موضوع
تاریخ / /

۱) الف)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA & XB+Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow XA = C \Rightarrow X = CA^{-1} \quad , \quad XB + Y = D \Rightarrow Y = D - CA^{-1}B$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

$$= \det(I) \cdot \det(AY) = \det(A) \cdot \det(Y) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

ب)

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

$$= \det(AD - C\overbrace{AA^{-1}}^{I}B) = \det(AD - CB)$$

۲) ۲) درست: $\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \dfrac{\det(A)\det(S)}{\det(S)} = \det(A)$

ب) نادرست، چون هر ۴ سطر A در ۴ ضرب می‌شوند پس: $\det(4A) = 4^4 \det(A)$

ج) درست: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

د) نادرست، دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد برابر صفر است زیرا:

$$A^t = -A \Rightarrow \det(A^t) = \det(-A) \Rightarrow \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

تنها درصورتی که n فرد باشد $\det(A) = 0$ است

ه) نادرست: مثال نقض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ با این که $1 = 1$, $C_{11} = 1$, $C_{12} = -1$

اما $\det(A)$ صفر است

و) درست: $\operatorname{adj}(A) = B \quad , B = [b_{ij}] \Rightarrow b_{ij} = C_{ji}(A)$

$$\operatorname{adj}(A^t) = D \quad , D = [d_{ij}] \Rightarrow d_{ij} = C_{ji}(A^t) = C_{ij}(A)$$

$$B^t = [b'_{ij}] \Rightarrow b'_{ij} = b_{ji} = C_{ij}(A) \Rightarrow B^t = D \Rightarrow (\operatorname{adj} A)^t = \operatorname{adj}(A^t)$$

۳)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

(۴) برای محاسبه‌ی

$$|A| = \begin{vmatrix} \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ \vdots & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \end{vmatrix}$$

مضربی از سطر اول را بگونه‌ای به سطرهای دیگر اضافه کنیم تا تمامی درایه‌های ستون اول غیر از درایه اول صفر شود. در اینصورت ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون اول ماتریس A، ماتریسی متشکل از درایه‌های $\{2,0,-2\}$ خواهد بود به فرم زیر:

$$|A| = \begin{vmatrix} \pm1 & \pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1 \\ 0 & \pm2,0 & \pm2,0 & \cdots & \pm2,0 \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \pm2,0 & \cdots & & \pm2,0 \end{vmatrix} = \pm1 \underbrace{\begin{vmatrix} \pm2,0 & \cdots & \pm2,0 \\ \vdots & & \vdots \\ \pm2,0 & \cdots & \pm2,0 \end{vmatrix}}_{|B|} = (\pm1)2^{n-1} \begin{vmatrix} \pm1,0 & \cdots & \pm1,0 \\ \vdots & & \vdots \\ \pm1,0 & \cdots & \pm1,0 \end{vmatrix}$$

اگر ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون اول A را B بنامیم، به علت صفر بودن دیگر عناصر ستون اول A، دترمینان A برابر $a_{11}|B|$ خواهد بود. اکنون می‌دانیم $|B|$ مضربی از 2^{n-1} است زیرا می‌توان از هر $n-1$ سطر آن ۲ را فاکتور گرفت پس:

$$|A| = a_{11}|B| = (\pm1)\cdot|B| = \underset{k\in\mathbb{Z}}{2^{n-1}\cdot k} \Rightarrow 2^{n-1} \mid |A|$$

۵) الف) اگر ستون دوم ماتریس A^{-1} را x بگیریم، $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -(15-16) = 1$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = (-1)^3(-20+21) = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = (-1)^4(-4+7) = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = (-1)^5(-3+5) = -2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبه‌ی ستون j ام ماتریس A^{-1}، اگر آن را x بنامیم می‌دانیم $Ax = I_j$

که در آن I_j ستون j ام از ماتریس همانی است. اکنون برای محاسبه‌ی درایه‌ی سطر i ام

از ستون j ام ماتریس A^{-1}، می‌دانیم با توجه به روش کرامر، باید دترمینان ماتریس

که از جایگذاری I_j در ستون i ام ماتریس A بدست می‌آید را بر دترمینان A

تقسیم کرد یعنی:

$$x_{ij} = \begin{array}{cc} & \text{ستون } i \\ \text{سطر } j & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \div |A|$$

که دترمینان این ماتریس برابر ضرب $(-1)^{i+j}$ در دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر j ام

و ستون i ام ماتریس A خواهد بود یعنی:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}|A_{ji}|}{|A|}$$

که $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ را C_{ji} می‌نامیم و داریم:

$$A^{-1} = [x_{ij}] = \left[\frac{C_{ji}}{|A|}\right] = \frac{1}{|A|}[C_{ji}] = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

۶

a) $\overset{P}{C\leftarrow B} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & ۷ & -۳ \\ -۵ & ۲ & ۵ & -۱ \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۲ & ۷ & -۳ \\ ۰ & -۸ & ۴۰ & -۱۴ \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۵ & ۲ \end{array}\right] \Rightarrow \overset{P}{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$

$\overset{P}{B\leftarrow C} = \left(\overset{P}{C\leftarrow B}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}^{-1} = (-۱)\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$

b) $\overset{P}{C\leftarrow B} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ & -۷ \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱۰ & -۹ \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & ۹ & -۸ \\ ۰ & ۱ & -۱۰ & ۹ \end{array}\right] \Rightarrow \overset{P}{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} ۹ & -۸ \\ -۱۰ & ۹ \end{bmatrix}$

