







به نام خدا





یادگیری ماشین

آرش عبدی هجراندوست arash.abdi.hejrandoost@gmail.com

> دانش*گا*ه علم و صنعت دانشکده *م*هندسی کامپیوتر نی<u>م سال اول ۱۴۰۱–۲۰۹۱</u>







حضرت درخت تصمیم (گ)

- یکی از ساده ترین و موفق ترین گونههای یادگیری ماشین 🗙
 - یک درخت تصمیم، بازنمایی از یک تابع است که
 - \bigcirc ورودی = برداری از ویژگیها \bigcirc
 - خروجی = یک مقدار خروجی = تصمیم
- برای سادگی در اینجا فرض میکنیم ورودی گسسته و غروجی دودوئی است.
 - ودوری است.
 - ورودی و خروجی می توانند پیوسته باشند.

دانشگاه، علم صنعت

- خروجی دودوئی: O نمونههای Positive
 - منمونههای Negetive نمونههای

تصميم گيري

🗙 درخت تصمیه برای رسیدن به تصمیه (خروجی) تعدادی از ویژگیهای ورودی را در نظر میگیرد

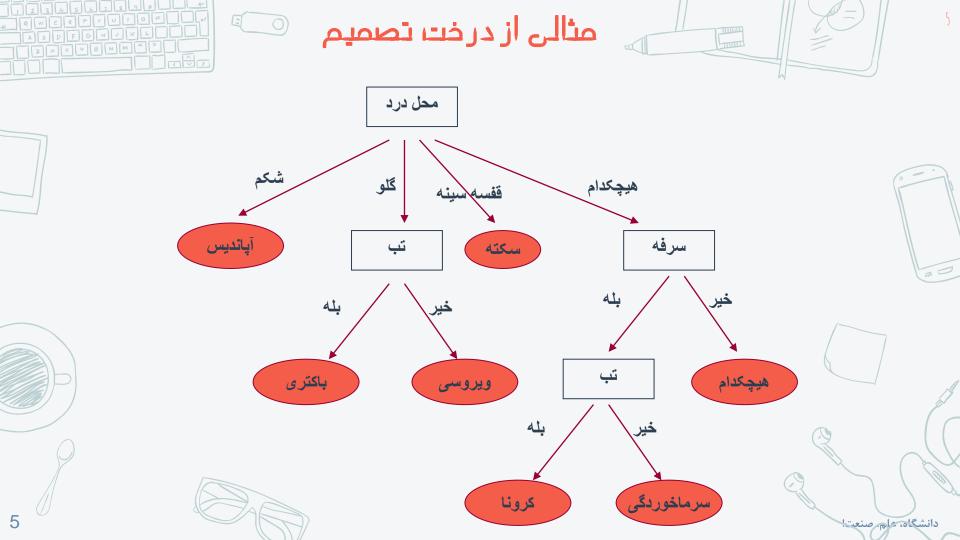
هر گره در درخت تصمیم متناظر با یکی از ویژگیهای ورودی (A_i) است. 🗙 شاخه های انشعاب یافته از هر گره برچسبی متناظر با مقادیر ممکن برای آن ویژگی دارند

$A_i = v_{ik}$

🗙 مربرگ نیز یک مقدار دارد که مشخص کننده خروجی درخت است

این نموه بازنمایی تناسب با نموه بیان انسان دارد.

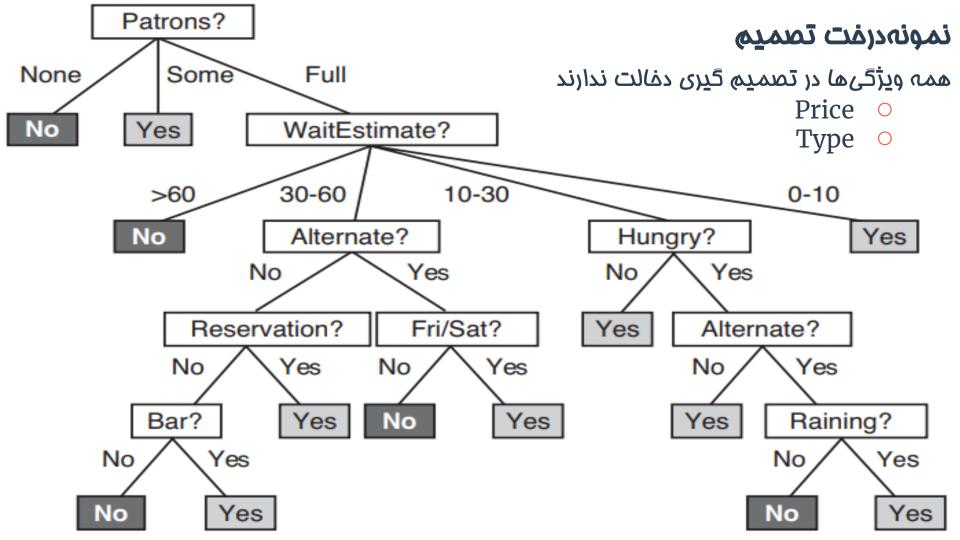
بسیاری از دفترچههای راهنما (مثلا برای تعمیر خودرو) طبق ساختار یک imesدرخت تصمیم نوشته میشوند



