شبکه‌های عصبی مصنوعی

جلسه بیست و یکم:
شبکه هِب (۳)
(Hebbian Network)

محمد فرخی (farrokhi AT iust.ac.ir)

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

- می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:
  - ۱- ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1) \,\middle|\, \mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:

۱– ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)\,\middle|\,\mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

۲– ماتریس C دارای مقادیر ویژه مجزا باشد.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:

۱– ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)\,\middle|\,\mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

۲– ماتریس C دارای مقادیر ویژه مجزا باشد.

۳– بردار ورودی $\mathbf{x}(n)$ و بردار وزن $\mathbf{w}(n)$ از نظر آماری از یکدیگر مستقل باشند.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

- می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:
  - ۱- ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1) \,\middle|\, \mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

  - ۲- ماتریس C دارای مقادیر ویژه مجزا باشد.
  - ۳- بردار ورودی $\mathbf{x}(n)$ و بردار وزن $\mathbf{w}(n)$ از نطر آماری از یکدیگر مستقل باشند.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \to \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:

۱– ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)\,\middle|\,\mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

۲– ماتریس $\mathbf{C}$ دارای مقادیر ویژه مجزا باشد.

۳– بردار ورودی $\mathbf{x}(n)$ و بردار وزن $\mathbf{w}(n)$ از نطر آماری از یکدیگر مستقل باشند.

– چنانچه قضیه بالا را بپذیریم، در این‌صورت:

$$\mathbf{w}(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– می‌توان نشان‌داد که این الگوریتم، برای تکرارهای زیاد ($n \rightarrow \infty$) تحت سه شرط زیر همگرا می‌شود:

۱– ضریب آموزش به اندازه کافی کوچک باشد به‌طوری که بتوان گفت

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)\,\middle|\,\mathbf{w}(n)\right] = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n)$$

۲– ماتریس C دارای مقادیر ویژه مجزا باشد.

۳– بردار ورودی $\mathbf{x}(n)$ و بردار وزن $\mathbf{w}(n)$ از نطر آماری از یکدیگر مستقل باشند.

– چنانچه قضیه بالا را بپذیریم، در این‌صورت:

$$\mathbf{w}(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{q}_o$$

– حال می‌خواهیم نشان‌دهیم که این همگرایی به بردار ویژه ماتریس C است.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\Big[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\Big]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{=?}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{=?}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\Big[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\Big]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\Big[\,\mathbf{w}(n \underset{n\to\infty}{+} 1) - \mathbf{w}(n)\Big] = \eta\Big\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\Big\}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

– و با استفاده از نتیجه قضیه همگرایی (یعنی $\mathbf{w}(n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbf{q}_o$) می‌توان نوشت

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}\mathbf{q}_o - \left(\mathbf{q}_o^T\mathbf{C}\mathbf{q}_o\right)\mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)_{n\to\infty} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

– و با استفاده از نتیجه قضیه همگرایی (یعنی $\mathbf{w}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{q}_o$) می‌توان نوشت

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}\mathbf{q}_o - \underbrace{\left(\mathbf{q}_o^T\mathbf{C}\mathbf{q}_o\right)}_{=?}\mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\right]_{n\to\infty} = \eta\left\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

– و با استفاده از نتیجه قضیه همگرایی (یعنی $\mathbf{w}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{q}_o$) می‌توان نوشت

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}\mathbf{q}_o - \underbrace{\left(\mathbf{q}_o^T\mathbf{C}\mathbf{q}_o\right)}_{\lambda_o}\mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این منظور، آخرین معادله به‌دست آمده را درنظربگیرید:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right]$$

– با میانگین‌گرفتن از دو طرف رابطه فوق

$$E\left[\mathbf{w}(n+1) \underset{n\to\infty}{-} \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)\underbrace{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}_{\mathbf{C}}\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

– و با استفاده از نتیجه قضیه همگرایی (یعنی $\mathbf{q}_o \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{w}(n)$) می‌توان نوشت

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}\mathbf{q}_o - \underbrace{\left(\mathbf{q}_o^T\mathbf{C}\mathbf{q}_o\right)}_{\lambda_o}\mathbf{q}_o$$

– بنابراین، در شرایط تعادل (یعنی همگرایی وزن‌ها)

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_o = \lambda_o\mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_o = \lambda_o \mathbf{q}_o$$

$$\lambda_o = \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{C}\mathbf{q}_o = \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\, \mathbf{q}_o \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\, \mathbf{q}_o\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 = 1$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 = 1$$

– از روی دو نتیجه اخیر، می‌توان برداشت‌کرد که:

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T (\lambda_o \mathbf{q}_o)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 = 1$$

- از روی دو نتیجه اخیر، می‌توان برداشت‌کرد که:

۱- بردار $\mathbf{q}_o$ بردار ویژه ماتریس C می‌باشد که مقدار ویژه آن λ_o است.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\, \mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T \left(\lambda_o \mathbf{q}_o\right)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 = 1$$

– از روی دو نتیجه اخیر، می‌توان برداشت‌کرد که:

۱– بردار $\mathbf{q}_o$ بردار ویژه ماتریس C می‌باشد که مقدار ویژه آن λ_o است.

۲– اندازه بردار $\mathbf{q}_o$ (مقدار نهایی وزن‌ها)، برابر یک است.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T (\lambda_o \mathbf{q}_o)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbf{q}_o\right\|^2 = 1$$

– از روی دو نتیجه اخیر، می‌توان برداشت‌کرد که:

۱– بردار $\mathbf{q}_o$ بردار ویژه ماتریس $\mathbf{C}$ می‌باشد که مقدار ویژه آن λ_o است.

۲– اندازه بردار $\mathbf{q}_o$ (مقدار نهایی وزن‌ها)، برابر یک است.

– اکنون فرض‌کنید که $\mathbf{q}_1$ ، . . . ،، $\mathbf{q}_m$، m بردار ویژه ماتریس $\mathbf{C}$ باشد.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{q}_o &= \lambda_o \mathbf{q}_o \\ \lambda_o &= \mathbf{q}_o^T \mathbf{C}\,\mathbf{q}_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_o = \mathbf{q}_o^T (\lambda_o \mathbf{q}_o)$$

$$\lambda_o = \lambda_o \mathbf{q}_o^T \mathbf{q}_o \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \lambda_o \left\| \mathbf{q}_o \right\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left\| \mathbf{q}_o \right\|^2 = 1$$

– از روی دو نتیجه اخیر، می‌توان برداشت‌کرد که:

۱– بردار $\mathbf{q}_o$ بردار ویژه ماتریس C می‌باشد که مقدار ویژه آن λ_o است.

۲– اندازه بردار $\mathbf{q}_o$ (مقدار نهایی وزن‌ها)، برابر یک است.

– اکنون فرض‌کنید که $\mathbf{q}_1$ ، . . . ، $\mathbf{q}_m$، m بردار ویژه ماتریس C باشد.

– می‌خواهیم نشان‌دهیم فقط بردار ویژه $\mathbf{q}_o$ مربوط به بزرگترین مقدار ویژه($\lambda_o = \lambda_{\max}$) جواب پایدار مساله است و سایر جواب‌ها (بردارهای ویژه) پایدار نیستند.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\mathbf{w}(n)_{n\to\infty} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n)} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه، آخرین معادله‌ای که داشتیم، یعنی

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n)} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه، آخرین معادله‌ای که داشتیم، یعنی

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\Big] = \eta\Big\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\Big\}$$

تغییر می‌کند به

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\Big] = E\Big[\Delta\mathbf{w}(n)\Big] = \eta\Big\{\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}) - (\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})^T\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})\Big\}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n)} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه، آخرین معادله‌ای که داشتیم، یعنی

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

تغییر می‌کند به

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1)} - \mathbf{w}(n)\right] = E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}) - (\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})^T\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})\right\}$$

– با ضرب‌کردن جملات و با صرفنظرکردن از جملات درجه بالا ($\underline{\varepsilon}^2$) و با توجه به این‌که $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n)} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه، آخرین معادله‌ای که داشتیم، یعنی

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)}\Big] = \eta\Big\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\Big\}$$

تغییر می‌کند به

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)}\Big] = E\big[\Delta\mathbf{w}(n)\big] = \eta\Big\{\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}) - (\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})^T\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})\Big\}$$

– با ضرب‌کردن جملات و با صرفنظرکردن از جملات درجه بالا ($\underline{\varepsilon}^2$) و با توجه به این‌که $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \underbrace{\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j}_{\lambda_j}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\Big]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

– برای این کار، فرض‌کنید که جواب $\mathbf{q}_j$ باشد و این جواب نهایی را به مقدار جزیی $\underline{\varepsilon}$ تغییر می‌دهیم:

$$\mathbf{w}(n)_{n\to\infty} = \mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه، آخرین معادله‌ای که داشتیم، یعنی

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)_{n\to\infty} - \mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)\right\}$$

تغییر می‌کند به

$$E\left[\mathbf{w}(n+1)_{n\to\infty} - \mathbf{w}(n)\right] = E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right] = \eta\left\{\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon}) - (\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})^T\mathbf{C}(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})(\mathbf{q}_j + \underline{\varepsilon})\right\}$$

– با ضرب‌کردن جملات و با صرفنظرکردن از جملات درجه بالا ($\underline{\varepsilon}^2$) و با توجه به این‌که $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$

$$E\left[\Delta\mathbf{w}(n)_{n\to\infty}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \underbrace{\underbrace{\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j}_{\lambda_j}\mathbf{q}_j}_{\mathbf{C}\mathbf{q}_j} - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\,\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\,\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\,\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

– بنابراین، با توجه به موارد زیر:

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\Big]$$

– بنابراین، با توجه به موارد زیر:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\Big]$$

– بنابراین، با توجه به موارد زیر:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \lambda_j\mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

– بنابراین، با توجه به موارد زیر:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{\varepsilon}^T\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left[\mathbf{C}\mathbf{q}_j + \mathbf{C}\underline{\varepsilon} - \mathbf{C}\mathbf{q}_j - 2\underline{\varepsilon}^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j\underline{\varepsilon}\right]$$

– بنابراین، با توجه به موارد زیر:

$$\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{\varepsilon}^T\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

رابطه بالا خلاصه می‌شود به:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \underline{\varepsilon}\Big)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T\underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}\right)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta \mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \underline{\varepsilon}\right)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta \mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{q}_i^T \mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \mathbf{q}_i^T \underline{\varepsilon}\right)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}\right)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

۱) $i = j$: جملات اول و سوم با هم برابراند، یعنی

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T\underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}\right)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

۱) $i = j$: جملات اول و سوم با هم برابراند، یعنی

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T \underset{n\to\infty}{E\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right]} \simeq \eta\left(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}\right)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

۱) $i = j$: جملات اول و سوم با هم برابراند، یعنی

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}^T\underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\Big)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}\Big)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

۱) $i=j$: جملات اول و سوم با هم برابراند، یعنی

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}^T\underline{\varepsilon}$$

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \underline{\varepsilon}\Big)$$

– دوطرف این رابطه را در $\mathbf{q}_i^T$ ضرب‌می‌کنیم

$$\mathbf{q}_i^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \mathbf{q}_i^T \underline{\varepsilon}\Big)$$

– حال می‌توان دو حالت را برای این رابطه درنظرگرفت:

