

# **Wireless CA #3**

**Amirhossein  
Mohammadi**

Date

7/18/2022

Wireless Communication

Dr. Sabbaghian

---

A. با توجه به اینکه مدولاسیون BPSK به نوعی میانگین سیگنال دریافتی را در صفر می آورد، خطای آن مستقل از SNR و برابر با صفر است. نمودار زیر نشان دهنده آن است:

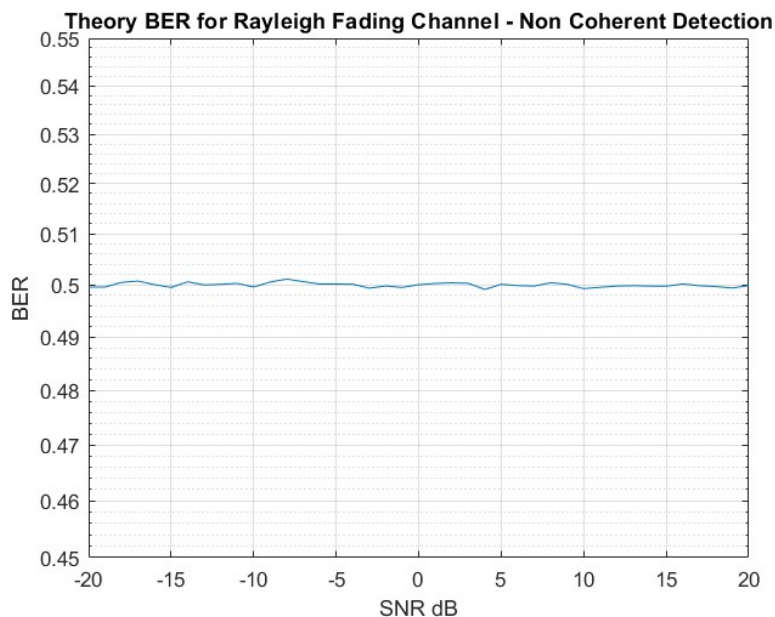


Figure1 , BPSK Modulation – Non Coherent Detection

B. با توجه به احتمال خطای مدولاسیون BPSK برای flat fading داریم:

$$P_e = Q(\sqrt{2\gamma})$$

در نتیجه نمودار زیر حاصل میشود:

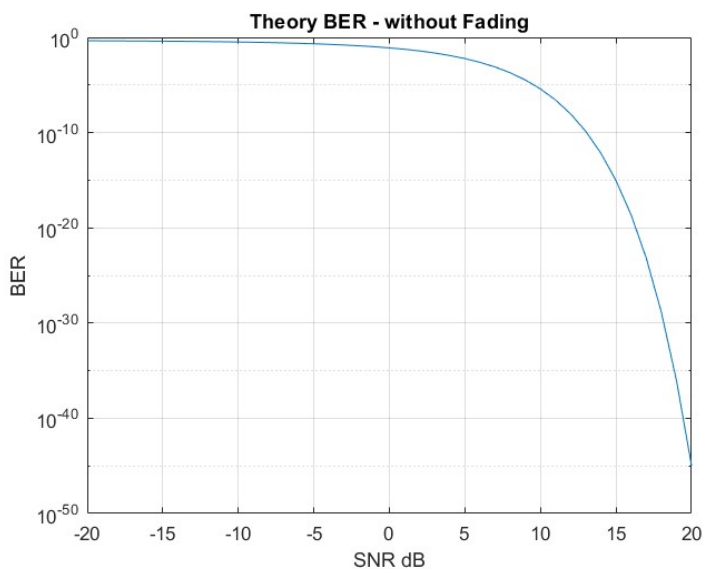


Figure2

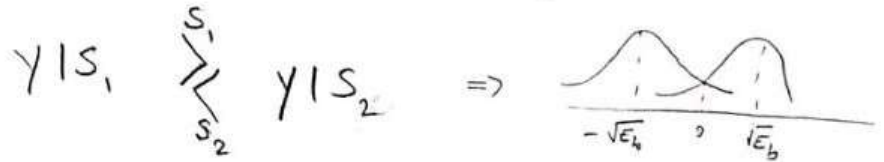
بخش اول : سوال اول

منسب ب درج : به دست آوردن خطا بر اساس BPSK بدون fading

$$Y | S_1 : Y = S_1 + n_0 \sim CN(\sqrt{E_b}, N_0)$$

$$Y | S_2 : Y = S_2 + n_0 \sim CN(-\sqrt{E_b}, N_0)$$

MAP :



Making Decision  $\Rightarrow Y | \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}$

$$P_e = P(E | S_1) P(S_1) + P(E | S_2) P(S_2)$$

$$P_e = 2 \times \frac{1}{2} P(E | S_1) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{2\gamma})$$

+∞ مساحت زیر منحنی از 0 تا ∞

$$* Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

where  $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$

C.

$$P_e = 10^{-6} = Q(\sqrt{2\gamma})$$

$$Q^{-1}(10^{-6}) = 4.7534$$

$$\gamma = \frac{4.7534^2}{2} = 11.2975 \rightarrow \gamma = 10.530 \text{ (dB)}$$

1.2 و 2.2

$$x_A \triangleq \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{سگنال اضافه}} y \triangleq \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$x_B \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

از روش ماکسیم لایکلیت استفاده می‌کنیم.

$$f(y|x_A) \underset{x_B}{\gg} f(y|x_B)$$

$f(y|x_A)$ :  $y = h x_A + n = \begin{cases} y^{(0)} = h x_A + n \\ y^{(1)} = n \end{cases}$

$$\Rightarrow y^{(0)}|x_A \sim \mathcal{CN}(0, a^2 + N_0)$$

$$y^{(1)}|x_A \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$$

به طور مشابه برای  $x_B$  نیز داریم. حال می‌توانیم تابع تدریج ML را اعمال کنیم.

$$y|x_A \propto e^{-\frac{y^{(0)}}{a^2 + N_0}} e^{-\frac{y^{(1)}}{N_0}}$$

$$y|x_B \propto e^{-\frac{y^{(1)}}{a^2 + N_0}} e^{-\frac{y^{(0)}}{N_0}}$$

$$y|x_A \underset{x_B}{\gg} y|x_B$$

جایگزینی ساده‌تری  $\Rightarrow$

$$\frac{(y^{(0)^2} - y^{(1)^2}) a^2}{(a^2 + N_0) \cdot N_0}$$

$$\underset{x_B}{\gg} 0$$

$$P_e = \frac{1}{2(1 + \text{SNR})}$$

(حالا بیا خطا)

$$P_e = \mathbb{P}\{ |y^{(1)}|^2 > |y^{(0)}|^2 | x_A \} = \left[ 2 + \frac{a^2}{N_0} \right]^{-1}$$

