امیرحسین شیوخی

۱. ثابت کنید $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$ ، $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری است.

برای اثبات اینکه مجموعه‌ی بالا یک فضای برداری است، باید نشان دهیم که این مجموعه تمام ویژگی‌های یک فضای برداری را دارد.

۱. بسته بودن نسبت به جمع: $u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u+v \in \mathbb{R}^n$

۲. بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر: $v \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot u \in \mathbb{R}^n$

۳. وجود بردار صفر: $0 \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u+0 = u$

۴. وجود وارون جمع: $u \in \mathbb{R}^n,\ -u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u+(-u) = 0$

۱. بسته بودن نسبت به جمع: فرض می‌کنیم که u و v دو بردار در $\mathbb{R}^n$ هستند، پس داریم:

$$u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$
$$v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

جمع این دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, \dots, u_n+v_n)$$

و از آنجا که جمع دو عدد حقیقی، یک عدد حقیقی است، $\boxed{\text{پس } u+v \in \mathbb{R}^n}$

۲. بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر: فرض می‌کنیم که $c \in \mathbb{R}$، یک اسکالر است و u یک بردار در $\mathbb{R}^n$ است.

ضرب اسکالر این بردار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c \cdot u = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, c \cdot u_3, \dots, c \cdot u_n)$$

و از آنجا که ضرب دو عدد حقیقی، یک عدد حقیقی است، پس داریم: $\boxed{c \cdot u \in \mathbb{R}^n}$

۳. وجود بردار صفر: بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ به صورت $0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ تا}})$ تعریف می‌شود. برای هر بردار مثل u که $u \in \mathbb{R}^n$ باشد داریم:

$$u+0 = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) + (0, 0, 0, \dots, 0) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$\boxed{\text{پس}}$ بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد.

۴. وجود وارون عمل جمع، عضو وارون: برای هر برداری مثل u که $u \in \mathbb{R}^n$ باشد، وارون جمعی آن $-u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ است، بنابراین:

$$u + (-u) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$$

$\boxed{\text{پس}}$ برای هر بردار $u \in \mathbb{R}^n$، عضو وارون وجود دارد.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y=2 \\ 3x+4y-5z=-2 \end{cases}$$

امیرحسین شیوخی -

دستگاه معادلات خطی زیر را از سه روش حل کنید:

الف) کرامر   ب) ماتریس معکوس   ج) گاوس-جردن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times3}{A}\,\underset{3\times1}{X}=\underset{3\times1}{b}$$

الف) کرامر

$$b=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{1}\ \det(A)=1\underset{+5}{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}-1\underset{-10}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}+\underset{+11}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=26$$

Ax

$$\boxed{2}\ \det(A_1)=\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}=2\times\underset{\boxed{+5}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}-1\times\underset{\boxed{-10}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}+1\underset{+6}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}=26=(10+10+6)$$

Ay

$$\boxed{3}\ \det(A_2)=\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}=\underset{-10}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}-2\times\underset{-10}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}+\underset{-4-6}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=0\quad(-10+20-10)$$

Az

$$\boxed{4}\ \det(A_3)=$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}=\underset{2-8}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}-\underset{\substack{-4-6 \\ +10}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}+2\underset{\substack{8+3 \\ 22}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=-6+10+22=26$$

$A_x=26 \quad , A_y=0 \quad , A_z=26$

$$x=\frac{\det A_x}{\det A}=\frac{26}{26}=1 \ ,\ y=\frac{\det A_y}{\det A}=0 \ ,\ z=\frac{\det A_z}{\det A}=\frac{26}{26}=1 \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ب) روش ماتریس معکوس:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \quad , \quad Adj(A) \Rightarrow$$

$$C = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۴ & -۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & -۵ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} ۵ & ۱۰ & ۱۱ \\ ۹ & -۸ & -۱ \\ ۱ & ۲ & -۳ \end{vmatrix}$$

$$adj(A) = C^T \Rightarrow adj(A) = \begin{vmatrix} ۵ & ۹ & ۱ \\ ۱۰ & -۸ & ۲ \\ ۱۱ & -۱ & -۳ \end{vmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} ۵ & ۹ & ۱ \\ ۱۰ & -۸ & ۲ \\ ۱۱ & -۱ & -۳ \end{vmatrix}}{۲۶}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{۵}{۲۶} & \frac{۹}{۲۶} & \frac{۱}{۲۶} \\ \frac{۱۰}{۲۶} & \frac{-۸}{۲۶} & \frac{۲}{۲۶} \\ \frac{۱۱}{۲۶} & \frac{-۱}{۲۶} & \frac{-۳}{۲۶} \end{vmatrix} \qquad \underset{۳\times۱}{X} = \underset{۳\times۳}{A^{-1}} \underset{۳\times۱}{b} \Rightarrow \underset{۳\times۱}{X} = \begin{vmatrix} \frac{۵}{۲۶} & \frac{۹}{۲۶} & \frac{۱}{۲۶} \\ \frac{۱۰}{۲۶} & \frac{-۸}{۲۶} & \frac{۲}{۲۶} \\ \frac{۱۱}{۲۶} & \frac{-۱}{۲۶} & \frac{-۳}{۲۶} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۲ \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} \frac{۵\times۲+۹\times۲-۲}{۲۶} \\ \frac{۱۰\times۲-۸\times۲-۲\times۲}{۲۶} \\ \frac{۱۱\times۲-۱\times۲-۳\times۲}{۲۶} \end{vmatrix} \Rightarrow \cancel{X} = \begin{pmatrix} \frac{۱۰+۱۸-۲}{۲۶} \\ \frac{۲۰-۱۶-۴}{۲۶} \\ \frac{۲۲-۲+۶}{۲۶} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{۲۶}{۲۶} \\ \frac{۰}{۲۶} \\ \frac{۲۶}{۲۶} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow = x \\ \rightarrow = y \\ \rightarrow = z \end{matrix}$$