۱) $i = j$: جملات اول و سوم با هم برابراند، یعنی

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}^T \underline{\varepsilon}$$

$$\mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\,\underline{\varepsilon} = \mathbf{q}_j^T\mathbf{C}\underline{\varepsilon}$$

– در نتیجه

$$\mathbf{q}_j^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq -2\eta\lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\Big] \simeq -2\eta\lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq -2\eta\lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

– میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\right] \simeq -2\eta\lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

– میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

۲) $i \neq j$:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta\mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T \underset{n\to\infty}{E}\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq -2\eta\lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

– میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

۲) $i \neq j$:

$$\underset{n\to\infty}{E}\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

جمله دوم برابر صفر است. بنابراین

$$\mathbf{q}_i^T \underset{n\to\infty}{E}\left[\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq -2\eta\lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

– میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

۲) $i \neq j$:

$$E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\Big(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \underline{\varepsilon}\Big)$$

جمله دوم برابر صفر است. بنابراین

$$\mathbf{q}_i^T E\Big[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\Big] \simeq \eta\big(\lambda_i - \lambda_j\big)\mathbf{q}_i^T \underline{\varepsilon}$$

– دو حالت را می‌توان درنظرگرفت:

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq -2\eta\lambda_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon}$$

- میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

۲) $i \neq j$:

$$E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j\mathbf{q}_j\mathbf{q}_j^T\underline{\varepsilon} - \lambda_j\underline{\varepsilon}\right)$$

جمله دوم برابر صفر است. بنابراین

$$\mathbf{q}_i^T E\left[\lim_{n\to\infty}\Delta\mathbf{w}(n)\right] \simeq \eta\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\mathbf{q}_i^T\underline{\varepsilon}$$

- دو حالت را می‌توان درنظرگرفت:

آ- $\lambda_i > \lambda_j$

- میانگین تغییرات در وزن‌ها مثبت خواهدبود، بنابراین جواب $\mathbf{q}_i$ پایدار نخواهدبود.

شبکه هِب (Hebbian Network)

همگرایی در آموزش هب:

$$\mathbf{q}_j^T E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq -2\eta\lambda_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon}$$

– میانگین در تغییرات وزن‌ها در جهت کاهش آن‌ها است. بنابراین، جواب $\mathbf{q}_j$ با مقدار ویژه λ_j جوابی پایدار است.

۲) $i \neq j$:

$$E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left(\mathbf{C}\underline{\varepsilon} - 2\lambda_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \underline{\varepsilon} - \lambda_j \underline{\varepsilon}\right)$$

جمله دوم برابر صفر است. بنابراین

$$\mathbf{q}_i^T E\left[\underset{n\to\infty}{\Delta \mathbf{w}(n)}\right] \simeq \eta\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\mathbf{q}_i^T \underline{\varepsilon}$$

– دو حالت را می‌توان درنظرگرفت:

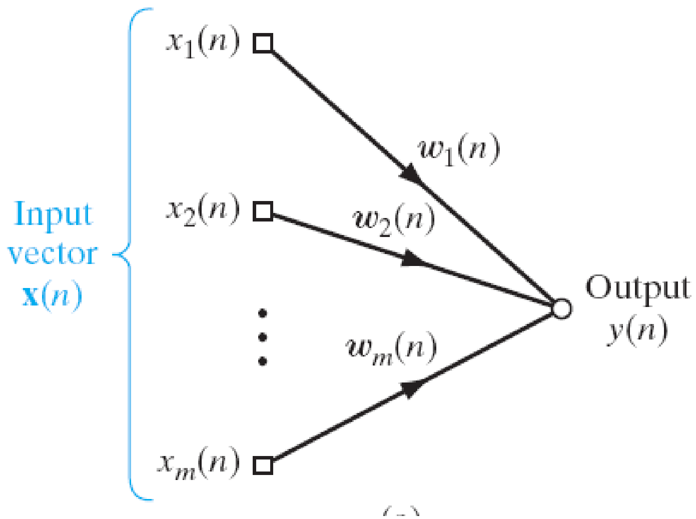
آ– $\lambda_i > \lambda_j$

– میانگین تغییرات در وزن‌ها مثبت خواهدبود، بنابراین جواب $\mathbf{q}_i$ پایدار نخواهدبود.

ب– $\lambda_j > \lambda_i$

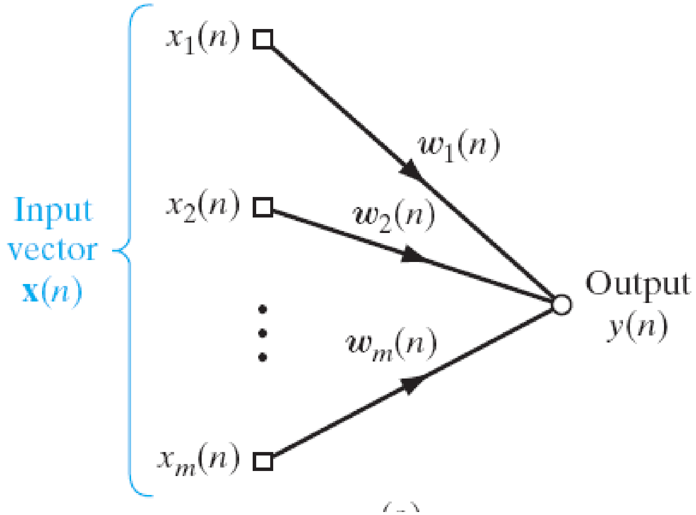
– میانگین تغییرات در وزن‌ها منفی خواهدبود، که تاییدی بر نتیجه قسمت ۱ خواهدبود.

شبکه هِب (Hebbian Network)



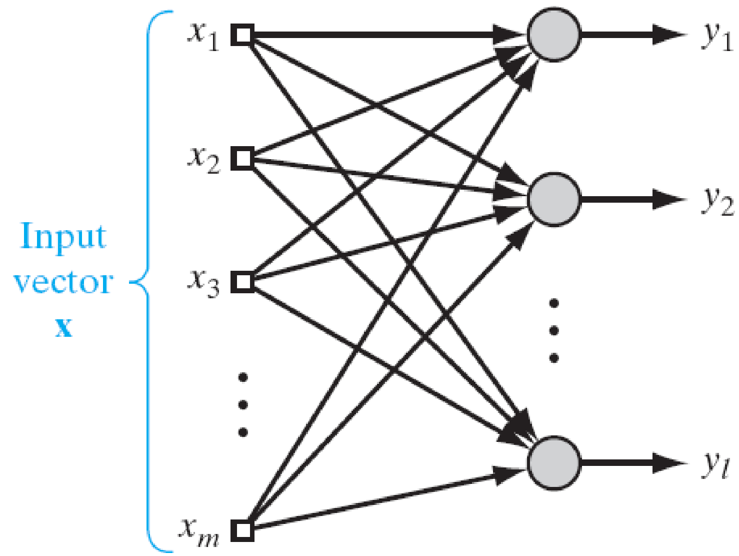
– تا این‌جای کار، نشان داده شد که الگوریتم هب می‌تواند بزرگترین بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه ماتریس کوواریانس ورودی را استخراج کند.

شبکه هِب (Hebbian Network)



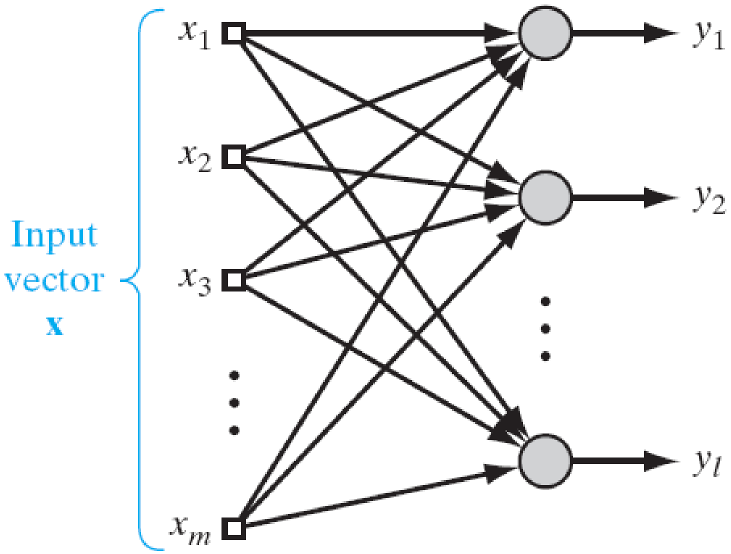
– تا این‌جای کار، نشان داده شد که الگوریتم هب می‌تواند بزرگترین بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه ماتریس کوواریانس ورودی را استخراج کند.

– حال، باید این الگوریتم را به حالت عمومی برای استخراج l بردار ویژه مربوط به l بزرگترین مقادیر ویژه تعمیم‌داد.



شبکه هِب (Hebbian Network)

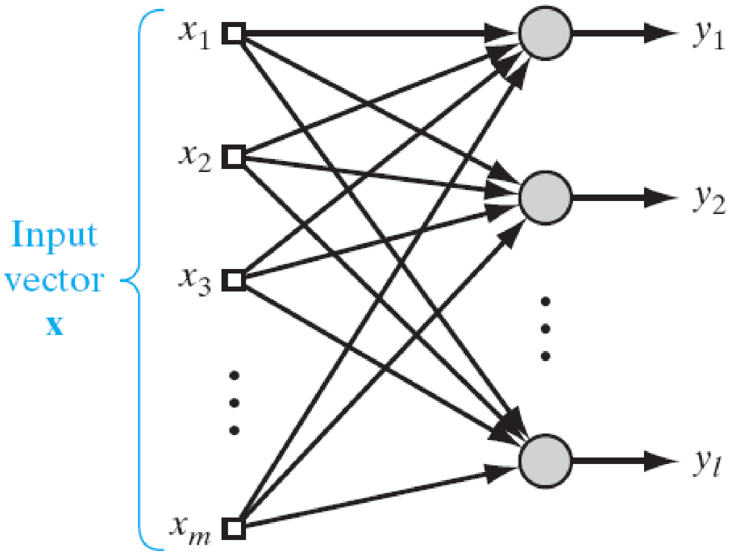
الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:



شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \dots, l$$

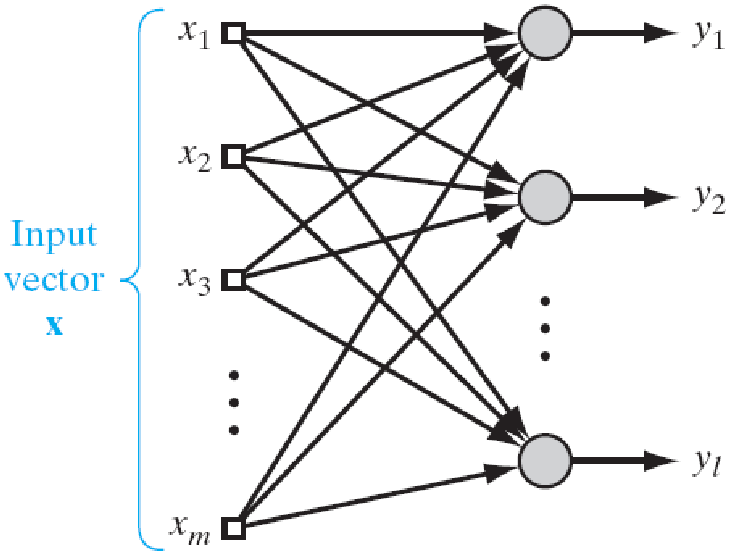


شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n)x_i(n), \quad j = 1,\ldots,l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n)y_k(n)\right], \quad \begin{cases} i = 1,\ldots,m \\ j = 1,\ldots,l \end{cases}$$



