شبکه‌های عصبی مصنوعی

جلسه دهم:
شبکه با تابع پایه شعاعی (۱)
(Radial-Basis Function Network = RBF Net)

محمد فرخی (farrokhi AT iust.ac.ir)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه با تابع پایه شعاعی (Radial-Basis Function Network) از دسته شبکه‌های عصبی است که به آن‌ها شبکه‌های هسته‌مبنا (Kernel-Based) می‌گویند.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

- شبکه با تابع پایه شعاعی (Radial-Basis Function Network) از دسته شبکه‌های عصبی است که به آن‌ها شبکه‌های هسته‌مبنا (Kernel-Based) می‌گویند.

- اگرچه این دسته شبکه‌ها (همانند MLP) قادر به حل دسته وسیعی از مسایل هستند، ولی مبنای عملکرد آن‌ها متفاوت از MLP است.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه با تابع پایه شعاعی (Radial-Basis Function Network) از دسته شبکه‌های عصبی است که به آن‌ها شبکه‌های هسته‌مبنا (Kernel-Based) می‌گویند.

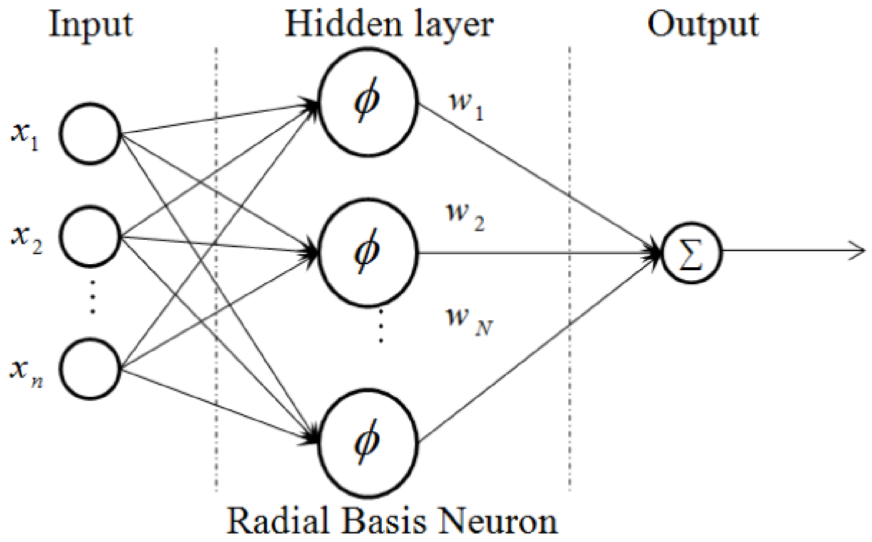
– اگرچه این دسته شبکه‌ها (همانند MLP) قادر به حل دسته وسیعی از مسایل هستند، ولی مبنای عملکرد آن‌ها متفاوت از MLP است.

– آموزش شبکه‌هایی که تا کنون بررسی کردیم، از نوع با نظارت بود. ولی در شبکه RBF می‌توان از دو روش با نظارت و بدون نظارت در یک شبکه استفاده کرد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

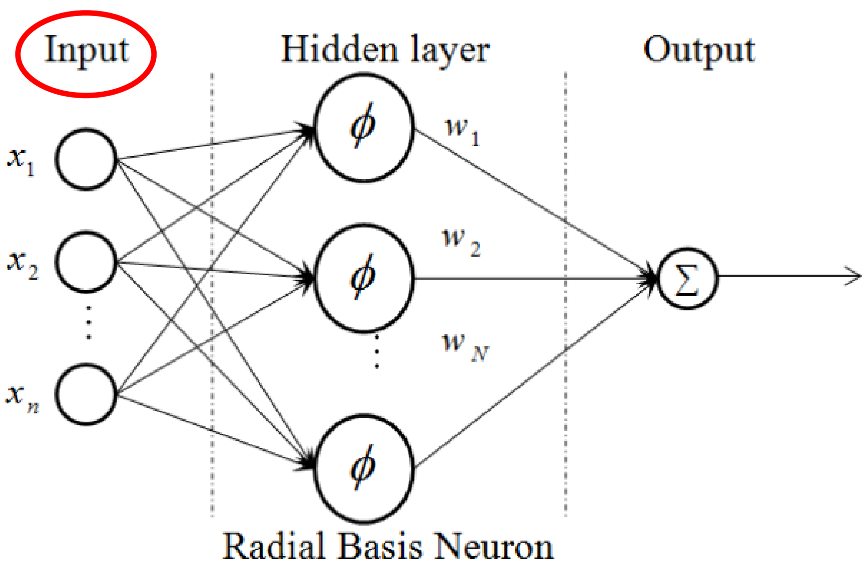
– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:

۱– لایه ورودی که متشکل از گره‌های منبع است.

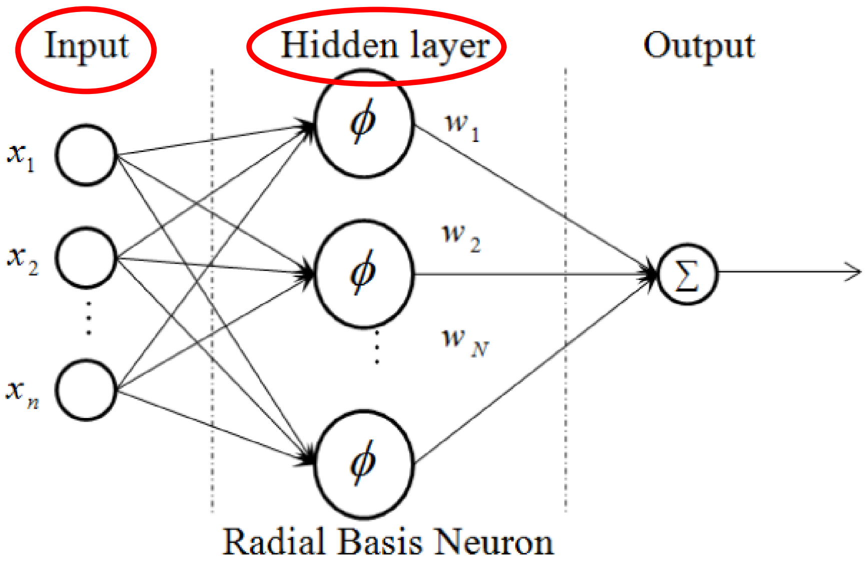


شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:

۱– لایه ورودی که متشکل از گره‌های منبع است.

۲– لایه پنهان (که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهد) شامل سلول‌های غیرخطی است. وظیفه این سلول‌ها متفاوت از سلول‌های MLP است.



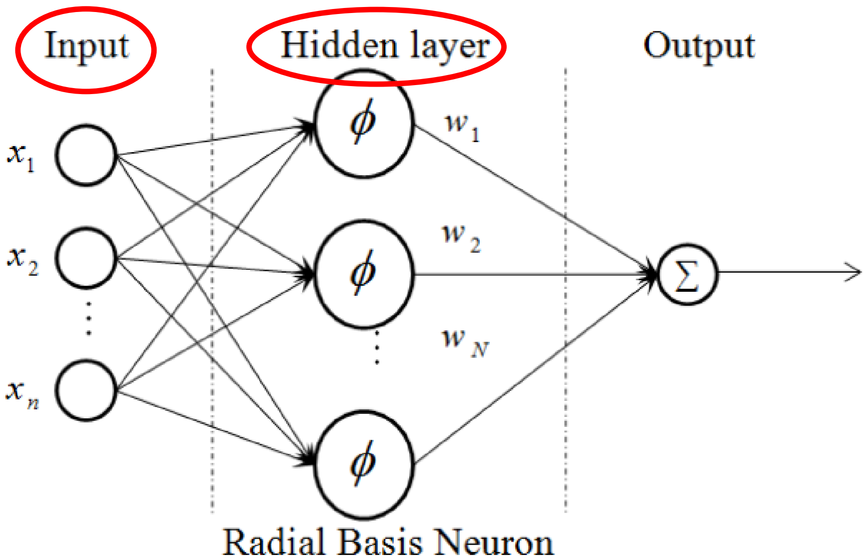
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:

۱– لایه ورودی که متشکل از گره‌های منبع است.

۲– لایه پنهان (که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهد) شامل سلول‌های غیرخطی است. وظیفه این سلول‌ها متفاوت از سلول‌های MLP است.

- در این لایه (که معمولا تعداد سلول‌های آن زیاد است) تبدیل غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) به داده‌ها اعمال می‌کند.



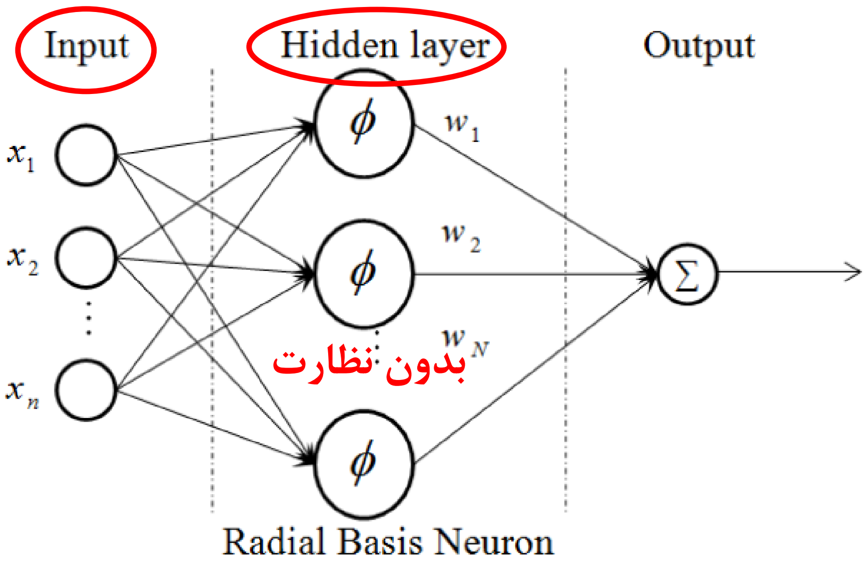
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:

۱- لایه ورودی که متشکل از گره‌های منبع است.

۲- لایه پنهان (که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهد) شامل سلول‌های غیرخطی است. وظیفه این سلول‌ها متفاوت از سلول‌های MLP است.

- در این لایه (که معمولا تعداد سلول‌های آن زیاد است) تبدیل غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) به داده‌ها اعمال می‌کند.
- آموزش در این لایه به‌صورت بدون نظارت می‌تواند انجام شود.



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

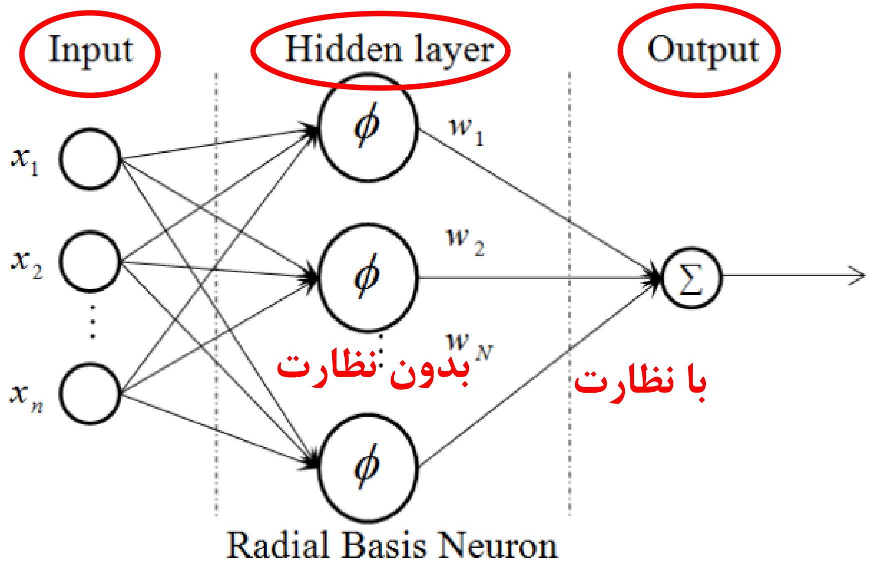
– شبکه RBF دارای سه لایه می‌باشد:

۱– لایه ورودی که متشکل از گره‌های منبع است.

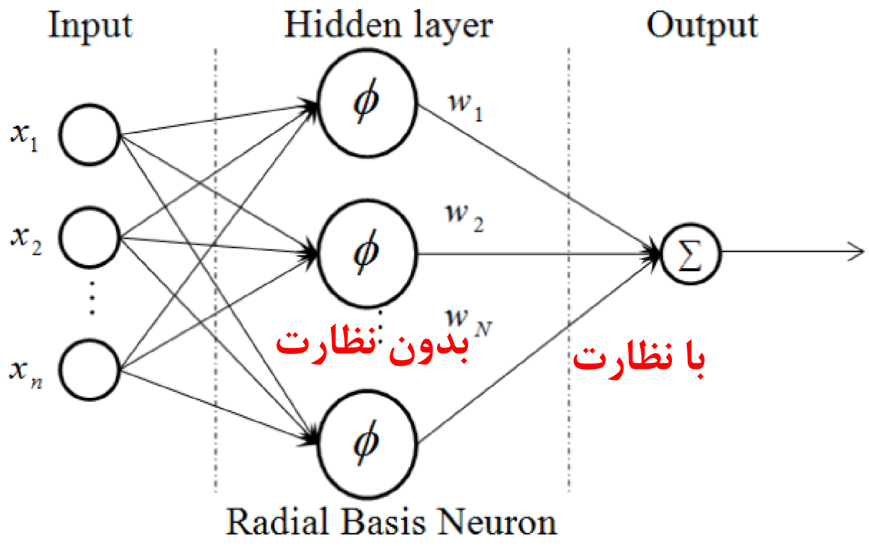
۲– لایه پنهان (که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهد) شامل سلول‌های غیرخطی است. وظیفه این سلول‌ها متفاوت از سلول‌های MLP است.