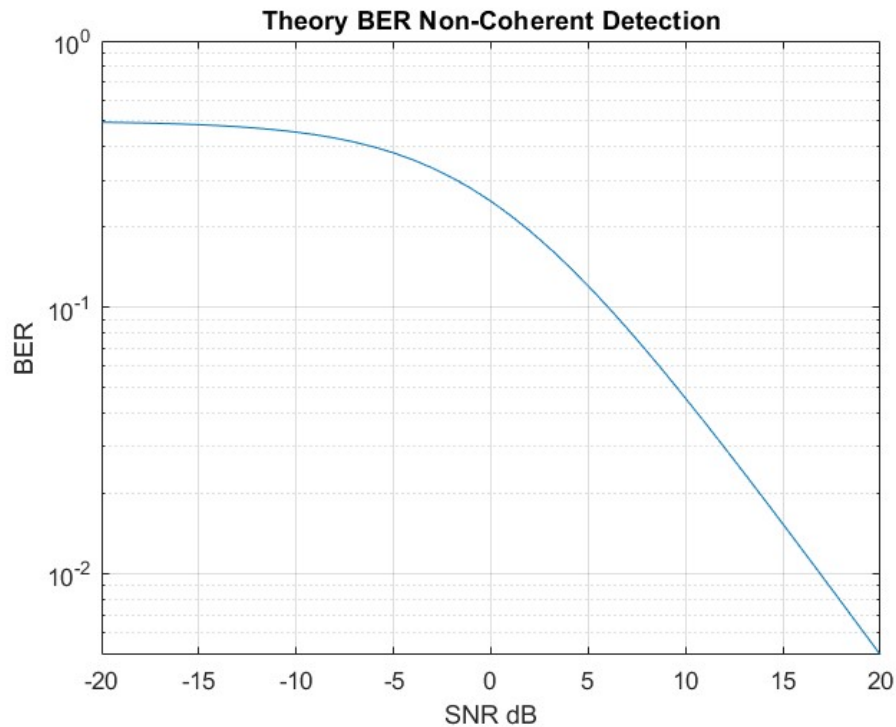


Figure3 , Bit Error Rate vs SNR for Non-Coherent Detection, Sending Two Time Domain Orthogonal Signals

(ب) برای شبیه سازی یک میلیون بیت تولید کرده و طبق قانونی که از قسمت قبل به دست آمد در گیرنده تصمیم گیری میکنیم. یعنی:

$$\frac{(\gamma_{(0)}^2 - \gamma_{(1)}^2) a^2}{(a + N_0) \cdot N_0} \quad \begin{matrix} x_A \\ \text{ } \\ x_B \end{matrix}$$

که ضرایب  $a$  و  $N$  اعدادی ثابت هستند در نتیجه در تصمیم گیری ما تاثیری ندارند. نمودار خطا شبیه سازی شده همراه با نمودار بر حسب سیگنال به نویز که در قسمت قبل برای مقایسه بیشتر در شکل سوم آمده است:

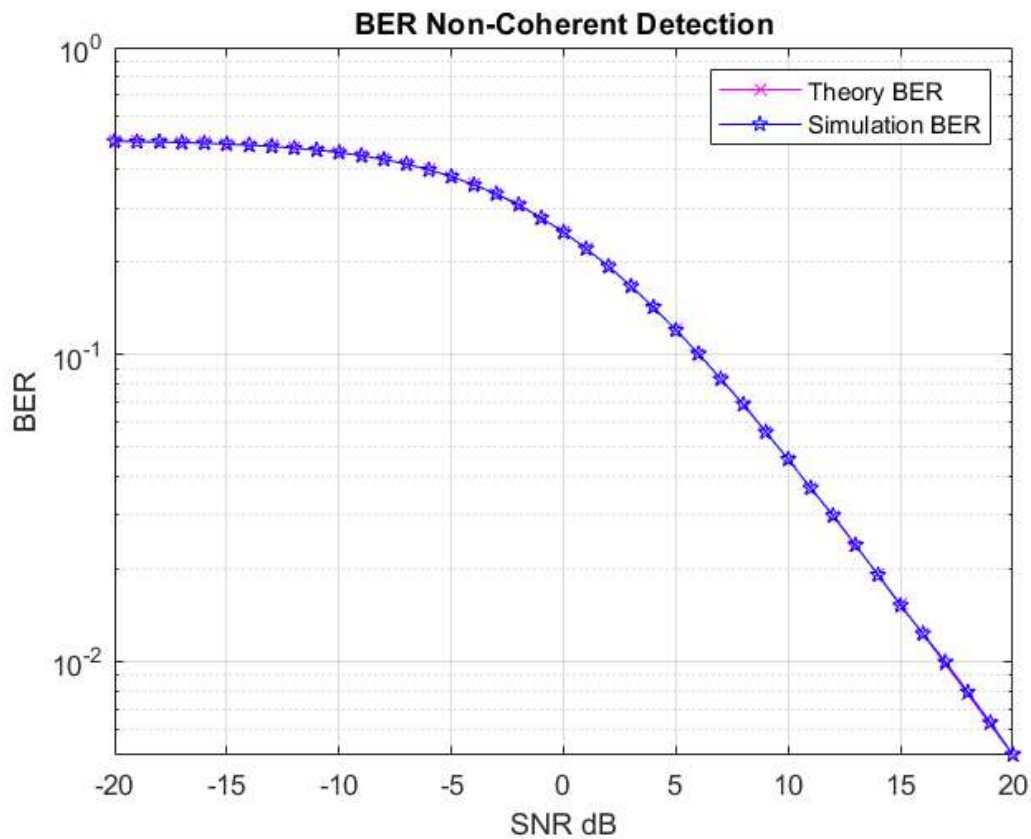


Figure4 , Non – Coherent BPSK Detection, Sending Two Time Domain Orthogonal Signals. Simulation and Theoretic BER Simultaneously are Shown.

همانطور که مشاهده میشود مقدار تئوری دقیقاً با مقدار شبیه سازی شده برابر است.  
(ج)

برای رسیدن به احتمال خطای  $10^{-6}$  داریم:

$$P_e = \frac{1}{2(SNR + 1)}$$

$$0.5 \times 10^6 = SNR + 1$$

$$499999 = SNR$$

$$SNR = 56.990 \text{ dB}$$

$$\text{Diffrence With Previous Part: } 56.99 - 10.53 = 46.46 \text{ dB}$$

همانطور که مشاهده میشود 46.46 دسیبل اختلاف در سیگنال به نویز به دلیل حذف اثر محو شدگی داریم.



$$y[m] = h[m] x[m] + w[m]$$

: انت

where  $h[m] \sim \text{CN}(0, 1)$   
 $w[m] \sim \text{CN}(0, N_0)$

BER :

$$P_b = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \rightarrow \text{for BPSK modulation}$$

$$\gamma_b = \frac{|h|^2 E_b}{N_0} \rightarrow \gamma_b \text{ is R.V. Therefore we should calculate Error for all of its possible values.}$$

$$P_{b|H} = Q\left(\sqrt{\frac{2|h|^2 E_b}{N_0}}\right)$$

$$|h|^2 \sim \chi^2_{2 \text{ degree of freedom}}$$

$$P_b = \int_0^\infty Q(\sqrt{2\gamma_b}) P_\gamma d\gamma$$

$$P_b = \int_0^\infty Q(\sqrt{2\gamma_b}) \frac{1}{E_b/N_0} e^{-\frac{\gamma}{E_b/N_0}} d\gamma$$

$$\xrightarrow{\text{From Book}} P_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right)$$