مثالی دیگر

درختی برای اینکه تصمیه بگیریه آیا در یک رستوران منتظر خالی شدن میز بمانیه یا خیر؟

- هدف = خروجی = پیش بینی مقدار خروجی تابع WillWait بر اساس ویژگیهای ورودی \circ ورودی ها:
 - Alternate
 - Bar (Just for Wait!)
 - Fri/Sat
 - Hungry
 - Patrons (None,Some,Full)
 - Price
 - Raining
 - Reservation
 - Type (French, Italian, Thai, burger)
 - WaitEstimate (0-10 min, 10-30, 30-60, >60)



معنای درخت نصمیم

- ک یک درخت تصمیم دودوئی، منطقا معادل آن است که گفته شود:

 ویژگی فروجی True است اگر و فقط اگر ویژگیهای ورودی، یکی از مسیرهای ریشه تا برگی True با مقدار True را ارضا کند.
 - Goal \Leftrightarrow (Path1 \vee Path2 \vee \cdots)
- هر مسیر، ترکیب عطفی تست روی مقدار ویژگیهایی است که در طول مسیر وجود دارد
 تست: اگر ویژگی مربوطه مقدار زیرشاغه این مسیر را دارد، غروجی = True و در غیر این صورت غروجی = False
 - این نموه بازنمایی را Disjunctive Normal Form (DNF) مینامند.
 - ترکیب فصلی عبارات عطفی (برعکس CNF)
 - آیا هر مِمله در منطق گزارهای را میتوان به صورت DNF نوشت؟ مِرا؟
 - اگر چنین باشد، هر جمله در منطق گزاره ای را میتوان با یک درخت تصمیه نشان داد.

8

🗙 در مورد بسیاری از مسائل، ساختار درخت تصمیم بیانی موجز و مناسب از مساله را ارائه میکند

- اما در برخی توابع، ممکن درخت بزرگی به وجود بیاید. Majority مثلاتابع \circ
- فرومی یک اگر بیشتر از نصف ورودی ها یک باشند و فرومی صفر در غیر این صورت
 - لازه است اغلب یا تماه ورودی مشاهده شود
 - مجه درخت به طور نمایی بالا میرود (برمسب عمق)
 - بنابراین درخت تصمیه در برخی مسائل کارا و در برخی 🔀 ناکارآمد است
 - مانند هر بازنمایی دیگری

دانشگاه، علی صنعت

خرض کنید تعداد ۱۱ ویژگی دودوئی داشته باشیه. تعداد 📉 توابع دودوئی مِقدر است؟

- $2^n=$ تعداد مالات ورودی $2^n=$ تعداد سطرهای جدول درستی \circ
- \bullet ستون خروجی این جدول تابعی با 2^n ورودی را تشکیل میدهد 2^{2^n} تعداد توابع قابل تعریف 2^{2^n}
- تعداد درختهای ممکن بیشتر از 2^{2^n} است زیرا درختهایی که معنای یکسان ولی شکل متفاوت داشته باشند نیز وجود دارد
 - مابعاً کردن ترتیب مشاهده ویژگیها ناد مابعاً کردن ترتیب مشاهده ویژگیها
 - مثلا برای ۱۰ویژگی مثال رستوران، تعداد توابع ممکن منجر به عددی ۱۰۹ رقمی میشود
 - بنابراین باید به دنبال روشی برای یافتن درفت/فرضیه مناسب باشیم