- در این لایه (که معمولا تعداد سلول‌های آن زیاد است) تبدیل غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) به داده‌ها اعمال می‌کند.
- آموزش در این لایه به‌صورت بدون نظارت می‌تواند انجام شود.

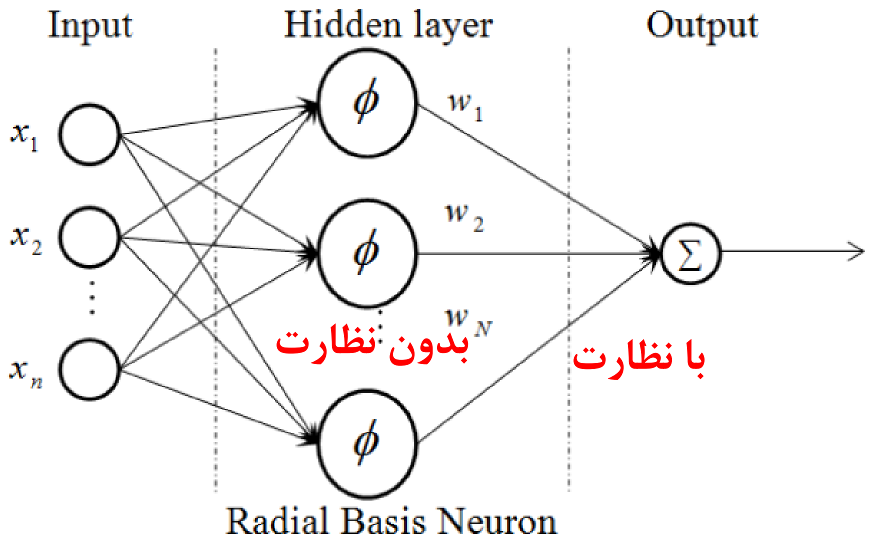
۳– لایه خروجی که شامل سلول‌های خطی است. آموزش در این لایه به‌صورت با نظارت انجام می‌شود.



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

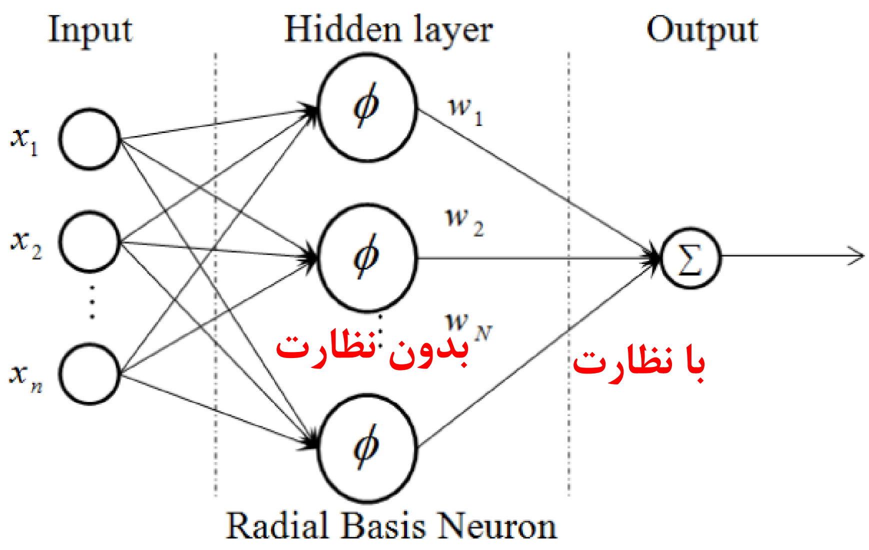


شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)



نگاشت از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) غیرخطی است و نگاشت از فضای پنهان به فضای خروجی، خطی است.

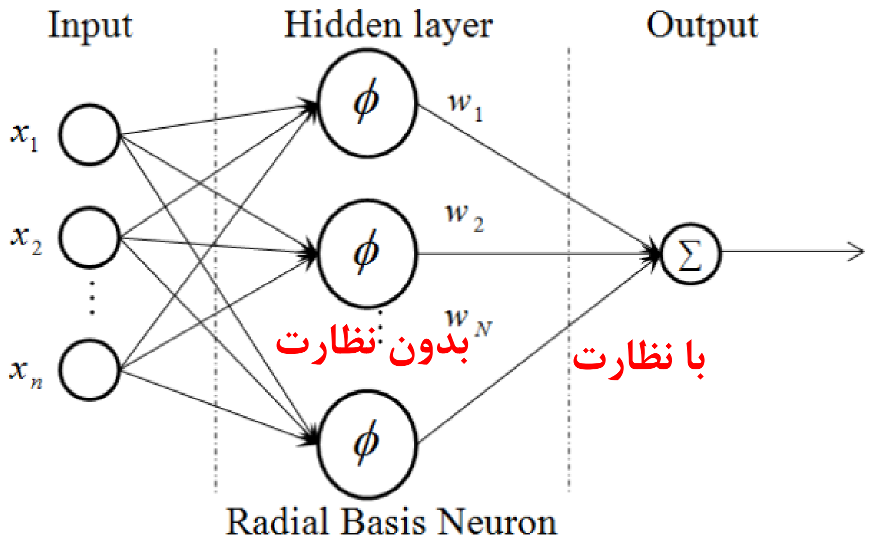
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)



نگاشت از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) غیرخطی است و نگاشت از فضای پنهان به فضای خروجی، خطی است.

این نکته در کلاسه‌بندی کردن الگوهای پیچیده کاربرد مهمی دارد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)



نگاشت از فضای ورودی به فضای پنهان (ویژگی‌ها) غیرخطی است و نگاشت از فضای پنهان به فضای خروجی، خطی است.

این نکته در کلاسه‌بندی کردن الگوهای پیچیده کاربرد مهمی دارد.

قضیه کاور (Cover) در مورد جداسازی الگوها:
با انتقال غیرخطی الگوها از فضای ورودی به فضایی با ابعاد بالاتر، احتمال جداشدن خطی الگوها وجود دارد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^{+} و X^{-} تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^+ و X^- تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_M(\mathbf{x})\right]^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^+ و X^- تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_M(\mathbf{x})\right]^T$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$ توابع پنهان

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^{+} و X^{-} تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) & \varphi_2(\mathbf{x}) & \cdots & \varphi_M(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$ توابع پنهان

– بردار $\underline{\varphi}(\mathbf{x})$ نقاط در فضای p–بعدی ورودی را به نقاط در فضای M–بُعدی جدید نگاشت می‌کند.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^+ و X^- تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_M(\mathbf{x})\right]^T$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$ توابع پنهان

– بردار $\underline{\varphi}(\mathbf{x})$ نقاط در فضای p–بعدی ورودی را به نقاط در فضای M–بُعدی جدید نگاشت می‌کند.

– برطبق تعریف تقسیم بندی باینری، فضای ورودی X، φ جداشونده (φ-separable) است چنانچه برداری M–بُعدی مثل $\mathbf{w}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^+ و X^- تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_M(\mathbf{x})\right]^T$$

توابع پنهان $\varphi_i(\mathbf{x})$

– بردار $\underline{\varphi}(\mathbf{x})$ نقاط در فضای p–بعدی ورودی را به نقاط در فضای M–بُعدی جدید نگاشت می‌کند.

– برطبق تعریف تقسیم بندی باینری، فضای ورودی X ، φ جداشونده (φ-separable) است چنانچه برداری M–بُعدی مثل $\mathbf{w}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\mathbf{w}^T \underline{\varphi}(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad \mathbf{x} \in X^+$$
$$\mathbf{w}^T \underline{\varphi}(\mathbf{x}) < 0 \qquad \mathbf{x} \in X^-$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– فرض کنید فضای ورودی به دو کلاس X^+ و X^- تقسیم شده باشد و هرکدام از بردارهای $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_N$ متعلق به یکی از این دو کلاس باشد.

– برای هر الگوی $\mathbf{x}$، تابع غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_M(\mathbf{x})\right]^T$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$ توابع پنهان

– بردار $\underline{\varphi}(\mathbf{x})$ نقاط در فضای p–بعدی ورودی را به نقاط در فضای M–بُعدی جدید نگاشت می‌کند.

– برطبق تعریف تقسیم بندی باینری، فضای ورودی X، φ جداشونده (φ-separable) است چنانچه برداری M–بُعدی مثل $\mathbf{w}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\mathbf{w}^T\underline{\varphi}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \mathbf{x} \in X^+$$
$$\mathbf{w}^T\underline{\varphi}(\mathbf{x}) < 0 \quad \mathbf{x} \in X^-$$

– صفحه $\mathbf{w}^T\underline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ توصیف‌کننده سطح جداکننده (مرز تصمیم‌گیری) در فضای $\underline{\varphi}$ می‌باشد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

– دو تابع پنهان گوسی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

– دو تابع پنهان گوسی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

– بااستفاده از جدول درستی، مقدار توابع پنهان به‌دست می‌آید

x_1,x_2	$\varphi_1(\mathbf{x})$	$\varphi_2(\mathbf{x})$
(0,1)	0.37	0.37
(1,0)	0.37	0.37
(0,0)	0.13	1
(1,1)	1	0.13

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

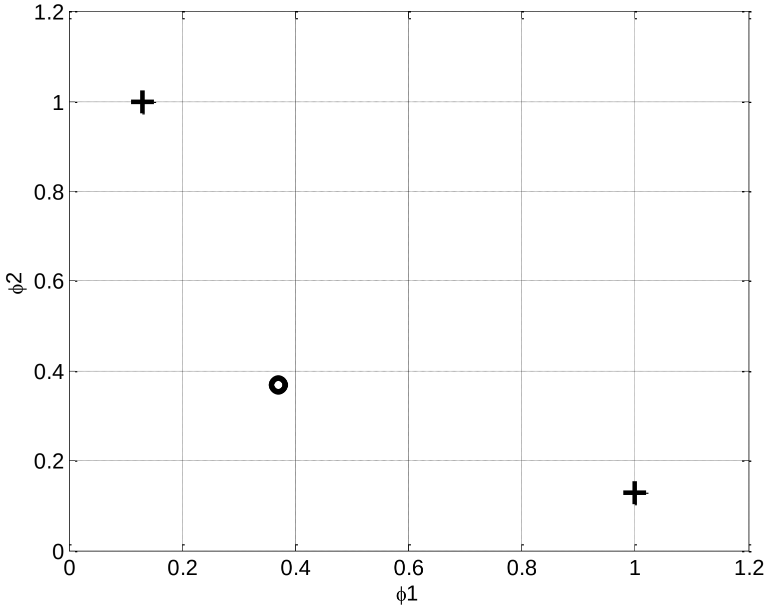
– دو تابع پنهان گوسی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

– بااستفاده از جدول درستی، مقدار توابع پنهان به‌دست می‌آید

x_1,x_2	$\varphi_1(\mathbf{x})$	$\varphi_2(\mathbf{x})$
(0,1)	0.37	0.37
(1,0)	0.37	0.37
(0,0)	0.13	1
(1,1)	1	0.13



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

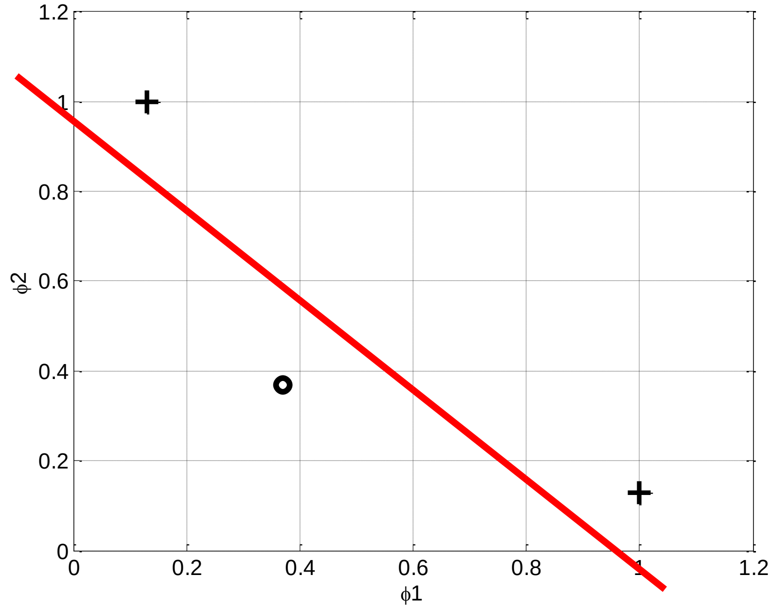
– دو تابع پنهان گوسی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

– بااستفاده از جدول درستی، مقدار توابع پنهان به‌دست می‌آید

x_1,x_2	$\varphi_1(\mathbf{x})$	$\varphi_2(\mathbf{x})$
(0,1)	0.37	0.37
(1,0)	0.37	0.37
(0,0)	0.13	1
(1,1)	1	0.13