$\overset{P}{B\leftarrow C} = \left(\overset{P}{C\leftarrow B}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} ۹ & -۸ \\ -۱۰ & ۹ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ \\ ۱۰ & ۹ \end{bmatrix}$

۷ ابتدا A را به فرم نردبانی تبدیل می‌کنیم:

$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۶ & ۶ & ۰ & -۳ \\ ۳ & ۹ & ۳ & ۶ & -۳ \\ ۳ & ۹ & ۰ & ۹ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۲ & ۲ & -۷ \\ ۰ & ۰ & -۹ & ۹ & -۹ \\ ۰ & ۰ & -۱۲ & ۱۲ & -۶ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۲ & ۲ & -۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$

موضوع
تاریخ / /

با توجه به فرم نردبانی A، ۳ ستون محوری دیده

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌شود پس $\dim \text{Col}\,A = 3$ درنتیجه $\text{rank}\,A = 3$

می‌دانیم $\text{rank}\,A + \dim \text{Null}\,A = n$ پس $3 + \dim \text{Null}\,A = 5$ و $\dim \text{Null}\,A = 5$

در فرم نردبانی می‌بینیم ستون اول، سوم و پنج محوری‌اند پس این ستون‌ها در ماتریس A

یک پایه برای $\text{Col}\,A$ می‌باشند.

$$\text{basis for Col}\,A : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

همچنین در فرم نردبانی سطرهای اول، دوم و سوم غیرصفر هستند پس این سطرها یک پایه

برای $\text{Row}\,A$ می‌باشند

$$\text{basis for Row}\,A : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

۸) ۱) صحیح: چون سطرهای A همان ستون‌های A^t هستند، تمام ترکیب‌های خطی

سطرهای A همان تمام ترکیب‌های خطی ستون‌های A^t هستند پس: $\text{Row}\,A = \text{Col}\,A^t$

۲) غلط: در واقع ستون‌های pivot نظیر B در A پایه‌های $\text{Col}\,A$ هستند نه ستون‌های

موضوع
تاریخ / /

ستون های pivot ماتریس B ، پایه های Col B را تشکیل می دهند که ممکن است ستون های

A در فضای Col B نباشند. می توان برای این موضوع مثال نقض نیز ارائه داد

۳) صحیح. بردار صفر R^2 در R^3 وجود دارد و R^2 نسبت به جمع و ضرب نیز بسته است

همچنین هر پایه برای R^2 دارای دو عضو خواهد بود پس R^2 دو بعدی و subspace برای R^3 است

۴) صحیح. چون مجموعه ی $\{v_1, \dots, v_n\}$ فضای w را span می کند، هر برداری

که به این مجموعه اضافه شود در واقع ترکیب خطی از این مجموعه است. پس مجموعه جدید نمی تواند مستقل

خطی باشد.

۵) غلط: $\text{span}\{v_1 \dots v_n\} = W$ پس هر بردار در فضای w را می توان به صورت ترکیب خطی

v_1 تا v_n نوشت. اگر برداری از این مجموعه حذف شود، به علت مستقل خطی بودن v_1 تا v_n

دیگر هر برداری در فضای w را نمی توان به صورت ترکیب خطی مجموعه ی جدید نوشت. پس مجموعه

با کمتر از n بردار w را span نمی کند و نمی تواند یک پایه برای w باشد.

۶) غلط . $Ax=0$ همواره سازگار است

⑨

$A=\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

$$A \xleftarrow{P} B \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -5 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -17/9 & -2/9 & 7/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/9 & 1/9 & 1/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/9 & 7/9 & -2/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/9 & -1/9 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left(A \xleftarrow{P} B\right) = 1/9 \begin{bmatrix} -17 & -2 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -8 & 7 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [P(t)]_B = \left(A \xleftarrow{P} B\right)[P(t)]_A$$

$$[P(t)]_B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -17 & -2 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -8 & 7 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -14 \\ 5/2 \\ -19/2 \\ 13/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -28 \\ 5 \\ -19 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$[x_A] = \left(B \xleftarrow{P} A\right)[x_B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \\ -38 \end{bmatrix}$$

۱۰

۱) $\begin{bmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} t = v_1 s + v_2 t$

v_1, v_2 مستقل خطی $\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

۲) $\begin{bmatrix} 2a \\ -4b \\ -2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} b = v_1 a + v_2 b$

v_1, v_2 مستقل خطی $\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

۳) $\begin{bmatrix} 2c \\ a-b \\ b-3c \\ a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} c = v_1 a + v_2 b + v_3 c$

v_1, v_2, v_3 مستقل خطی $\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

۴) $\begin{bmatrix} p+2q \\ -p \\ 3p-q \\ p+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} q = v_1 p + v_2 q$

v_1, v_2 مستقل خطی $\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

موضوع:
تاریخ: / /

(11) در حالت کلی خیر - زیرا ممکن است بتوان هر یکی از بردارهای v_1 تا v_4 را به صورت ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت یعنی $\{v_1, \dots, v_4\}$ وابسته‌ی خطی باشند. که در این صورت باید این بردارها را حذف کرد و بقیه آن‌ها را به عنوان پایه برای فضای برداری H در نظر گرفت. زیرا H برابر span این مجموعه بردارها نیز می‌شود.

اما در حالتی که $\dim H = 4$ باشد، می‌دانیم مجموعه‌ی پایه‌های H قطعاً ۴ عضو دارد. در این حالت می‌توان گفت هر ۴ برداری که H را span کنند می‌توان به عنوان پایه‌های فضای برداری H در نظر گرفت و چون $H = \text{span}\{v_1, \dots, v_4\}$، می‌توان با قطعیت گفت v_1 تا v_4 پایه‌های فضای برداری H هستند.