ساخك درخت تصميم ازروى نمونه

- - (X,Y) نمونههایی با فرمت \times
 - برداری از مقادیر ویژگی های ورودی $X \circ$ ۷ = یک مقدار دودوئی خروجی
- 🗙 مجموعه ای ۱۲ تایی از این نمونه ها به عنوان مجموعه آموزشی در صفحه بعد نشان داده شده است.
 - 🗙 نمونه ها به دو دسته مثبت و منفی (بر اساس خروجی) تقسیم میشوند
 - 🗙 به دنبال درختی باید بود که:
 - سازگار با نمونههای موجود باشد
 - تا مد ممکن کوچک باشد

دانشگاه، علی صنعت



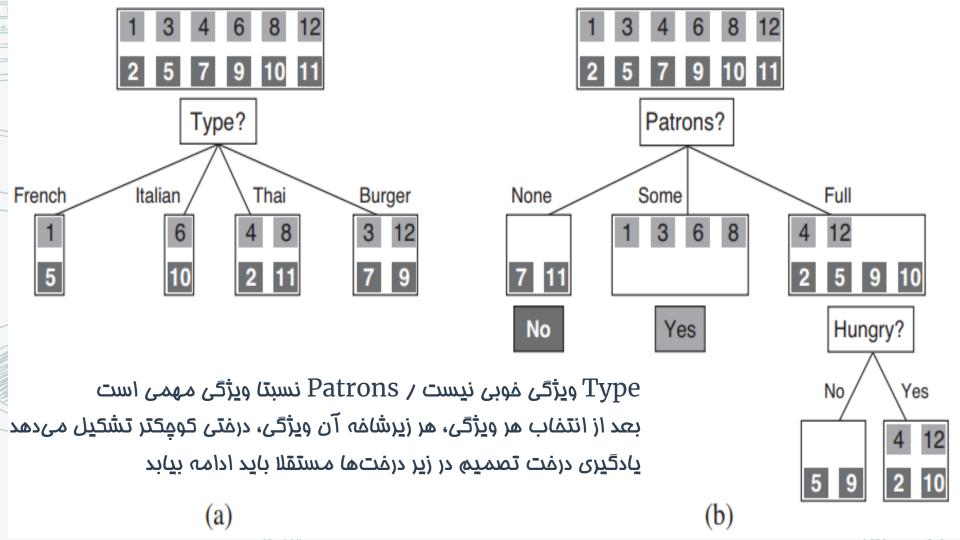
Example	Input Attributes										Goal
	Alt	Bar	Fri	Hun	Pat	Price	Rain	Res	Type	Est	WillWait
\mathbf{x}_1	Yes	No	No	Yes	Some	\$\$\$	No	Yes	French	0-10	$y_1 = Yes$
\mathbf{x}_2	Yes	No	No	Yes	Full	\$	No	No	Thai	30–60	$y_2 = No$
\mathbf{x}_3	No	Yes	No	No	Some	\$	No	No	Burger	0-10	$y_3 = Yes$
\mathbf{x}_4	Yes	No	Yes	Yes	Full	\$	Yes	No	Thai	10-30	$y_4 = Yes$
\mathbf{x}_5	Yes	No	Yes	No	Full	\$\$\$	No	Yes	French	>60	$y_5 = No$
\mathbf{x}_6	No	Yes	No	Yes	Some	\$\$	Yes	Yes	Italian	0-10	$y_6 = Yes$
X ₇	No	Yes	No	No	None	\$	Yes	No	Burger	0-10	$y_7 = No$
\mathbf{x}_8	No	No	No	Yes	Some	\$\$	Yes	Yes	Thai	0-10	$y_8 = Yes$
X 9	No	Yes	Yes	No	Full	\$	Yes	No	Burger	>60	$y_9 = No$
x_{10}	Yes	Yes	Yes	Yes	Full	\$\$\$	No	Yes	Italian	10-30	$y_{10} = No$
x ₁₁	No	No	No	No	None	\$	No	No	Thai	0-10	$y_{11} = No$
\mathbf{x}_{12}	Yes	Yes	Yes	Yes	Full	\$	No	No	Burger	30–60	$y_{12} = Yes$