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1,x_2	y
(0,1)	1
(1,0)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

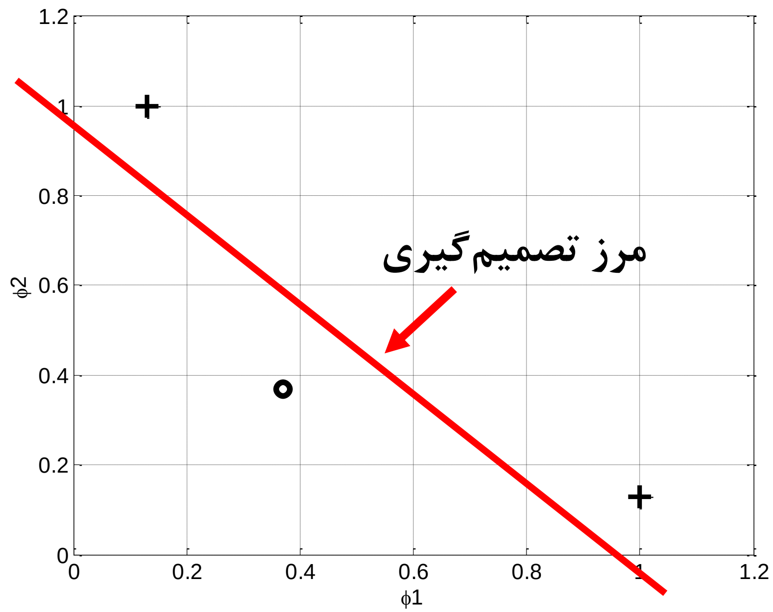
– دو تابع پنهان گوسی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

– بااستفاده از جدول درستی، مقدار توابع پنهان به‌دست می‌آید

x_1,x_2	$\varphi_1(\mathbf{x})$	$\varphi_2(\mathbf{x})$
(0,1)	0.37	0.37
(1,0)	0.37	0.37
(0,0)	0.13	1
(1,1)	1	0.13

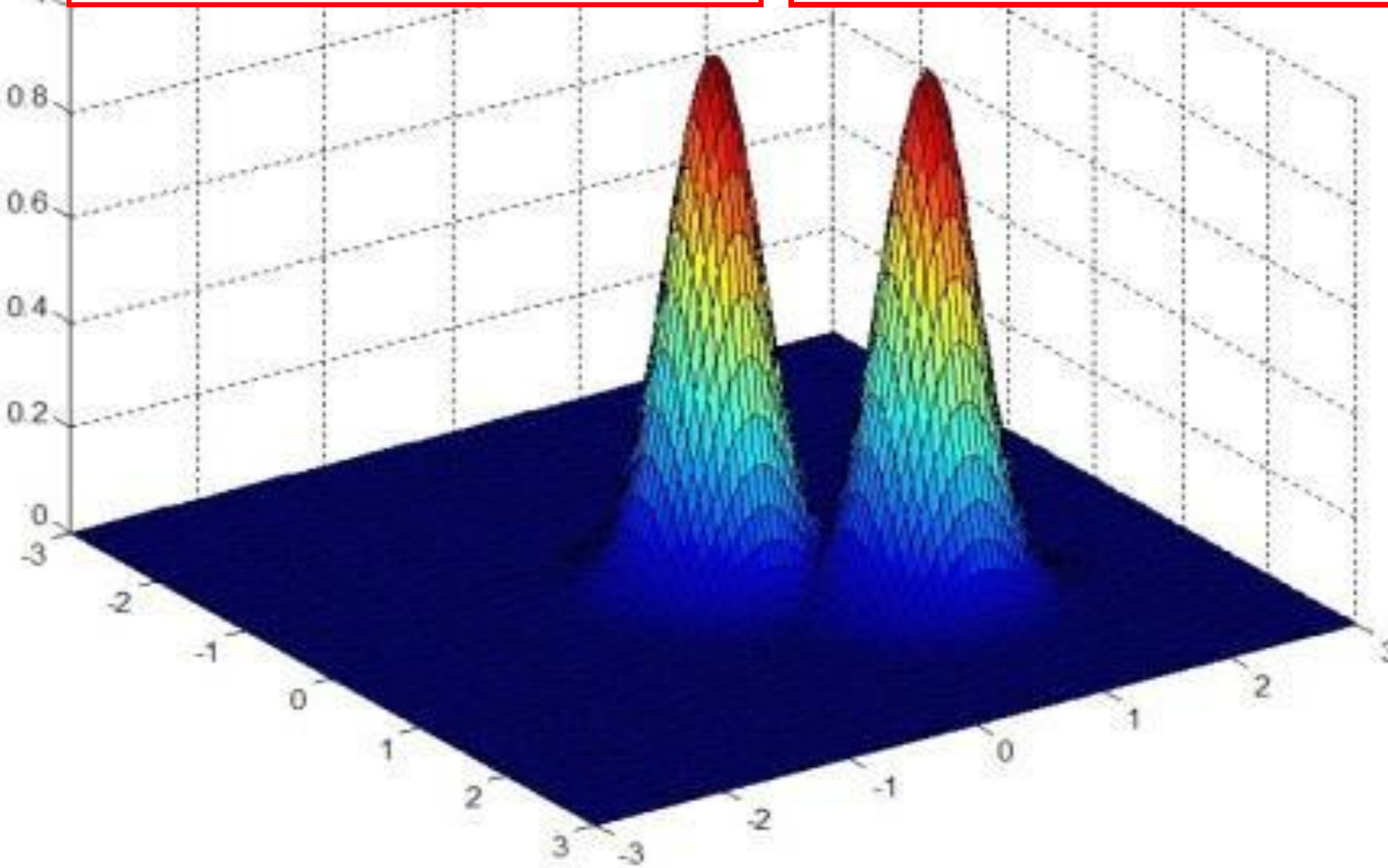


شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

توابع گوسی چندمتغیره

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_2\|^2}, \quad \mathbf{t}_2 = [0,0]^T$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_1\|^2}, \quad \mathbf{t}_1 = [1,1]^T$$



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– ایده کلی تقریب تابع توسط شبکه عصبی RBF:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– ایده کلی تقریب تابع توسط شبکه عصبی RBF:

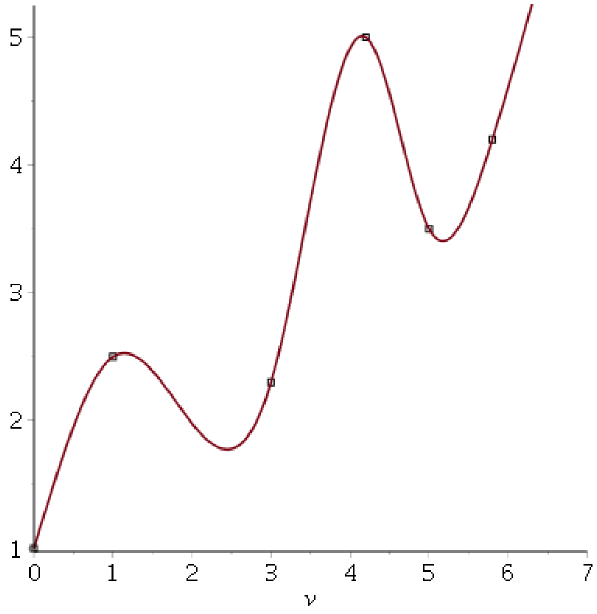
جمع محدود و ضریب‌داری از توابع گوسی

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

– ایده کلی تقریب تابع توسط شبکه عصبی RBF:

جمع محدود و ضریب‌داری از توابع گوسی

– بررسی این ایده از دیدگاهی متفاوت: مساله درونیابی نقاط داده شده



$$\mathscr{T} = \{\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n)\}_{n=1}^{N}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

- شبکه RBF را درنظربگیرید که در آن نگاشتی غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان و نگاشتی خطی از فضای پنهان به فضای خروجی صورت می‌گیرد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

- شبکه RBF را درنظربگیرید که در آن نگاشتی غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان و نگاشتی خطی از فضای پنهان به فضای خروجی صورت می‌گیرد:
- چنانچه فضای ورودی دارای ابعاد p و فضای خروجی دارای ابعاد واحد باشد، در این صورت، نگاشت:

$$S:\ \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$$

عبارت است از سطحی در فضای $(p\text{–}1)$بُعدی ($\Gamma \subset \mathbb{R}^{p-1}$)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

– شبکه RBF را درنظربگیرید که در آن نگاشتی غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان و نگاشتی خطی از فضای پنهان به فضای خروجی صورت می‌گیرد:

– چنانچه فضای ورودی دارای ابعاد p و فضای خروجی دارای ابعاد واحد باشد، در این صورت، نگاشت:

$$S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$$

عبارت است از سطحی در فضای $(p-1)$بُعدی ($\Gamma \subset \mathbb{R}^{p-1}$)

– در شبکه RBF، این سطح در دو گام تشکیل می‌شود:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

– شبکه RBF را درنظربگیرید که در آن نگاشتی غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان و نگاشتی خطی از فضای پنهان به فضای خروجی صورت می‌گیرد:

– چنانچه فضای ورودی دارای ابعاد p و فضای خروجی دارای ابعاد واحد باشد، در این صورت، نگاشت:

$$S: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$$

عبارت است از سطحی در فضای $(p-1)$بُعدی ($\Gamma \subset \mathbb{R}^{p-1}$)

– در شبکه RBF، این سطح در دو گام تشکیل می‌شود:

۱– گام آموزش: که عبارت است از برازش‌کردن سطح Γ به اطلاعات داده شده به شبکه درقالب الگوهای ورودی-خروجی

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

– شبکه RBF را درنظربگیرید که در آن نگاشتی غیرخطی از فضای ورودی به فضای پنهان و نگاشتی خطی از فضای پنهان به فضای خروجی صورت می‌گیرد:

– چنانچه فضای ورودی دارای ابعاد p و فضای خروجی دارای ابعاد واحد باشد، در این صورت، نگاشت:

$$S: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$$

عبارت است از سطحی در فضای $(p-1)$بُعدی $(\Gamma \subset \mathbb{R}^{p-1})$

– در شبکه RBF، این سطح در دو گام تشکیل می‌شود:

۱– گام آموزش: که عبارت است از برازش‌کردن سطح Γ به اطلاعات داده شده به شبکه درقالب الگوهای ورودی–خروجی

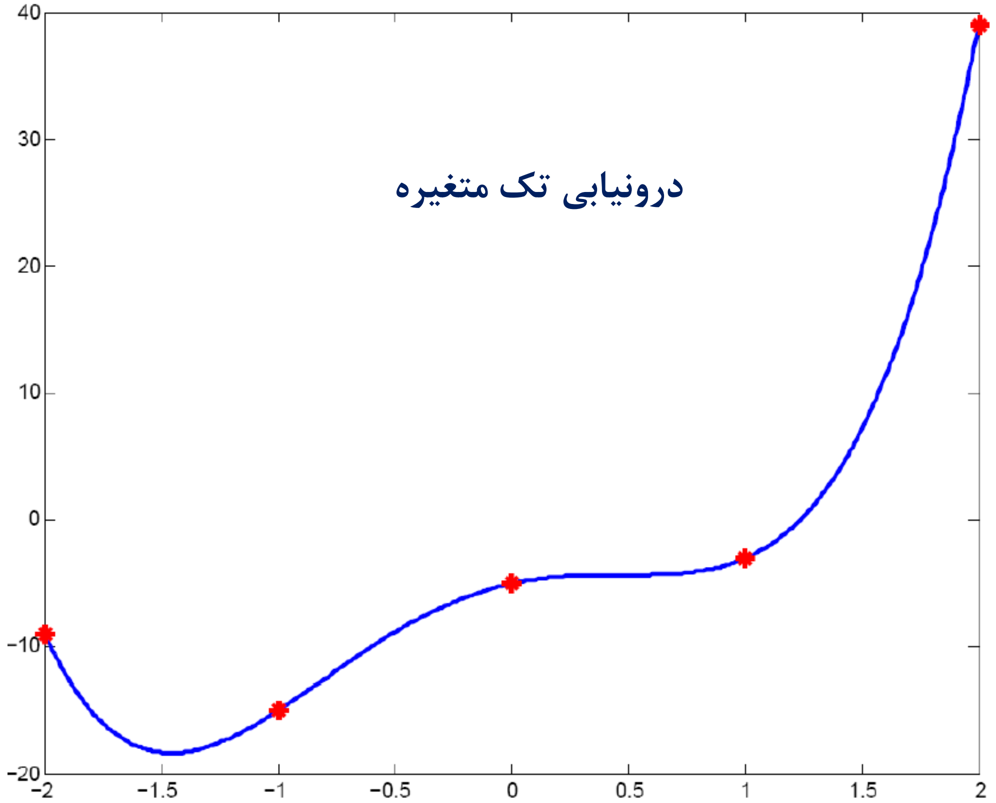
۲– گام عمومیت‌دادن: که مترادف است با عمل درونیابی بین نقاط داده شده به‌عنوان تقریب بهینه به سطح Γ

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:

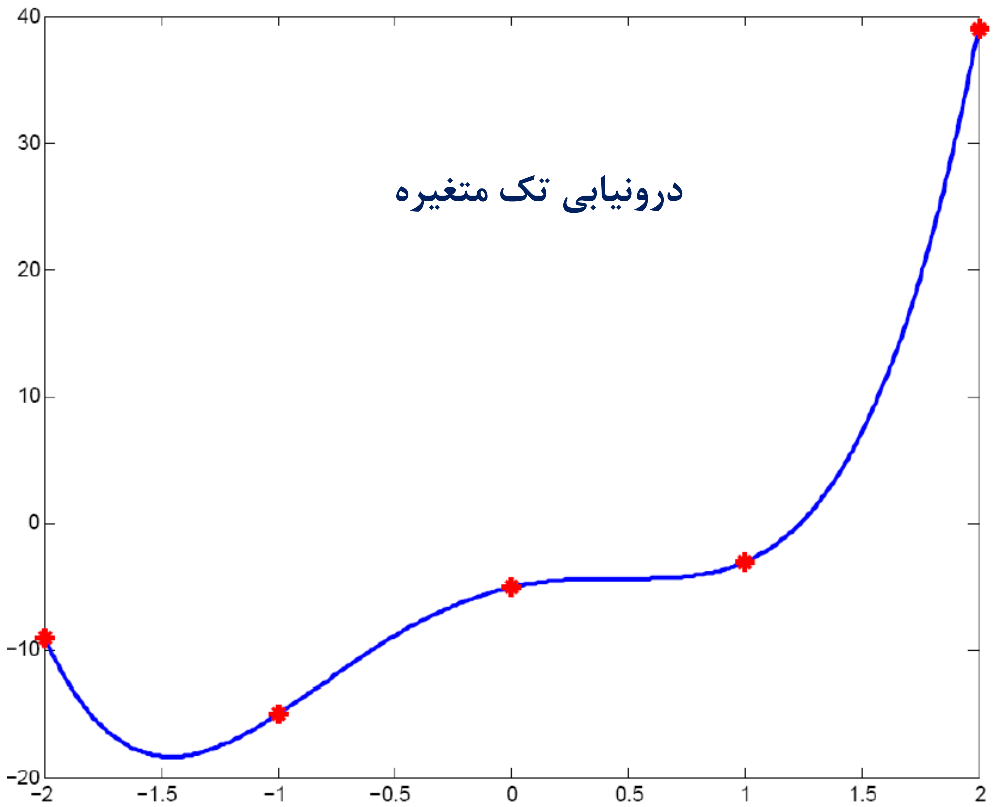
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی:



– در حالی‌که در شبکه عصبی RBF بادرونیابی چندمتغیره مواجه هستیم، که پیچیده‌تر از تک‌متغیره است.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

N نقطه متفاوت $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\dots,N\}$ و N نقطه حقیقی $\{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\dots,N\}$ مفروض است. مطلوب است یافتن تابع $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$ به‌طوری‌که شرط درونیابی زیر را برآورده‌کند:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

N نقطه متفاوت $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\dots,N\}$ و N نقطه حقیقی $\{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\dots,N\}$ مفروض است. مطلوب است یافتن تابع $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$ به‌طوری‌که شرط درونیابی زیر را برآورده‌کند:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1,\dots,N$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

N نقطه متفاوت $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\}$ و N نقطه حقیقی $\{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$ مفروض است. مطلوب است یافتن تابع $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$ به‌طوری‌که شرط درونیابی زیر را برآورده‌کند:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1,\ldots,N$$

– در مورد شبکه RBF، مساله عبارت است از یافتن تابعی به‌صورت زیر:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right\|\right)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

N نقطه متفاوت $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\}$ و N نقطه حقیقی $\{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$ مفروض است. مطلوب است یافتن تابع $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$ به‌طوری‌که شرط درونیابی زیر را برآورده‌کند:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1,\ldots,N$$

– در مورد شبکه RBF، مساله عبارت است از یافتن تابعی به‌صورت زیر:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|\right)$$

تابع پایه شعاعی

(RBF)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

N نقطه متفاوت $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\}$ و N نقطه حقیقی $\{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$ مفروض است. مطلوب است یافتن تابع $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ به‌طوری‌که شرط درونیابی زیر را برآورده‌کند:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1,\ldots,N$$

– در مورد شبکه RBF، مساله عبارت است از یافتن تابعی به‌صورت زیر:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

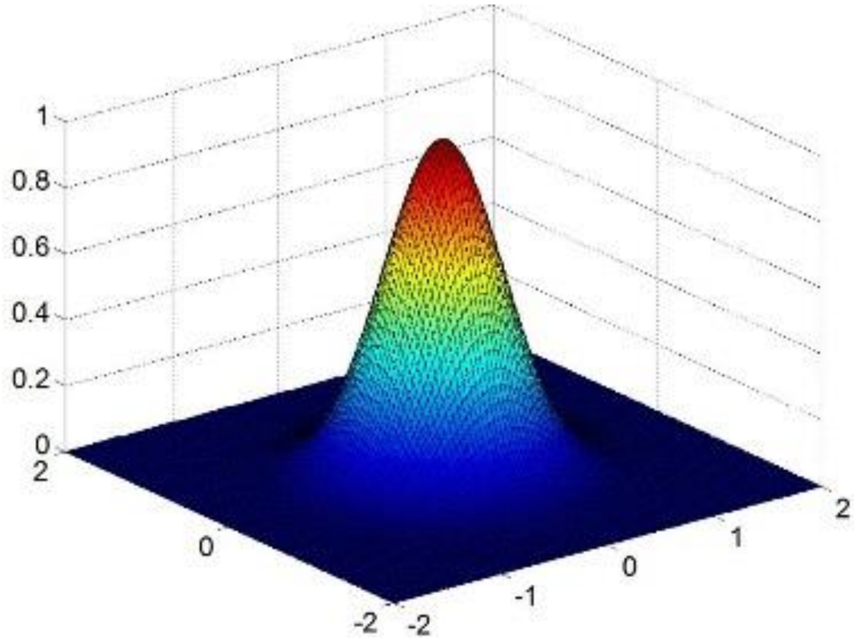
تابع پایه شعاعی (RBF)

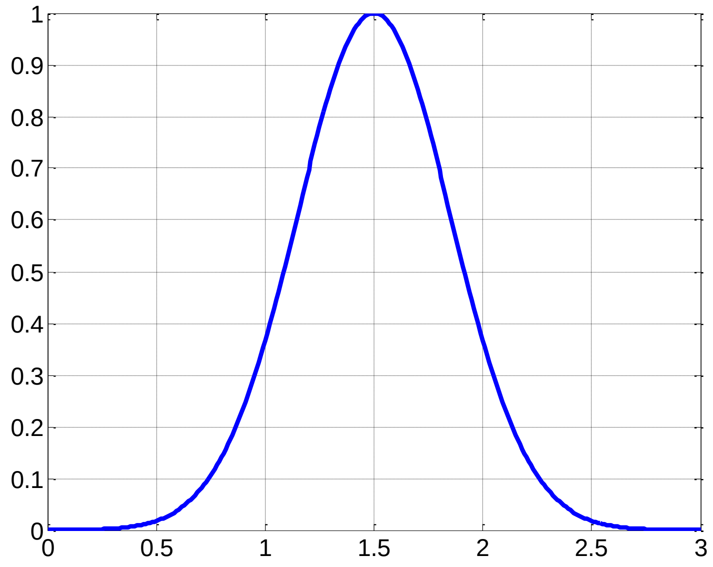
نقاط داده‌شده = مرکز تابع

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right\|\right)$$





شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

- انواع توابع RBF:

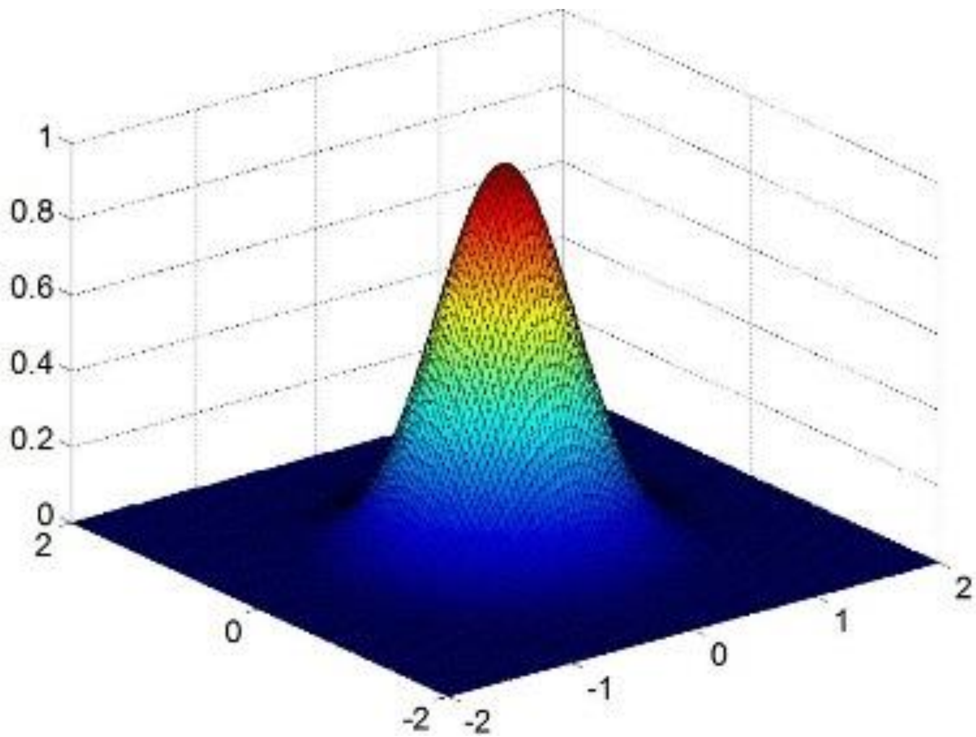
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

- انواع توابع RBF:

تابع گوسی

$$\varphi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0 \text{ and } r \in \mathbb{R}$$



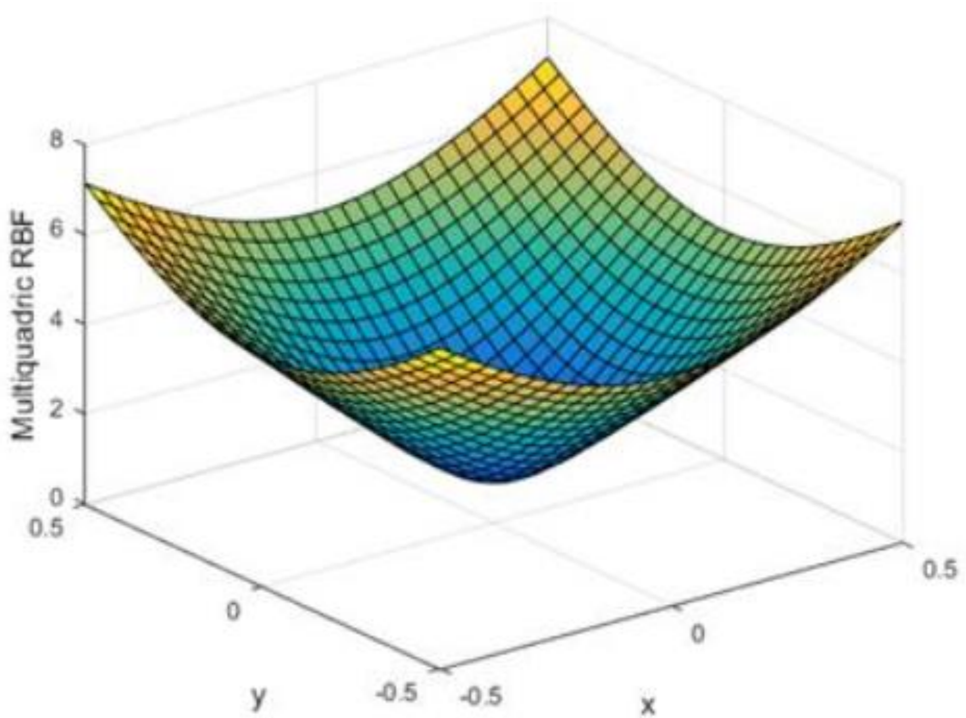
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

- انواع توابع RBF:

تابع چندمربعی
(Multiquadratic)

$$\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}, \quad c > 0 \ \text{ and } \ r \in \mathbb{R}$$



