شبکه‌های عصبی مصنوعی

جلسه چهارم:

الگوریتم کمترین میانگین مربعات
(The Least-Mean-Square Algorithm)

محمد فرخی (farrokhi AT iust.ac.ir)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

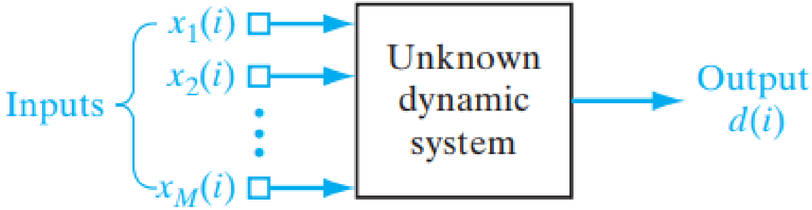
- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی

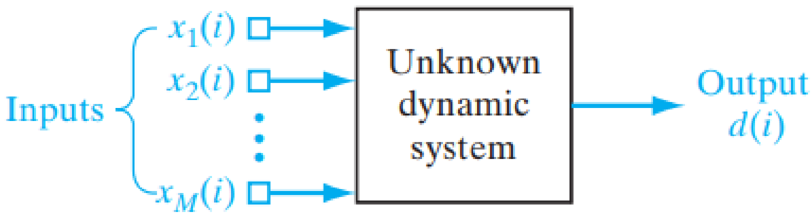
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

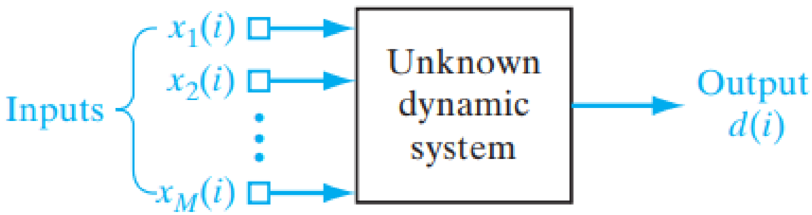
- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \ldots, n, \ldots$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی

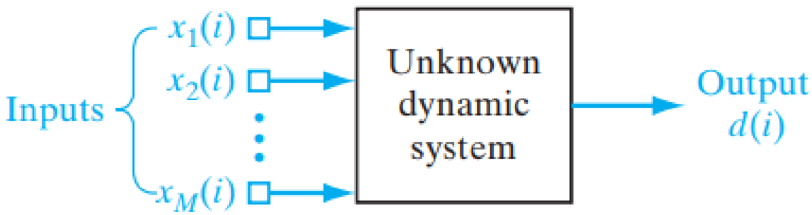


$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \dots, n, \dots$$

مجموعه داده‌های دریافت‌شده از سیستم برای تعیین
وزن‌های فیلتر تطبیقی

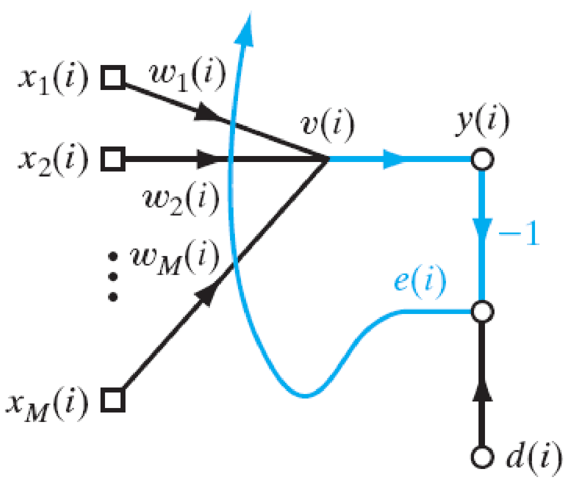
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



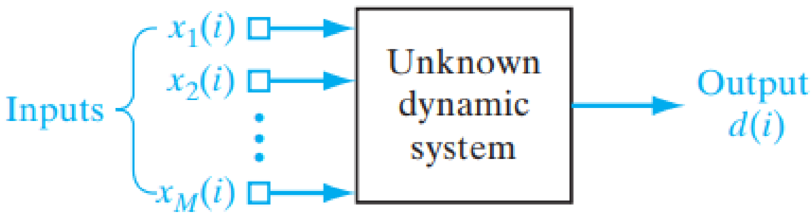
$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \dots, n, \dots$$

مجموعه داده‌های دریافت‌شده از سیستم برای تعیین
وزن‌های فیلتر تطبیقی



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

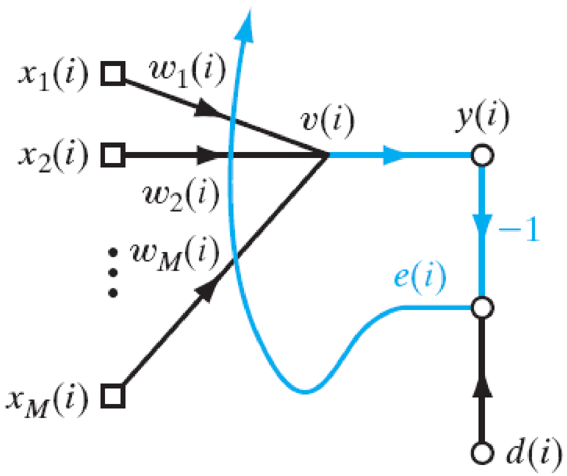
- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹٦۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \dots, n, \dots$$