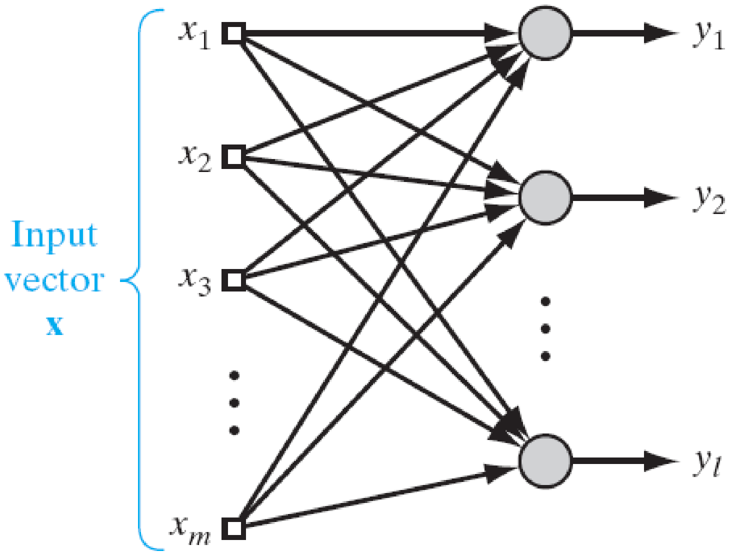
شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \ldots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) \left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, l \end{cases}$$

– با تعریف



شبکه هِب (Hebbian Network)

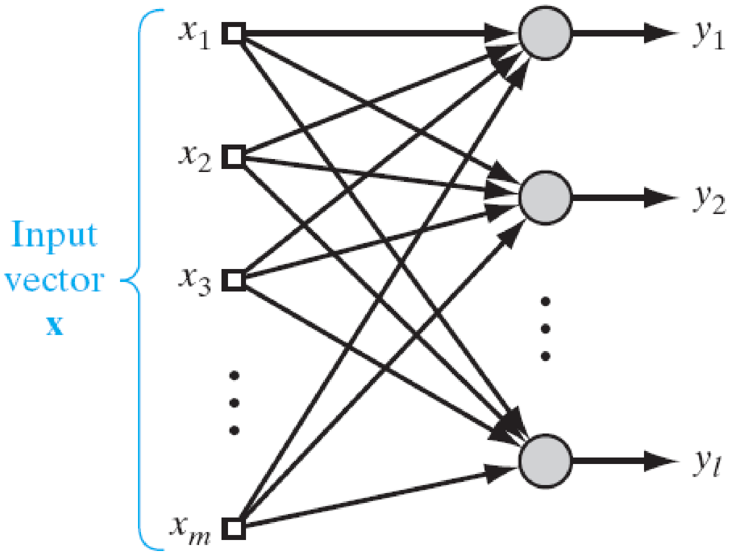
الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \ldots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) \left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, l \end{cases}$$

– با تعریف

$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

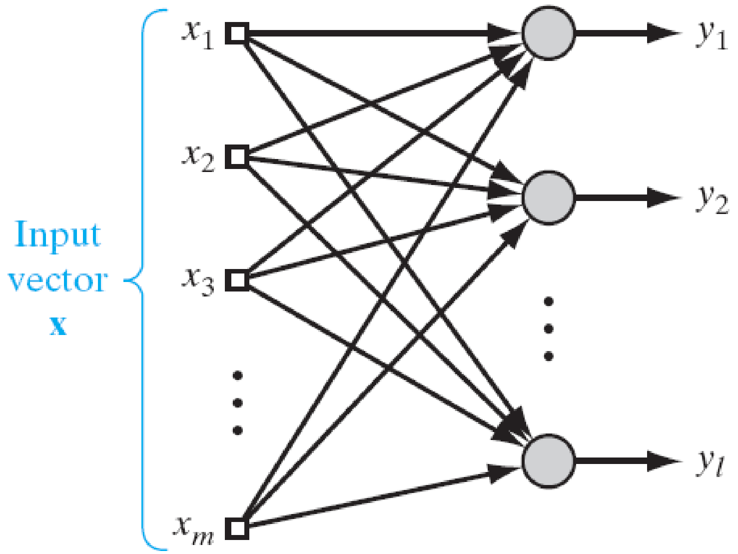
الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \dots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n)\right], \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, l \end{cases}$$

– با تعریف

$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$



الگوریتم عمومی آموزش هب به این شکل درمی‌آید:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i'(n) - w_{ji}(n) y_j(n)\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \dots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) \left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, l \end{cases}$$

– **با تعریف**

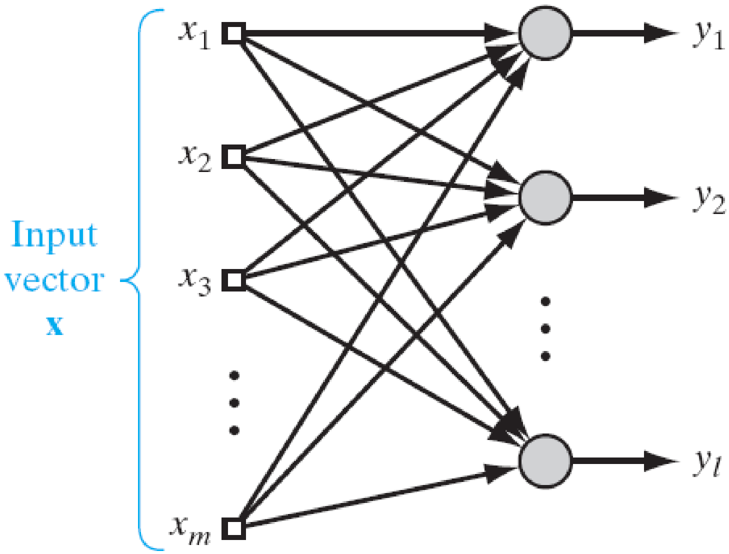
$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$

الگوریتم عمومی آموزش هب به این شکل درمی‌آید:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) \left[x_i'(n) - w_{ji}(n) y_j(n) \right]$$

– **و با تعریف**

$$x_i''(n) := x_i'(n) - w_{ji}(n) y_j(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n)x_i(n), \quad j = 1,\dots,l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n)y_k(n)\right], \quad \begin{cases} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,l \end{cases}$$

– با تعریف

$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n)y_k(n)$$

الگوریتم عمومی آموزش هب به این شکل درمی‌آید:

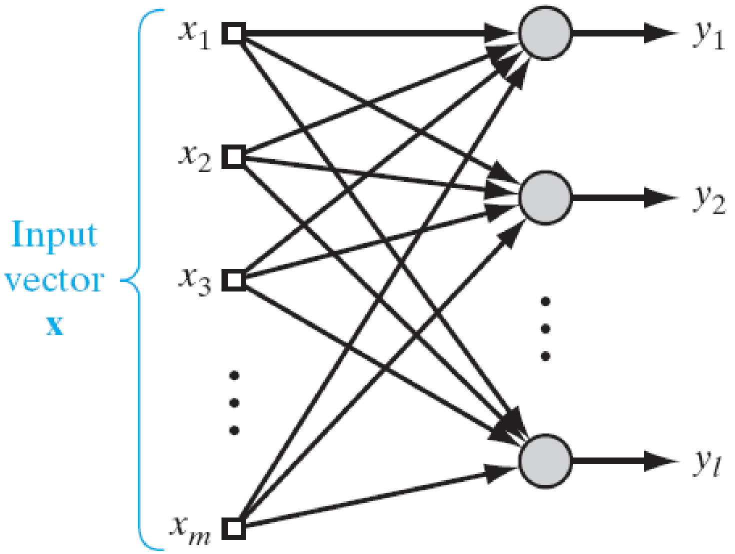
$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i'(n) - w_{ji}(n)y_j(n)\right]$$

– و با تعریف

$$x_i''(n) := x_i'(n) - w_{ji}(n)y_i(n)$$

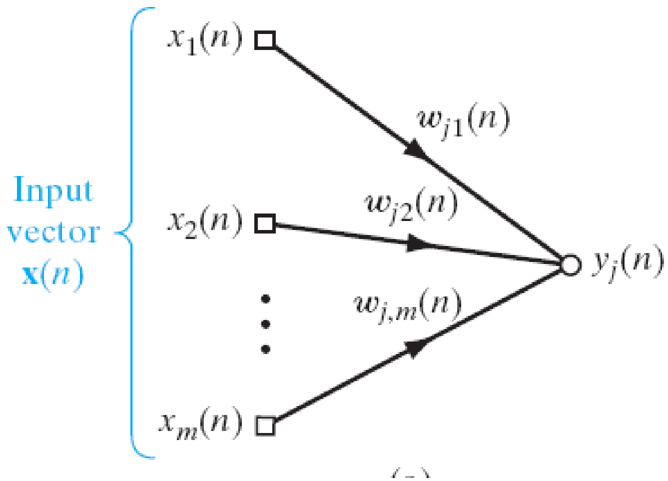
خواهیم داشت

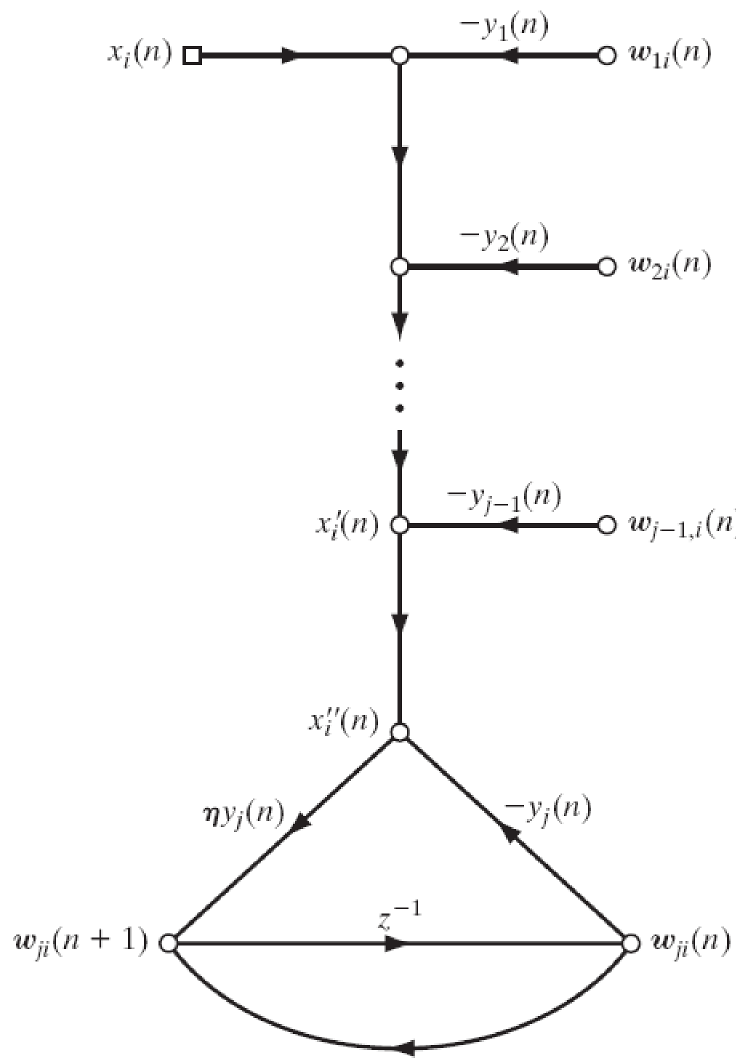
$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)x_i''(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