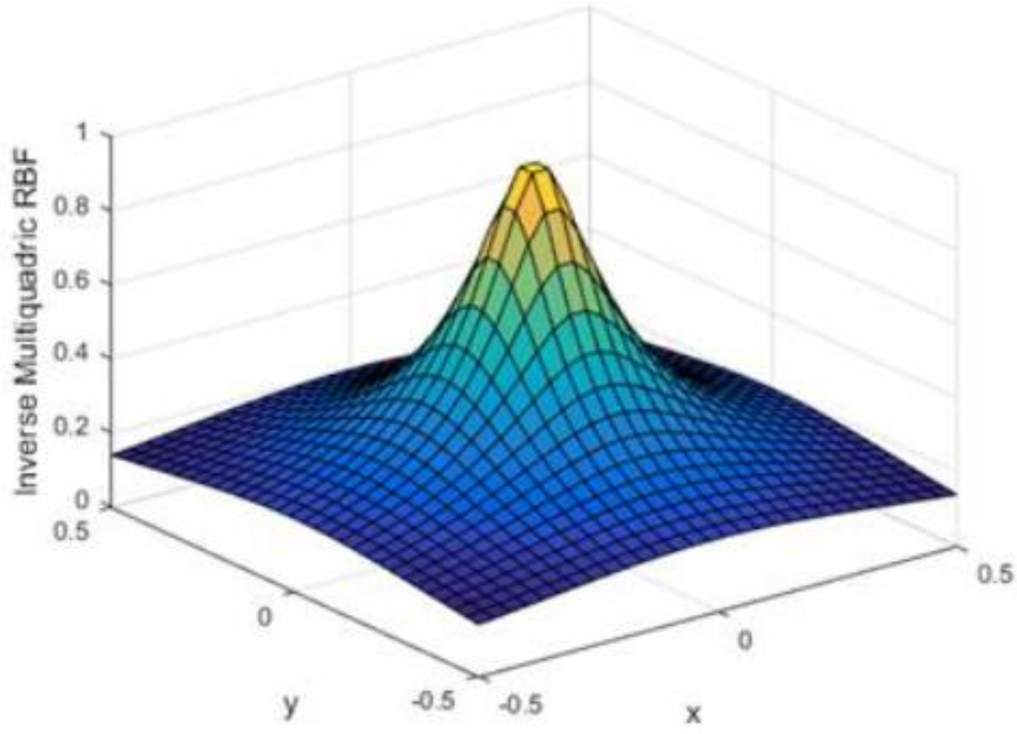
شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

- انواع توابع RBF:

تابع چندمربعی وارون
(Inverse Multiquadratic)

$$\varphi(r) = \frac{1}{(r^2 + c^2)^{1/2}}, \quad c > 0 \ \text{ and } \ r \in \mathbb{R}$$



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

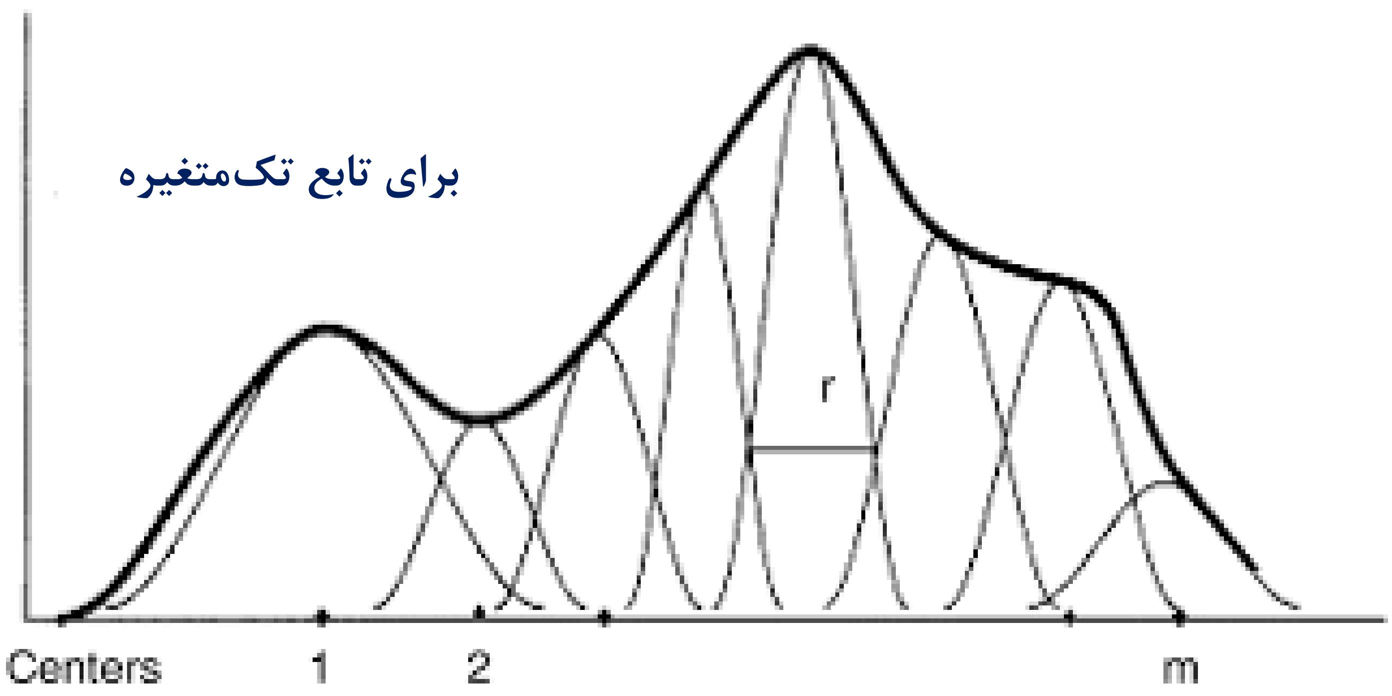
$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \right\|\right)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad\qquad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

– نکته‌ای که قبلا گفته شد: جمع محدود و ضریب‌داری از توابع RBF برای تقریب تابع:

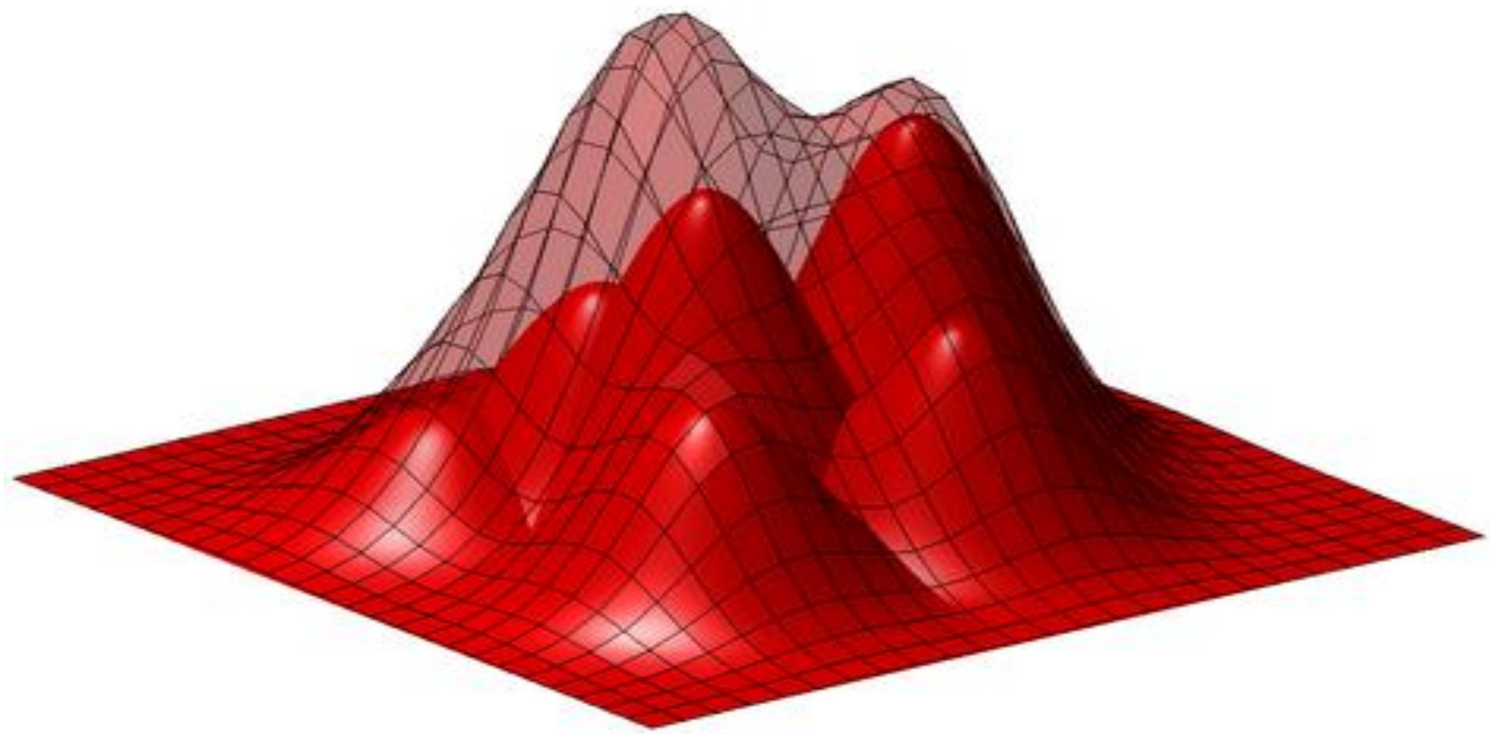


شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad\qquad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|\right)$$

– نکته‌ای که قبلا گفته شد: جمع محدود و ضریب‌داری از توابع RBF برای تقریب تابع:



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1,\ldots,N \qquad (۱)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|\right) \qquad (۲)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (۱)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|\right) \qquad (۲)$$

– برای یافتن مقدار مناسب وزن‌ها، با قراردادن شرط درونیابی (۱) در معادله (۲) برای N نقطه داده شده، N معادله خطی حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \qquad \varphi_{ji} = \varphi\left(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|\right), \quad j, i = 1, \ldots, N$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (۱)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\right\|\right) \qquad (۲)$$

– برای یافتن مقدار مناسب وزن‌ها، با قراردادن شرط درونیابی (۱) در معادله (۲) برای N نقطه داده شده، N معادله خطی حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \qquad \varphi_{ji} = \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\right\|\right), \quad j, i = 1, \ldots, N$$

به‌صورت خلاصه

$$\Phi \, \mathbf{w} = \mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

$$F(\mathbf{x}_i) = d_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (۱)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \varphi\left(\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \right\|\right) \qquad (۲)$$

– برای یافتن مقدار مناسب وزن‌ها، با قراردادن شرط درونیابی (۱) در معادله (۲) برای N نقطه داده شده، N معادله خطی حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \qquad \varphi_{ji} = \varphi\left(\left\| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \right\|\right), \quad j,i = 1, \ldots, N$$

به‌صورت خلاصه

$$\Phi \, \mathbf{w} = \mathbf{d}$$

بنابراین، جواب مساله درونیابی برابر است با

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1} \mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

مشکلات این روش؟

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

مشکلات این روش؟

۱- تکین یا نزدیک به تکین‌بودن ماتریس Φ

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

مشکلات این روش؟

۱- تکین یا نزدیک به تکین‌بودن ماتریس Φ

۲- بزرگ‌شدن ماتریس Φ برای تعداد داده بسیار زیاد

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مساله درونیابی چندمتغیره:

مشکلات این روش؟

۱- تکین یا نزدیک به تکین‌بودن ماتریس Φ

۲- بزرگ‌شدن ماتریس Φ برای تعداد داده بسیار زیاد

- برای برطرف‌کردن این مشکلات از نظریه تنظیم‌کننده (Regularization Theory) تیخونوف (Tikhonov) استفاده می‌کنیم.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

– برای مثال، فرض‌کنید داده‌های ورودی-خروجی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\} \qquad \{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

– برای مثال، فرض‌کنید داده‌های ورودی–خروجی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1, \ldots, N\} \qquad \{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1, \ldots, N\}$$

– همچنین، فرض‌کنید تابع مورد تقریب زدن با $F(\mathbf{x})$ نشان داده شود.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

– برای مثال، فرض‌کنید داده‌های ورودی–خروجی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\} \qquad \{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$$

– همچنین، فرض‌کنید تابع مورد تقریب زدن با $F(\mathbf{x})$ نشان داده شود.

– برطبق نظریه تنظیم کننده، تابع $F(\mathbf{x})$ با کمینه کردن تابع هزینه زیر که دارای دو جمله است، به‌دست می‌آید:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

– برای مثال، فرض‌کنید داده‌های ورودی-خروجی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\dots,N\} \qquad \{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\dots,N\}$$

– همچنین، فرض‌کنید تابع مورد تقریب زدن با $F(\mathbf{x})$ نشان داده شود.

– برطبق نظریه تنظیم کننده، تابع $F(\mathbf{x})$ با کمینه کردن تابع هزینه زیر که دارای دو جمله است، به‌دست می‌آید:

۱– جمله خطای استاندارد: فاصله بین پاسخ دلخواه و پاسخ واقعی

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برطبق این نظریه، جواب مساله با شرایط نامطلوب (Ill-conditioned) را می‌توان به‌کمک چند مقدار غیرمنفی پایدارکرد.

– برای مثال، فرض‌کنید داده‌های ورودی-خروجی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p \mid i = 1,\ldots,N\} \qquad \{d_i \in \mathbb{R}^1 \mid i = 1,\ldots,N\}$$

– همچنین، فرض‌کنید تابع مورد تقریب زدن با $F(\mathbf{x})$ نشان داده شود.

– برطبق نظریه تنظیم کننده، تابع $F(\mathbf{x})$ با کمینه کردن تابع هزینه زیر که دارای دو جمله است، به‌دست می‌آید:

۱- جمله خطای استاندارد: فاصله بین پاسخ دلخواه و پاسخ واقعی

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(d_i - y_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(d_i - F(\mathbf{x}_i))^2$$

۲- جمله تنظیم کننده: که به فرم F بستگی دارد

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

P اپراتور خطی مشتق‌گیر است و آن را اپراتور تنظیم‌کننده می‌نامند.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

P اپراتور خطی مشتق‌گیر است و آن را اپراتور تنظیم‌کننده می‌نامند.

