موضوع

تاریخ / /

(۱) الف)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$ فرم نردبانی

چون راست ترین ستون محوری نیست پس دستگاه سازگار است.

ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g+k+h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2g+k+h=0$$

ج)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

موضوع
تاریخ / /

د) در صورتی که ستون پنجم هیچ درایه محوری نداشته باشد ماتریس همواره سازگار است

۲

الف) نادرست _ u و v باید مستقل خطی باشند مثلا اگر $u=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ و $v=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ باشد $span\{u,v\}$ خطی در فضای سه بعدی است که از صفر می گذرد

ب) نادرست _ درایه محوری نباید در ستون آخر باشد مثلا $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ ناسازگار است

ج) درست

د) نادرست _ مثلا مجموعه ی $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ وابسته ی خطی است اما $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ را نمی توان به صورت ترکیب خطی بقیه اعضا نوشت

ه) درست _ اثبات: اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی باشد پس دستگاه $c_1v_1+\dots+c_nv_n=0$ تنها جواب بدیهی دارد و چون T تبدیل خطی است پس: $T(c_1v_1+\dots+c_nv_n)=c_1T(v_1)+\dots+c_nT(v_n)$ و $T(0)=0$ پس $c_1T(v_1)+c_2T(v_2)+\dots+c_nT(v_n)=0$ نیز تنها جواب بدیهی دارد و مجموعه $\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}$ مستقل خطی است

موضوع

تاریخ / /

اثبات عکس: چون مجموعه $\{T(v_1) \dots T(v_n)\}$ مستقل خطی است پس $c_1T(v_1)+\dots+c_nT(v_n)=0$

تنها جواب بدیهی دارد و چون T مستقل خطی است پس $c_1T(v_1)+\dots+c_nT(v_n)=T(c_1v_1+\dots+c_nv_n)$

و می‌دانیم $T(0)=0$ پس چون $T(c_1v_1+\dots+c_nv_n)=0=T(0)$ درنتیجه $c_1v_1+\dots+c_nv_n=0$

تنها جواب بدیهی دارد و مستقل خطی است.

د) درست ـ چون $Ax=b$ جواب یکتا دارد پس در هر سطر A یک درایه محوری

وجود داشته و تمام ستون‌هایش محوری اند درنتیجه ستون‌های A مستقل خطی بوده

می‌توانند فضای R^n را تولید کنند ($span$ ستون های A فضای R^n است)

ذ) درست ـ فرض کنیم $S=\{v_1,\dots,v_p\}$ زیرمجموعه R^n و مستقل خطی است و $W=S\cup\{v\}=\{v_1,\dots,v_p,v\}$

برهان خلف: فرض کنیم W مستقل خطی نباشد در اینصورت حداقل یکی از اعضای آن را می‌توان به صورت

ترکیب خطی بقیه اعضا نوشت. دو حالت در نظر می‌گیریم: v را بتوان بصورت ترکیب خطی بقیه

اعضا نوشت یا یکی دیگر از اعضا بجز v را بتوان به صورت ترکیب خطی بقیه اعضا نوشت

موضوع:
تاریخ: / /

حالت اول: $V = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p$

دراینصورت V عضوی از $span(S)$ است و با فرض تناقض دارد.

حالت دوم: $V_i = c_1v_1 + \dots + c_pv_p + cV \quad 1 \leq i \leq p$

دراینجا برای c دو حالت درنظر می‌گیریم. اگر c صفر باشد، دراین صورت توانسته ایم یکی

از اعضای S را بصورت ترکیب خطی بقیه اعضای S بنویسیم. پس S مستقل خطی نیست

که با فرض درتناقض است. اگر c صفر نباشد:

$$V = \frac{-c_1}{c}v_1 + \frac{-c_2}{c}v_2 + \dots + \frac{-c_p}{c}v_p + \frac{-1}{c}v_i$$

حال توانسته ایم V را بصورت ترکیب خطی اعضای S بنویسیم. که یعنی V متعلق به $span(S)$

بوده و با فرض متناقض است. پس فرض خلف باطل و W مستقل خطی است.

