ـ امیر حسین شیخی ـ

نشان دهید که هر یک از توابع زیر یک تبدیل خطی است.

الف) $T: P_n \to R$ اگر ضابطه $Tf = f(\cdot)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{شرط ۱)} & T(f+g) = Tf + Tg \quad \cong \quad T(x+y) = T(x) + T(y) \\ \text{شرط ۲)} & T(cf) = cTf \quad \cong \quad T(cx) = cT(x) \end{array}}$$

1. $T(f+g) = (f+g)(\cdot) = f(\cdot) + g(\cdot) = Tf + Tg$

۲. $T(cf) = (cf)(\cdot) = cf(\cdot) = cTf$

بنابراین T یک تبدیل خطی است.

ب) $T: P_n \to P_n$ اگر ضابطه $(Tf)(n) = f(n+1)$

شرط ۱) $1. (T(f+g))(n) = (f+g)(n+1) = f(n+1) + g(n+1) = (Tf)(n) + (Tg)(n)$

شرط ۲) $2. (T(cf))(n) = (cf)(n+1) = cf(n+1) = c(Tf)(n)$

پس T یک تبدیل خطی است.

ج) $T: M_{n\times n} \to F^n$ اگر ضابطه $TA = (\text{ستون } j \text{ام } A)$

1. $T(A+B) = T(A) + T(B) \implies T(A+B) = (\text{ستون } j \text{ام } A+B) = (\text{ستون } j \text{ام } A) + (\text{ستون } j \text{ام } B)$

۲. $T(cA) = cT(A)$

$$= T(A) + T(B)$$

$T(cA) = (c \, A \text{ ستون } j \text{ام}) = c(A \text{ ستون } j \text{ام}) = cT(A)$

پس T یک تبدیل خطی است.

امیر حسین شفیعی

ب) $T: M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $TA = trA$

$\boxed{\begin{array}{c} A, B \in M_{n\times n} \\ c \in \mathbb{R} \end{array}}$

1. $T(A+B) = tr(A+B) = trA + trB = T(A) + T(B)$

2. $T(cA) = tr(cA) = c\,tr(A) = c\,T(A)$

پس T یک تبدیل خطی است.

ث) $T: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ با ضابطه $TA = AB - BA$ را داریم

B یک ماتریس ثابت $n\times n$ است.

1. $T(A+B) = (A+B)B - B(A+B) = AB + BB - BA - BB =$

$AB - BA = TA + TB$

2. $T(cA) = (cA)B - B(cA) = c(AB) - c(BA) = c(AB-BA) = $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad cTA$

پس T یک تبدیل خطی می‌باشد است.