

<i>Likes Popcorn</i>	<i>Age</i>	<i>Favorite Color</i>	<i>Loves Troll 2</i>
<i>Yes</i>	<i>12</i>	<i>Blue</i>	<i>Yes</i>
<i>Yes</i>	<i>87</i>	<i>Green</i>	<i>Yes</i>
<i>No</i>	<i>44</i>	<i>Blue</i>	<i>No</i>
<i>Yes</i>	<i>19</i>	<i>Red</i>	<i>No</i>
<i>No</i>	<i>32</i>	<i>Green</i>	<i>Yes</i>
<i>No</i>	<i>14</i>	<i>Blue</i>	<i>Yes</i>

Convert Categorical Data
To Numerics

<i>Likes Popcorn</i>	<i>Age</i>	<i>Favorite Color</i>	<i>Loves Troll 2</i>
1	12	1	1
1	87	2	1
0	44	1	0
1	19	3	0
0	32	2	1
0	14	1	1

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2
1	12	1	1
1	87	2	1
0	44	1	0
1	19	3	0
0	32	2	1
0	14	1	1

مجموعی اول الگوریتم، به شکل زیر است.

$$F_0(x) = \operatorname{argmin}_x \sum_{i=1}^n L(y_i, x)$$

همانطور که در پاسخ بخش ب آمده است.

$$L(y_i, x) = -y_i x + \log(1 + e^x)$$

۵

$$\frac{d}{dx} L(y_i, x) = -y_i + \sigma(x)$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2
1	12	1	1
1	87	2	1
0	44	1	0
1	19	3	0
0	32	2	1
0	14	1	1

برای یافتن λ بهینه داریم:

$$\frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^n L(y_i, \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (-y_i + \sigma(\lambda)) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = n \sigma(\lambda)$$

$$\Rightarrow \sigma(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{4} (4) = 1$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2
1	12	1	1
1	87	2	1
0	44	1	0
1	19	3	0
0	32	2	1
0	14	1	1

$$F_0(x_i) = \sigma^{-1}\left(\frac{y}{n}\right) = \log\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 - \frac{y}{n}}\right) = \log(2)$$

$$F_0(x_i) = 0.49$$

یعنی

حال که مقدار اولیه مشخص شد، به سراغ محاسبه residuals می‌رویم.

طبق الگوریتم

$$r_{im} = - \left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)} \right]_{F(x) = F_{m-1}(x)}$$

r_{im} ← شماره داده
 iteration

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2
1	12	1	1
1	87	2	1
0	44	1	0
1	19	3	0
0	32	2	1
0	14	1	1

حجداً طبق پاسخ بخش سوال:

$$r_{i1} = -[-y_i + \sigma(F_0(x_i))]$$

چون $\sigma(F_0(x_i)) = \frac{2}{3}$ پس

$$r_{i1} = y_i - \frac{2}{3} = y_i - 0,4V$$

$$\begin{cases} r_{11} = r_{21} = r_{51} = r_{61} = 1 - 0,4V = 0,6V \\ r_{31} = r_{41} = 0 - 0,4V = -0,4V \end{cases}$$

پس

مقادیر Residual در جدول مقابل آمده اند

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال باید یک SVM روی مقادیر r_i ، fit کنیم.

threshold را برابر 0,5 در نظر می گیریم. بدین معنی که اگر $|Residual| < 0,5$

دسته بندی ب درستی و اگر $|Residual| \geq 0,5$ ب اشتباه انجام شده است. پس یک ستون

برای برچسب های SVM اضافه می کنیم.

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال یک SVM روی مقادیر برجسته
 "SVM L" اعمال می‌کنیم.

مسئله بهینه‌سازی در فرم استاندارد به شکل زیر است

$$\min \frac{1}{2} \alpha^T H \alpha - 1^T \alpha$$

$$\text{s.t.} \quad -\alpha_i \leq C$$

$$\alpha_i \leq C$$

$$y^T \alpha = 0$$

$$H_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & y_1 y_2 x_1^T x_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$y^T = [1, 1, 0, 0, 1, 1]$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حالِ کلی SVM روی مقادیر برجسته
 "SVM L" اعمال می‌کنیم.

به دلیل آنکه این مسئله بهینه‌سازی فرم به‌ای ندارد، از کتابخانه scikit-learn برای دست‌نبردن

SVM داده‌ها استفاده می‌کند. همچنین به ازای هر داده، فاصله‌ی داده تا Decision Boundary

