$$T: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۴ \qquad \vec{OA} = \begin{pmatrix} ۹ \\ ۲ \\ -۷ \end{pmatrix}$$

$$S_۱ = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱۲ \end{pmatrix} \right\} \qquad T\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۳ \\ x_۱+x_۲ \\ -x_۳ \end{pmatrix}$$

$$S_۲ = \left\{ \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۸ \\ ۹ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \right\}$$

---

① روش

$$T\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \to a_۱\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + a_۲\begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + a_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۸ \\ ۹ \end{pmatrix} + a_۴\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ۲a_۱ = ۱ \\ ۴a_۲ = ۰ \end{cases} \to \boxed{\begin{matrix} a_۱ = \frac{۱}{۲} \\ a_۲ = ۰ \end{matrix}} , \qquad \begin{matrix} ۸a_۳ + a_۴ = ۱ \\ ۹a_۳ - a_۴ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_۳ = \frac{۱}{۱۷} \\ a_۴ = \frac{۹}{۱۷} \end{matrix}}$$

$$T\begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix} \to b_۱\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + b_۲\begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + b_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۸ \\ ۹ \end{pmatrix} + b_۴\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} ۲b_۱ = ۰ \\ ۴b_۲ = ۰ \end{matrix} \to \boxed{b_۱ = b_۲ = ۰} , \qquad \begin{matrix} ۸b_۳ + b_۴ = ۵ \\ ۹b_۳ - b_۴ = ۰ \end{matrix} \to \boxed{\begin{matrix} b_۳ = \frac{۵}{۱۷} \\ b_۴ = \frac{۴۵}{۱۷} \end{matrix}}$$

$$T\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱۲ \\ ۰ \\ -۱۲ \end{pmatrix} \to c_۱\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + c_۲\begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + c_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۸ \\ ۹ \end{pmatrix} + c_۴\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱۲ \\ ۰ \\ -۱۲ \end{pmatrix}$$

$$۲c_۱ = ۰ \to \boxed{c_۱ = ۰} \qquad ۸c_۳ + c_۴ = ۰ \to ۸c_۳ = -c_۴$$

$$۴c_۲ = ۱۲ \to \boxed{c_۲ = ۳} \qquad ۹c_۳ - c_۴ = -۱۲ \to \boxed{c_۳ = \frac{-۱۲}{۱۷} , c_۴ = +\frac{۹۶}{۱۷}}$$

$$۸ \times \frac{۱۲}{۱۷} = c_۴$$

$$T = \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \\ a_۴ & b_۴ & c_۴ \end{bmatrix}_{۴\times۳} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ \frac{۱}{۱۷} & \frac{۵}{۱۷} & \frac{-۱۲}{۱۷} \\ \frac{۹}{۱۷} & \frac{۴۵}{۱۷} & \frac{۹۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} ۹ \\ ۲ \\ -۷ \end{pmatrix} = m_۱\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} + m_۲\begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix} + m_۳\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱۲ \end{pmatrix} \to \begin{matrix} m_۱ = ۹ \\ ۵m_۲ = ۲ \\ ۱۲m_۳ = -۷ \end{matrix}$$

$$T_{۴\times۳} \times \begin{pmatrix} ۹ \\ \frac{۲}{۵} \\ \frac{-۷}{۱۲} \end{pmatrix}_{۳\times۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ \frac{۱}{۱۷} & \frac{۵}{۱۷} & \frac{-۱۲}{۱۷} \\ \frac{۹}{۱۷} & \frac{۴۵}{۱۷} & \frac{۹۶}{۱۷} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ \\ \frac{۲}{۵} \\ \frac{-۷}{۱۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۹}{۲} \\ \frac{-۷}{۴} \\ \frac{۱۸}{۱۷} \\ \frac{۴۳}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{۹}{۱۷} + \frac{۲}{۱۷} + \frac{۷}{۱۷} = \frac{۱۸}{۱۷} \\ \frac{۸۱}{۱۷} + \frac{۱۸}{۱۷} - \frac{۵۶}{۱۷} = \frac{۹۹-۵۶}{۱۷} = \frac{۴۳}{۱۷} \end{cases}$$

$\boxed{\text{روش دوم}}$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix}۹\\۲\\-۷\end{pmatrix} \to T(\vec{OA}) = T\begin{pmatrix}۹\\۲\\-۷\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}۹\\-۷\\۱۱\\+۷\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}۹\\-۷\\۱۱\\+۷\end{pmatrix} = N_۱\begin{pmatrix}۲\\۰\\۰\\۰\end{pmatrix} + N_۲\begin{pmatrix}۰\\۴\\۰\\۰\end{pmatrix} + N_۳\begin{pmatrix}۰\\۰\\۸\\۹\end{pmatrix} + N_۴\begin{pmatrix}۰\\۰\\۱\\-۱\end{pmatrix}$$

$$۲N_۱ = ۹ \to N_۱ = \frac{۹}{۲}$$

$$۴N_۲ = -۷ \to N_۲ = \frac{-۷}{۴}$$

$$۸N_۳ + N_۴ = ۱۱$$

$$۹N_۳ - N_۴ = ۷$$

$$۱۷N_۳ = ۱۸$$

$$\to N_۳ = \frac{۱۸}{۱۷} ✓$$

$$\begin{pmatrix}N_۱\\N_۲\\N_۳\\N_۴\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{۹}{۲}\\ \frac{-۷}{۴}\\ \frac{۱۸}{۱۷}\\ \frac{۴۳}{۱۷}\end{pmatrix}$$

$$\frac{۱۸}{۱۷} \times ۸ + N_۴ = ۱۱$$

$$\frac{۱۴۴}{۱۷} + \frac{۱۷N_۴}{۱۷} = \frac{۱۸۷}{۱۷}$$

$$\frac{۱۷N_۴}{۱۷} = \frac{۴۳}{۱۷}$$

$$\boxed{N_۴ = \frac{۴۳}{۱۷}}$$