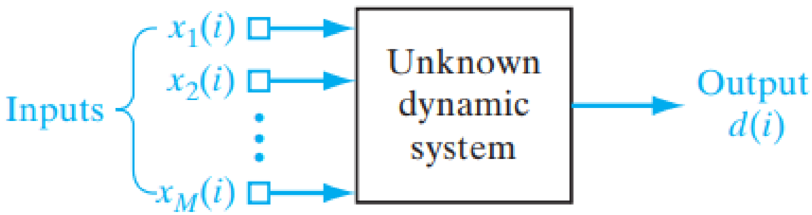
مجموعه داده‌های دریافت‌شده از سیستم برای تعیین
وزن‌های فیلتر تطبیقی

$$y = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$$



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

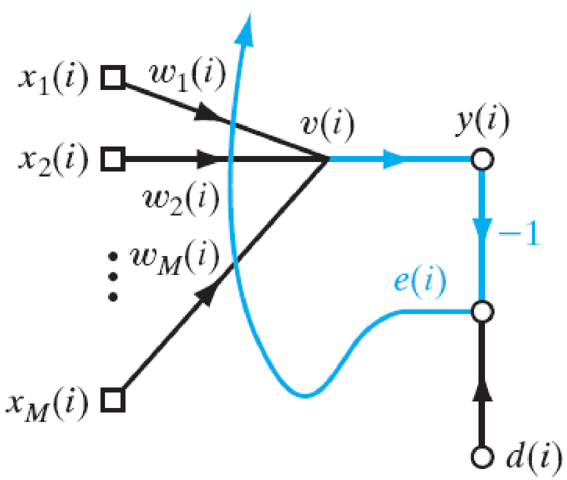
- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \ldots, n, \ldots$$

مجموعه داده‌های دریافت‌شده از سیستم برای تعیین وزن‌های فیلتر تطبیقی

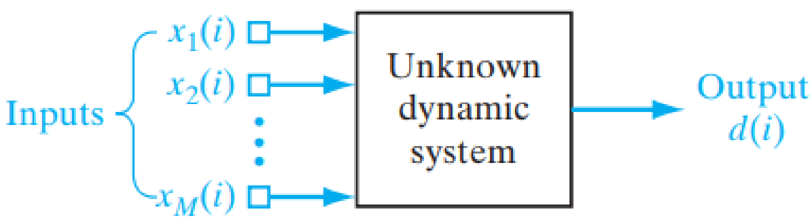
$$y = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$$



– هدف، یافتن وزن‌های بهینه برای کمینه‌کردن میانگین مربعات خطا است.

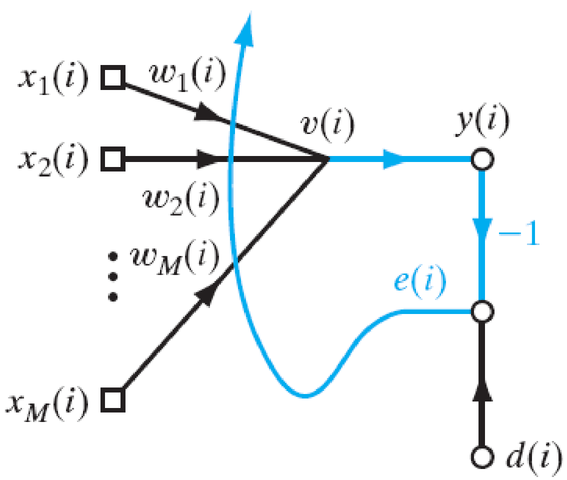
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

- الگوریتم پرسپترون: اولین الگوریتم آموزش وزن‌های شبکه عصبی برای جداسازی الگوها
- الگوریتم LMS (ویدرو و هوف، ۱۹۶۰): اولین الگوریتم برای فیلترهای تطبیقی



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \dots, n, \dots$$

مجموعه داده‌های دریافت‌شده از سیستم برای تعیین وزن‌های فیلتر تطبیقی



$$y = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$$

– هدف، یافتن وزن‌های بهینه برای کمینه‌کردن میانگین مربعات خطا است.

معیار کارآیی (Performance Index)

$$J = \tfrac{1}{2} E[e^2]$$

$$e = d - y$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \frac{1}{2}E[e^2] = \frac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2} E[e^2] = \tfrac{1}{2} E[(d - y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2} E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[d^2\right] - \sum_{k=1}^{m} w_k E\left[x_k d\right] + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k E\left[x_j x_k\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{r_d} - \sum_{k=1}^{m} w_k E\left[x_k d\right] + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k E\left[x_j x_k\right]$$

میانگین مربعات
پاسخ دلخواه

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{r_d} - \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{E\left[x_k d\right]}_{?} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k E\left[x_j x_k\right]$$

میانگین مربعات
پاسخ دلخواه

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{\uparrow\, r_d} - \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{E\left[x_k d\right]}_{\uparrow\, r_{dx}(k)} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k E\left[x_j x_k\right]$$

میانگین مربعات
پاسخ دلخواه

همبستگی متقابل
(Cross-correlation)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{\substack{\uparrow \\ r_d}} - \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{E\left[x_k d\right]}_{\substack{\uparrow \\ r_{dx}(k)}} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k \underbrace{E\left[x_j x_k\right]}_{?}$$

میانگین مربعات
پاسخ دلخواه

همبستگی متقابل
(Cross-correlation)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{r_d} - \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{E\left[x_k d\right]}_{r_{dx}(k)} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k \underbrace{E\left[x_j x_k\right]}_{r_x(j,k)}$$

میانگین مربعات پاسخ دلخواه

همبستگی متقابل (Cross-correlation)

خودهمبستگی (Auto-correlation)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