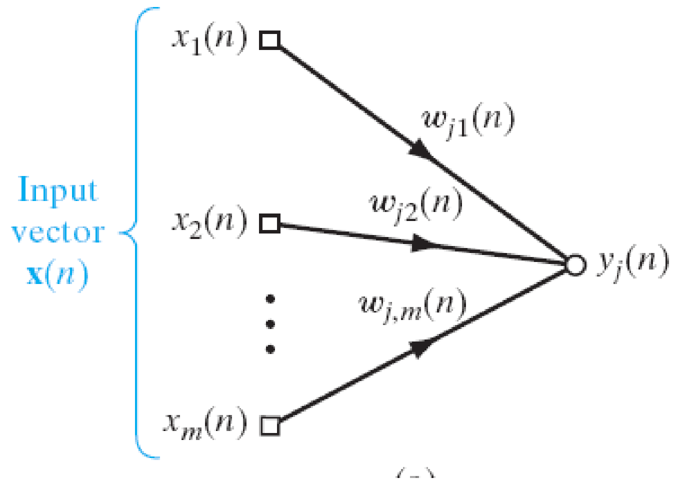
الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:



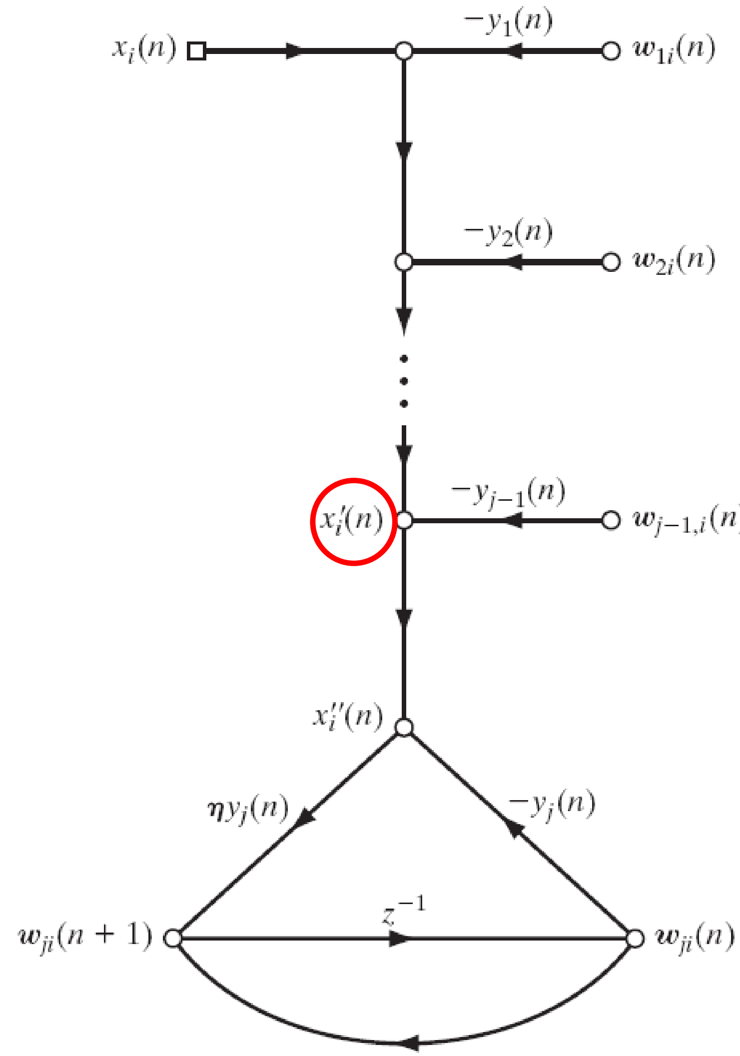


شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

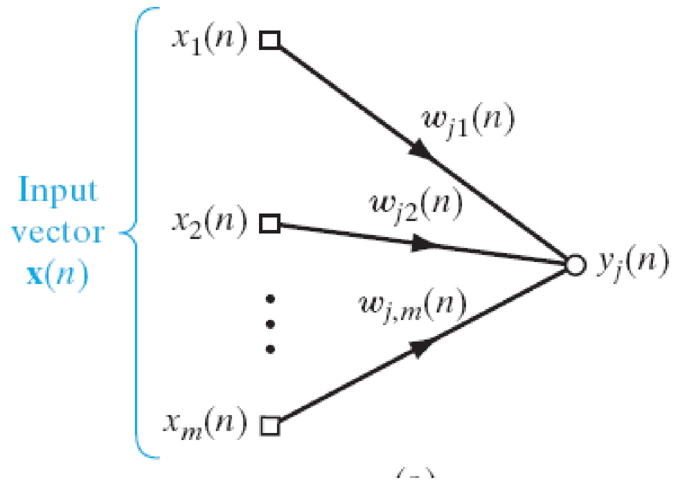


$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$



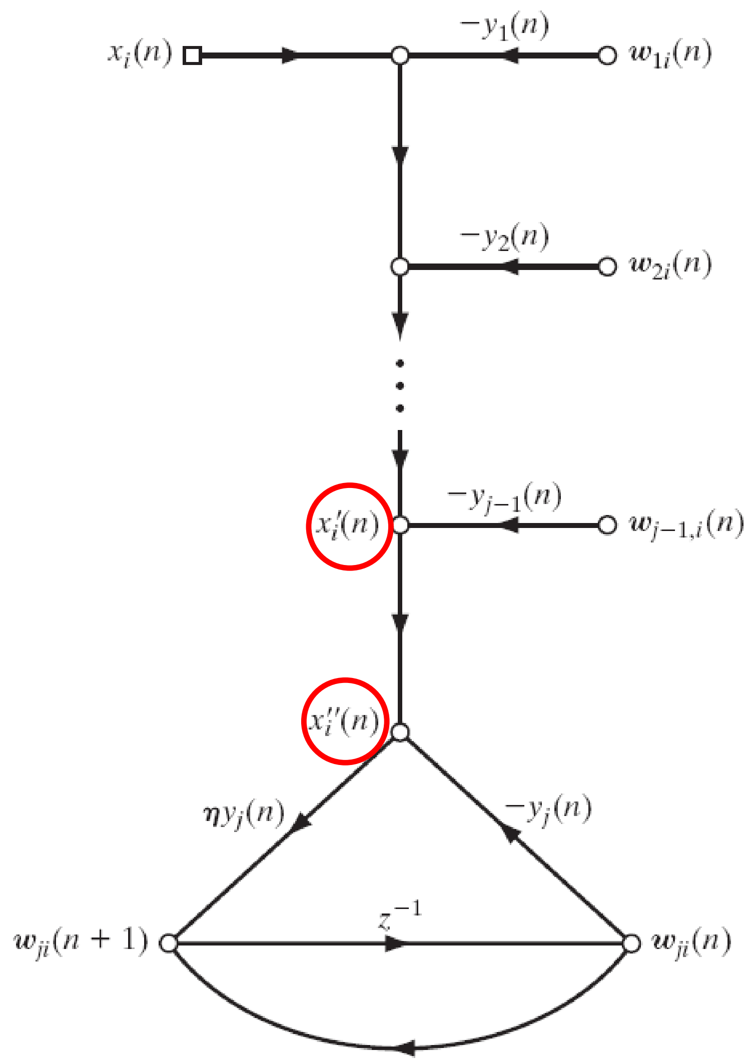
شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:



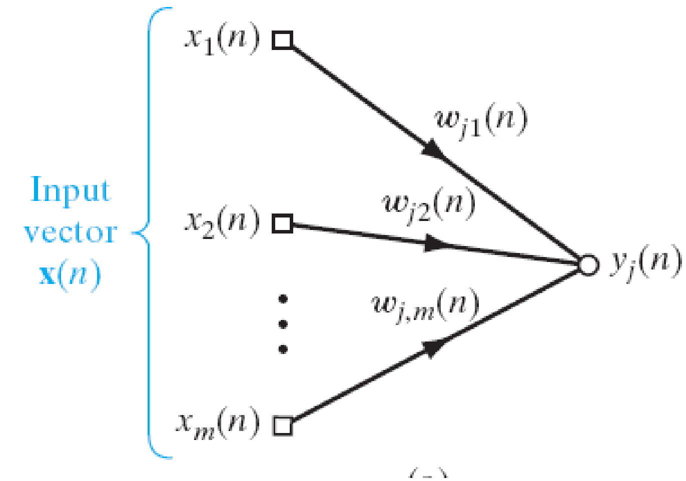
$$x_i'(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$

$$x_i''(n) := x_i'(n) - w_{ji}(n) y_i(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

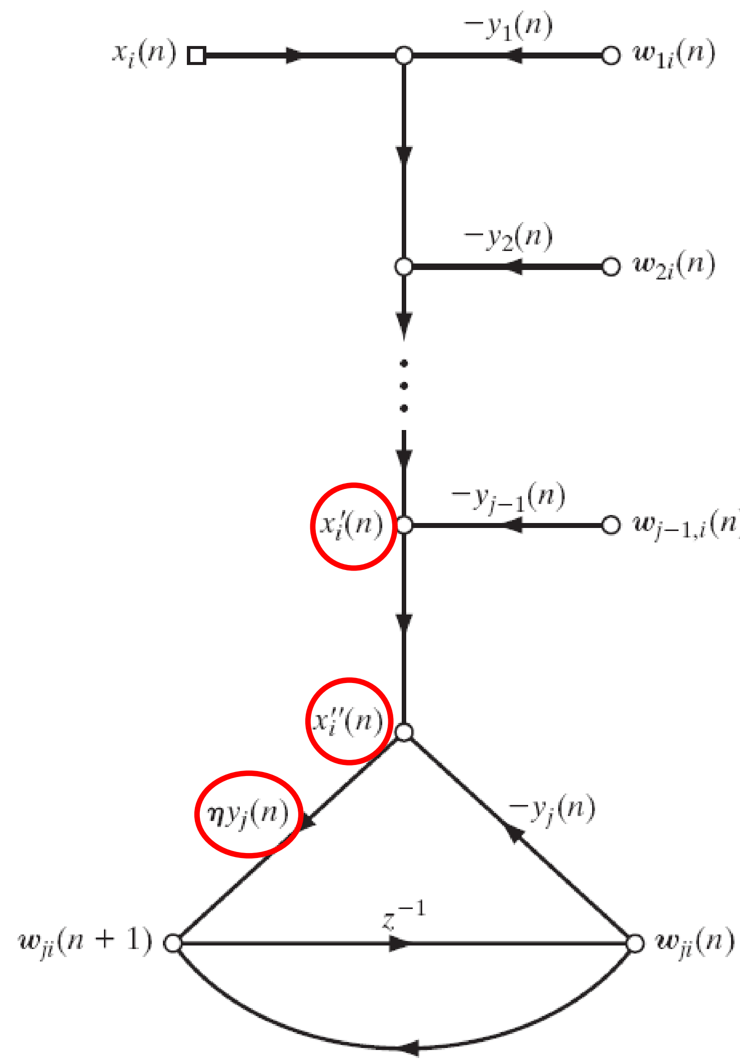
الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:



$$x'_i(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$

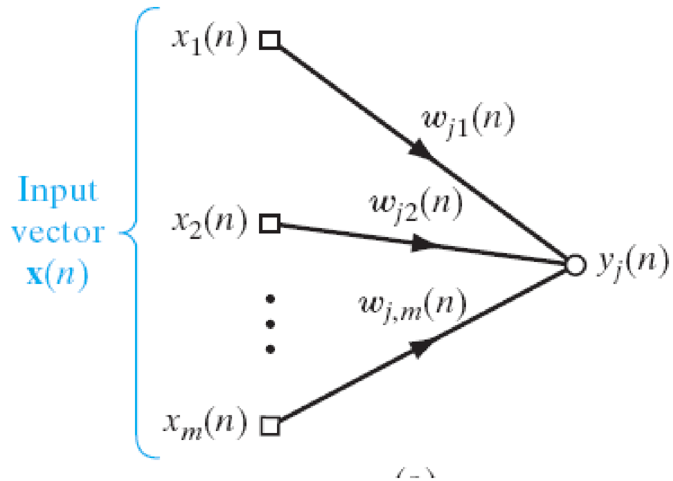
$$x''_i(n) := x'_i(n) - w_{ji}(n) y_i(n)$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) x''_i(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

