موضوع
تاریخ / /

1) 1) درست

۲) نادرست : $(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T(AB)^T = C^T(B^TA^T) = C^TB^TA^T$

۳) درست ، فرض کنیم ماتریس های A و B وارون پذیر باشند. ماتریس $C = AB$

را درنظر می گیریم. C وارون پذیر است زیرا ماتریس $B^{-1}A^{-1}$ به طوری وجود دارد که :

$$C(B^{-1}A^{-1}) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

۴) درست : کافی است دریکی از معادلات صدق کند تا شرط دوم هم برقرار شود. زیرا اگر

به عنوان مثال $BA = I$ ، بدین معنی است که معادله ی $Ax=0$ تنها جواب بدیهی دارد

و می توان نتیجه گرفت $A_{n\times n}$ دارای n درایه ی محوری است و می توان با عملیات های سطری

آن را به ماتریس همانی تبدیل کرد که نشان دهنده ی معکوس پذیر بودن ماتریس A است

۵) نادرست . این گزاره درحالت کلی درست است. اما دارای شرطی اضافی است

در واقع کافیست حداقل یکی از عبارت های $AB=I$ یا $BA=I$ درست باشد طبق اثبات ۴

۲) ۱)

$$A^{-1} = \frac{1}{5-9}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1}(AB) = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 17\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-12 & -4\\ -8 & -16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

۲) وابستی خطی اند :

$$B = [b_1 \; b_2 \; \dots \; b_p]$$

$$AB = [Ab_1 \; Ab_2 \; \dots \; Ab_p] \Rightarrow Ab_p = 0 \quad , b_p \neq 0$$

می‌توان مشاهده کرد معادله $Ax=0$ به ازای $x=b_p$ جواب غیر بدیهی دارد

۳)

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix}-5 & 9\\ 4 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5x_1 + 9x_2\\ 4x_1 - 7x_2\end{bmatrix}$$

$$S(x) = A^{-1}x = -1\begin{bmatrix}-7 & -9\\ -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7x_1 + 9x_2\\ 4x_1 + 5x_2\end{bmatrix}$$

$$S(x_1, x_2) = (7x_1 + 9x_2 \; , \; 4x_1 + 5x_2)$$

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix}2 & -8\\ -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_1 - 8x_2\\ -2x_1 + 7x_2\end{bmatrix}$$

$$S(x) = A^{-1}x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}7 & 8\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3.5x_1 - 4x_2\\ -x_1 - x_2\end{bmatrix}$$

$$S(x_1, x_2) = (-3.5x_1 - 4x_2 \; , \; -x_1 - x_2)$$

موضوع
تاریخ

۲) چون T و U تبدیل‌های خطی اند می‌توان در نظر گرفت $T(x)=Ax$ ، $U(x)=Bx$

که A و B ماتریس‌های مربعی $n \times n$ هستند.

$$T(U(x))=T(Bx)=ABx \qquad ABx=x \Rightarrow AB=I$$

$$U(T(x))=U(Ax)=BAx=Ix=x$$ ، پس می‌توان گفت $B=A^{-1}$

۳)

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A & I & 0 & 0 & I & 0 \\ B & D & I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -A & I & 0 \\ 0 & D & I & -B & 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -A & I & 0 \\ 0 & 0 & I & AD-B & -D & I \end{bmatrix}$$

$$P=-A \qquad Q=AD-B \qquad R=-D$$

۴)

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۵ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = L \qquad A=LU \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

$$Ly=b\quad \left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۲۴ \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱۲ \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{array}\right] \quad y=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۹ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$Ux=y\quad \left[\begin{array}{cccc} ۲ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۳ \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} ۲ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right] \quad x=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۵

