Задание 3-4. Быстрое преобразование Фурье.

1 Перемножьте многочлены $2x^3+3x^2+1$ и $2x^2+x$ с помощью БПФ. В решении должны быть приведены вычисления всех используемых преобразований.

2 Решите с помощью преобразования Фурье задачу о поиске всех вхождений образца с джокерами в текст. Текст и образец — это последовательности $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ и $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$, $m < n$, где все t_i — символы из алфавита, а p_j — либо символ из алфавита, либо джокер. Образец входит в текст в позиции $i \in \{0, \ldots, n-m-1\}$, если $t_{i+j} = p_j$ при всех $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, для которых p_j — символ алфавита. Для решения этой (и более сложной задачи в домашнем задании) есть $O(n \log n)$ алгоритм, основанный на БПФ. Закодируем каждый символ алфавита уникальным положительным числом, а джокер нулём, и определим последовательность r_i:

$$r_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j} \left(p_j - t_{i+j}\right)^2$$

1. Докажите, что образец входит в текст в позиции i тогда и только тогда, когда $r_i = 0$.
2. Постройте $O(n \log n)$ алгоритм, который находит все вхождения образца с джокерами в тексте.

3 Пусть размер вектора не является степенью двойки, можно, конечно, “добить” исходный вектор нулями, но иногда это нежелательно, к примеру, нам нужно преобразование Фурье само по себе. Пусть дан вектор p длины n.

По определению

$$p_j^* = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \cdot \omega_n^{kj},$$

главный трюк здесь – замена

$$kj = \frac{k^2}{2} + \frac{j^2}{2} + \frac{-(j-k)^2}{2}.$$

Получаем

$$p_j^* = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \cdot \omega_n^{k^2/2} \cdot \omega_n^{j^2/2} \cdot \omega_n^{-(j-k)^2/2}$$

Сомножитель $\omega_n^{j^2/2}$ от k не зависит, оставшиеся сомножители переобозначим:

$$a_k = p_k \cdot \omega_n^{k^2/2}, \quad b_k = \omega_n^{-k^2/2}$$

В результате мы получаем выражение

$$p_j^* = \omega_n^{j^2/2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{j-k}$$

Покажите, как вычислить последнее выражение с помощью стандартного быстрого преобразования Фурье. Заметьте, что свёртка здесь ведётся в том числе по отрицательным индексам b_i, которые должны быть корректно определены.