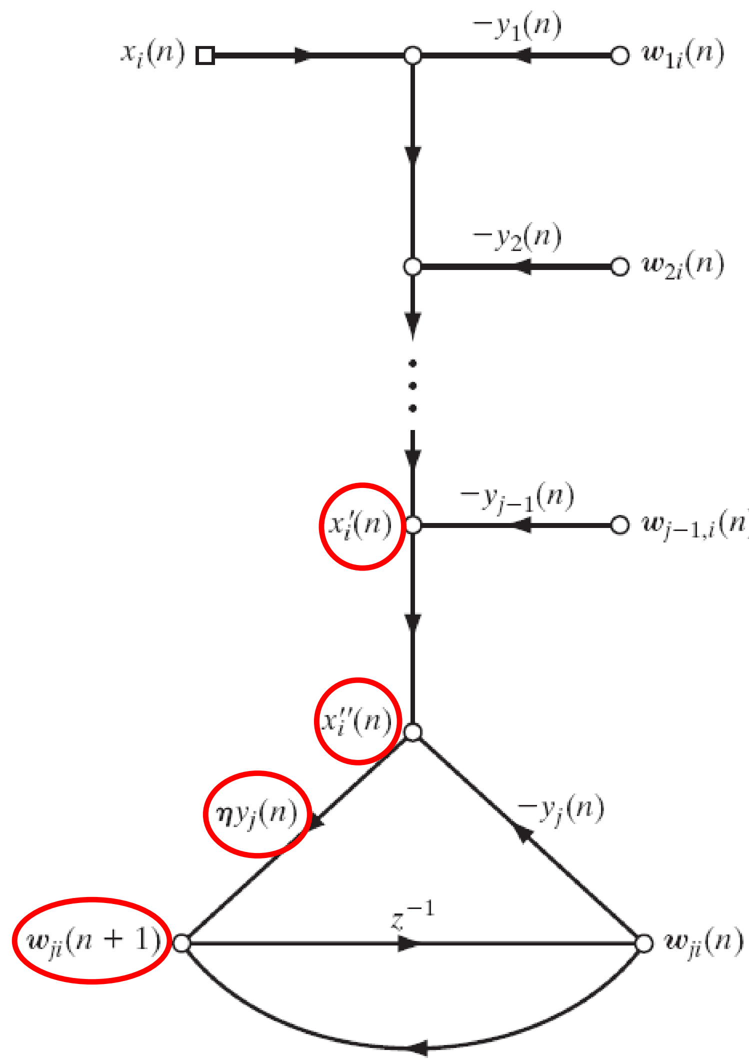


$$x'_i(n) := x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n) y_k(n)$$

$$x''_i(n) := x'_i(n) - w_{ji}(n) y_i(n)$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) x''_i(n)$$

$$w_{ji}(n+1) = w_{ji}(n) + \Delta w_{ji}(n)$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \to \infty$:

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \to \infty$:

$$\Delta \mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{0}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \rightarrow \infty$:

$$\Delta \mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{q}_j, \quad j = 1, \ldots, l$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \rightarrow \infty$:

$$\Delta \mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{q}_j, \quad j = 1, \ldots, l$$

– برای به‌دست‌آوردن مقادیر ویژه:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_j = \begin{cases} \lambda_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad j = 1, \ldots, l$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \to \infty$:

$$\Delta \mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{0}$$
$$\mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{q}_j, \quad j = 1, \ldots, l$$

– برای به‌دست‌آوردن مقادیر ویژه:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_j = \begin{cases} \lambda_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad j = 1, \ldots, l$$

که در این‌جا

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– در شرایط حد یعنی $n \to \infty$:

$$\Delta \mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{0}$$
$$\mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{q}_j, \quad j = 1, \ldots, l$$

– برای به‌دست‌آوردن مقادیر ویژه:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_j = \begin{cases} \lambda_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad j = 1, \ldots, l$$

که در این‌جا

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$$

– مقدار نهایی خروجی‌های شبکه

$$\lim_{n \to \infty} y_j(n) = \mathbf{x}^T(n)\, \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{x}(n), \quad j = 1, \ldots, l$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

- **بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل** (Cross-Correlation) **بین خروجی‌های شبکه**

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– **بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل** (Cross-Correlation) **بین خروجی‌های شبکه**

$$\lim_{n\to\infty} E[y_i(n)y_j(n)] = E[\mathbf{q}_i^T \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{q}_j]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل (Cross-Correlation) بین خروجی‌های شبکه

$$\lim_{n\to\infty} E[y_i(n)y_j(n)] = E[\mathbf{q}_i^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{q}_j]$$
$$= \mathbf{q}_i^T E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{q}_j$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل (Cross-Correlation) بین خروجی‌های شبکه

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E[y_i(n)y_j(n)] &= E[\mathbf{q}_i^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{q}_j] \\
&= \mathbf{q}_i^T E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{q}_j \\
&= \mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \begin{cases} \lambda_j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل (Cross-Correlation) بین خروجی‌های شبکه

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E[y_i(n)y_j(n)] &= E[\mathbf{q}_i^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{q}_j] \\ &= \mathbf{q}_i^T E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{q}_j \\ &= \mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \begin{cases}\lambda_j & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases}\end{aligned}$$

– همچنین، می‌توان ورودی‌های اعمالی به شبکه را از روی خروجی‌ها و وزن‌ها بازسازی‌کرد:

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{i=1}^{l} y_i(n)\mathbf{q}_i$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

الگوریتم عمومی هب برای یک لایه با m ورودی و l خروجی:

– **بنابراین، در شرایط تعادل، برای همبستگی متقابل** (Cross-Correlation) **بین خروجی‌های شبکه**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E[y_i(n)y_j(n)] &= E[\mathbf{q}_i^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{q}_j] \\ &= \mathbf{q}_i^T E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{q}_j \\ &= \mathbf{q}_i^T\mathbf{C}\mathbf{q}_j = \begin{cases}\lambda_j & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}\end{aligned}$$

– **همچنین، می‌توان ورودی‌های اعمالی به شبکه را از روی خروجی‌ها و وزن‌ها بازسازی‌کرد:**

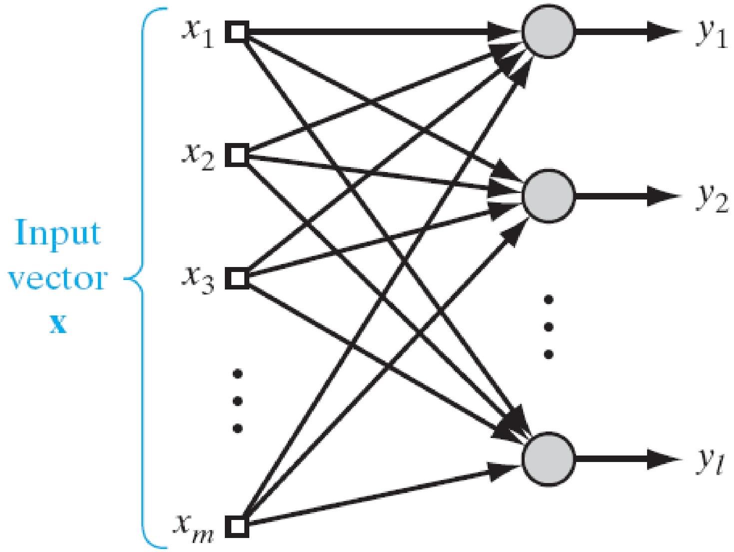
$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{i=1}^{l} y_i(n)\mathbf{q}_i$$

که درواقع، همان عمل تخمین خطی کمینه مربعات (Linear Least-Square Estimate) **است.**

شبکه هِب (Hebbian Network)

شبکه هِب (Hebbian Network)

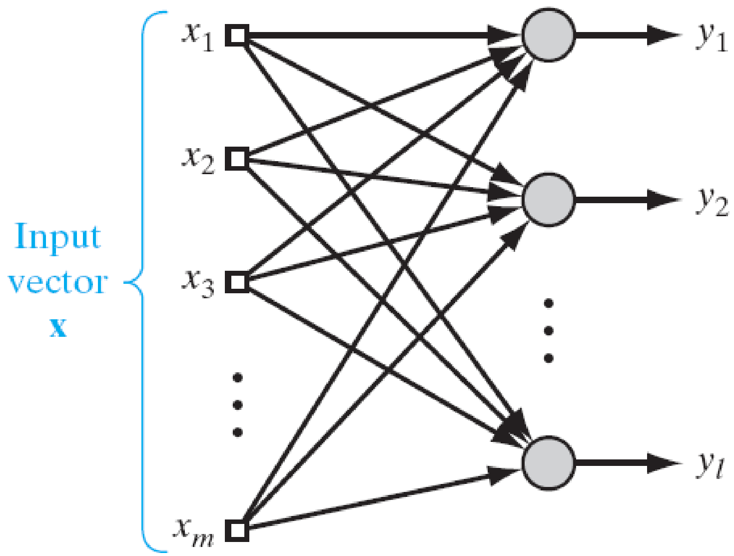
جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:



شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها با مقادیر اتفاقی کوچک برای $n=1$ و مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.