یادگیری درخت تصمیم

- ک یافتن کومِکترین درخت سازگار با مستموی تماه درختهای ممکن، غیرممکن/غیرعملیاتی است.
- با ایده های خلاقانه میتوان درختی به اندازه کافی خوب، یافت. حومِک، اما نه لزوما کومِکترین درخت
- 🗙 الگوریتم یادگیری درفت تصمیم، روشی مریصانه برای این منظور ارائه میکند.
 - همیشه مهمترین ویژگی را زودتر تست کن! مساله را به ساختن مند زیر درخت کومکتر تقسیم
 - مساله را به ساختن چند زیر درخت کوچکتر تقسیم کن.
 - ادامه بده.
 - 🗙 مهترین ویژگی؟

دانشگاه، علی صنعت

ویژگیای که بیشترین تمایز را بین نمونه ها برای دسته بندی ایجاد میکند



نحوه تصمیم گیری در زیرشا خوها

× اگر تماه نمونههای زیرشاخه مثبت (منفی) باشند، جواب معلوه است (Yes یا No)

- اگر تعدادی نمونه مثبت و تعدادی منفی مانده است، بهترین ویژگی بعدی باید انتخاب شود و نمونه ها مجددا به چند دسته تقسیم شوند.
 - نمونه دادهای برای این ترکیب ویژگیها وجود ندارد

🗙 اگر در زیرشاخهای، هیچ نمونه دادهای وجود نداشت:

- میتوان بر اساس وضعیت تمامی نمونه ها در گره والد تصمیم گرفت استریت نمونه ها در گره والد
- اگر ویژگی جدیدی وجود نداشت ولی هی نمونه مثبت و هی نمونه منفی موجود بود:

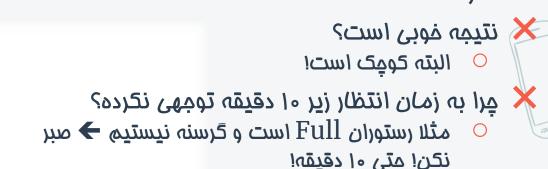
 نمونههایی با ویژگی یکسان ولی خروجی متفاوت داریی.
 - مراکی(ویژگی بیشتر؟ خطا؟)
 - بر اساس اکثریت نمونه های موجود در زیرشاخه تصمیم میگیریم.

function DECISION-TREE-LEARNING(examples, attributes, parent_examples) returns a tree

if examples is empty then return PLURALITY-VALUE(parent_examples)
else if all examples have the same classification then return the classification
else if attributes is empty then return PLURALITY-VALUE(examples)
else

 $A \leftarrow \operatorname{argmax}_{a \in attributes}$ IMPORTANCE(a, examples) $tree \leftarrow$ a new decision tree with root test A **for each** value v_k of A **do** $exs \leftarrow \{e : e \in examples \text{ and } e.A = v_k\}$ $subtree \leftarrow \text{DECISION-TREE-LEARNING}(exs, attributes - A, examples)$ add a branch to tree with label $(A = v_k)$ and subtree subtree**return** tree خرومی الگوریتی یادگیری درخت تصمیم بستگی زیادی یه نمونههای ورودی دارد

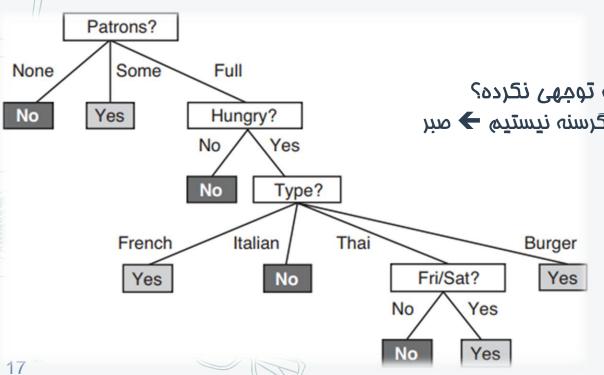
در شکل زیر خروجی الگوریته برای مثال رستوران با ۱۲ imesنمونه داده آمده است.