برای رسیدن به خطای  $10^{-6}$  نیاز است که:

$$P_e = 10^{-6} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right)$$

$$(-2 \times 10^{-6} + 1)^2 = \frac{\gamma}{\gamma+1}$$

$$\frac{1}{(2 \times 10^{-6} - 1)^2} = 1 + \gamma \rightarrow \gamma^{-1} = 1 - \frac{1}{(2 \times 10^{-6} - 1)^2} \rightarrow \gamma = 53.9794 \text{ dB}$$

ب) حال مانند سوال قسمت قبل تعدادی داده درست میکنیم و ارسال میکنیم، نحوه تصمیم گیری مانند گذشته است، با این تفاوت اینکه اطلاعات کانال را داریم در نتیجه در گیرنده آن سیگنال دریافتی رو تقسیم به کانال کرده تا اثر آن خنثی شود مشابه قطعه کد روبهرو:

```
if real(rxSig(i,j)/(h(i))) < 0
    demodulated_rx(i,j) = 1;
else
    demodulated_rx(i,j) = 0;
end
```

نتیجه با محاسبات تئوری ما تطابق دارد:

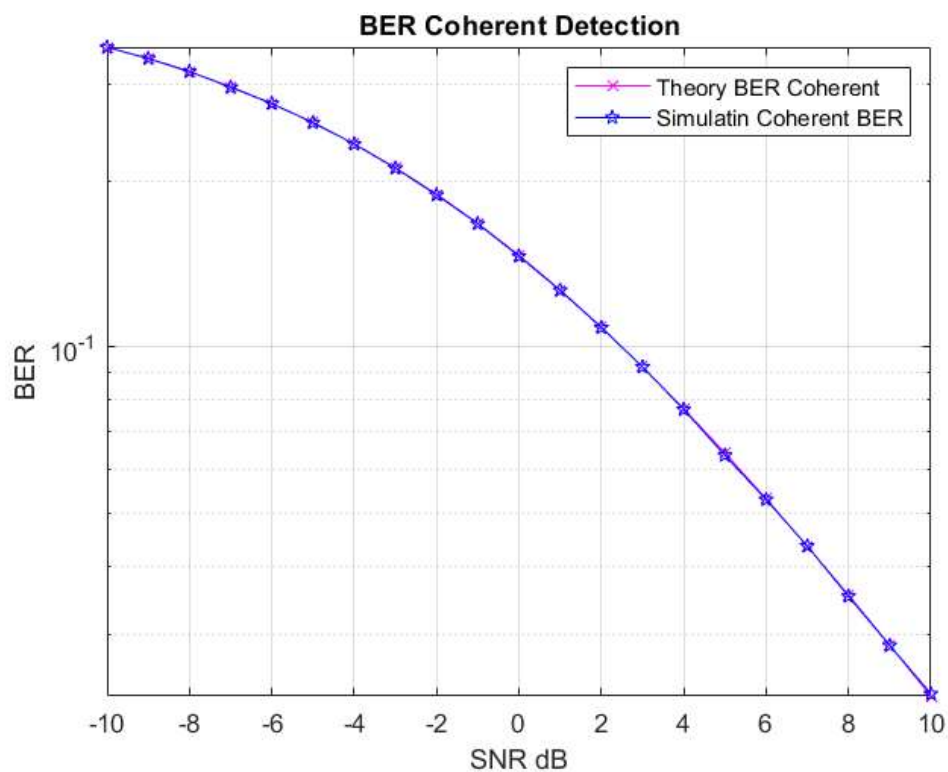


Figure5 , BER BPSK Modulation with Coherent Detection Over Rayleigh Fading Channel

برای مقایسه خطای سیستم با داشتن اطلاعات کانال و بدون داشتن اطلاعات کانال نمودار ششم رسم شده است، همانطور که مشاهده میشود حدود سه دسیبل به ازای یک خطای مشخص تفاوت میباشد.  
 ج) میتوان نتیجه گیری کرد که خطایی که در سگنال به نویز های بالا ناشی میشود به خاطر نویز جمع شوند با سیگنال نیست بلکه بیشتر به خاطر این است این است که کانال در محوشدگی عمیق<sup>1</sup> میباشد.