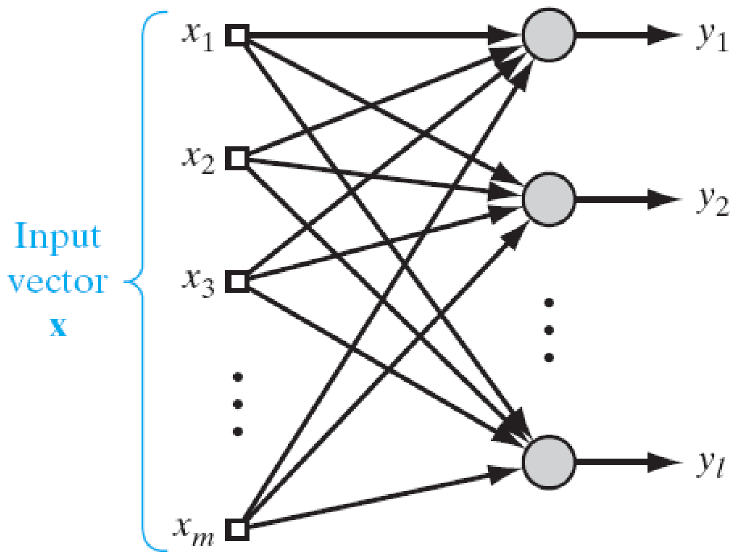
شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها با مقادیر اتفاقی کوچک برای $n=1$ و مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $n=1$، ابتدا خروجی‌های شبکه را محاسبه‌کرده و سپس تغییرات در وزن‌ها را به‌دست‌آورید:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \ldots, l$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

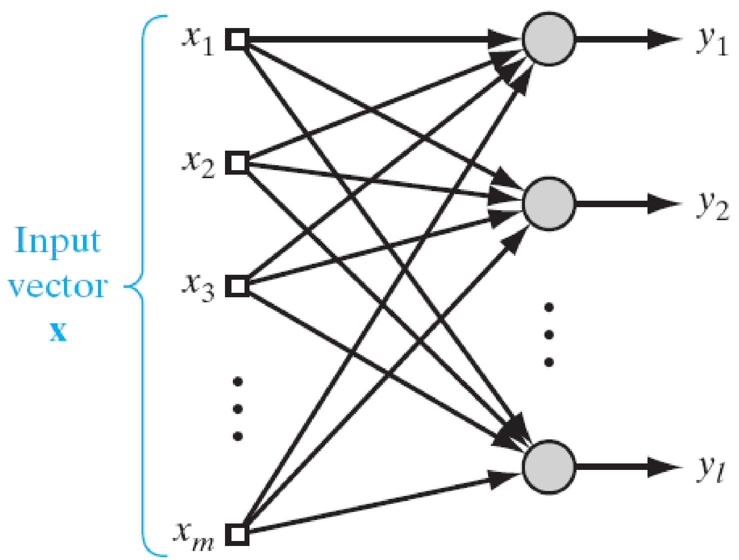
جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها با مقادیر اتفاقی کوچک برای $n=1$ و مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $n=1$، ابتدا خروجی‌های شبکه را محاسبه‌کرده و سپس تغییرات در وزن‌ها را به‌دست‌آورید:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \dots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n)\right], \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, l \end{cases}$$



شبکه هِب (Hebbian Network)

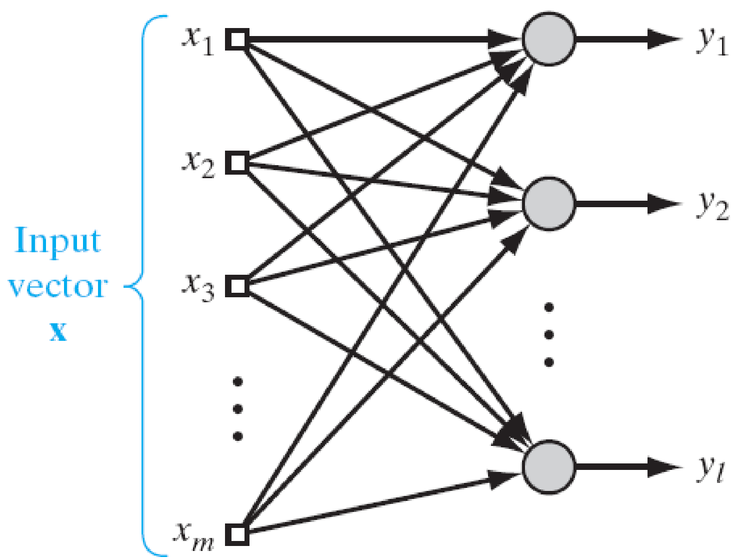
جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها با مقادیر اتفاقی کوچک برای $n=1$ و مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $n=1$، ابتدا خروجی‌های شبکه را محاسبه‌کرده و سپس تغییرات در وزن‌ها را به‌دست‌آورید:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \dots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n) \left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, l \end{cases}$$



۳- برای $n=2, 3, \dots$، گام ۲ را آنقدر تکرارکرده تا وزن‌ها به حالت پایدار برسند.

شبکه هِب (Hebbian Network)

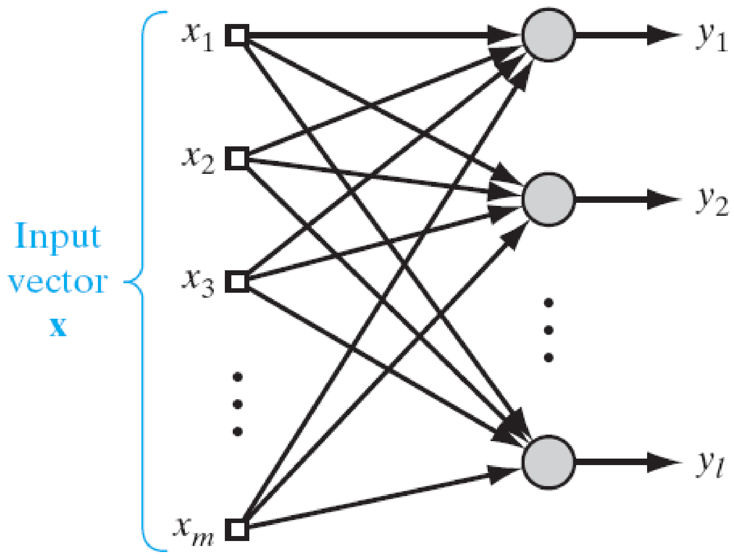
جمع‌بندی الگوریتم عمومی هب:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها با مقادیر اتفاقی کوچک برای $n=1$ و مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $n=1$، ابتدا خروجی‌های شبکه را محاسبه‌کرده و سپس تغییرات در وزن‌ها را به‌دست‌آورید:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \quad j = 1, \ldots, l$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta\, y_j(n)\left[x_i(n) - \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n)\right], \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, l \end{cases}$$



۳- برای $n = 2, 3, \ldots$، گام ۲ را آنقدر تکرارکرده تا وزن‌ها به حالت پایدار برسند.

- برای مقادیر بزرگ n، وزن w_{ji} مربوط به سلول jام برابر خواهدبود با درایه iام بردار ویژه مربوط به jامین مقدار ویژه ماتریس همبستگی بردار ورودی $\mathbf{x}(n)$.

شبکه هِب (Hebbian Network)

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

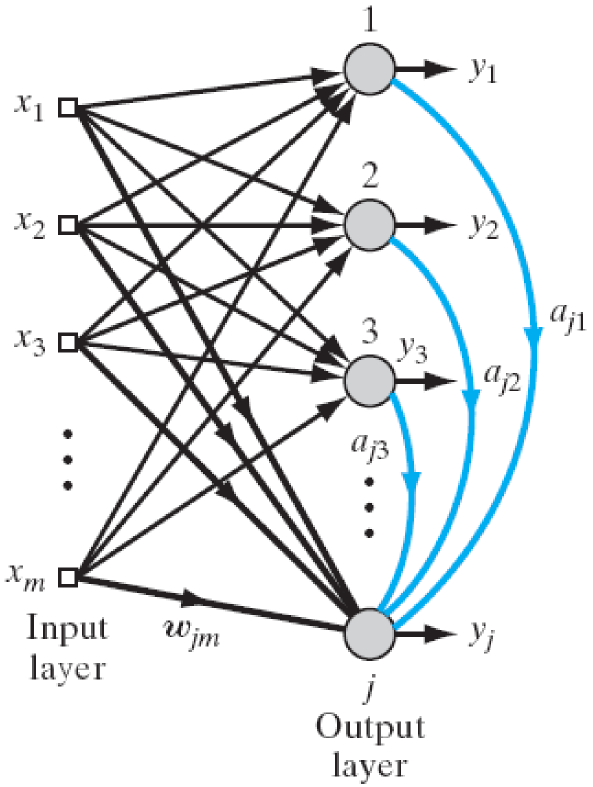
شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.



شبکه هِب (Hebbian Network)

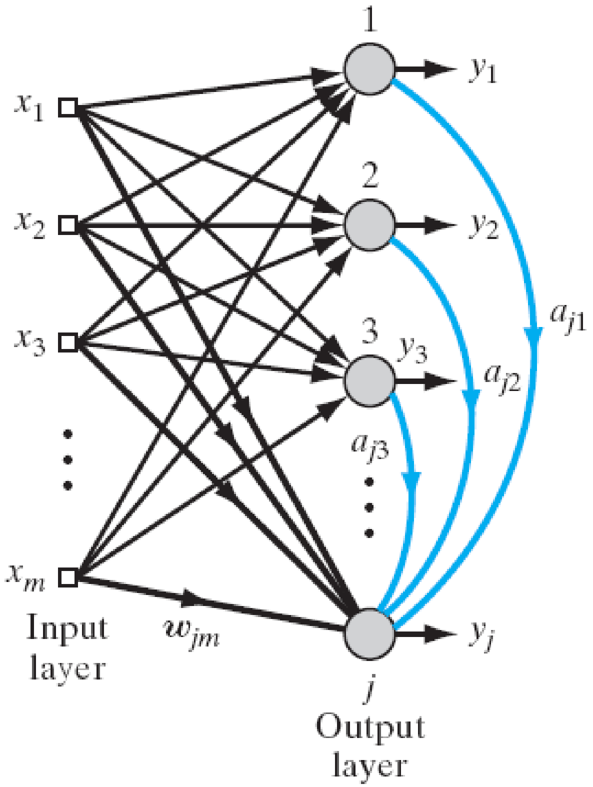
استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.

– به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست آورد.