بنابراین

$$J = \tfrac{1}{2}E[e^2] = \tfrac{1}{2}E[(d-y)^2]$$

$$J = \tfrac{1}{2}E\left[\left(d - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k\right)^2\right]$$

$$J = \tfrac{1}{2}\underbrace{E\left[d^2\right]}_{r_d} - \sum_{k=1}^{m} w_k \underbrace{E\left[x_k d\right]}_{r_{dx}(k)} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k \underbrace{E\left[x_j x_k\right]}_{r_x(j,k)}$$

r_d: میانگین مربعات پاسخ دلخواه

$r_{dx}(k)$: همبستگی متقابل (Cross-correlation)

$r_x(j,k)$: خودهمبستگی (Auto-correlation)

به طور خلاصه

$$J = \tfrac{1}{2}r_d - \sum_{k=1}^{m} w_k r_{dx}(k) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_j w_k r_x(j,k)$$

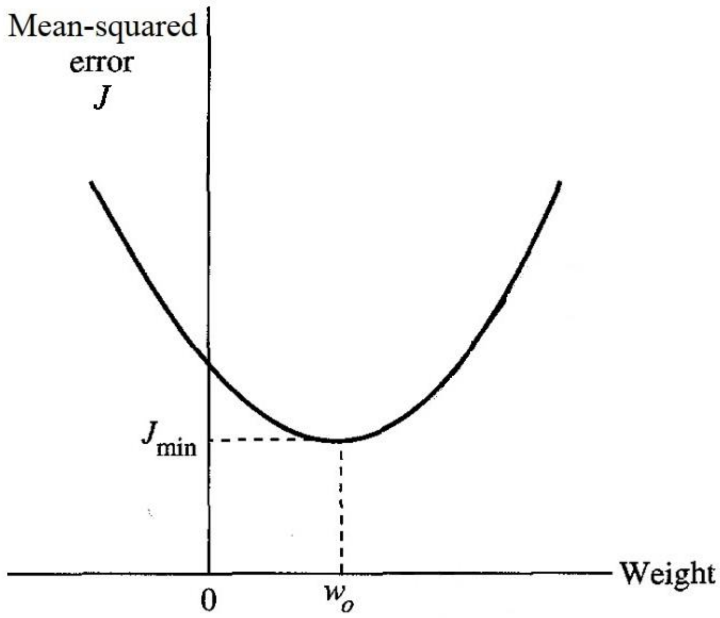
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J=\frac{1}{2}r_d-\sum_{k=1}^{m}w_k r_{dx}(k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}w_j w_k r_x(j,k)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J=\frac{1}{2}r_d-\sum_{k=1}^{m}w_k r_{dx}(k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J=\frac{1}{2}E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:

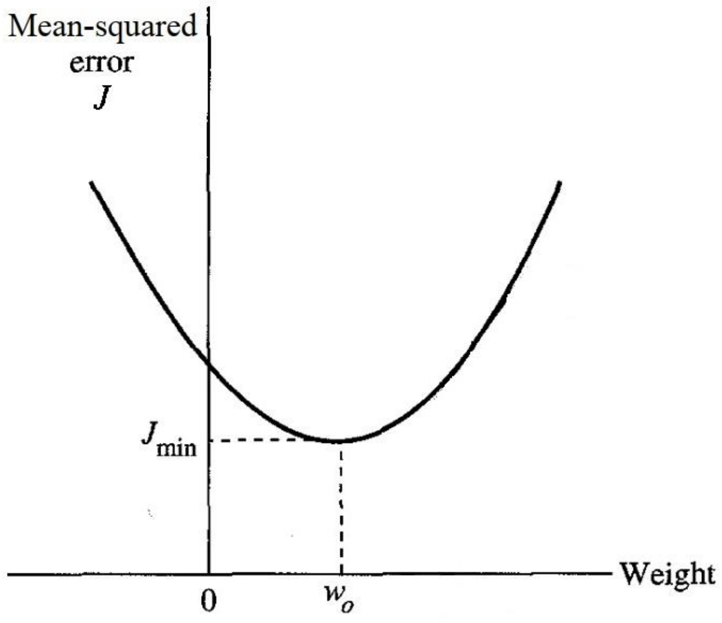


الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J = \tfrac{1}{2} r_d - \sum_{k=1}^{m} w_k r_{dx}(k) + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J = \frac{1}{2} E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:

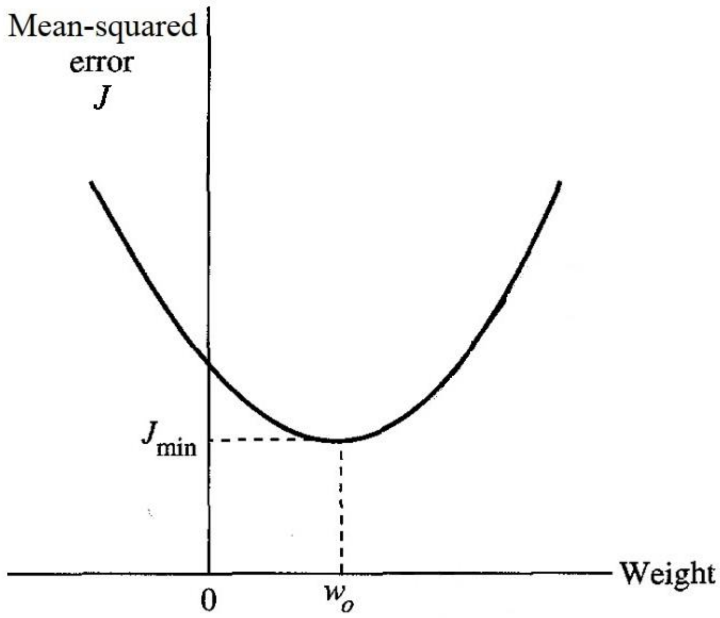
جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J=\tfrac{1}{2}r_d-\sum_{k=1}^{m}w_k r_{dx}(k)+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J=\frac{1}{2}E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:

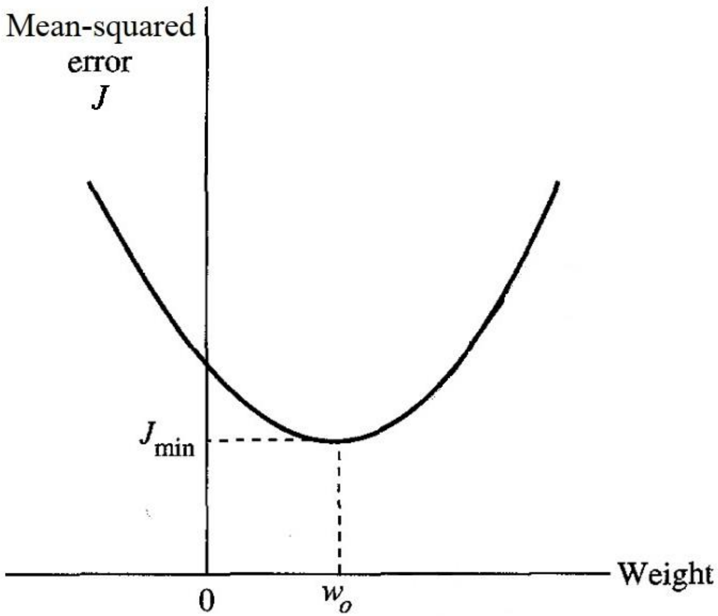


جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا چگونه؟

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J=\frac{1}{2}r_d-\sum_{k=1}^{m}w_k r_{dx}(k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J=\frac{1}{2}E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:



جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا چگونه؟

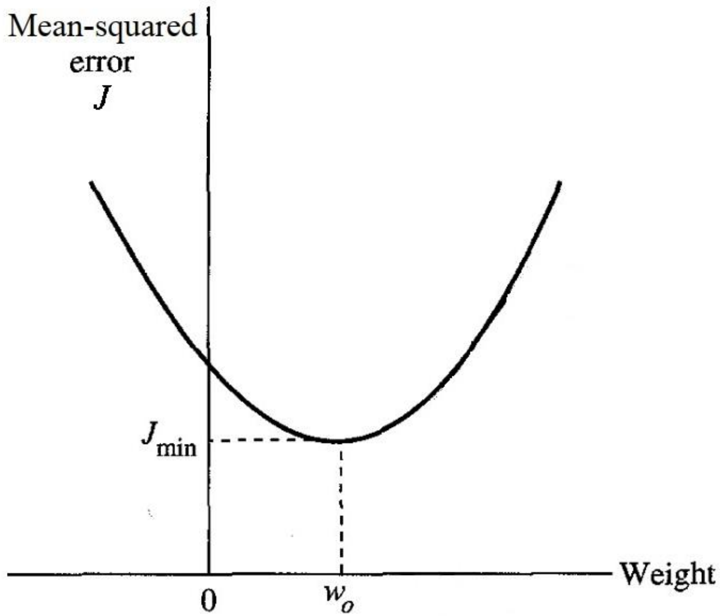
برای یافتن این مقدار کمینه، کافی است از J نسبت به وزن‌ها مشتق گرفته و برابر صفر قراردهیم:

$$\nabla_{w_k}J=\frac{\partial J}{\partial w_k}\qquad k=1,\ldots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J = \tfrac{1}{2} r_d - \sum_{k=1}^{m} w_k r_{dx}(k) + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J = \tfrac{1}{2} E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:



جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا **چگونه؟**

برای یافتن این مقدار کمینه، کافی است از J نسبت به وزن‌ها مشتق گرفته و برابر صفر قراردهیم:

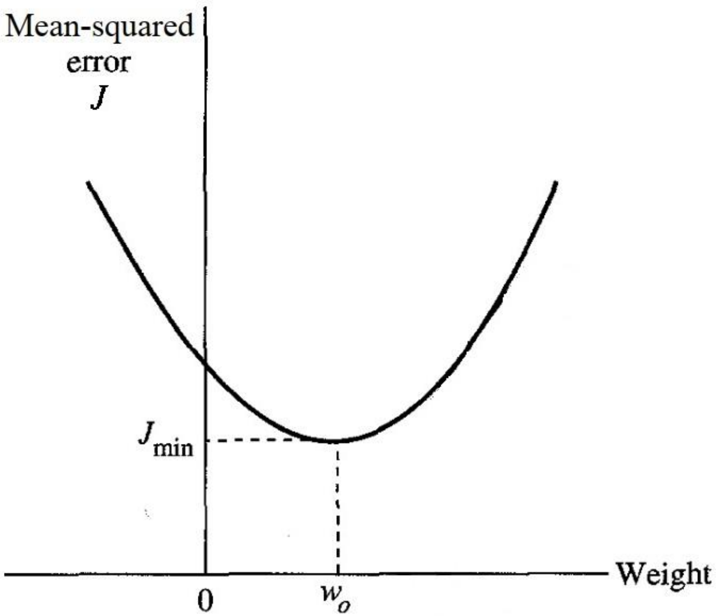
$$\nabla_{w_k} J = \frac{\partial J}{\partial w_k} \qquad k = 1, \dots, m$$

$$\nabla_{w_k} J = -r_{dx}(k) + \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k) = 0$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J=\tfrac{1}{2}r_d-\sum_{k=1}^{m}w_k r_{dx}(k)+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J=\frac{1}{2}E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:



جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا چگونه؟

برای یافتن این مقدار کمینه، کافی است از J نسبت به وزن‌ها مشتق گرفته و برابر صفر قراردهیم:

$$\nabla_{w_k}J=\frac{\partial J}{\partial w_k}\qquad k=1,\ldots,m$$

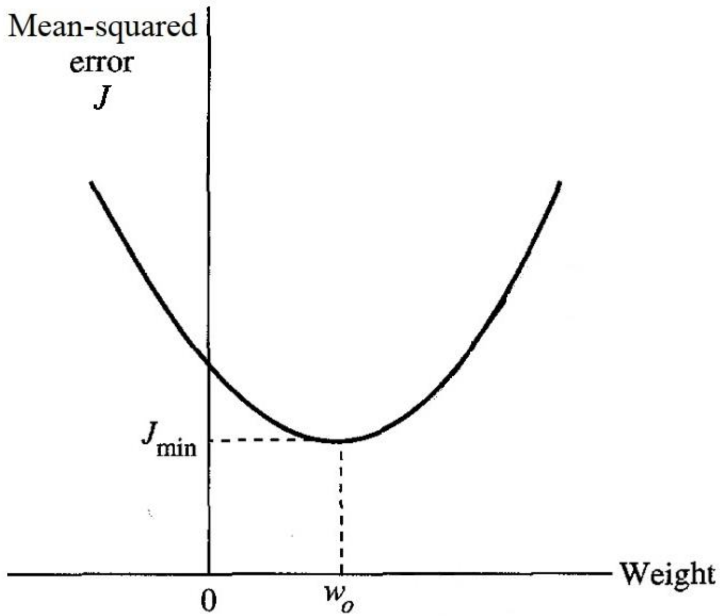
$$\nabla_{w_k}J=-r_{dx}(k)+\sum_{j=1}^{m}w_j r_x(j,k)=0$$

$$\sum_{j=1}^{m}w_{oj}r_x(j,k)=r_{dx}(k)\quad k=1,\ldots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J = \tfrac{1}{2} r_d - \sum_{k=1}^{m} w_k r_{dx}(k) + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J = \frac{1}{2} E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:



جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا چگونه؟

برای یافتن این مقدار کمینه، کافی است از J نسبت به وزن‌ها مشتق گرفته و برابر صفر قراردهیم:

$$\nabla_{w_k} J = \frac{\partial J}{\partial w_k} \qquad k = 1, \ldots, m$$

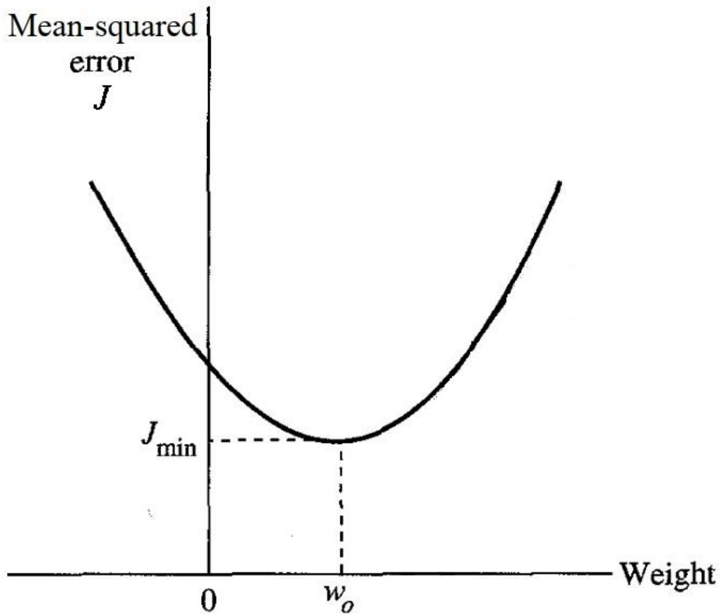
$$\nabla_{w_k} J = -r_{dx}(k) + \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{w_{oj}}_{\text{وزن‌های بهینه}} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$J = \tfrac{1}{2} r_d - \sum_{k=1}^{m} w_k r_{dx}(k) + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} w_j w_k r_x(j,k)$$

- با رسم $J = \frac{1}{2} E[e^2]$ برحسب وزن‌های شبکه، سطحی سهمی‌گون حاصل می‌شود:



جواب مساله: یافتن مقدار کمینه خطا   چگونه؟

برای یافتن این مقدار کمینه، کافی است از J نسبت به وزن‌ها مشتق گرفته و برابر صفر قراردهیم:

$$\nabla_{w_k} J = \frac{\partial J}{\partial w_k} \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$\nabla_{w_k} J = -r_{dx}(k) + \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k) = 0$$

دسته معادلات وینر-هوف برای فیلترهای وینر

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{w_{oj}}_{\text{وزن‌های بهینه}} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$\sum_{j=1}^{m} w_{oj} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1,\ldots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$\sum_{j=1}^{m} w_{oj} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1,\dots,m$$

این دسته معادلات را می‌توان به دو صورت حل‌کرد:

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$\sum_{j=1}^{m} w_{oj} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1,\ldots,m$$

این دسته معادلات را می‌توان به دو صورت حل‌کرد:

۱- حل به‌طور همزمان (استفاده از روابط بردار-ماتریسی):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x(1,1) & \cdots & r_x(m,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(1,m) & \cdots & r_x(m,m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{xx}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{o1} \\ \vdots \\ w_{om} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{dx}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}(m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{dx}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$\sum_{j=1}^{m} w_{oj} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1,\ldots,m$$

این دسته معادلات را می‌توان به دو صورت حل کرد:

۱- حل به‌طور همزمان (استفاده از روابط بردار-ماتریسی):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x(1,1) & \cdots & r_x(m,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(1,m) & \cdots & r_x(m,m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{xx}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{o1} \\ \vdots \\ w_{om} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{dx}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}(m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{dx}}$$

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{dx}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

$$\sum_{j=1}^{m} w_{oj} r_x(j,k) = r_{dx}(k) \quad k = 1,\ldots,m$$

این دسته معادلات را می‌توان به دو صورت حل‌کرد:

۱- حل به‌طور همزمان (استفاده از روابط بردار-ماتریسی):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x(1,1) & \cdots & r_x(m,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(1,m) & \cdots & r_x(m,m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{xx}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{o1} \\ \vdots \\ w_{om} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{dx}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}(m) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{dx}}$$

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{dx}$$

معایب روش:

۱- تکین‌بودن ماتریس

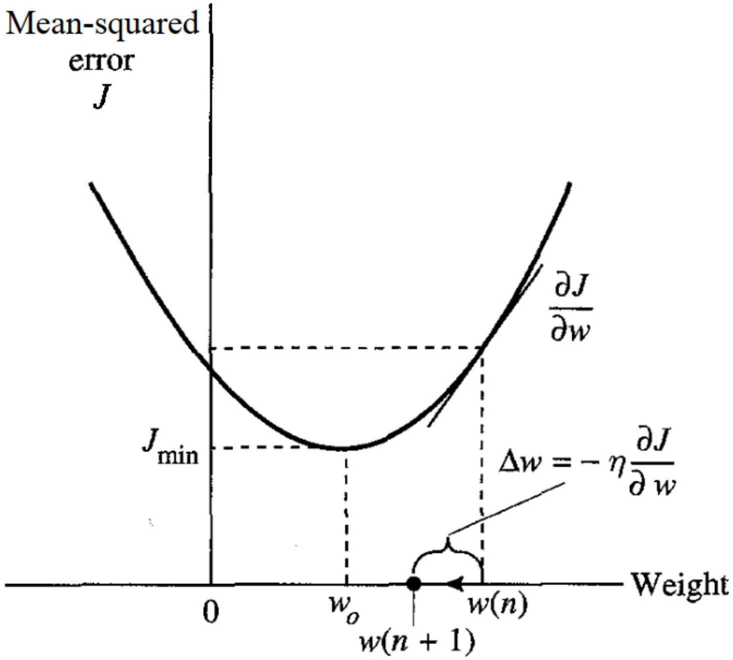
۲- بزرگ‌شدن ماتریس برای داده‌های بزرگ

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

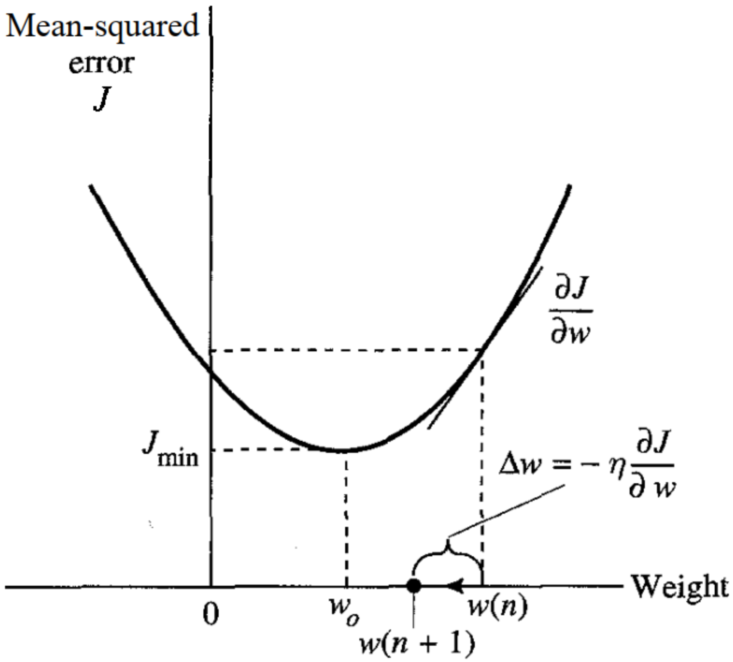
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

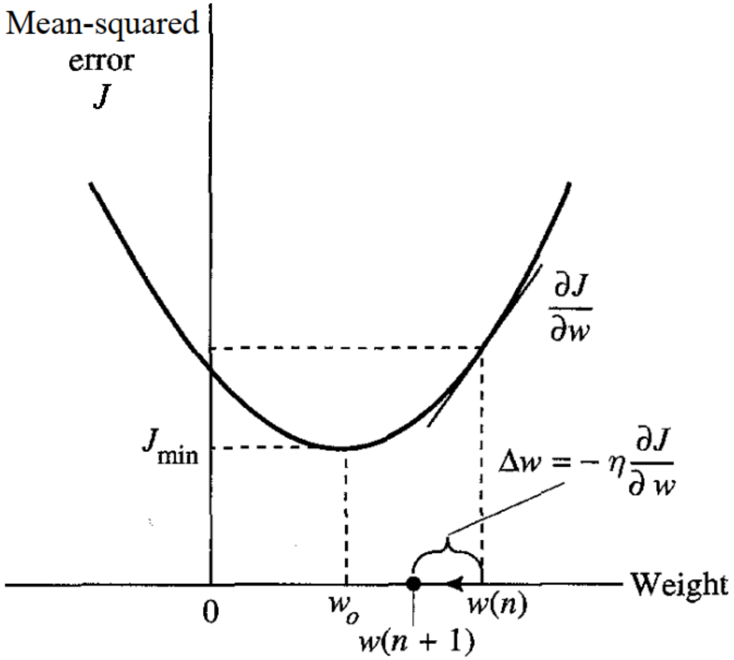


۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

$$\Delta w_k(n) = -\eta \nabla_{w_k} J(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



