Задание 7. Нижние оценки

1 Пусть числовой массив $a[1], \dots, a[n]$ строго унимодален на максимум. Это означает, что существует t, такое что
$$a[1] < a[2] < \dots < a[t] > a[t+1] > \dots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \le t \le n.$$
Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента $a[t]$ за не более $O(\log n)$ ходов.

2 Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + c$ взвешиваний.

3 Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\log_3 n + c$ взвешиваний.

4 Есть n монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

5 Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

6 Определите, что число является значением данного многочлена с натуральными коэффициентами в натуральной точке. На вход задачи подаются натуральные числа $n, a_0, \dots a_n$ и y. Необходимо определить, существует ли натуральное число x, такое что
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

7 Ваш лектор по алгоритмам нашёл два одинаковых прочных шарика из неизвестного материала и внезапно решил измерить их прочность в этажах стоэтажного небоскрёба: прочность равна номеру минимального этажа, при броске шарика из окна которого шарик разобъётся (максимум 100). Считаем, что если шарик уцелел, то его прочность после броска не уменьшилась. Сколько бросков шариков необходимо и достаточно для нахождения прочности?