بنابراین، تابع هزینه کل برابر است با

$$\begin{aligned} E(F) &= E_S(F) + \lambda E_C(F) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda\|PF\|^2 \end{aligned}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

P اپراتور خطی مشتق‌گیر است و آن را اپراتور تنظیم‌کننده می‌نامند.

بنابراین، تابع هزینه کل برابر است با

$$\begin{aligned} E(F) &= E_S(F) + \lambda E_C(F) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda\|PF\|^2 \end{aligned}$$

صورت مساله تنظیم‌کننده:

مطلوب است تعیین تابع $F(\mathbf{x})$ به طوری که تابع هزینه بالا کمینه شود.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

برای یافتن کمینه تابع هزینه از مشتق فریشه (Fréchet) استفاده می‌کنیم

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

برای یافتن کمینه تابع هزینه از مشتق فریشه (Fréchet) استفاده می‌کنیم

برای درک بهتر مشتق فریشه، ابتدا مشتق عادی را درنظربگیرید:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

برای درک بهتر مشتق فریشه، ابتدا مشتق عادی را درنظربگیرید:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

حال مقایسه‌کنید با مشتق فریشه:

$$E'(F(x))dF \triangleq dE(F(x), dF) = \lim_{\beta \to 0} \frac{E\left(F(x) + \beta h(x)\right) - E\left(F(x)\right)}{\beta}$$

$$= \left.\frac{dE\left(F(x) + \beta h(x)\right)}{d\beta}\right|_{\beta=0}$$

$h(x)$ **تابعی معین از** x

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برای یافتن کمینه تابع هزینه از مشتق فریشه (Fréchet) استفاده می‌کنیم

$$dE\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left[\frac{d}{d\beta} E\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– برای یافتن کمینه تابع هزینه از مشتق فریشه (Fréchet) استفاده می‌کنیم

$$dE\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left[\frac{d}{d\beta}E\left(F(\mathbf{x})+\beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

– در نتیجه، بااعمال مشتق فریشه (Fréchet) به تابع هزینه و برابر صفرقرارادادن، مساله تنظیم‌کننده حل خواهدشد:

$$dE\left(F,h\right)=dE_S\left(F,h\right)+\lambda dE_C\left(F,h\right)=0$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]^2\right\}_{\beta=0}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]^2\right\}_{\beta=0}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)\Big|_{\beta=0}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد
$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]^2\right\}_{\beta=0}$$
$$= -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)\Big|_{\beta=0}$$

درنتیجه

$$dE_S(F,h) = -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]^2\right\}_{\beta=0}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)\Big|_{\beta=0}$$

درنتیجه

$$dE_S(F,h) = -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)$$

- این رابطه را می‌توان به‌صورت ضرب داخلی در فضای هیلبرت نوشت.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد
$$E_S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$dE_S(F,h) = \left[\frac{d}{d\beta}E_S(F+\beta h)\right]_{\beta=0}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]^2\right\}_{\beta=0}$$
$$= -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i) - \beta h(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)\Big|_{\beta=0}$$

درنتیجه

$$dE_S(F,h) = -\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - F(\mathbf{x}_i)\right]h(\mathbf{x}_i)$$

- این رابطه را می‌توان به‌صورت ضرب داخلی در فضای هیلبرت نوشت.

🤔

– برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

– برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

– فضای ضرب داخلی H کامل نامیده می شود چنانچه هر نُرم (اندازه) در حد، داخل H قرارگیرد.

- برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

- فضای ضرب داخلی H کامل نامیده می شود چنانچه هر نُرم (اندازه) در حد، داخل H قرارگیرد.

- دراین جا، ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(h(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

– برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

– فضای ضرب داخلی H کامل نامیده می شود چنانچه هر نُرم (اندازه) در حد، داخل H قرارگیرد.

– دراین جا، ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\big(h(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\big)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

– که این ضرب داخلی برای مساله مورد نظر خواهدشد:

- برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

- فضای ضرب داخلی H کامل نامیده می شود چنانچه هر نُرم (اندازه) در حد، داخل H قرارگیرد.

- دراین جا، ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\big(h(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\big)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- که این ضرب داخلی برای مساله مورد نظر خواهدشد:

$$\Big(h(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{N} \big(d_i - F(\mathbf{x})\big) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\Big)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{N} \big(d_i - F(\mathbf{x})\big) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x}$$

- برطبق تعریف، فضای هیلبرت، فضای کامل ضرب داخلی می‌باشد.

- فضای ضرب داخلی H کامل نامیده می شود چنانچه هر نُرم (اندازه) در حد، داخل H قرارگیرد.

- دراین جا، ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(h(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

- که این ضرب داخلی برای مساله مورد نظر خواهدشد:

$$\left(h(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\, d\mathbf{x}$$

$$\left(h(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right) h(\mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۱- جمله خطای استاندارد

بنابراین، برای جمله خطای استاندارد

$$dF_S\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = -\left(h(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left[\frac{d}{d\beta}E_C\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left[\frac{d}{d\beta} E_C\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\left[P\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]^2 d\mathbf{x}\Bigg|_{\beta=0}$$

برای نُرم می‌توان از ضرب داخلی در فضای هیلبرت استفاده کرد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left[\frac{d}{d\beta} E_C\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{\mathbb{R}^N} \left[P\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]^2 d\mathbf{x}\bigg|_{\beta=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} P\left[F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right] Ph(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\bigg|_{\beta=0}$$

برای نُرم می‌توان از ضرب داخلی در فضای هیلبرت استفاده کرد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left[\frac{d}{d\beta}E_C\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\left[P\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]^2 d\mathbf{x}\Bigg|_{\beta=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} P\left[F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right] Ph(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Bigg|_{\beta=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} PF(\mathbf{x})Ph(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

برای نُرم می‌توان از ضرب داخلی در فضای هیلبرت استفاده کرد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$E_C(F) = \frac{1}{2}\|PF\|^2$$

$$\begin{aligned}
dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) &= \left[\frac{d}{d\beta} E_C\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]_{\beta=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\left[P\left(F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right)\right]^2 d\mathbf{x}\Bigg|_{\beta=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} P\left[F(\mathbf{x}) + \beta h(\mathbf{x})\right] Ph(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\Bigg|_{\beta=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} PF(\mathbf{x}) Ph(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \left(Ph(\mathbf{x}), PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}
\end{aligned}$$

برای نُرم می‌توان از ضرب داخلی در فضای هیلبرت استفاده کرد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left(Ph(\mathbf{x}), PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(Ph(\mathbf{x}),PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

این ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از اپراتور الحاقی به‌صورت زیر نوشت:

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(h(\mathbf{x}),P^{*}PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\big(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\big)=\big(Ph(\mathbf{x}),PF(\mathbf{x})\big)_{\mathrm{H}}$$

این ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از اپراتور الحاقی به‌صورت زیر نوشت:

$$dE_C\big(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\big)=\big(h(\mathbf{x}),P^{*}PF(\mathbf{x})\big)_{\mathrm{H}}$$

اپراتور الحاقی 

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کرد که خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی $P*$ (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت $P*$ ترانهاده آن ماتریس است:

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^{T}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^{T}\mathbf{z})^{T}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^{T}\mathbf{z})_{\mathrm{H}}$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^* F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{z})^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{z})_{\mathrm{H}} \implies P^* = \mathbf{A}^T$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph,F)_{\mathrm{H}} = \left(h,P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^{T}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^{T}\mathbf{z})^{T}\mathbf{x} = (\mathbf{x},\mathbf{A}^{T}\mathbf{z})_{\mathrm{H}} \;\Rightarrow\; P^{*} = \mathbf{A}^{T}$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^* F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{z})^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{z})_{\mathrm{H}} \quad \Longrightarrow \quad P^* = \mathbf{A}^T$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

$$(Pf, g)_{\mathrm{H}} = \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^* F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{z})^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{z})_{\mathrm{H}} \implies P^* = \mathbf{A}^T$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

$$(Pf, g)_{\mathrm{H}} = \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$= f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph,F)_{\mathrm{H}} = \left(h,P^{*}F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^{T}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^{T}\mathbf{z})^{T}\mathbf{x} = (\mathbf{x},\mathbf{A}^{T}\mathbf{z})_{\mathrm{H}} \implies P^{*} = \mathbf{A}^{T}$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

$$\begin{aligned}(Pf,g)_{\mathrm{H}} &= \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= \cancel{f(x)g(x)\Big|_a^b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= -\int_a^b f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^* F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^T(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{z})^T\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{z})_{\mathrm{H}} \quad \Longrightarrow \quad P^* = \mathbf{A}^T$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

$$\begin{aligned}(Pf, g)_{\mathrm{H}} &= \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= \cancel{f(x)g(x)\Big|_a^b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= -\int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= (f, P^*g)_{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

- برای اپراتور P می‌توان اپراتور الحاقی P^* (adjoint operator) تعریف کردکه خاصیت زیر را دارد:

$$(Ph, F)_{\mathrm{H}} = \left(h, P^* F\right)_{\mathrm{H}}$$

مثال ۱: چنانچه اپراتور P ماتریس باشد، دراین صورت P^* ترانهاده آن ماتریس است:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{z})_{\mathrm{H}} = \mathbf{z}^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{z})^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{z})_{\mathrm{H}} \quad \Longrightarrow \quad P^* = \mathbf{A}^T$$

مثال ۲: چنانچه اپراتور P مشتق گیر باشد، دراین صورت $P^* = -P$:

$$\begin{aligned}
(Pf, g)_{\mathrm{H}} &= \int_a^b f'(x) g(x) dx \\
&= \cancel{f(x) g(x)\Big|_a^b} - \int_a^b f(x) g'(x) dx \\
&= -\int_a^b f(x) g'(x) dx \\
&= (f, P^* g)_{\mathrm{H}} \qquad \Longrightarrow \qquad P^* = -P
\end{aligned}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(Ph(\mathbf{x}),PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

این ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از اپراتور الحاقی به‌صورت زیر نوشت:

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(h(\mathbf{x}),P^*PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left(Ph(\mathbf{x}), PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

این ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از اپراتور الحاقی به‌صورت زیر نوشت:

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\right) = \left(h(\mathbf{x}), P^* PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

- بنابراین، کل تابع هزینه خواهدشد

$$dE\left(F, h\right) = dE_S\left(F, h\right) + \lambda dE_C\left(F, h\right) = 0$$

$$-\left(h(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}} + \lambda\left(h(\mathbf{x}), P^* PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}} = 0$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

۲- جمله تنظیم‌کننده

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(Ph(\mathbf{x}),PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

این ضرب داخلی را می‌توان با استفاده از اپراتور الحاقی به‌صورت زیر نوشت:

$$dE_C\left(F(\mathbf{x}),h(\mathbf{x})\right)=\left(h(\mathbf{x}),P^*PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}$$

- بنابراین، کل تابع هزینه خواهدشد

$$dE\left(F,h\right)=dE_S\left(F,h\right)+\lambda dE_C\left(F,h\right)=0$$

$$-\left(h(\mathbf{x}),\sum_{i=1}^{N}(d_i-F(\mathbf{x}))\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}}+\lambda\left(h(\mathbf{x}),P^*PF(\mathbf{x})\right)_{\mathrm{H}}=0$$

- با ترکیب دو ضرب داخلی، نتیجه می‌شود

$$2\left(h(\mathbf{x}),\lambda P^*PF(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{N}(d_i-F(\mathbf{x}))\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}}=0$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\left(h(\mathbf{x}), \lambda P^{*}PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}} = 0$$

– این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\left(h(\mathbf{x}),\lambda P^{*}PF(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{N}\left(d_{i}-F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{i})\right)_{\mathrm{H}}=0$$

- این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟
- جمله دوم باید صفر شود

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\left(h(\mathbf{x}), \lambda P^{*}PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\left(d_{i} - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i})\right)_{\mathrm{H}} = 0$$

- این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟
- جمله دوم باید صفر شود

$$\lambda P^{*}PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\left(d_{i} - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i}) = 0$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\left(h(\mathbf{x}), \lambda P^{*}PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}} = 0$$

- این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟
- جمله دوم باید صفر شود

$$\lambda P^{*}PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$$

$$P^{*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\Big(h(\mathbf{x}), \lambda P^* PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\Big)_{\mathrm{H}} = 0$$

- این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟
- جمله دوم باید صفر شود

$$\lambda P^* PF(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = 0$$

$$P^* PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$$

معادله اویلر-لاگرانژ برای تابع هزینه $E(F)$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$2\left(h(\mathbf{x}),\lambda P^{*}PF(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{N}\big(d_i-F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\right)_{\mathrm{H}}=0$$

- این ضرب داخلی تحت چه شرایطی صفر می‌شود؟
- جمله دوم باید صفر شود

$$\lambda P^{*}PF(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{N}\big(d_i-F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)=0$$

$$P^{*}PF(\mathbf{x})=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i-F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$$

P^*P اپراتور خودالحاقی مشتق‌گیر
(Self-adjoint differential operator)

معادله اویلر-لاگرانژ برای تابع هزینه $E(F)$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$P^{*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$P^{*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

– برای حل این معادله دیفرانسیل از تابع گرین (Green) استفاده می‌کنیم.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$P^*PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

– برای حل این معادله دیفرانسیل از تابع گرین (Green) استفاده می‌کنیم.

– تعریف تابع گرین

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$P^{*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

– برای حل این معادله دیفرانسیل از تابع گرین (Green) استفاده می‌کنیم.