ج) نادرست - مثلا:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Ax = 0 \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یکی از جواب های غیر بدیهی

موضوع
تاریخ

۲) الف)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{matrix} \end{array}$$

۳ سطر A دارای درایه محوری است ـ معادله $Ax = b$ به ازای تمام b ها در R^4 جواب ندارد زیرا سطری به فرم $[0\ 0\ 0\ 0\ b]$ خواهیم داشت $(b \neq 0)$

ب)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ & 9 & & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{matrix} \end{array}$$

خیر چون تعداد ستون های محوری و مستقل خطی B ۳ تا است که از ابعاد R^4 کمتر است اما می‌توان گفت ستون های B، R^3 را span می‌کنند.
در مورد A نیز همین طور است.

الف)

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & 4 & h \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 16 & h+18 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h+18 \end{bmatrix}$$

$$h+18=0 \Rightarrow h=-18$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 4 & 7 & h \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & h+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}$$

$$h+4=0 \Rightarrow h=-4$$

ج)

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow$$ کافیست a، c، f مخالف صفر باشند

د)

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ 1 & c & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به ازای تمام $a,\dots,f$ مستقل خطی اند.

۵) می‌دانیم تبدیل T خطی است پس $T(x)=T(p+tv)=p+tT(v)$

(t اسکالر است). اگر تبدیل v تحت T را u بنامیم ($T(v)=u$) در اینصورت

کاملا مشاهده است که تبدیل x تحت T برابر $p+tu$ است و چون u نیز برداری

در فضای R^n است تبدیل $T(x)$ نیز نمایانگر یک خط در فضای R^n است به شرطی

که u بردار صفر نباشد. در اینصورت $T(x)$ نمایانگر یک نقطه خواهد بود

---

۶) مجموعه $\{v_1,\dots,v_n\}$ مستقل خطی است. پس تنها جواب معادله‌ی $x_1v_1+\dots+x_nv_n=0$

جواب بدیهی آن خواهد بود. می‌خواهیم ثابت کنیم تنها جواب معادله‌ی $c_1(v_1+v_2)+\dots+c_n(v_n+v_1)=0$

نیز جواب بدیهی آن است. داریم:

$$(c_1+c_n)v_1+(c_1+c_2)v_2+\dots+(c_{n-2}+c_{n-1})v_{n-1}+(c_{n-1}+c_n)v_n=0$$

پس for $i\in\{2,\dots,n\}$ $\quad c_i=-c_{i-1} \Rightarrow c_i+c_{i-1}=0$

$$c_i=c_1(-1)^{i+1} \Rightarrow c_n=c_1(-1)^{n+1} \xrightarrow{n\ \text{فرد}} c_n=c_1$$

از طرفی در جمله‌ی اول داریم $C_n = -C_1$ پس $\begin{cases} C_n = C_1 \\ C_n = -C_1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$

درنتیجه : for $i \in \{1, \dots, n\}$ $C_i = 0$

پس تنها جواب معادله‌ی $C_1(V_1+V_2)+\dots+C_n(V_n+V_1)=0$

نیز جواب بدیهی آن است و مجموعه $\{V_1+V_2, \dots, V_n+V_1\}$ مستقل خطی است

می‌دانیم تنها جواب معادله‌ی $C_1V_1+C_2(V_1+V_2)+\dots+C_n(V_1+\dots+V_n)=0$

جواب بدیهی آن است پس $C_1=C_2=\dots=C_n=0$

و تنها جواب معادله‌ی $C_1V_1+C_2V_2+\dots+C_nV_n=0$

نیز جواب بدیهی آن است و مجموعه $\{V_1, \dots, V_n\}$ مستقل خطی است

موضوع

تاریخ / /

۷ خیر بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ را می‌توان به عنوان شکل نقص در نظر گرفت که با هیچ ماتریس تبدیلی به ماتریس $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ تبدیل نخواهد شد