ج) روش گاوس جردن:

$$A=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & -۵ \end{vmatrix} \quad , \quad b=\begin{vmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۲ \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left|\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۴ & -۵ & -۲ \end{array}\right| \xrightarrow[R_۳=-۳R_۱+R_۳]{R_۲=-۲R_۱+R_۲} \left|\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۸ & -۸ \end{array}\right| \xrightarrow{R_۲=-\frac{۱}{۳}R_۲}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & +۱ & \frac{۲}{۳} & +\frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۱ & -۸ & -۸ \end{array}\right| \xrightarrow[R_۳=R_۳-R_۲]{R_۱=R_۱-R_۲} \left|\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۲۶}{۳} & -\frac{۲۶}{۳} \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{۲۶}{۳}Z=\frac{-۲۶}{۳} \Rightarrow Z=۱ \\ y+\frac{۲}{۳}Z=\frac{۲}{۳} \Rightarrow y+\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow y=۰ \\ x+\frac{۱}{۳}Z=\frac{۴}{۳} \rightarrow x+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{b}=\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$$

---

۳) نشان دهید $\det(A)=\det(A^T)$ و ثابت کنید $\det(AB)=\det(A).\det(B)$ ۴

۱. تعریف: دترمینان از طریق جایگشت ⟸ $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_۳} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{۳} a_{\sigma(i),i}$

برای اثبات $\det(A)=\det(A^T)$، در اینجا $a_{\sigma(i),i}$ همان عنصری از ماتریس A^T است که در آن سطر و ستون جابجا شده است. در دترمینان ماتریس A^T، تنها تفاوت با دترمینان ماتریس A این است که ترتیب سطر و ستون ها جابجا شده اند. اما چون در تعریف دترمینان از جایگشت ها استفاده می کنیم این تغییر ترتیب هیچ تاثیری بر نتیجه ندارد.

σ: یک جایگشت از مجموعه $\{۱،۲،...،n\}$ است

$sgn(\sigma)$: علامت جایگشت است که ۱+ است یا ۱-

$a_{i,\sigma(i)}$: عنصری از ماتریس A است.

سؤال ۴ ـ :

۱. تعریف دترمینان از طریق جایگشت برای AB:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (AB)_{i,\sigma(i)}$$

که در آنجا $(AB)_{i,\sigma(i)}$ عنصری از ماتریس حاصل ضرب AB است که از ضرب دو ماتریس A و B به دست می آید.

۲. $$(AB)_{i,\sigma(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{k,\sigma(i)}$$

۳. $$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{k,\sigma(i)} \right)$$

۴. $$\det(AB) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)} \right)$$

که این دقیقاً همان دترمینان A و B است:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(ب) پایه برای فضای $f(x) = (P_n(x))'$:

۱. فرض می کنیم که $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

۲. مشتق اول این چندجمله‌ای به صورت: $P'_n(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ است

این مشتق یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ است. پس فضای مشتقات شامل چندجمله‌ای‌هایی از درجه $\boxed{n-1}$

اثبات: ① اگر $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، مشتق آن $P'_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ است.

② برای پیدا کردن پایه‌ای برای این فضا که توسط مشتقات چندجمله‌ای $P_n(x)$ تعریف می‌شود، باید مجموعه‌ای از توابع خطی مستقل پیدا کنیم که بتواند هر چندجمله‌ای از درجه $n-1$ را به صورت ترکیب خطی بازنویسی کند

ادامه‌ی سوال ۵

که این توابع عبارت اند از: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

این مجموعه شامل n تابع خطی مستقل است که هر چند جمله‌ای از درجه n-1 را می‌توان به صورت ترکیب خطی از آنها نوشت. به عنوان مثال هر چند جمله‌ای از درجه n-1 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

۳) : چند جمله‌ای های $1, x, x^2, \dots, x^n$ مجموعه‌ای از توابع خطی مستقل را تشکیل می‌دهند که فضای مشتقات چند جمله‌ای های درجه n را می‌سازند. پس: پایه این فضا شامل این توابع است

۶

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = w$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3c_1 + 2c_2 = 5 \\ -7c_1 - c_2 = -3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\det(A) = -3 + 14 = 11$$

$$c_1 = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}}{11} = \frac{-5+6}{11} = \frac{1}{11}$$

$$c_2 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}}{11} = \frac{-9+35}{11} = \frac{26}{11}$$

$$c_1 = \frac{1}{11}, \quad c_2 = \frac{26}{11}$$

$$\Rightarrow w = c_1 v_1 + c_2 v_2 \rightarrow$$

$$\boxed{w = \frac{1}{11} v_1 + \frac{26}{11} v_2}$$

امیرحسین شوقی.