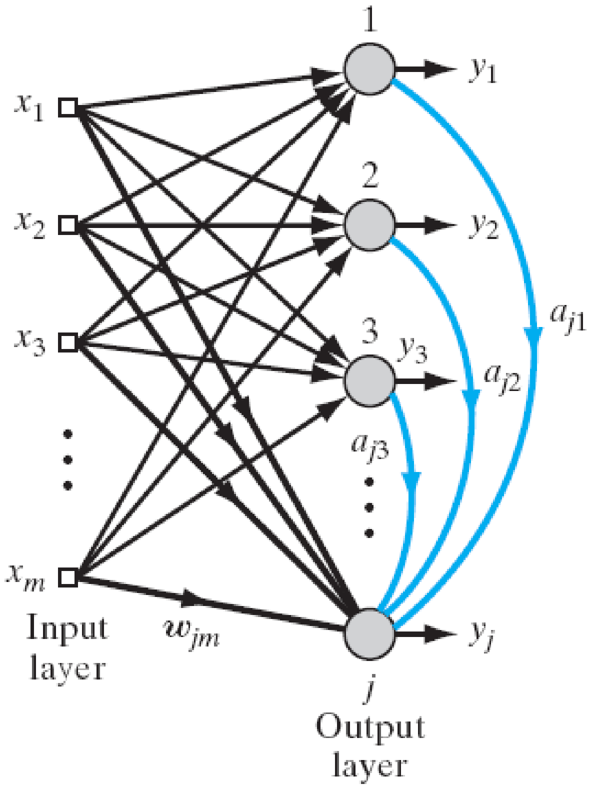


شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

- در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.
- در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.
- به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست آورد.
- وزن‌های متصل به سلول j ام:

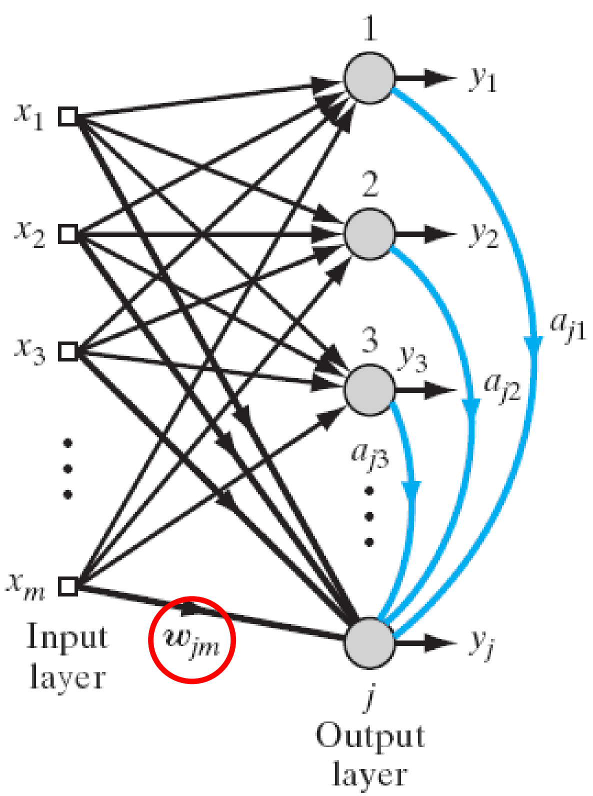


شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:
(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.



– به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست‌آورد.

– وزن‌های متصل به سلول jام:

۱– وزن‌های پیشخورد (Feedforward Connections)

$$\mathbf{w}_j(n) = [w_1(n) \quad \cdots \quad w_m(n)]^T$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.

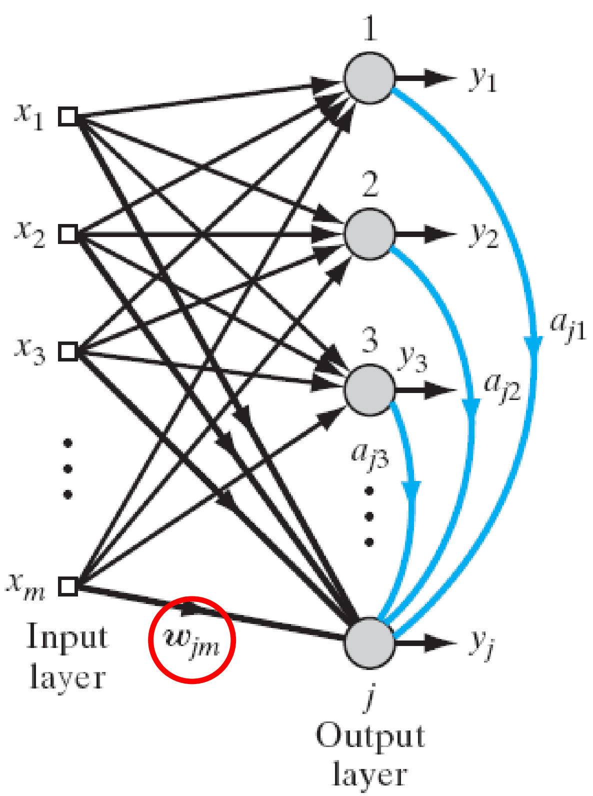
– به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست‌آورد.

– وزن‌های متصل به سلول j ام:

۱– وزن‌های پیشخورد (Feedforward Connections)

$$\mathbf{w}_j(n) = [w_1(n) \quad \cdots \quad w_m(n)]^T$$

– این وزن‌های تحریک‌کننده‌اند و برطبق قاعده هب تنظیم می‌شوند



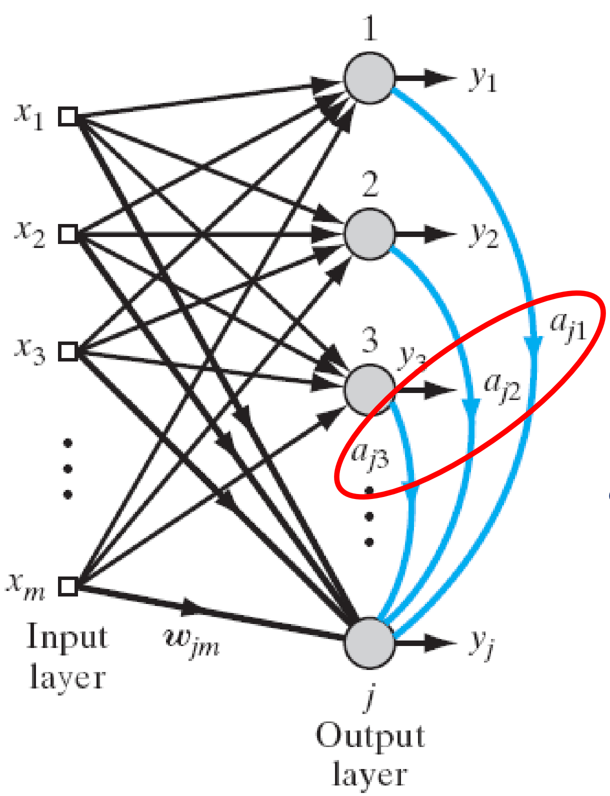
شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:
(Adaptive Principal-Component Extraction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.

– به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست آورد.



– وزن‌های متصل به سلول jام:

۱– وزن‌های پیشخورد (Feedforward Connections)

$$\mathbf{w}_j(n) = [w_1(n) \quad \cdots \quad w_m(n)]^T$$

– این وزن‌های تحریک‌کننده‌اند و برطبق قاعده هب تنظیم می‌شوند

۲– وزن‌های جانبی (Lateral Connections)

$$\mathbf{a}_j(n) = [a_{j1}(n) \quad \cdots \quad a_{j,j-1}(n)]^T$$

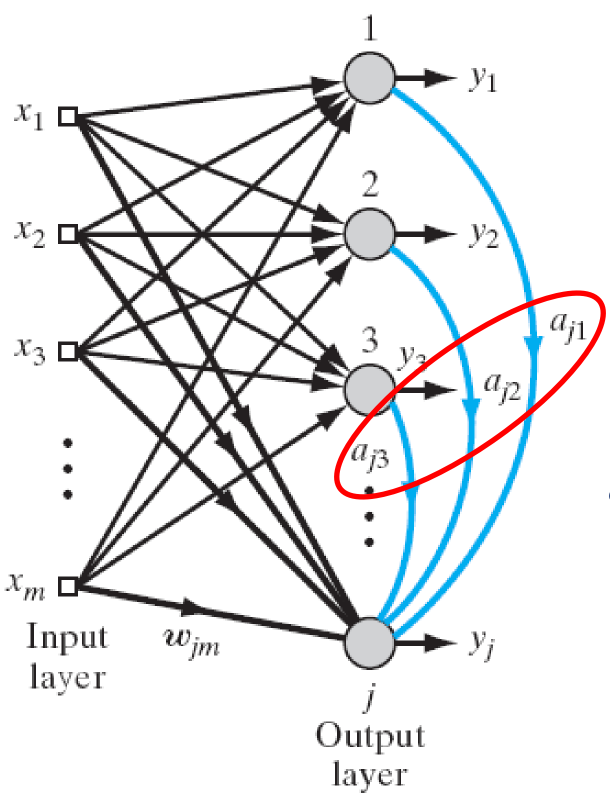
شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی:

(<u>A</u>daptive <u>P</u>rincipal-Component <u>Ex</u>traction ≡ APEX)

– در شبکه قبلی، فقط از وزن‌های پیشخورد برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شد.

– در این شبکه، علاوه بر وزن‌های پیشخورد از وزن‌های جانبی نیز برای استخراج ویژگی‌های بردار ورودی استفاده می‌شود.



– به این ترتیب، می‌توان مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به‌صورت تطبیقی به‌دست‌آورد.

– وزن‌های متصل به سلول jام:

۱– وزن‌های پیشخورد (Feedforward Connections)

$$\mathbf{w}_j(n) = [w_1(n) \quad \cdots \quad w_m(n)]^T$$

– این وزن‌های تحریک‌کننده‌اند و برطبق قاعده هب تنظیم می‌شوند

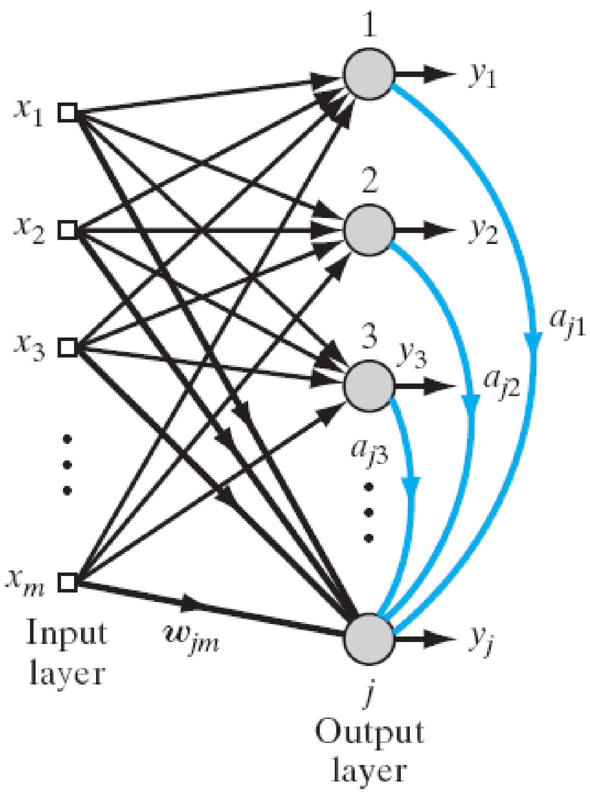
۲– وزن‌های جانبی (Lateral Connections)

$$\mathbf{a}_j(n) = [a_{j1}(n) \quad \cdots \quad a_{j,j-1}(n)]^T$$

– این وزن‌های بازدارنده‌اند و برطبق قاعده ضدهب تنظیم می‌شوند.