مموعه نمونهای دیگر تعداد نمونهها

X راه مل؟

دانشگاه، علی صنعت



ارزیابی درخت تصمیم ارمایشی X 🗙 منمنی یادگیری



تقسیم به مجموعه آموزشی و آ ز*ما*یشی

تعداد نمونههای آموزشی از ۱ تا ۹۹ متغير

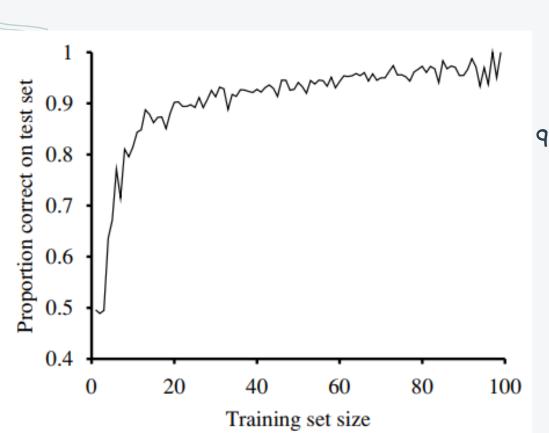
۹۰ بار تکرار هر آزمایش برای ۴۰ متوسطگیری

ومود عنصر تصادف در الگوریته؟ وقتی که چند ویژگی با اهمیت

برابر داريم.

تعداد نمونه آموزشی چند باشد؟

دانشگاه، علی صنعت



- انتخاب ویژگی با هدف کوچک شدن درخت نهایی
 ایده: انتخاب مهمترین ویژگی در هر لمظه (مریصانه)
- ویژگی که بیشترین تمایز را ایجاد میکند
- اید معیاری عددی برای اهمیت (خوب بودن) ویژگی ها بیان 🗙
 - کرد
 - *معیا*ر: ○ بی نظمی – آنترویی (Entropy)
 - دست آورد اطلاعات (Information Gain) دست آورد اطلاعات
- انشگان عام صنعتا

عالى جناب، آنتروپى

- 🗙 آنتروپی معیاری است برای سنمش میزان عده قطعیت یک متغیر تصادفی 🗙 متغیر تصادفی که تنها یک مقدار ممکن دارد (سکه ای که همیشه خط می آید)، هیچ عده قطعیتی ندارد
 - آنترویی = صفر
- مشاهده مقدار آن هیچ «اطلاعاتی» به دست نمیدهد.
- متغیری که دو مقدار با امتمال برابر دارد (سکه سالم)، «یک بیت(bit)» آنتروپی imes
 - اسی با چهار وجه دارای «دو بیت» آنتروپی است 🔀 طاسی با چهار
 - دو بیت لازه است تا نشان دهیم کداه وجه طاس مشاهده شده است.
 - سکه ای که ۹۹٪ موارد خط می آید:
 - اَنتروپی نزدیک به صفر

تعريف أنترويي

Entropy: $H(V) = \sum_{k} P(v_k) \log_2 \frac{1}{P(v_k)} = -\sum_{k} P(v_k) \log_2 P(v_k)$

 $H(Fair) = -(0.5 \log_2 0.5 + 0.5 \log_2 0.5) = 1$

B(**q**)

برای یک متغیر تصادفی V با مقادیر ممکن V_k و امتمال هر مقدار برابر با $P(V_k)$ مقدار عددی igwedge

 $H(Loaded) = -(0.99 \log_2 0.99 + 0.01 \log_2 0.01) \approx 0.08 \text{ bits.}$

 $B(q) = -(q \log_2 q + (1 - q) \log_2 (1 - q))$

 $H(Loaded) = B(0.99) \approx 0.08$.



آنترویی به این شکل مماسبه میشود:

🗙 آنتروپی سکه ای با امتمال ۹۹٪ فط:

🗙 آنترویی سکه ساله:

دانشگاه، عام. صنعت



آنترویی متغیر دودوئی با امتمال q برای True بودن:





Entropy: $H(V) = \sum_{k} P(v_k) \log_2 \frac{1}{P(v_k)} = -\sum_{k} P(v_k) \log_2 P(v_k)$ 🗙 متغیری با d مقدار ممکن

 $Min(H) = 0 \leftarrow کمترین مقدار آنتروپی: امتمال یک مقدار برابر با ۱ و امتمال بقیه مقادیر برابر صفر$ $Max(H) = log_2(d) \leftarrow (p=1/d)$ بیشترین مقدار آنتروپی: امتمال مساوی برای هر مقدار