<sup>1</sup> Deep Fade



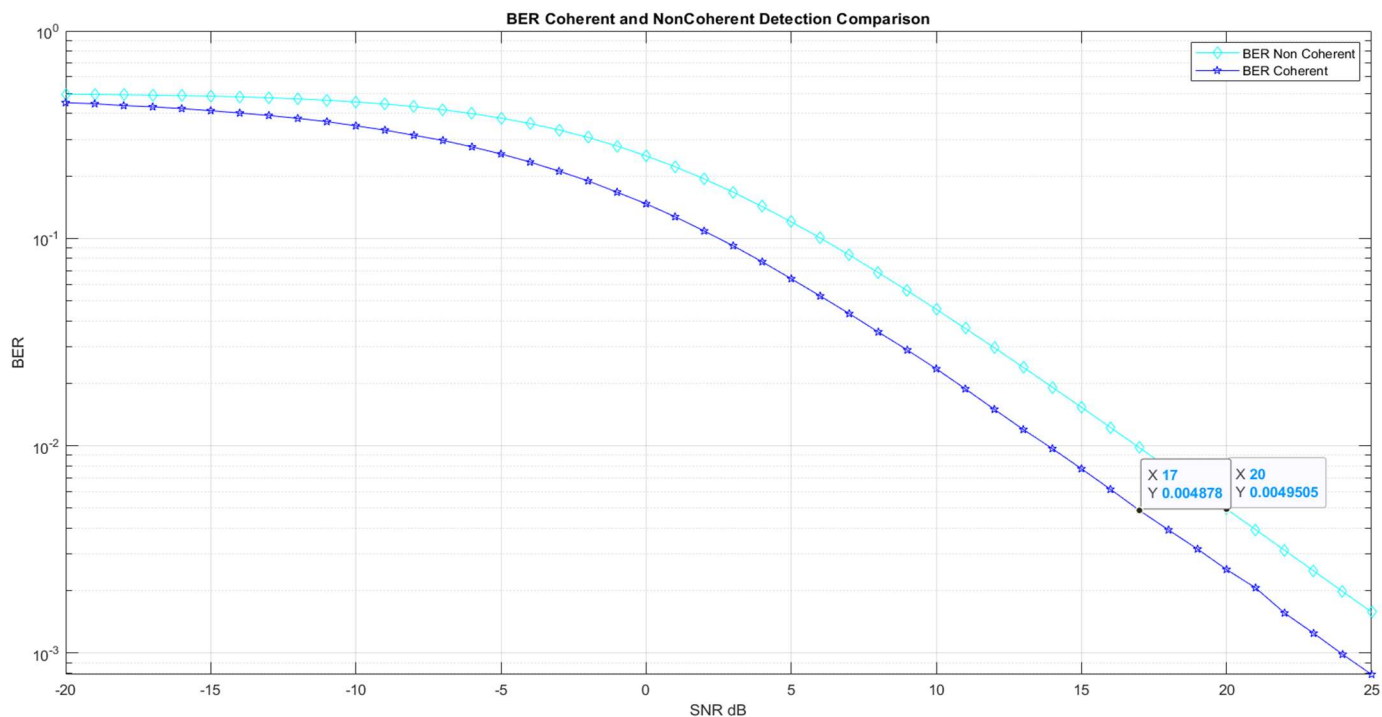


Figure6 , BPSK BER over Rayleigh Channel for Coherent and Non Coherent Detection

4. الف) در این قسمت باز به صورت تئوری و شبیه سازی سعی به محاسبه احتمال خطا شده است. من در ابتدا سعی کردم مشابه قبل سیگنال را تولید در پاسخ ضربه کانال ضرب و سپس با نویز جمع کنم. در انتها در گیرنده مشابه قبل تقسیم به پاسخ ضربه کانال و در انتها آشکار سازی کنم که متاسفانه نمودار حاصل شده با نمودار تئوری یکی نشد. سپس سعی کردم کدی که برای آزمایشگاه مخابرات دیجیتال<sup>2</sup> تغییر دهم به نحوی که کانال رایلی باشد، نمودار زیر حاصل شد. البته اندکی با مقدار محاسبه شده تئوری متفاوت است.

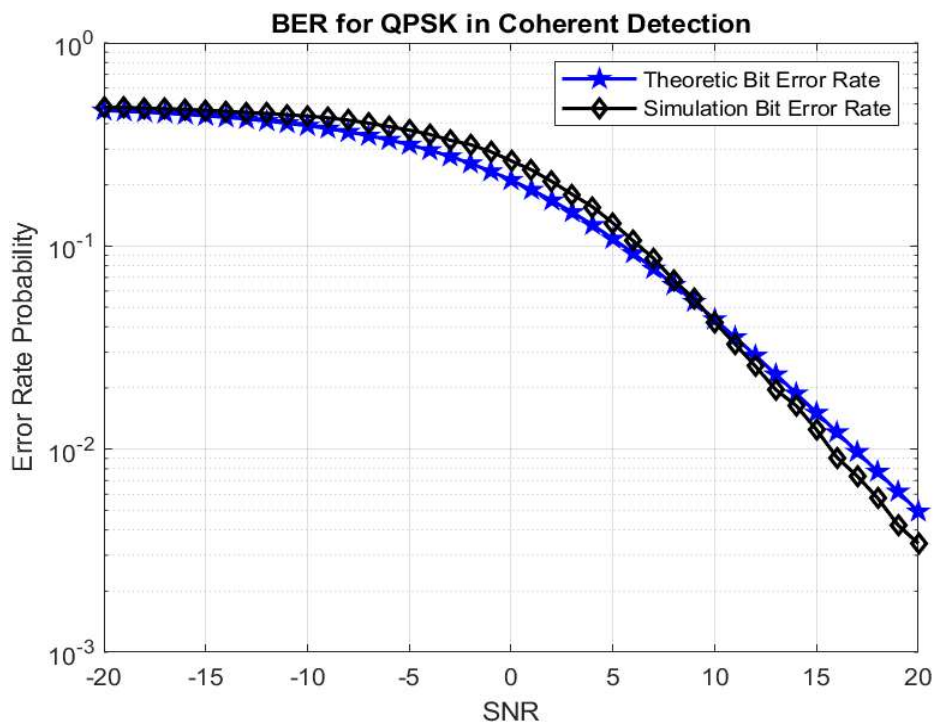


Figure7 , BER for QPSK with Coherent Detection over Rayleigh Channel

<sup>2</sup> تمامی کدهای آزمایشگاه را توسط خودم و همگروهیهایم آقای آل محمد نوشته شده است.

محاسبه خطا برای مدولاسیون QPSK به صورت زیر است:

در مدولاسیون QPSK بر خلاف BPSK که فقط از محور حقیقی برای آشکار سازی استفاده میکند از محور موهومی نیز استفاده میکند و تمامی بیت ها میتوانند مستقلن با خطای زیر آشکار شوند:

$$Q\left(\frac{2a^2}{N_0}\right) = Q(SNR)$$

مشابه BPSK با اتگرال گیری از توزیع SNR میتوان احتمال خطا را به دست آورد:

$$p_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{SNR}{SNR + 2}} \right)$$

(ب) در SNR های بالا میتوان از تقریب های زیر استفاده کرد:

$$BPSK - Non\ coherent\ Orthogonal\ in\ Time\ Domain: P_e \approx \frac{1}{2SNR}$$

$$QPSK : P_e \approx \frac{1}{2SNR}$$

در SNR های بالا این دو خطای یکسانی دارند اما همانطور که واضح است سرعت انتقال داده برای QPSK دو برابر BPSK میباشد. نمودار در شکل زیر نیز این مشخص است.

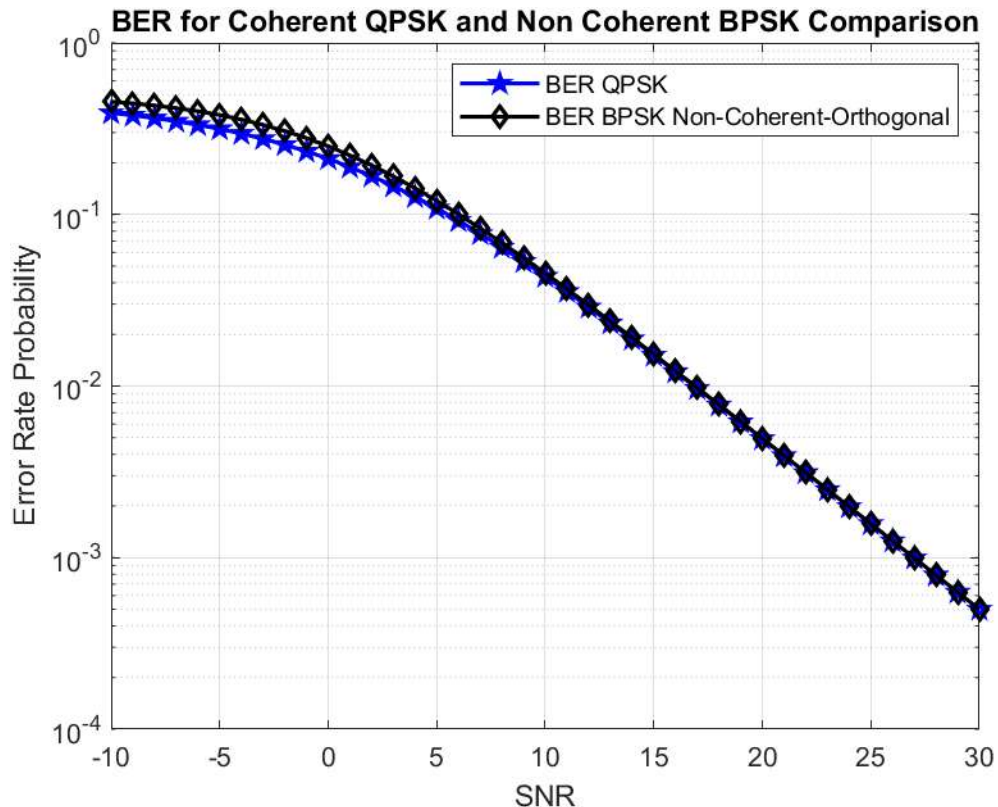


Figure8 , Coherent QPSK and Non Coherent BPSK BER Comparison

5. الف) بهتر است بین هر سمبل تکراری به اندازه زمان همبستگی کانال<sup>3</sup> صبر شود تا سمبل بعدی ارسال شود تا پاسخ کانال به هر سمبل تکراری ناهمبسته باشد.