به عنوان residual در نظر گرفته شده است. فرضیه‌ی نویسه به شکل زیر است

$$h_1(x_1) = 0,99 \text{ و } h_1(x_2) = 0,99 \text{ و } h_1(x_3) = -0,47$$

$$h_1(x_4) = -0,47 \text{ و } h_1(x_5) = 0,88 \text{ و } h_1(x_6) = 1$$

اجرای الگوریتم SVM روی مقادیر Residual :

```
In [9]: from sklearn import svm
import numpy as np
```

```
In [10]: X = [[1,12,1,1],
               [1,87,2,1],
               [0,44,1,0],
               [1,19,3,0],
               [0,32,2,1],
               [0,14,1,1]]
y = [1,1,0,0,1,1]
```

```
In [21]: clf = svm.SVC(kernel='linear')
clf.fit(X , y)
```

```
Out[21]: SVC(kernel='linear')
```

```
In [24]: clf.decision_function(X)
```

```
Out[24]: array([ 0.99968828,  0.99968828, -0.62443514, -0.99937655,  0.88184955,
                  1.00397332])
```

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال طبق رابطه‌ای که در بخش ب پاسخ
به دست آوردیم، مقدار λ را محاسبه می‌کنیم

$$\gamma = \frac{-\sum_{i=1}^n [(-y_i + \sigma(F_0(x_i))) h_m(x_i)]}{\sum_{i=1}^n [\sigma(F_0(x_i))(1 - \sigma(F_0(x_i))) h_m(x_i)]^2}$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال طبق رابطه‌ای که در بخش ب پاسخ به دست آوردیم، مقدار λ را محاسبه می‌کنیم


$$\gamma = \frac{-\sum_{i=1}^n [(-y_i + \sigma(F_0(x_i))) h_m(x_i)]}{\sum_{i=1}^n [\sigma(F_0(x_i))(1 - \sigma(F_0(x_i))) h_m(x_i)]^2}$$

$$\sigma(F_0(x_i)) = 0,44$$

دائیم:

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال طبق رابطه‌ای که در بخش ب پاسخ به دست آوردیم، مقدار λ را محاسبه می‌کنیم

$$\gamma = \frac{-\sum_{i=1}^n [(-y_i + 0,44)h_m(x_i)]}{\sum_{i=1}^n [0,44 \times 0,33 \times h_m(x_i)]^2}$$


Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال طبق رابطه‌ای که در بخش ب پاسخ
به دست آوردیم، مقدار λ را محاسبه می‌کنیم

$$\gamma = \frac{-\sum_{i=1}^n [(-y_i + 0,44)h_m(x_i)]}{0,22 \sum_{i=1}^n h_m(x_i)^2}$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

حال طبق رابطه‌ای که در بخش ب پاسخ
به دست آوردیم، مقدار α را محاسبه می‌کنیم

$$\gamma = \frac{-\sum_{i=1}^n [(-y_i + 0,47)h_1(x_i)]}{0,22 \sum_{i=1}^n h_1(x_i)^2}$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

$$\gamma = \frac{A}{B}$$

$$A = -[(-1 + 0,44) \times 0,99 + (-1 + 0,44) \times 0,99 + (-0 + 0,44) \times (-0,44) + (-0 + 0,44) \times (-0,99) + (-1 + 0,44) \times 0,11 + (-1 + 0,44) \times 1] = 2,34$$

$$B = 0,22(0,99^2 + 0,99^2 + 0,44^2 + 0,99^2 + 0,11^2 + 1^2) = 1,12$$

: 5

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2,37}{1,12} = 2,11$$

س :

در نتیجه :

$$F_1(x) = F_0(x) + \underbrace{\gamma}_{\text{learning rate}} \delta h_1(x)$$

learning rate

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	Res.	SVM L
1	12	1	1	0,33	1
1	87	2	1	0,33	1
0	44	1	0	-0,47	0
1	19	3	0	-0,47	0
0	32	2	1	0,33	1
0	14	1	1	0,33	1

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{2,27}{1,12} = 2,11$$

دس:

اگر فرض کنیم $\gamma = 0,1$:

$$F_1(x) = F_0(x) + 0,22 h_1(x) = 0,49 + 0,22 h_1(x)$$

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	$F_1(x)$	5
1	12	1	1	0,9	0,71
1	87	2	1	0,9	0,71
0	44	1	0	0,55	0,43
1	19	3	0	0,47	0,41
0	32	2	1	0,98	0,7
0	14	1	1	0,9	0,7

مقادیر $F_1(x)$ برای داده‌ها ب دست آمده و در جدول نوشته شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود، احتمال عضویت داده‌ها در کلاس 1 در مسیر درست حرکت کرده است

احتمال قبلی برابر $(F_0(x))$ که بود که برای همه‌ی داده‌ها مادی 0,44 می‌شود. با انجام

اولین Iteration، $(F_1(x))$ که برای داده‌های کلاس 1 با 0 و کلاس 0 نزدیک‌تر شده است

Likes Popcorn	Age	Favorite Color	Loves Troll 2	$F_1(x)$	5
1	12	1	1	0,9	0,71
1	87	2	1	0,9	0,71
0	44	1	0	0,55	0,43
1	19	3	0	0,47	0,41
0	32	2	1	0,48	0,7
0	14	1	1	0,9	0,7

با افزایش تعداد Iteration ها، $y_i = \sigma(F_m(x_i))$ ، مقدار خواهد شد.