اگر در ساختن درخت تصمیه، مجموعه داده آموزشی دارای p نمونه مثبت و n نمونه منفی باشد،

$$H(Goal) = B\left(\frac{p}{1}\right)$$

 $H(Goal) = B\left(\frac{p}{p+n}\right)$

 $B(0.5)=1\,\mathrm{bit}$ درمثال رستوران با ۱۲ نمونه آموزشی، p=n=6 آنتروپی: داده ها دو مالت دارند: مثبت یا منفی ← کلا ۱ بیت اطلاعات قابل دست یافتن است، اگر p=n باشد

دانشگاه کی منبه ویژگی که تست (مشاهده) شود، مقداری از این ۱ بیت اطلاعات را میتواند ارائه کند

کدام ویژگی ؟

یک ویژگی مشخص A با d مقدار ممکن، مجموعه دادههای آموزشی E را به d زیر مجموعه E_1, E_2, \dots, E_d

تقسیم میکند. E_1 , E_2 , ... , E_d دارای p_k نمونه مثبت و n_k نمونه منفی است.

هر (یر مجموعه E_k دارای p_k نمونه منبت و n_k نمونه منفی است. E_k دارای E_k دارای E_k بیت اطلاعات اضافی \mathbf{k} ای برویی، به اندازه \mathbf{k} بیت اطلاعات اضافی \mathbf{k} ای برویی تا بتوانیی جواب (وضعیت مثبت / منفی بودن نمونه) را پیدا کنیی.

اگر p_k یا p_n صفر باشند، چقدر اطلاع*ات تکمیلی* برای جواب لازه است؟

است. $(p_k+n_k)/(p+n)$ است. $(p_k+n_k)/(p+n)$ است. $(p_k+n_k)/(p+n)$ است. $(p_k+n_k)/(p+n)$ است. $(p_k+n_k)/(p+n)$ انترویی باقیمانده با تست/مشاهده ویژگی $(p_k+n_k)/(p+n)$ برابر است با:

مساهده ویرتی A برابر است ب

$$Remainder(A) = \sum_{k=1}^{a} \frac{p_k + n_k}{p + n} B(\frac{p_k}{p_k + n_k})$$

بخش اول، وزن میدهد به آنتروپی هر زیرشاخه

 $Remainder(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k + n_k}{p + n} B(\frac{p_k}{p_k + n_k})$

دست آورد اطلاعات با مشاهده ویژگی A برابر است با میزان کاهش آنترویی با مشاهده X

$$Gain(A) = B(\frac{p}{p+n}) - Remainder(A)$$

 $Gain(A) = B(\frac{1}{p+n}) - Remainaer(A)$

برای مماسبه تابع اهمیت (Importance) در ساخت درخت تصمیم تنها به (Gain(A نیاز خرای مماسبه تابع اهمیت (Gain(A) در ساخت درخت تصمیم تنها به (اریم.

ان: الله در مثال رستوران: الله على الل

$$Gain(Patrons) = 1 - \left[\frac{2}{12}B(\frac{0}{2}) + \frac{4}{12}B(\frac{4}{4}) + \frac{6}{12}B(\frac{2}{6})\right] \approx 0.541 \text{ bits,}$$

$$Gain(Type) = 1 - \left[\frac{2}{12}B(\frac{1}{2}) + \frac{2}{12}B(\frac{1}{2}) + \frac{4}{12}B(\frac{2}{4}) + \frac{4}{12}B(\frac{2}{4})\right] = 0 \text{ bits.}$$

مقابله با بیش برازش — ۵۷ERFITTING

× مرس درخت:

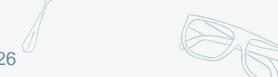
- 🔀 هدف: مقابله با بیشبرازش
- مذف گرههای بیربط
- شروع از گرههایی که فقط فرزند برگ دارند.
- اگر ویژگی تست شده در گره، بیربط شناخته شود، این تست هرس شده و به یادش یک برگ گذاشته میشود! (فرزندان گره مِذف شده و خود گره تبدیل به برگ میشود) تکرار عرضه تا زمانی که چیزی برای هرس نماند.