ب) به دست آوردن خطا از طریق تئوری به صورت زیر است:

(5) ب

مسئله دریافت  $y$  به صورت یک برابر است، البته  $h$  و  $x$  و  $w$  نیز همبسته:

با توجه به اینکه گزینه همبستگی است داریم می توانیم در طرف راست  $h^*$  ضرب کنیم:

$$y = h x + w$$

$w, h, y \in \mathbb{R}^L$

$$h^* y = \|h\|_2^2 x + h^* w \xrightarrow{\text{تقسیم بر اسکالر}} \frac{h^*}{\|h\|} y = \|h\|_2 x + \frac{h^*}{\|h\|} w$$

سافتا، گزینه MRC می باشد، به صورتی که می توان نسبت نسبت سری در خروجی دارد. می توانیم به این  $\frac{h^*}{\|h\|} w \sim \mathcal{CN}(0, N_0 I)$  و توزیع احتمالات پاسخ کانال خطا ص 11 می کنیم.

$$P_e = Q(\sqrt{2 \|h\|^2 \text{SNR}})$$

با توجه به اینکه  $h \sim \mathcal{CN}$  است داریم:

$$\|h\|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + \dots + |h_L|^2 \rightarrow \chi^2_{2L} \text{ freedom}$$

$$P_e = \int_0^\infty Q(\sqrt{2 \|h\|^2 \text{SNR}}) f(h) dh$$

from book

$$= \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^L \sum_{\ell=0}^{L-1} \binom{L-1+\ell}{\ell} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^\ell$$

<sup>3</sup> Coherence Time

نمودارهای حاصل برای قسمت تئوری و شبیه سازی به صورت زیر است:

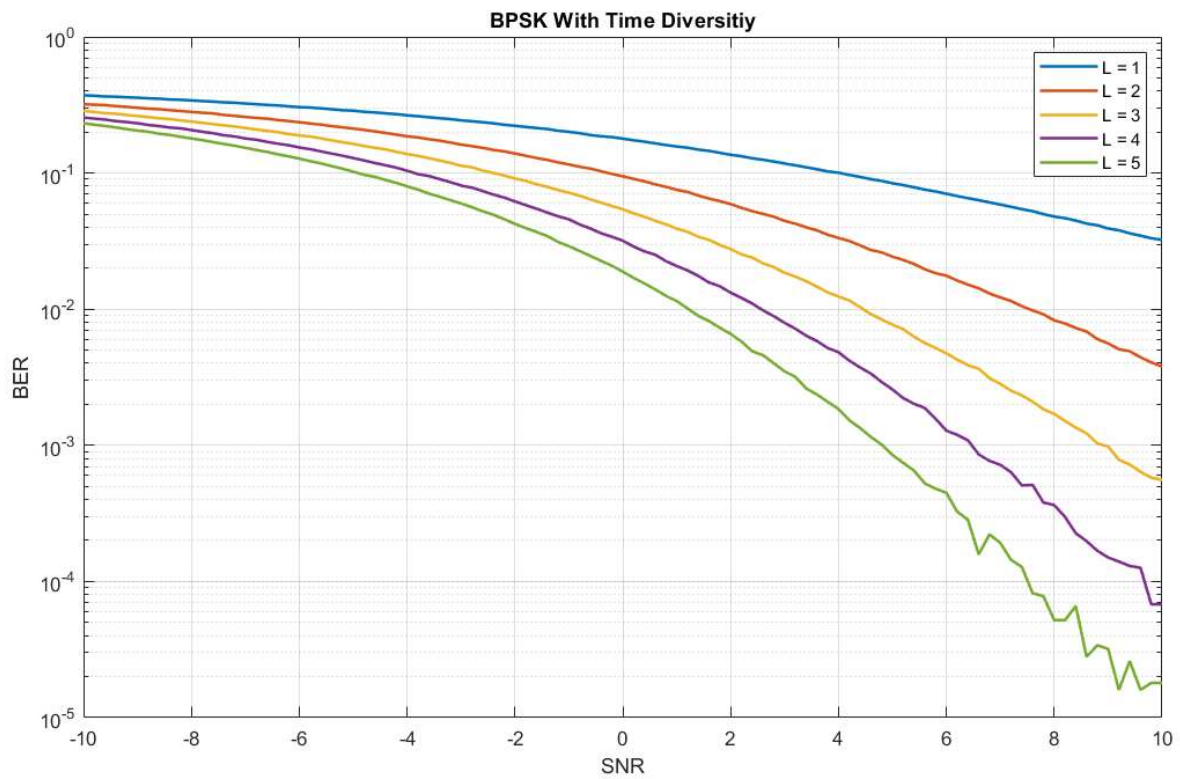


Figure9 , BPSK with Time Diversity Over Rayleigh Channel - Simulation

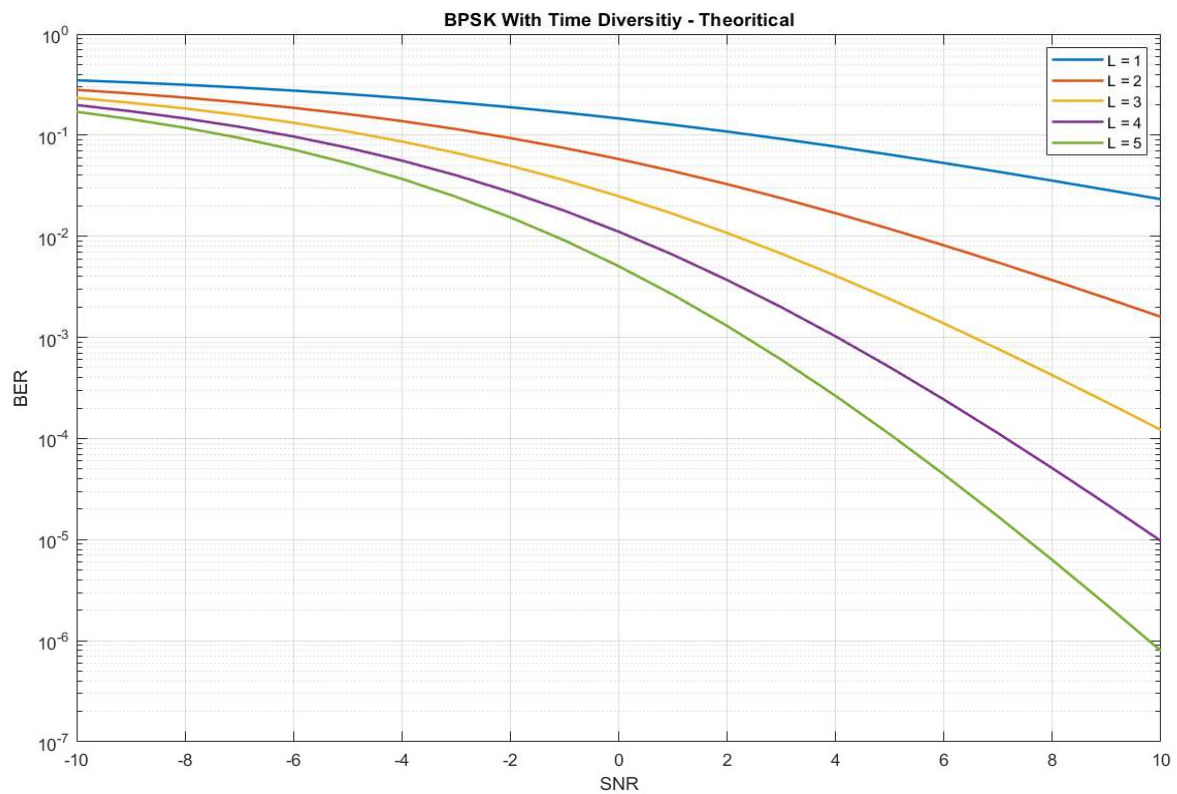


Figure10 , BPSK with Time Diversity Over Rayleigh Channel - Theoritical

همانطور که مشاهده میشود با تکرار سمبل ها خطا به صورت چشمگیری کاهش می یابد اما مشکلی که وجود دارد سرعت انتقال داده به شدت کاهش پیدا میکند که این مطلوب نیست.

(6 الف) میتوان به مدت زمان  $L$  تایم اسلات از از آنتن ها سمبل های یکسان و پشت سرهم بفرستیم. البته با توجه به وضعیت کانال میتوان توان را تغییر داد تا ارسال بهینه شود.

(ب) مانند درس کد الموتی را ایجاد کرده و طبق کد الموتی ارسال میکنیم. یعنی در زمان اول  $s_1$  و  $s_2$  و در زمان بعد  $s_1^*$  و  $s_2^*$  را مفرستیم. در نهایت با آشکار سازی شکل زیر حاصل میشود، همانطور که مشاهده میشود مقدار تئوری با مقدار شبیه سازی شده مطابقت دارد.

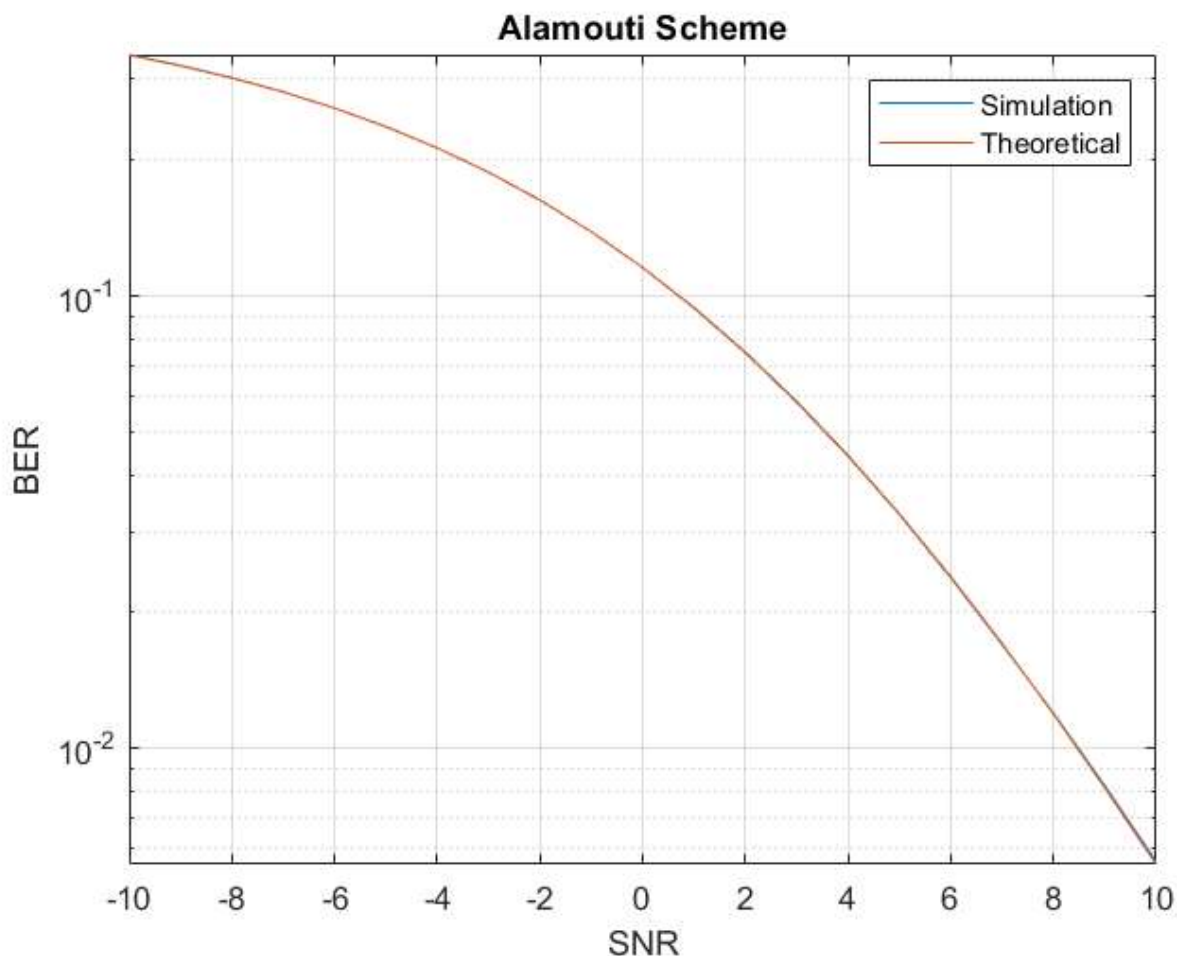


Figure11

(ج) کد الموتی دارای نرخ بالاتری است اما خطا به ازای SNR یکسان در دایورسیتی زمانی بهتر است به طور مثال برای رسیدن خطای 0.01 در الموتی نیاز به حدود 8.2 دسیبل SNR است اما در دایورسیتی زمانی حدود 4.5 دسیبل.