– تعریف تابع گرین

تابع گرین تابعی است که چنانچه اپراتور خودالحاقی مشتق گیر به آن اعمال شود،
نتیجه تابع دیراک دلتا شود

$$P^{*}PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0 & \text{if} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \end{cases}$$

$\mathbf{x}_i$ مرکز تابع گرین

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

– بنابراین

$$P^*PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x})\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

– بنابراین

$$\left.\begin{aligned} P^*PF(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \\ P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \end{aligned}\right\}$$

$$P^*PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

– بنابراین

$$\left.\begin{aligned} P^*PF(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \\ P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{P^*P}F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)\cancel{P^*P}G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

– بنابراین

$$\left.\begin{aligned} P^*PF(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \\ P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{P^*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)\cancel{P^*}PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

– جواب قضیه تنظیم‌کننده برای مساله درونیابی:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

– می‌توان نشان داد که توابع کرنل RBF از نوع گرین هستند.

– بنابراین

$$\left.\begin{aligned} P^*PF(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x})\big)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \\ P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i) &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \end{aligned}\right\}$$

$$\cancel{P^*}PF(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)\cancel{P^*}PG(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

– جواب قضیه تنظیم‌کننده برای مساله درونیابی:

تابع $F(\mathbf{x})$ با جمع آثار N تابع گرین با ضریب $\frac{1}{\lambda}(d_i - F(\mathbf{x}_i))$ به‌دست می‌آید.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

- در مورد استفاده از شبکه RBF برای یافتن تابع $F(\mathbf{x})$

(یعنی تابعی برای درونیابی N نقطه داده شده $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . . ،. $\mathbf{x}_N$)

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

- در مورد استفاده از شبکه RBF برای یافتن تابع $F(\mathbf{x})$

(یعنی تابعی برای درونیابی N نقطه داده شده $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . . ، $\mathbf{x}_N$)

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x},\mathbf{x}_i) \quad w_i = \frac{1}{\lambda}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

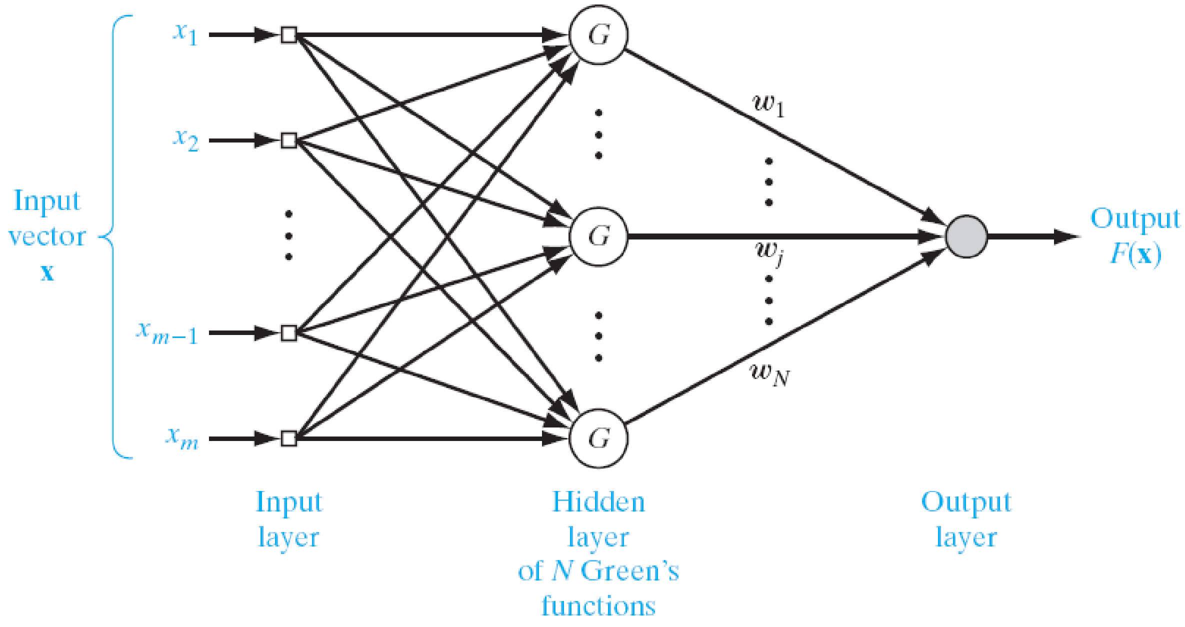
نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)G(\mathbf{x};\mathbf{x}_i)$$

- در مورد استفاده از شبکه RBF برای یافتن تابع $F(\mathbf{x})$

(یعنی تابعی برای درونیابی N نقطه داده شده $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . . ،$\mathbf{x}_N$)

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x},\mathbf{x}_i) \quad w_i = \frac{1}{\lambda}\big(d_i - F(\mathbf{x}_i)\big)$$



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}_i) \qquad j = 1, \ldots, N$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}_i) \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j;\mathbf{x}_i) \qquad j = 1,\ldots,N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j;\mathbf{x}_i) \qquad j = 1,\ldots,N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1;x_1) & \ldots & G(x_1;x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N;x_1) & \ldots & G(x_N;x_N) \end{bmatrix}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}_i) \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1; x_1) & \ldots & G(x_1; x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N; x_1) & \ldots & G(x_N; x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}_i) \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1; x_1) & \ldots & G(x_1; x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N; x_1) & \ldots & G(x_N; x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}^T$$

$$w_i = \frac{1}{\lambda}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_i) \qquad j = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1 ; x_1) & \dots & G(x_1 ; x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N ; x_1) & \dots & G(x_N ; x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}^T$$

$$w_i = \frac{1}{\lambda}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right) \Rightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{F})$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j;\mathbf{x}_i) \qquad j = 1,\ldots,N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1;x_1) & \ldots & G(x_1;x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N;x_1) & \ldots & G(x_N;x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}^T$$

$$w_i = \frac{1}{\lambda}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right) \Longrightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{F})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{w}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای یافتن وزن‌ها، از N نقطه داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$F(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(\mathbf{x}_j;\mathbf{x}_i) \qquad j = 1,\dots,N$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(\mathbf{x}_1) & \cdots & F(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1;x_1) & \dots & G(x_1;x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N;x_1) & \dots & G(x_N;x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}^T$$

$$w_i = \frac{1}{\lambda}\left(d_i - F(\mathbf{x}_i)\right) \Longrightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{F})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{w} \Longrightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w})$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w})$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{d}$$

- مقایسه با رابطه قبلی:

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1}\mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{d}$$

- مقایسه با رابطه قبلی:

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1}\mathbf{d}$$

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف، با اضافه‌کردن مقادیری مثبت ($\lambda > 0$) به درایه‌های قطری ماتریس G، جواب مساله ناپایدار را پایدار کرد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{d}$$

- مقایسه با رابطه قبلی:

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1}\mathbf{d}$$

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف، با اضافه‌کردن مقادیری مثبت ($\lambda > 0$) به درایه‌های قطری ماتریس G، جواب مساله ناپایدار را پایدار کرد.

- عیب این روش:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1}\mathbf{d}$$

- مقایسه با رابطه قبلی:

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1}\mathbf{d}$$

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف، با اضافه‌کردن مقادیری مثبت ($\lambda > 0$) به درایه‌های قطری ماتریس $\mathbf{G}$، جواب مساله ناپایدار را پایدار کرد.

- عیب این روش: چنانچه تعداد نمونه‌های ورودی (N) خیلی زیاد باشد، نیاز به وارون‌کردن ماتریس $N \times N$ خواهد بود.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای برطرف‌کردن این عیب، باید مصالحه‌ای در دقت تقریب انجام‌داد. یعنی به جای N سلول در لایه پنهان از $M < N$ سلول استفاده کرد.

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای برطرف‌کردن این عیب، باید مصالحه‌ای در دقت تقریب انجام‌داد. یعنی به جای N سلول در لایه پنهان از $M < N$ سلول استفاده کرد.

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)$$

– حال مشکل این است که چگونه مرکز توابع گرین $(\mathbf{t}_i)$ را به دست آورد.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای برطرف‌کردن این عیب، باید مصالحه‌ای در دقت تقریب انجام‌داد. یعنی به جای N سلول در لایه پنهان از $M < N$ سلول استفاده کرد.

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)$$

– حال مشکل این است که چگونه مرکز توابع گرین $(\mathbf{t}_i)$ را به دست آورد.

– زیرا در حالت $M = N$، $\mathbf{t}_i = ?$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای برطرف‌کردن این عیب، باید مصالحه‌ای در دقت تقریب انجام‌داد. یعنی به جای N سلول در لایه پنهان از $M < N$ سلول استفاده کرد.

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)$$

- حال مشکل این است که چگونه مرکز توابع گرین $(\mathbf{t}_i)$ را به دست آورد.

- زیرا در حالت $M = N$، $\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- برای برطرف‌کردن این عیب، باید مصالحه‌ای در دقت تقریب انجام‌داد. یعنی به جای N سلول در لایه پنهان از $M < N$ سلول استفاده کرد.

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)$$

– حال مشکل این است که چگونه مرکز توابع گرین $(\mathbf{t}_i)$ را به دست آورد.

– زیرا در حالت $M=N$، $\quad \mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i$

– به این مساله بعدا خواهیم پرداخت.

– فعلا ببینیم وزن‌ها چگونه به‌دست می‌آیند. زیرا ماتریس G دیگر مربعی نیست.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- دوباره از تابع هزینه شروع می‌کنیم:

$$E(F)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i-\sum_{j=1}^{M}w_jG(\mathbf{x}_i;\mathbf{t}_j)\right)^2+\frac{1}{2}\lambda\|P\hat{F}\|^2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- دوباره از تابع هزینه شروع می‌کنیم:

$$E(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(\underbrace{d_i - \sum_{j=1}^{M} w_j G(\mathbf{x}_i;\mathbf{t}_j)}_{\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\lambda\|P\hat{F}\|^2$$

- جمله خطای استاندارد:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- دوباره از تابع هزینه شروع می‌کنیم:

$$E(F)=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(d_i-\sum_{j=1}^{M}w_jG(\mathbf{x}_i;\mathbf{t}_j)\right)^2}_{\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2}+\frac{1}{2}\lambda\|P\hat{F}\|^2$$

- جمله خطای استاندارد:

$$\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2$$

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- دوباره از تابع هزینه شروع می‌کنیم:

$$E(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(d_i - \sum_{j=1}^{M} w_j G(\mathbf{x}_i;\mathbf{t}_j)\right)^2}_{\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2} + \frac{1}{2}\lambda\|P\hat{F}\|^2$$

- جمله خطای استاندارد:

$$\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1;t_1) & \ldots & G(x_1;t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N;t_1) & \ldots & G(x_N;t_M) \end{bmatrix}_{N\times M}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- دوباره از تابع هزینه شروع می‌کنیم:

$$E(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(d_i - \sum_{j=1}^{M} w_j G(\mathbf{x}_i;\mathbf{t}_j)\right)^2}_{\|\mathbf{d}-\mathbf{G}\mathbf{w}\|^2} + \frac{1}{2}\lambda\|P\hat{F}\|^2$$

- جمله خطای استاندارد:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_1;t_1) & \ldots & G(x_1;t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(x_N;t_1) & \ldots & G(x_N;t_M) \end{bmatrix}_{N\times M}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_M \end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(P\hat{F}, P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}} = \left(\hat{F}, P^{*}P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(P\hat{F}, P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}} = \left(\hat{F}, P^*P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}}$$

- با استفاده از معادله خروجی شبکه در این رابطه:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i), P^*P\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(P\hat{F}, P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}} = \left(\hat{F}, P^* P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}}$$

- با استفاده از معادله خروجی شبکه در این رابطه:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i), P^* P \sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i), \sum_{i=1}^{M} w_i P^* P G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(P\hat{F}, P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}} = \left(\hat{F}, P^*P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}}$$

- با استفاده از معادله خروجی شبکه در این رابطه:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i), P^*P\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i), \sum_{i=1}^{M} w_i P^*PG(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i), \sum_{i=1}^{M} w_i \delta(\mathbf{x}; \mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(P\hat{F}, P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}} = \left(\hat{F}, P^*P\hat{F}\right)_{\mathrm{H}}$$

- با استفاده از معادله خروجی شبکه در این رابطه:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i), P^*P\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i), \sum_{i=1}^{M} w_i P^*PG(\mathbf{x};\mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} w_i G(\mathbf{x};\mathbf{t}_i), \sum_{i=1}^{M} w_i \delta(\mathbf{x};\mathbf{t}_i)\right)_{\mathrm{H}}$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} G(t_1;t_1) & \dots & G(t_1;t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(t_M;t_1) & \dots & G(t_M;t_M) \end{bmatrix}_{M\times M}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{G}_0\mathbf{w}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} G(t_1;t_1) & \dots & G(t_1;t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(t_M;t_1) & \dots & G(t_M;t_M) \end{bmatrix}_{M\times M}$$

- در نتیجه، تابع هزینه به‌شکل زیر در می‌آید:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{w}^T\mathbf{G}_0\mathbf{w}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

- جمله تنظیم‌کننده:

$$\|P\hat{F}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} w_i w_j G(\mathbf{t}_j;\mathbf{t}_i)$$

$$\|P\hat{F}\|^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{G}_0\mathbf{w}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} G(t_1;t_1) & \dots & G(t_1;t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G(t_M;t_1) & \dots & G(t_M;t_M) \end{bmatrix}_{M\times M}$$