دانشگاه، علی صنعت

معیار هرس

- 🗙 تشفیص بیربط بودن ویژگی تست شونده در یک گره؟ گرهای با n نمونه منفی و p نمونه مثبت
- اگر ویژگی انتخاب شده، زیرشاخههایی ایجاد کند که نسبت نمونه مثبت و منفی در آنها تقریبا مانند همین گره باشد (یعنی (p/(p+n)، آنگاه این ویژگی بیربط است
- از آنما که طبق الگوریتی درخت تصمیی، این ویژگی مهمترین ویژگی بوده، انتماب ویژگی دیگر کی فایدهتر است و این گره باید برگ شود



× ویژگی بیربط، دست آورد اطلاعات نزدیک به صفر دارد

معیار بیربط بودن ویژگی: دست آورد اطلاعات کی . (آیا بالا بودن Remainder (میانگین وزن دار آنترویی) کافی است؟)

 $Remainder(A) = \sum \frac{p_k + n_k}{p + n} B(\frac{p_k}{p_k + n_k})$

 $Gain(A) = B(\frac{p}{p+n}) - Remainder(A)$



تقسیه میکند)

🗙 درخیت مرس شده کوچک تر و قابل فهم تر است.

هرس یا خانمه زودهنگام؟

- یرا به جای هرس، در مین ساخت درخت، وقتی ویژگی دارای دست آورد اطلاعات بالا پیدا نکردیه، ساخت زیرشاخهها را متوقف نکنیه؟ (هزینه ساخت کمتر)
 - ممکن است یک ویژگی خوب پیدا نشود، اما ترکیب چند ویژگی با هم دارای دست آورد اطلاعات باشند.
 - مثال: تابع XOR (ورودی دو بعدی و غروجی XOR) \circ
 - ۱۰۰ نمونه داریم که به چهار زیرمجموعه ۵۵ تایی به شکل زیر تقسیم شده اند (اَنتروپِی = ۱)
 - دسته اول: ۰۰ (غروجی منفی)

دانشگاه، علی صنعت

- دسته دوه: ۱۰ (غروجی مثبت) دسته سوه: ۱۰ (غروجی مثبت)
- دسته چهاره: ۱۱ (غروجی منفی)
- انتهاب هر ویژگی در ریشه، دست آورد اطلاعات صفر خواهد داشت
- اما در عمق دوم درخت، انتخاب ویژگی بعدی، دست آورد اطلاعات برابر ا دارد.

28

درخت تصمیم در دادههای پیوسته

🗙 در بسیاری از مواقع، داده های مسائل واقعی، پیوسته هستند.

- 🗙 ورودی/ویژگی پیوسته
- گسسته سازی (وزن>۰۰ ، دمای بالای ۸۰ و ...)
 - یافتن نقاط برش برای هر ویژگی ورودی
- مقادیر ورودی مربوطه برای دادههای آموزشی را مرتب کن
 - در جاهایی که برجسب خروجی تغییر میکند، برش بزن.



🗙 خروجی پیوسته

- درخت رگرسیون (نه دسته بندی) 🔾
- در برگها، تابعی خطی برمسب ورودیها (نه لزوما همه ورودی ها)، روی داده های موجود در برگ fit میشود و تعیین کننده خروجی نهایی در آن برگ خواهد بود.
 - تعبیر هندسی
- چگونه ویژگی مهم را انتخاب کنیم؟ (مماسبه اَنتروپی بدون برچسب خروجی)

 ایده۱: گسسته سازی خروجی با طول گاه ثابت (مالا عملا برچسب خروجی داریه)

 ایده ۲: صرف نظر کردن از کوچک بودن درخت و انتخاب همه ورودی ها به ترتیب
 - ایده ۱۰ طرف نظر خردن ۱۱ خویت بودن درخت و انتخاب همه ورودی ها به طرفیب

 یافتن نقاط برش هر ویژگی بر اساس داده های آموزشی که در آن گره قرار گرفته اند (نه

 همه داده ها)

- ایده ۱۰: استفاده از ایده ۱۷، ولی لزوما تا آخرین ویژگی جلو نرویم. وقتی داده های موجود در یک زیر شاخه خروجیهای نزدیک به هم داشتند، دیگر ویژگی بعدی تست نشود و تابع خطی fit شود
- ایده ۲: جایگزینی آنتروی با مفهومی دیگر که برای خروجی پیوسته همان مفهوم بی نظمی را داشته باشد
 - مثلا واریانس خروجی (ویژگی انتخاب شود که کمترین واریانس را در هر زیرشاخه دارد)
 - انتخاب ویژگی براساس معیارهای قبلی (دست آورد اطلاعات) با مماسبه واریانس به
 - م*ای* آنترویی















پروژه درغت تصمیم المفته





