Основные алгоритмы. Домашняя работа 2 неделя

Зайнуллин Амир

15 февраля 2023 г.

Задана №1

Сначала создадим массив, элементы которого будут равны расстоянию $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ от точки до центра координат.

Верхняя медиана данного массива будет ответом, т.к будет выполняться, что в круге данного радиуса с центром в начале координат будет содержаться не менее половины точек. Для ее поиска воспользуемся алгоритмом k-ой порядковой статистики за линейное время. Худшее время работы равно $O(n)$. Понятно, что поиск медианы не может быть быстрее чем за линейное время. Приведем ее алгоритм.

1. Сначала дополняем массив бесконечностями так, чтобы длина делилась на 5.
2. Все n элементов входного массива разбиваются на группы по пять элементов.
3. В каждой такой группе находим медиану. Это можно всегда сделать за 6 операций (разбирали на семинаре)
4. Путем рекурсивного вызова шага определяется медиана x из множества медиан.
5. Массив делится относительно x. Если $i = k$, то возвращается значение x . Иначе запускается рекурсивно поиск элемента в одной из частей массива: k-ой статистики в левой части при $i > k$ или $(k - i - 1)$-ой статистики в правой части при $i < k$.

На лекции было разобрано, что данный алгоритм описывается рекурентой

$$T(n) \leqslant T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + cn$$

воспользуемся теоремой Акра-Баззи

$$\left(\frac{1}{5}\right)^p + \left(\frac{7}{10}\right)^p = 1$$

Получаем $p \in (0, 1)$

$$\int_1^n \frac{S}{S^{p+1}}\, dS = \int_1^n S^{-p}\, dS = \frac{S^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^n = \frac{n^{1-p} - 1}{1 - p}$$

$$T = \Theta\left[n^p\left(1 + \frac{n^{1-p} - 1}{1 - p}\right)\right] = \Theta\left(n^p + \frac{n - n^p}{1 - p}\right) = \Theta(n)$$

Так как $p \in (0, 1)$

Задача №2

Заведем массив длин строго вложенных отрезков. Понятно, что из длины мы можем однозначно восстановить какой это отрезок, например если будем кроме длины запоминать номер отрезка в исходной последовательности и вложенность - строгая. Ответ будет иметь вид: $[a_i, a_{i+1}] \bigcup [b_{i+1}, b_i]$, где $i = 2n/3$. Тогда, в отсортированном по длине отрезков массиве мы должны найти $j = n/3$ т.е отрезок $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ и $k = n/3 + 1$ т.е отрезок $[a_i, b_i]$ порядковую статистику. Будем использовать тот же алгоритм, что в прошлом задании. Тогда время работы алгоритма будет линейно.

Задача №3

Половина медиан (то есть $\frac{n}{14}$) меньше медианы медиан. Также у этих медиан есть хотя бы 3 элемента в группе, которые меньше их (то есть $3 \cdot \frac{n}{14}$). Значит не менее $\frac{4n}{14} = \frac{2n}{7}$ элементов меньше или больше(доказывается аналогично) медианы медиан. Следовательно в худшем случае $s = \frac{5n}{7}$. Время поиска медианы медиан равно $d = \frac{n}{7}$. Тогда рекурента:

$$T(n) \leqslant T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + cn$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^p + \left(\frac{5}{7}\right)^p = 1$$

Получаем $p \in (0, 1)$ Аналогично доказательству в прошлом задании получаем, что алгоритм так же будет линейным.

Задача №4

$$T(n) \leqslant a\frac{n}{7} + a\frac{5n}{7} + cn < an$$

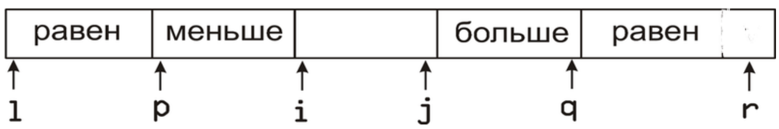
$$a > 7c$$

Для того, чтобы найти медианы в группе из 7 элементов необходимо 14 операций. За 6 операций мы находим медиану в группе из 5 элементов. Далее сравнием ее с двумя остальными элементами. Если один больше, а другой меньше, то медиана остается той же. Если оба меньше или больше, то берем предыдущий или следующий за медианой соответственно. Это можно сделать за не более 6 операций.

$$14 \cdot \frac{n}{7} = 2n$$

$c = 2$, тогда $a > 14$

Задача №5



Допустим, двигая i перегородку встречаем элемент меньше. Тогда все хорошо, просто сдвигаем ее направо на один. Если встречаем элемент равный, то делаем свап с самым левым меньшим, сдвигаем p и i перегородку вправо на один. Если встречаем элемент больший, то меняем его с левым меньшим. сдвигаем i перегородку вправо на один, меняем наш больший с левым равным элементом из правой области, сдвигаем p перегородку вправо на один, сдвигаем q перегородку вправо на один. Видно, что проходя каждый элемент массива будет выполняться не больше 5 операций. Значит сложность данного partition $O(n)$. Понятно, что быстрее чем за линейное время работать тоже не может. Тогда получаем $\Theta(n)$.

Задача №6

Рассмотрим сумму, где x_m - медиана. $x_{1\ldots m-1}$ меньше медианы, $x_{m+1\ldots 2n-1}$ больше медианы.

$$|x_1 - s| + |x_2 - s| + \ldots + |x_m - s| + \ldots + |x_{2n} - s| + |x_{2n+1} - s|$$

Пусть если s равно медиане, то слагаемые равны

$$i_1 + i_2 + \ldots + 0 + \ldots + i_{2n} + i_{2n+1} = A$$

Теперь, если $s = m + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то

$$i_1 + \varepsilon + i_2 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon + \ldots + i_{2n} - \varepsilon + i_{2n+1} - \varepsilon = A + \varepsilon$$

Видно, что сумма будет больше. Мы доказали, что при $s = m$ сумма будет минимальной. А из предыдущих заданий ее мы можем найти за линейное время.