بخش دوم

(1) تعداد تب های کانال برابر است با میزان تأخیر در کانال در فرکانس نمونه برداری یعنی:

$$L = T_d \quad W = 10^{-5} \times 20 \times 10^6 = \boxed{200}$$

(2) برای تعیین تعداد زیر حامل ها باید به چند فاکتور توجه داریم:

الف) تعداد زیر حامل ها معادله از  $L$  بیشتر به عبارت دیگر هر چه  $\frac{L}{N_c + L}$  عددی کمتر باشد، زمان ودان ایند تر صفوف شده است پس  $N_c \gg T_d W$

ب) باید از زمان عبور سیگنال یا  $T_d W$  کمتر باشد. چرا که باید کانال زمانی همیشه از خود ارائه دهد.

ج) برای بسته تر شدن پاده سازی الگوریتم FFT بهتر است که توانی از دو باشد البته این مورد را صرف نظر می کنیم!

$$T_d W \ll N_c < T_c W$$

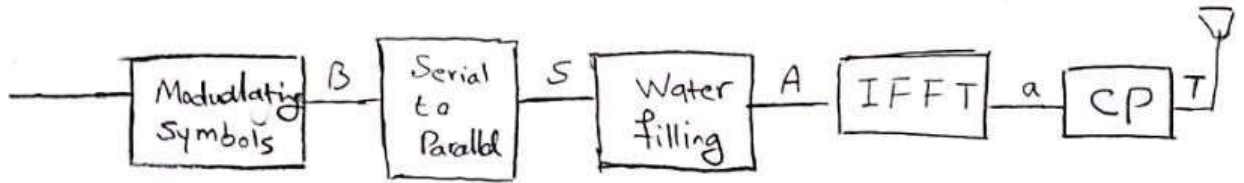
برای اینکه یک guard هم بر زمان تغییرات کانال در نظر گرفته شود:

$$N_c = 80 \times 10^3$$

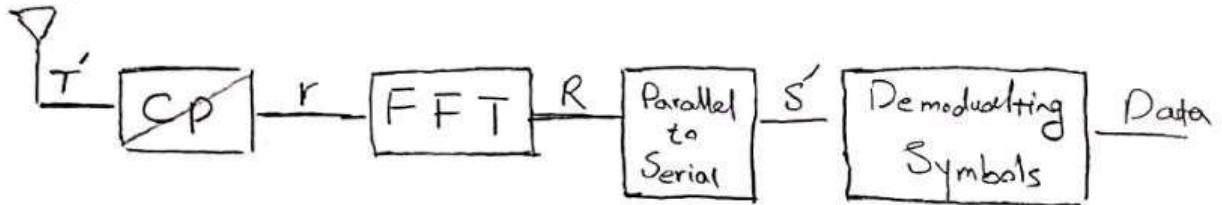
$$n\text{-blocks} = \frac{N}{N_c} = 1250 \quad (3)$$



T<sub>x</sub>



R<sub>y</sub>



1. دریافت کننده بیت های ارسالی مدوله می شوند و B بیتل می دهند اگر ضرب باشد 1- و اگر باشد 1 در وکتور B های می گیرند.  
2. در Block Serial to Parallel به صورت Block در کنار هم قرار می گیرند:  
\* از این پس به صورت بلوک، بلوک پیش می رویم.

$[B_1, \dots, B_N] \xrightarrow{\text{Serial to Parallel}} \begin{matrix} N_c \\ \left[ \begin{matrix} S \end{matrix} \right] \\ \frac{N}{N_c} = n_{\text{blocks}} = 1250 \end{matrix}$

3. در Water Filling به هر سبل در هر بلوک توان محسوب به آن زیر محاسبه می کنیم. چون توان محدودیت دارد توان هر زیر حامل از رابطه ی  $P_i^* = P_{\max} \frac{w_{\text{rf}}}{\lambda} P_i^* = \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{\lambda} \right)^+$ ،  $H = \text{FFT}(h, N_c)$ ،  $x^T = \max(x, 0)$  می آید:  
پس با ضرب در این به توان محسوب به زیر حامل را اقسام می کنیم و سبل های A را بشکلی می کنیم.

4. سبل های a را با IFFT  $N_c$  نقطه ای بشکلی می کنیم.

5. به تعداد بیت های کانال (L) CP اضافه می کنیم:

6. بردار T در کانال فرکانس گیرین فرستاده و باندهای جمع می شود

7. به دلیل وجود CP می توانیم کانال را به کانال تبدیل کردن تبدیل کنیم و افکات را فک کنیم:

8. به دلیل وجود کانال تبدیل کردن از دو طرف تبدیل فریم بگیریم:

$R = \text{FFT}(a) * \text{FFT}(h, N_c) + \Lambda$  ;  $\Lambda = \text{FFT}(n, N_c)$

$\Rightarrow R = A * H + \Lambda$   $\xrightarrow{\text{جدا کردن چیزی در انتهای}} R_i = S_i * P_i^* * H_i + \Lambda_i$   $\xrightarrow{\text{به دست آید}}$

9. حال سبل حالا باید Butter جمع آوریم به صورت سریال کرده و demodulate می کنیم.