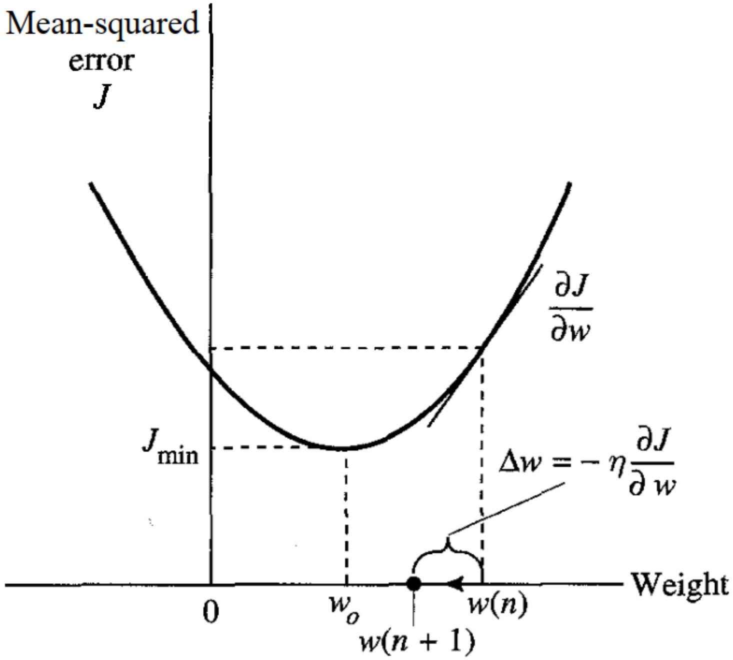
۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

$$\Delta w_k(n) = -\eta \, \nabla_{w_k} J(n)$$

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \Delta w_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

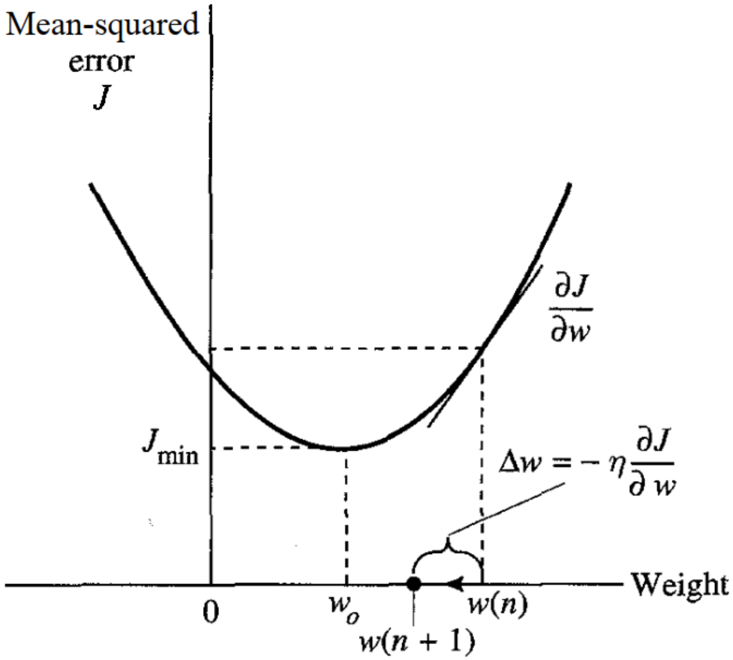
حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

$$\Delta w_k(n) = -\eta \nabla_{w_k} J(n)$$

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \Delta w_k(n)$$

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \eta\left[r_{dx}(k) - \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k)\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

$$\Delta w_k(n) = -\eta \nabla_{w_k} J(n)$$

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \Delta w_k(n)$$

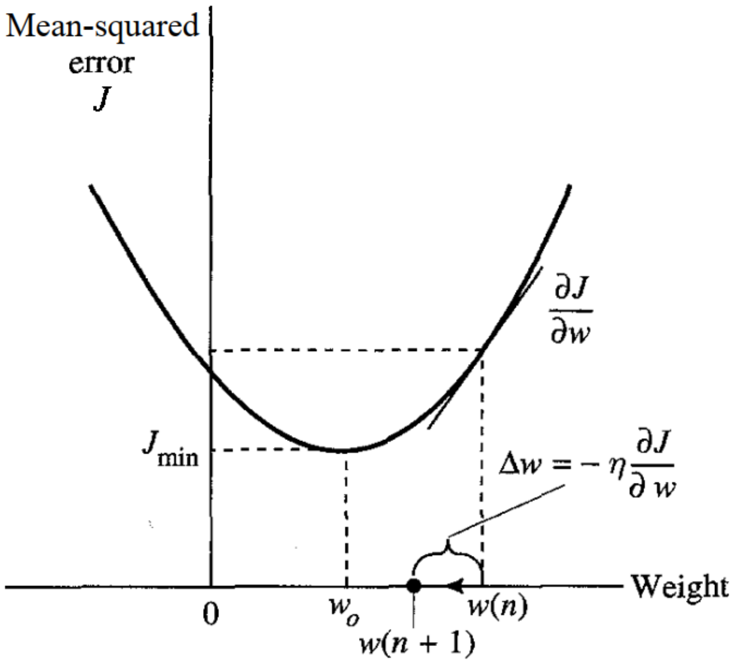
$$w_k(n+1) = w_k(n) + \eta\left[r_{dx}(k) - \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k)\right]$$