$$\begin{bmatrix} ۲۵ & ۵ & ۱ \\ ۶۴ & ۸ & ۱ \\ ۱۴۴ & ۱۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲۵ & ۵ & ۱ \\ ۰ & -\frac{۲۴}{۵} & -\frac{۳۹}{۲۵} \\ ۰ & -\frac{۸۴}{۵} & -\frac{۱۱۹}{۲۵} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲۵ & ۵ & ۱ \\ ۰ & -\frac{۲۴}{۵} & -\frac{۳۹}{۲۵} \\ ۰ & ۰ & \frac{۷}{۱۰} \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۶۴ \\ ۱۴۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۲۴}{۵} \\ -\frac{۸۴}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۷}{۱۰} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۶۴}{۲۵} & ۱ & ۰ \\ \frac{۱۴۴}{۲۵} & \frac{۷}{۲} & ۱ \end{bmatrix} = L$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} ۲۵ & ۵ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۲۴}{۵} & -\frac{۳۹}{۲۵} & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۷}{۱۰} & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} ۲۵ & ۵ & ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & -\frac{۲۴}{۵} & ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۷۸}{۳۵} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۷} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} ۲۵ & ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۲۵}{۲۴} & \frac{۲۵}{۲۸} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۵}{۲۴} & -\frac{۱۳}{۲۸} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۷} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲۵} & \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۲۸} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۵}{۲۴} & -\frac{۱۳}{۲۸} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۷} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{۱}{۲۵} & \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۲۸} \\ ۰ & -\frac{۵}{۲۴} & -\frac{۱۳}{۲۸} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۷} \end{matrix}}_{U^{-1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{64}{25} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{144}{25} & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-64}{25} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 & \frac{-144}{25} & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-64}{25} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{5} & \frac{-7}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{16}{5} & \frac{-7}{2} & 1 \end{matrix}}_{L^{-1}}$$

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{1}{24} & \frac{1}{28} \\ 0 & \frac{-5}{24} & \frac{-13}{28} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-64}{25} & 1 & 0 \\ \frac{16}{5} & \frac{-7}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{28} \\ \frac{-20}{21} & \frac{17}{12} & \frac{-13}{28} \\ \frac{32}{7} & -5 & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

---

(۶) کافیست ثابت کنیم تجزیه LU منحصر به فرد است. برهان خلف: فرض کنیم $A = LU$ تجزیه دیگری داشته باشد. این تجزیه به فرم $A = LCC^{-1}U$ نوشته خواهد شد که در آن C یک ماتریس وارون‌پذیر و مخالف ماتریس همانی است. برای آن که $(LC)(C^{-1}U)$ یک تجزیه برای A باشد باید LC پایین مثلثی باشد که چون L پایین مثلثی است، پس C باید پایین مثلثی باشد همچنین $C^{-1}U$ باید بالا مثلثی باشد که به دلیل بالا مثلثی بودن U، C^{-1} و در نتیجه C بالا مثلثی است. چون C هم بالا مثلثی هم پایین مثلثی است، پس C ماتریس قطری است. می‌توان مشاهده کرد که درایه‌های قطر ماتریس LC، به دلیل یک بودن درایه‌های قطری ماتریس A

برابر با درایه‌های قطری ماتریس C هستند. چون ماتریس CC همانی نیست درایه‌های

قطری ماتریس LC نیز برابر یک نخواهند بود و این با فرض تجزیه بودن $LCC^{-1}U$

تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و تجزیه LU یکتاست. درنتیجه اگر تجزیه

دیگری مانند L_1U_1 برای A وجود داشته باشد، $L_1=L$ و $U_1=U$.

۷) الف)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 19 & -6 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & -6 & 13 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_4 V$$

$\{V\}$ پایه برای NulA

ب) با توجه به این که ۳ ستون اول ماتریس A محوری و مستقل خطی اند، می‌توان

$\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\-6\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-5\\4\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ را به عنوان پایه برای Col A در نظر گرفت

۸)

$$\begin{bmatrix}-6&8&-9&0\\3&0&4&0\\-9&7&-8&0\\4&-3&3&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-\frac{4}{3}&\frac{3}{2}&0\\0&4&-\frac{1}{2}&0\\0&-5&\frac{11}{2}&0\\0&\frac{7}{3}&-3&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&\frac{4}{3}&0\\0&1&-\frac{1}{8}&0\\0&0&\frac{39}{8}&0\\0&0&-\frac{65}{24}&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس معادله‌ی $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=0$ تنها جواب بدیهی دارد و

v_1، v_2 و v_3 مستقل خطی اند. در نتیجه می‌توان $B=\{v_1,v_2,v_3\}$

را یک پایه برای H در نظر گرفت.

$$\begin{bmatrix}-6&8&-9&11\\3&0&4&-2\\-9&7&-8&17\\4&-3&3&-8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-\frac{4}{3}&\frac{3}{2}&-\frac{11}{6}\\0&4&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\0&-5&\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{7}{3}&-3&-\frac{2}{3}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{8}&\frac{7}{8}\\0&0&\frac{39}{8}&\frac{39}{8}\\0&0&-\frac{65}{24}&-\frac{65}{24}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

چون x را می‌توان به صورت ترکیب خطی $x=-2v_1+v_2+v_3$ نوشت پس $x\in H$ و $[x]_B=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

۹

$$\begin{bmatrix} ۲s+۳t \\ r+s-۲t \\ r+s-۲t \\ ۴r+s \\ ۳r-s-t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ -۲ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} \qquad r,s,t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$