Основные алгоритмы. Домашняя работа 7 неделя

Зайнуллин Амир

13 мая 2023 г.

Задача №1

Для решение этой задачи можно использовать алгоритм двоичного поиска. Пусть l - левый индекс массива, в котором может быть максимальный элемент, а r - правая граница. Изначально $l = 0$, $r = n - 1$.

На каждом шаге будем узнавать значение элемента a[mid], a[mid + 1], где $mid = \frac{l+r}{2}$.

Если a[mid] > a[mid + 1], то т.к массив строго унимодален, то максимальный элемент не может находиться в индексах mid + 1, ..., r. Тогда новые границы $l = l$, $r =$ mid. Отбросили половину границы.

Если a[mid] < a[mid + 1], то т.к массив строго унимодален, то максимальный элемент не может находиться в индексах l, ... , mid. Тогда новые границы $l =$ mid + 1, $r = r$. Отбросили половину границы.

Когда $l = r$, мы найдем наш максимальный элемент. Так как каждый раз мы делим наш промежуток пополам, то асимптотика алгоритма O(logn).

Задача 2-3

Разобьем монеты на 3 группы следующим образом.

Если n делится на 3, то в каждой группе по $n/3$ элементов.

Если n дает остаток 1 при делении на три, то будет две группы по $\lfloor n/3 \rfloor$ монет и одна $\lfloor n/3 \rfloor + 1$.

Если n дает остаток 2 при делении на три, то будет две группы по $\lfloor n/3 \rfloor + 1$ и одна $\lfloor n/3 \rfloor$.

Далее берем две группы с одинаковым количеством монет и сравниваем их массу. Если она одинакова, фальшивая находится в третьей группе. Выбираем ее. Если масса разная, то выбираем ту, которая легче, так как фальшивая легче обычной.

Далее повторяем алгоритм для выбранной группы (так же делить на три группы и т.д). Заметим, что за каждое взвешивание группа, в которой мы ищем фальшивую монету уменьшается в три раза. Значит фальшивую монету можем найти за $log_3(n) + c$. Константа c появляется потому что количество элементов в группе не всегда может делиться на три.

Рассмотрим разрешающее дерево этой функции. Количество листьев в разрешающем дереве равно n (информация, какая монета является фальшивой). Допустим мы сделали $x = log_3(n)$ взвешиваний. Тогда глубина дерева равна x, и количество листьев $3^h < n$. Противоречие.

Задача 4-5

Разобьем монеты на $\lfloor n/2 \rfloor$. Будем взвешивать каждую пару монет. Если их вес одинаковый, то обе не фальшивые. Если нет, то та которая легче есть фальшивая. Если n - нечетно, то если все пары оказались не фальшивыми, то монета, которая оказалась без пары - фальшивая.

Воспользуеся методом игры с противником для доказательства того что для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

Оставим фальшивую монету в последней паре. Если мы сделали меньше $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний, то у нас осталось 2 монеты, если n четно, и 3 монеты если n нечетно. Какую монету мы бы не выбрали, методом игры с противником можно сделать так, что игрок не найдет фальшивую монету за меньше чем $\lfloor n/2 \rfloor$ ходов.

Задача 6

Так как на вход задачи подаются **натуральные числа** $n, a_0, \dots a_n$ и y и мы смотрим в натуральной точке, то многочлен

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

будет строго возрастать, так как его производная

$$a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1 > 0$$

Значит мы можем воспользоваться бинарным поиском. Изначально $l = 1$, $r = y$, потому что при $x = y$ многочлен будет точно больше y. Если значение многочлена при $x = l$ больше y, то такой ответа нет. Аналогично если при $x = r$ значение многочлена меньше y, ответа нет.

Пусть $mid = \frac{l+r}{2}$. Если $P(mid) > y$, то продолжаем поиск в левой части. $l = l$, $r = mid$.

Если $P(mid) < y$, то продолжаем поиск в правой части. $l = mid$, $r = r$. Когда r и l совпадут, и значение в этой точке не будет равно y, значит ответа нет. Иначе мы нашли ответ за $\log y$.

Задача 7