



نمودار فوق یک نمودار چندک برای مطابقت داده ها (مانده ها) با توزیع نرمال است

که بر اساس توزیع تجربی داده ها رسم شده است و خط نمودار نیز بر اساس توزیع نرمال با

میانگین صفر و واریانس یک رسم شده است و هرچه که نقاط رسم شده به خط ترسیم

شده نزدیک باشد و منطبق بر آن باشد فرض نرمال بودن داده ها با قوت بیشتری تایید میشود

با توجه به نمودار فرض نرمال بودن داده ها تایید میشود.

برای اطمینان از این ادعا به استنباط آماری درباره توزیع داده ها میپردازیم.

In [29]:

```
import scipy.stats as ss
a = ss.shapiro(data1['resi'])
b = ss.normaltest(data1['resi'])
c = ss.anderson(data1['resi'])

print(a) ; print(b)

print('Anderson.result','  statistic : ',c.statistic) ; cpp = c.statistic
for i in range(len(c.critical_values)):
    q = c.significance_level[i] ; w = c.critical_values[i]
    print(q,' : ',w)
    if q == 5 :
        cp = w
```

```
ShapiroResult(statistic=0.935318648815155, pvalue=0.11536164581775665)
NormaltestResult(statistic=6.216380258431699, pvalue=0.04468175039854325)
Anderson.result   statistic :  0.4646212485095589
15.0  :  0.514
10.0  :  0.586
5.0  :  0.703
2.5  :  0.82
1.0  :  0.975
```

در خروجی مدل نیز با استفاده از آماره جارکی برا و پی-مقدار آن نرمال بودن ماند ها را تایید کردیم ، در اینجا نیز با کمک آزمون فرض شاپیرو ویلک

اندرسون دارلینگ و نرمال تست و به دلیل بزرگتر بودن پی-مقدار آنها از 0.05 از نرمال بودن توزیع مانده ها مطمئن میشویم.

پی-مقدار آزمون شاپیرو ویلک : 0.11536164581775665

پی-مقدار آزمون نرمال تست : 0.04468175039854325

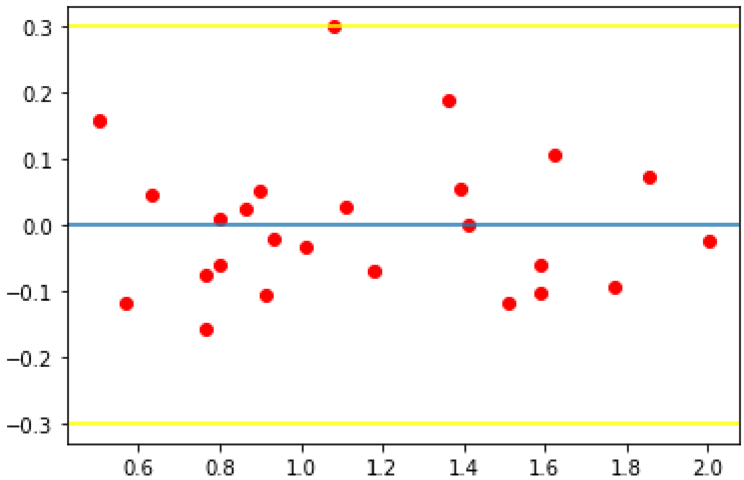
پی-مقدار آزمون اندرسون دارلینگ : 0.703

البته پی-مقدار آزمون نرمال تست کمی کوچکتر از سطح معناداری 0.05 است که با اغماض آن را میپذیریم

نمودار پراکنش مقادیر مانده ها در برابر مقادیر برازش شده را رسم میکنیم ، از این نمودار برای بررسی فرض خطی بودن مدل و همگنی واریانس خطاها استفاده میکنیم

In [30]:

```
plt.scatter(x = data1['fit_value'] , y = data1['resi'] , color = 'red')
plt.axhline(0)
plt.axhline(0.3 , color = 'yellow')
plt.axhline(-0.3 , color = 'yellow')
plt.show()
```



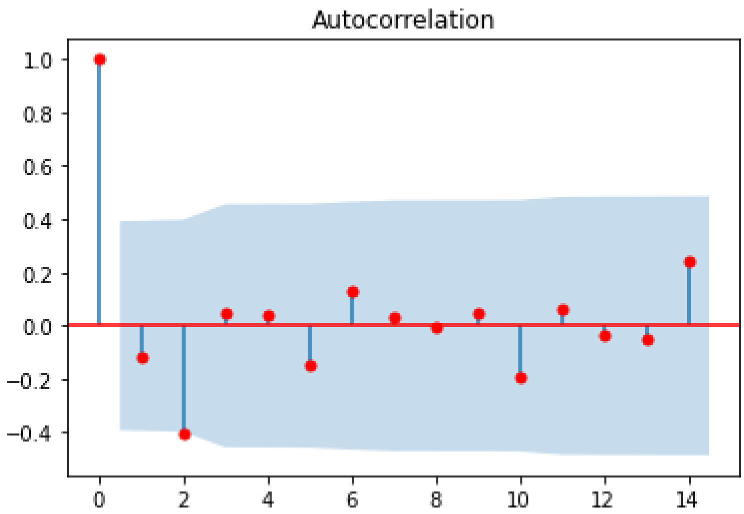
با توجه به اینکه نقاط نمودار در یک نوار افقی و حول محور صفر به صورت تصادفی و بدون داشتن الگوی خاصی توزیع شده اند ،بنابراین فرض خطی بودن مدل تایید میشود

با توجه به اینکه پراکندگی نقاط نمودار در سرتاسر محور افقی یکسان است و الگوی خاصی ندارد ، بنابراین فرض همگنی واریانس خطاها نیز تایید میشود

حال فرض ناهمبسته بودن خطاها را بررسی میکنیم.

In [31]:

```
sm.graphics.tsa.plot_acf(data1['resi'] , color = 'red')
plt.show()
```



با توجه به نمودار خودهمبستگی مانده ها ، تمام لگ ها به جز لگ صفر و دو همه داخل بازه اطمینانشان هستند ، لگ صفر منطقا و همیشه یک هست ، بنابراین چون فقط

یک لگ بیرون از بازه اطمینان هست با اغماض میتوانیم ناهمبسته بودن مانده ها را تایید کنیم

البته در خروجی مدل نیز با استفاده از آماره دوربین واتسون ناهمبسته بودن مانده ها تایید شده بود

نتیجه گیری تحلیل مانده ها :

هرچهار فرض بنیادی تایید شدند.

فرض خطی بودن مدل رگرسیونی

فرض همگن بودن واریانس خطاها

فرض ناهمبسته بودن خطاها

فرض نرمال بودن خطاها

نتیجه گیری نهایی

مدل زیر مورد تایید میباشد :

y = 0.4361 + 1.6512*x1