شبکه هِب (Hebbian Network)

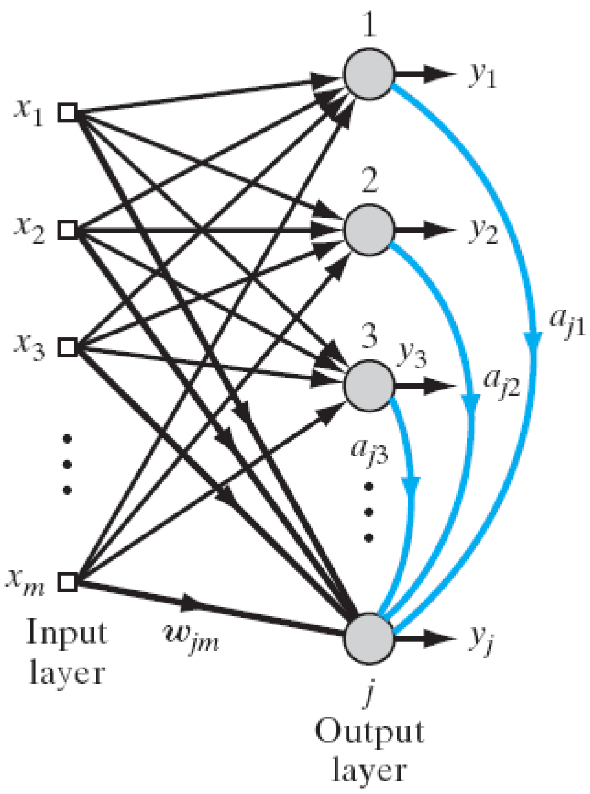
استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):



شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

– خروجی سلول jام برحسب بردار ورودی، وزن‌ها و سایر خروجی‌ها برابر است با



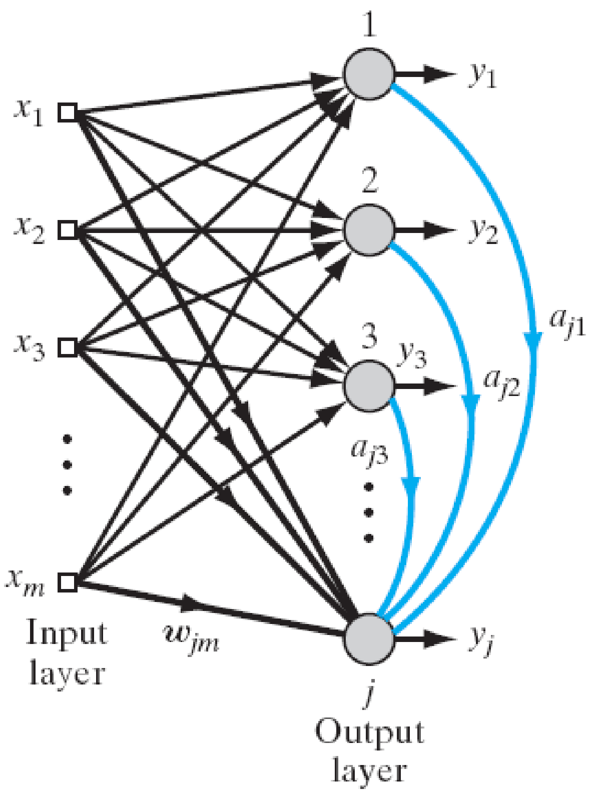
$$y_j(n) = \mathbf{w}_j^T(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{a}_j^T(n)\mathbf{y}_{j-1}(n)$$

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

– خروجی سلول jام برحسب بردار ورودی، وزن‌ها و سایر خروجی‌ها برابر است با



$$y_j(n) = \mathbf{w}_j^T(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{a}_j^T(n)\mathbf{y}_{j-1}(n)$$

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

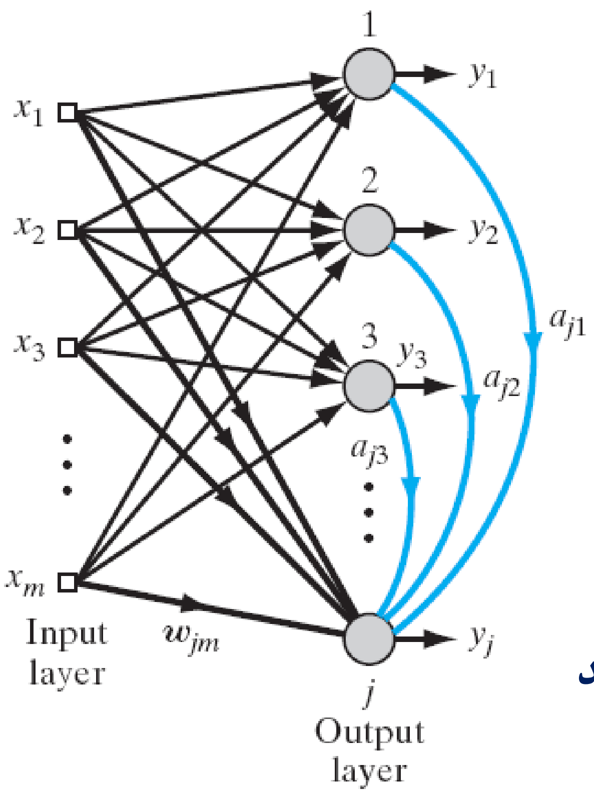
– در این‌جا فرض می‌شود که ماتریس C دارای m مقدار ویژه مجزا باشد که به‌ترتیب نزولی مرتب شده‌اند:

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{j-1} > \lambda_j \cdots > \lambda_m$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

– خروجی سلول jام برحسب بردار ورودی، وزن‌ها و سایر خروجی‌ها برابر است با



$$y_j(n) = \mathbf{w}_j^T(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{a}_j^T(n)\mathbf{y}_{j-1}(n)$$

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– در این‌جا فرض می‌شود که ماتریس C دارای m مقدار ویژه مجزا باشد که به‌ترتیب نزولی مرتب شده‌اند:

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{j-1} > \lambda_j \cdots > \lambda_m$$

– همچنین فرض می‌شود که سلول های ۱ تا $j-1$ به شرایط پایدار خود همگرا شده‌اند که همان بردارهای ویژه الگوی ورودی می‌باشند

$$\mathbf{w}_k(n=0) = \mathbf{q}_k, \quad k = 1, \dots, j-1$$

$$\mathbf{a}_k(n=0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, j-1$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

- بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [\mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{x}(n)]^T$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{j-1}(n) &= [\mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{x}(n)]^T \\ &= [\mathbf{q}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T]^T \mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{j-1}(n) &= [\mathbf{q}_1^T\mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T\mathbf{x}(n)]^T \\ &= [\mathbf{q}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T]^T\,\mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{Q}\,\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{j-1}(n) &= [\mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{x}(n)]^T \\ &= [\mathbf{q}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T]^T \mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{Q}\,\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

– وزن‌های متصل به سلول j به‌صورت زیر تنظیم می‌شوند:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\Big[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\Big]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{j-1}(n) &= [\mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{x}(n)]^T \\ &= [\mathbf{q}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T]^T \mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{Q}\,\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

– وزن‌های متصل به سلول j به‌صورت زیر تنظیم می‌شوند:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

استخراج تطبیقی مولفه‌های اساسی (APEX):

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

– بنابراین، برای بردار فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{j-1}(n) &= [\mathbf{q}_1^T \mathbf{x}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{x}(n)]^T \\ &= [\mathbf{q}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{j-1}^T]^T \mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{Q}\,\mathbf{x}(n) \end{aligned}$$

– وزن‌های متصل به سلول j به‌صورت زیر تنظیم می‌شوند:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

– تحت این روش می‌توان نشان‌داد که $\mathbf{w}_j$ در نهایت به jامین بردار ویژه ماتریس $\mathbf{C}$ همگرا شده و y_j برابر با jامین مقدار ویژه این ماتریس می‌باشد.

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

۱- مقداردهی اولیه با مقادیر اتفاقی برای وزن‌های $\mathbf{w}_j$ و $\mathbf{a}_j$ و همچنین مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

۱- مقداردهی اولیه با مقادیر اتفاقی برای وزن‌های $\mathbf{w}_j$ و $\mathbf{a}_j$ و همچنین مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $j=1$ و $n = 2, 3, \ldots$ مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$y_1(n) = \mathbf{w}_1^T(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}_1(n+1) = \mathbf{w}_1(n) + \eta\left[y_1(n)\mathbf{x}(n) - y_1^2(n)\mathbf{w}_1(n)\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

۱- مقداردهی اولیه با مقادیر اتفاقی برای وزن‌های $\mathbf{w}_j$ و $\mathbf{a}_j$ و همچنین مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $j=1$ و $n = 2, 3, \ldots$ مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$y_1(n) = \mathbf{w}_1^T(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}_1(n+1) = \mathbf{w}_1(n) + \eta\left[y_1(n)\mathbf{x}(n) - y_1^2(n)\mathbf{w}_1(n)\right]$$

- برای مقادیر بزرگ n، $\mathbf{w}_1$ به سمت بردار ویژه و y_1 به سمت بزرگترین مقدار ویژه ماتریس C همگرا خواهدشد.

$$\mathbf{w}_1(n) \rightarrow \mathbf{q}_1$$

$$y_1(n) \rightarrow \lambda_1$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

۱- مقداردهی اولیه با مقادیر اتفاقی برای وزن‌های $\mathbf{w}_j$ و $\mathbf{a}_j$ و همچنین مقدار کوچکی برای ضریب آموزش.

۲- برای $j = 1$ و $n = 2, 3, \ldots$ مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$y_1(n) = \mathbf{w}_1^T(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}_1(n+1) = \mathbf{w}_1(n) + \eta\left[y_1(n)\mathbf{x}(n) - y_1^2(n)\mathbf{w}_1(n)\right]$$

- برای مقادیر بزرگ n، $\mathbf{w}_1$ به سمت بردار ویژه و y_1 به سمت بزرگترین مقدار ویژه ماتریس C همگرا خواهدشد.

$$\mathbf{w}_1(n) \rightarrow \mathbf{q}_1$$

$$y_1(n) \rightarrow \lambda_1$$

۳- برای $j = 2, 3, \ldots, l$ و $n = 1, 2, 3, \ldots$ مقادیر زیر را محاسبه‌کنید:

$$\mathbf{y}_{j-1}(n) = [y_1(n) \quad \cdots \quad y_{j-1}(n)]^T$$

$$y_j(n) = \mathbf{w}_j^T(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{a}_j^T(n)\mathbf{y}_{j-1}(n)$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

– برای مقادیر بزرگ n،

$$\mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{q}_j$$
$$\mathbf{a}_j(n) \rightarrow \mathbf{0}$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

– برای مقادیر بزرگ n،

$$\mathbf{w}_j(n) \rightarrow \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{a}_j(n) \rightarrow \mathbf{0}$$

– همچنین در این روش، مقادیر ویژه (خروجی‌های شبکه) از نظر اندازه مرتب خواهندشد

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{j-1} > \lambda_j \cdots > \lambda_m > 0$$

شبکه هِب (Hebbian Network)

جمع‌بندی الگوریتم APEX:

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta\left[y_j(n)\mathbf{x}(n) - y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n)\right]$$

$$\mathbf{a}_j(n+1) = \mathbf{a}_j(n) - \eta\left[y_j(n)\,\mathbf{y}_{j-1}(n) + y_j^2(n)\,\mathbf{a}_j(n)\right]$$

– برای مقادیر بزرگ n،

$$\mathbf{w}_j(n) \to \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{a}_j(n) \to \mathbf{0}$$

– همچنین در این روش، مقادیر ویژه (خروجی‌های شبکه) از نظر اندازه مرتب خواهندشد

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{j-1} > \lambda_j \cdots > \lambda_m > 0$$

– نتیجه‌گیری: در الگوریتم عمومی هب، تمام سلول‌ها به‌طور همزمان همگرا می‌شود در حالی که در الگوریتم APEX، سلول‌ها به‌طور پیاپی همگرا می‌شوند.