- در نتیجه، تابع هزینه به‌شکل زیر در می‌آید:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{w}^T\mathbf{G}_0\mathbf{w}$$

- توجه کنید که این بار تابع هزینه را برحسب بردار وزن نوشتیم.
اگرچه می‌توانستیم برحسب F نیز بنویسیم.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

- با به‌کاربردن مشتق فریشه برروی این تابع هزینه:

$$dE(\mathbf{w}, \mathbf{h}) = dE_S(\mathbf{w}, \mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2} dE_C(\mathbf{w}, \mathbf{h})$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

- با به‌کاربردن مشتق فریشه برروی این تابع هزینه:

$$\begin{aligned} dE(\mathbf{w},\mathbf{h}) &= dE_S(\mathbf{w},\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2} dE_C(\mathbf{w},\mathbf{h}) \\ &= -\mathbf{h}^T \mathbf{G}^T(\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{h}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

- با به‌کاربردن مشتق فریشه برروی این تابع هزینه:

$$\begin{aligned} dE(\mathbf{w},\mathbf{h}) &= dE_S(\mathbf{w},\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2} dE_C(\mathbf{w},\mathbf{h}) \\ &= -\mathbf{h}^T \mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{h}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

$$-\mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

- با به‌کاربردن مشتق فریشه برروی این تابع هزینه:

$$\begin{aligned} dE(\mathbf{w},\mathbf{h}) &= dE_S(\mathbf{w},\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2} dE_C(\mathbf{w},\mathbf{h}) \\ &= -\mathbf{h}^T \mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{h}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

$$-\mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0$$

$$\left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{G}_0\right)\mathbf{w} = \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \mathbf{w}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w}$$

- با به‌کاربردن مشتق فریشه برروی این تابع هزینه:

$$\begin{aligned} dE(\mathbf{w},\mathbf{h}) &= dE_S(\mathbf{w},\mathbf{h}) + \frac{\lambda}{2} dE_C(\mathbf{w},\mathbf{h}) \\ &= -\mathbf{h}^T \mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{h}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

$$-\mathbf{G}^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{G}_0 \mathbf{w} = 0$$

$$\left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{G}_0\right)\mathbf{w} = \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

- بنابراین، معادله یافتن بردار وزن‌ها

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{G}_0\right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{G}_0\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{G}_0\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

- با فرض $\lambda = 0$ ، یعنی نیاز به تنظیم‌کنندگی نباشد

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

نظریه تنظیم‌کننده تیخونوف:

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{G}_0\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

- با فرض $\lambda = 0$ ، یعنی نیاز به تنظیم‌کنندگی نباشد

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

- این معادله، در واقع جواب مساله کمترین مربعات (Least Square) است.

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

- تابع گرین به‌صورت زیر درنظرگرفته شده:

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{t}_i)=e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\|^2}$$

$$\mathbf{t}_1=[0,1]^T,\ \mathbf{t}_2=[1,0]^T$$

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

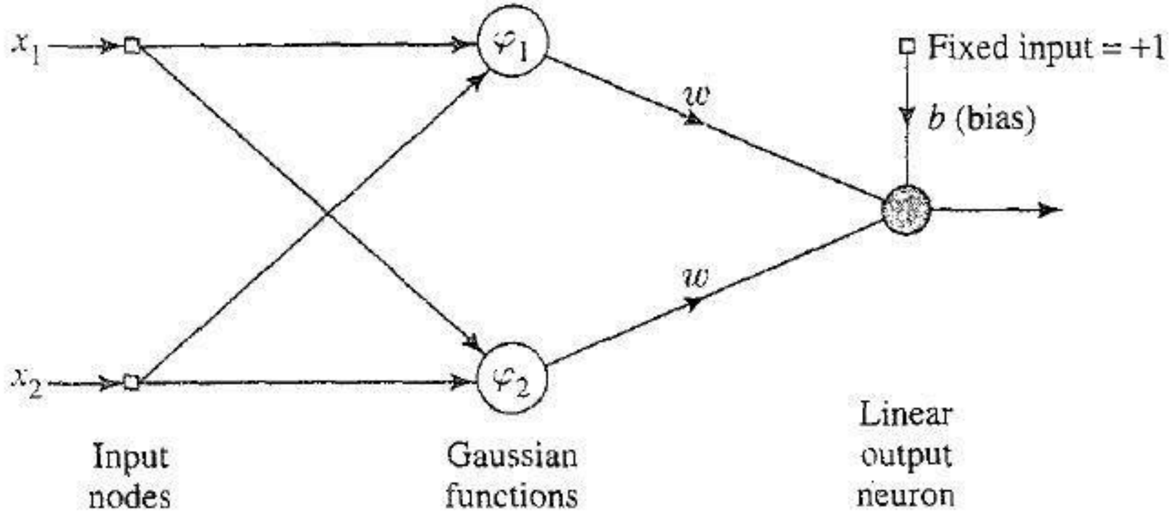
مثال: مساله XOR:

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

– تابع گرین به‌صورت زیر درنظرگرفته شده:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{t}_i) = e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\|^2}$$

$$\mathbf{t}_1 = [0,1]^T, \ \mathbf{t}_2 = [1,0]^T$$



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

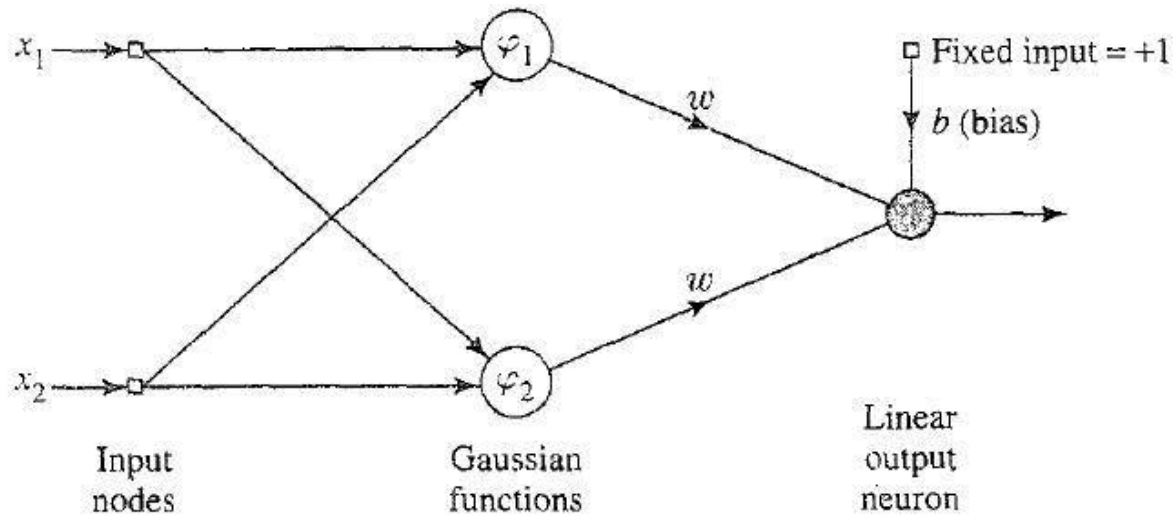
مثال: مساله XOR:

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

– تابع گرین به‌صورت زیر درنظرگرفته شده:

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{t}_i)=e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{t}_i\|^2}$$

$$\mathbf{t}_1=[0,1]^T,\ \mathbf{t}_2=[1,0]^T$$



– وزن‌های مورد نظر

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & b\end{bmatrix}^T$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

– ابعاد ماتریس G؟

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

– ابعاد ماتریس G؟

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & 1 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \\ g_{41} & g_{42} & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{ji} = G(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\|),$$
$$j = 1,2,3,4, \quad i = 1,2$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

– ابعاد ماتریس G؟

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & 1 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \\ g_{41} & g_{42} & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{ji} = G(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\|),$$
$$j = 1,2,3,4, \quad i = 1,2$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0.14 & 1 \\ 0.37 & 0.37 & 1 \\ 0.14 & 1 & 1 \\ 0.37 & 0.37 & 1 \end{bmatrix}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

– ابعاد ماتریس G؟

x_1 , x_2	y
(0,1)	1
(1,1)	0
(1,0)	1
(0,0)	0

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & 1 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \\ g_{41} & g_{42} & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{ji} = G(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{t}_i\|),$$
$$j = 1,2,3,4, \quad i = 1,2$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0.14 & 1 \\ 0.37 & 0.37 & 1 \\ 0.14 & 1 & 1 \\ 0.37 & 0.37 & 1 \end{bmatrix}$$

- برای $\lambda = 0$

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d} = \mathbf{G}^+\mathbf{d}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

$$\mathbf{G}^+ = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

$$\mathbf{G}^+ = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^+\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.29 \\ 2.29 \\ -1.7 \end{bmatrix}$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

$$\mathbf{G}^{+} = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^{+}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.29 \\ 2.29 \\ -1.7 \end{bmatrix}$$

– خروجی واقعی شبکه

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) + b$$

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله XOR:

$$\mathbf{G}^{+} = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^{+}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.66 & -1.16 & 0.63 & -1.16 \\ 0.63 & -1.16 & 1.66 & -1.16 \\ -0.85 & 1.30 & -0.85 & 1.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.29 \\ 2.29 \\ -1.7 \end{bmatrix}$$

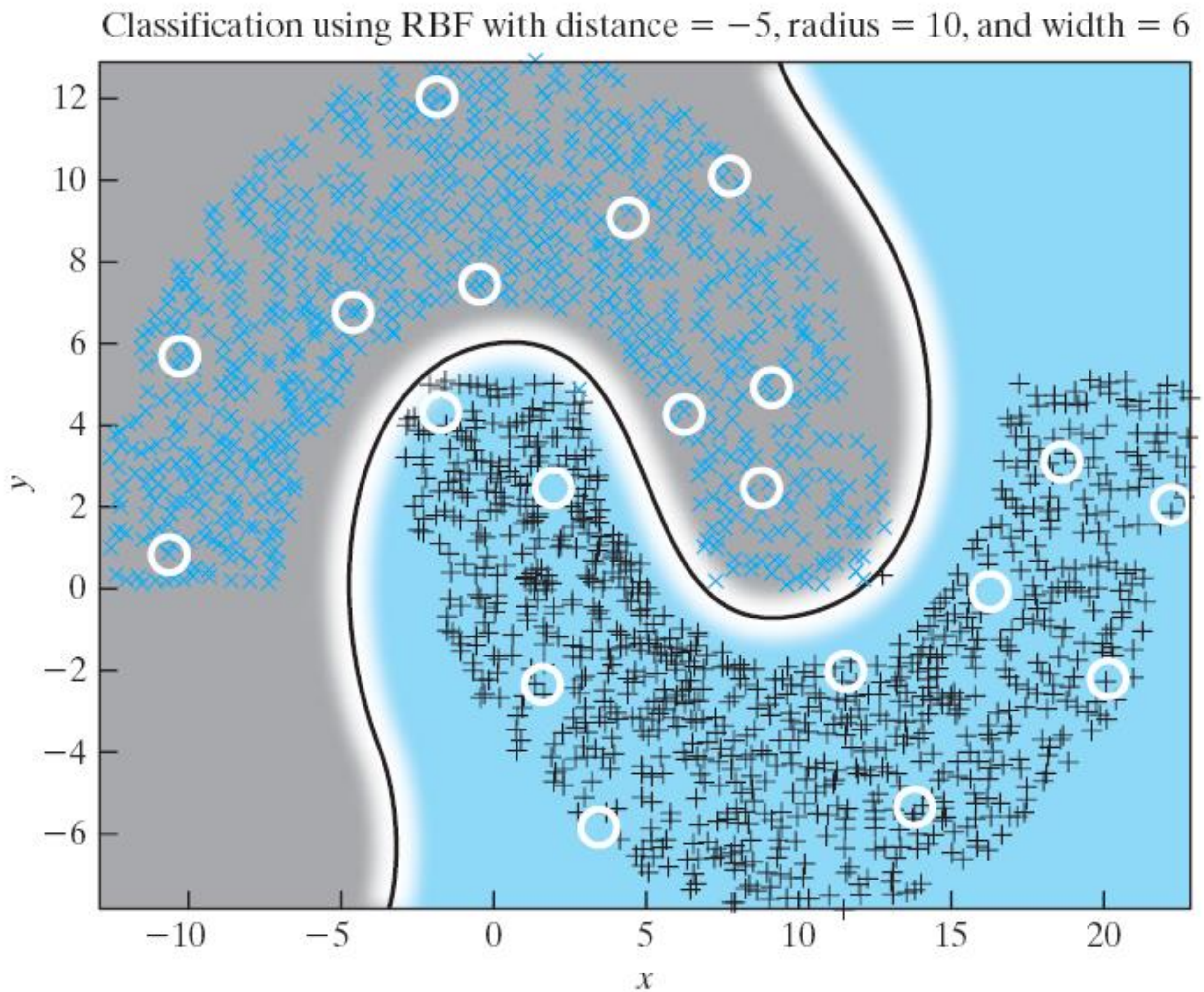
– خروجی واقعی شبکه

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) + b$$

x_1,x_2	d	y
(0,1)	1	0.9
(1,1)	0	-0.01
(1,0)	1	0.9
(0,0)	0	-0.01

شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله کلاسه‌بندی الگوهای ماه‌شکل



شبکه با تابع پایه شعاعی (RBF Net)

مثال: مساله کلاسه‌بندی الگوهای ماه‌شکل