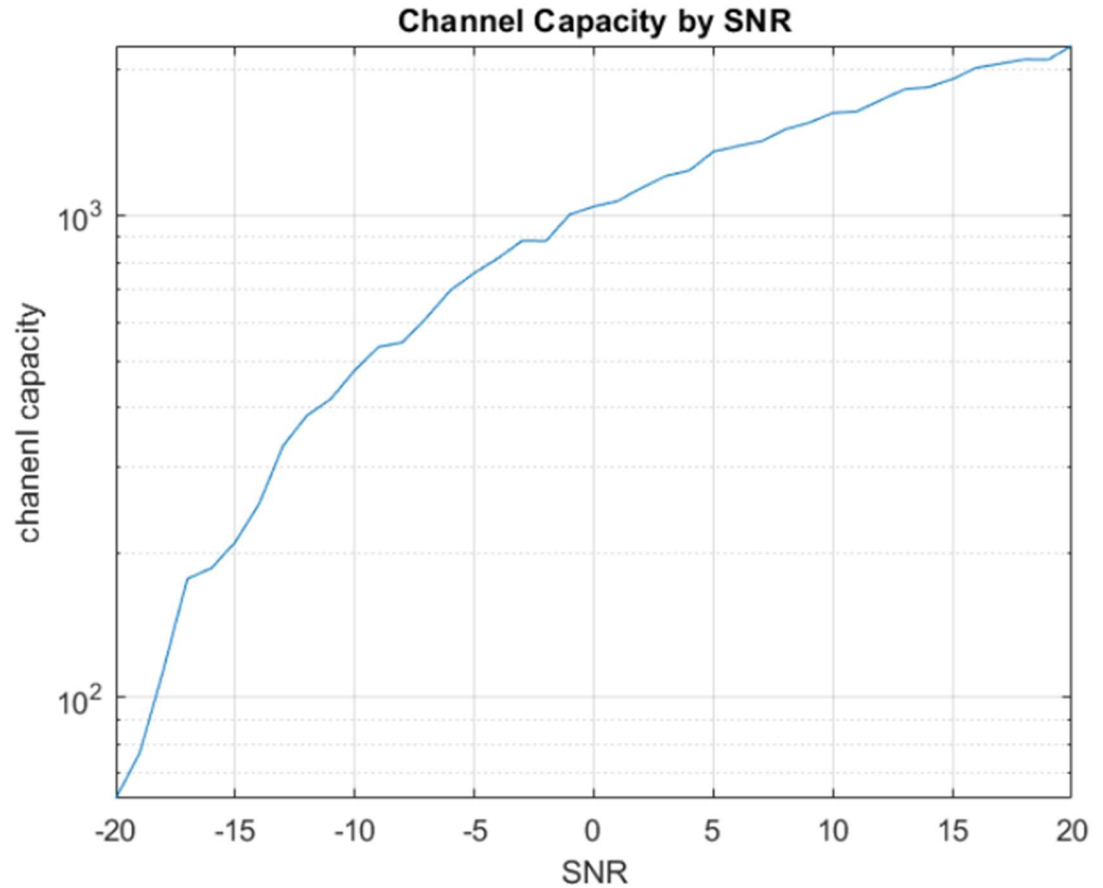


Figure12 , Channel Capacity Plot

(6) وقت کافی برای انجام نداشتم 😊

(7) برای این قسمت دو همسان ساز در حوزه فرکانس اضافه شده احتمال خطای هر یک در شکل پایین مشخص است، همسان ساز MMSE کمی در SNR های پایین تر بهتر عمل میکند.

شبه سازی برای این قسمت در فایل Q2 میباشد برای رسیدن به همسان ساز MMSE یا ZF کافیت آرگومان ان را تغییر دهید.

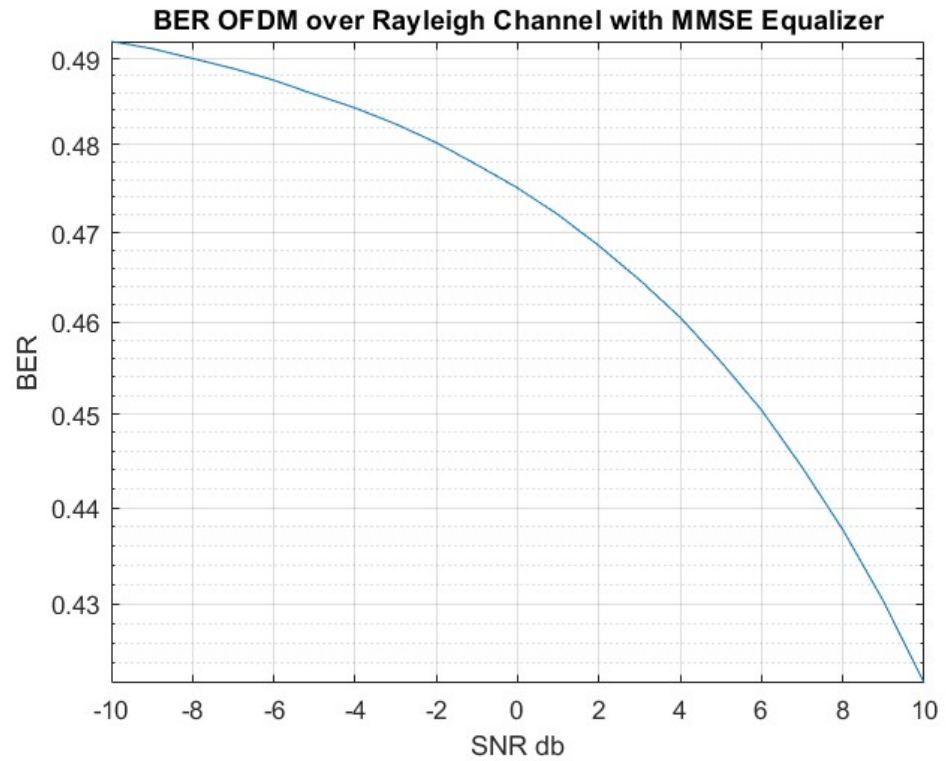


Figure13 , OFDM Performance over Rayleigh Channel with MMSE Eq in Frequency Domain

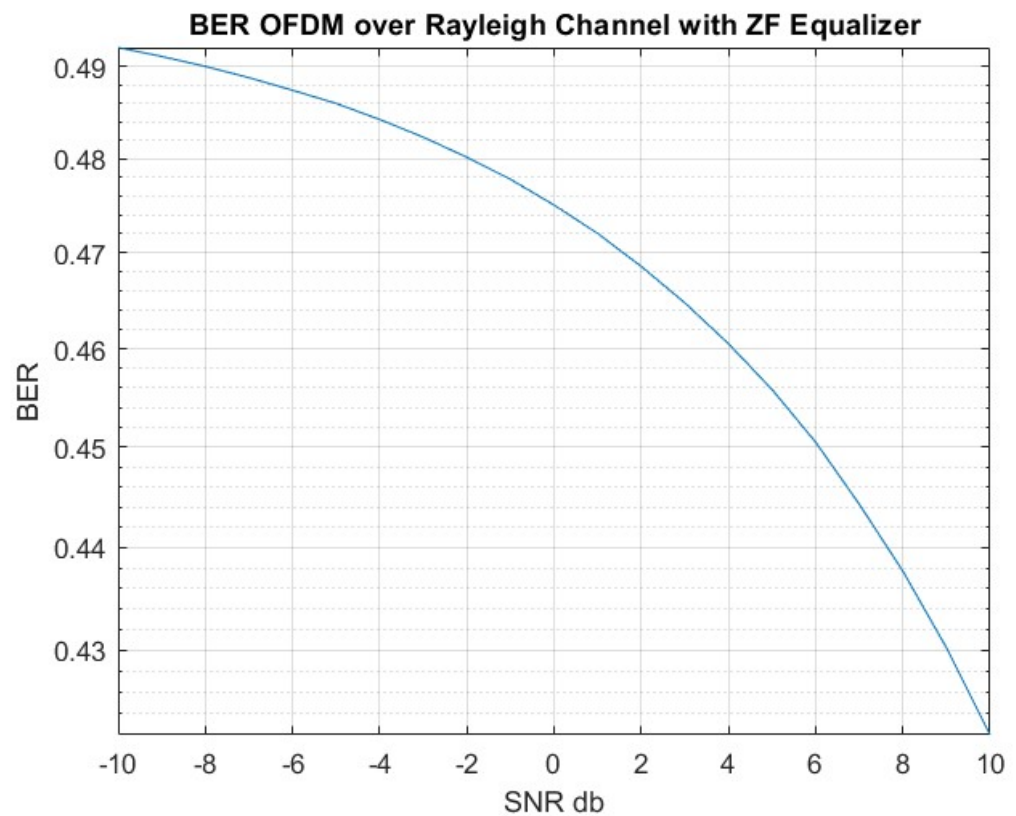


Figure14 , OFDM BER with ZF Equalizer