روش شیب‌دارترین نزولی

یا SD

(Steepest Descent)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



۲- یافتن وزن‌ها به‌صورت تطبیقی (آموزش وزن‌ها):

حرکت به سمت کمینه با استفاده از منفی گرادیان سطح خطا

$$\Delta w_k(n) = -\eta \nabla_{w_k} J(n)$$

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \Delta w_k(n)$$

روش شیب‌دارترین نزولی
یا SD
(Steepest Descent)

$$w_k(n+1) = w_k(n) + \eta\left[r_{dx}(k) - \sum_{j=1}^{m} w_j r_x(j,k)\right]$$

نکات مهم در این روش:

۱- ضریب آموزش باید با دقت تعیین شود تا همگرایی سریع در وزن‌ها تضمین شود.

۲- نیاز به محاسبه توابع همبستگی دارد.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)\,d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)\,x_j(n)\,x_k(n)\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)\,d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)\,x_j(n)\,x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)\,x_j(n)\right]x_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)\,d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)}_{=?}\right]x_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)}_{=y(n)}\right]x_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)\,d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)\,x_j(n)\,x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)\,x_j(n)}_{=\,y(n)}\right]x_k(n)$$

و در نهایت

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - y(n)\right]x_k(n) \qquad k = 1,\ldots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)}_{=y(n)}\right]x_k(n)$$

و در نهایت

$$\boxed{\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - y(n)\right]x_k(n) \qquad k = 1,\ldots,m}$$

الگوریتم LMS

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

می‌توان از مقادیر تخمینی (لحظه‌ای همبستگی‌ها) استفاده‌کرد:

$$\hat{r}_x(j,k;n) = x_j(n)x_k(n)$$

$$\hat{r}_{dx}(k;n) = x_k(n)d(n)$$

در نتیجه

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[x_k(n)d(n) - \sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)x_k(n)\right]$$

به‌طور خلاصه‌تر

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\Big[d(n) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\hat{w}_j(n)x_j(n)}_{=y(n)}\Big]x_k(n)$$

و در نهایت

$$\boxed{\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta\left[d(n) - y(n)\right]x_k(n) \qquad k = 1,\ldots,m}$$

الگوریتم LMS

که در واقع، همان
الگوریتم پرسپترون است

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

۱– در روش SD، محاسبه وزن‌ها به‌طور دقیق صورت می‌گیرد در حالی‌که در روش LMS محاسبه وزن‌ها به‌طور تقریبی است. به این روش، گرادیان اتفاقی یا Stochastic Gradient نیز گفته‌می‌شود.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

۱- در روش SD، محاسبه وزن‌ها به‌طور دقیق صورت می‌گیرد در حالی‌که در روش LMS محاسبه وزن‌ها به‌طور تقریبی است. به این روش، گرادیان اتفاقی یا Stochastic Gradient نیز گفته‌می‌شود.

۲- در روش SD، نیاز به محاسبه توابع همبستگی است $\Leftarrow$ نیاز به حافظه بیشتر

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

۱- در روش SD، محاسبه وزن‌ها به‌طور دقیق صورت می‌گیرد در حالی‌که در روش LMS محاسبه وزن‌ها به‌طور تقریبی است. به این روش، گرادیان اتفاقی یا Stochastic Gradient نیز گفته‌می‌شود.

۲- در روش SD، نیاز به محاسبه توابع همبستگی است ⇐ نیاز به حافظه بیشتر

۳- روش SD فقط می‌تواند در شرایط ایستا (Stationary) کارکند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن ثابت است). در حالی که روش LMS می‌تواند در شرایط ناایستا (Non-Stationary) نیز کار کند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن در طول زمان یا مکان تغییر کند).

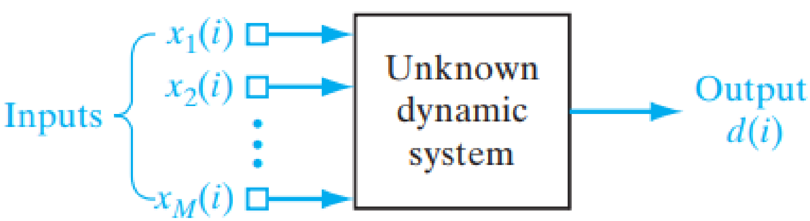
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

۱- در روش SD، محاسبه وزن‌ها به‌طور دقیق صورت می‌گیرد در حالی‌که در روش LMS محاسبه وزن‌ها به‌طور تقریبی است. به این روش، گرادیان اتفاقی یا Stochastic Gradient نیز گفته‌می‌شود.

۲- در روش SD، نیاز به محاسبه توابع همبستگی است $\Leftarrow$ نیاز به حافظه بیشتر

۳- روش SD فقط می‌تواند در شرایط ایستا (Stationary) کارکند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن ثابت است). در حالی که روش LMS می‌تواند در شرایط ناایستا (Non-Stationary) نیز کار کند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن در طول زمان یا مکان تغییر کند).



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \dots, n, \dots$$

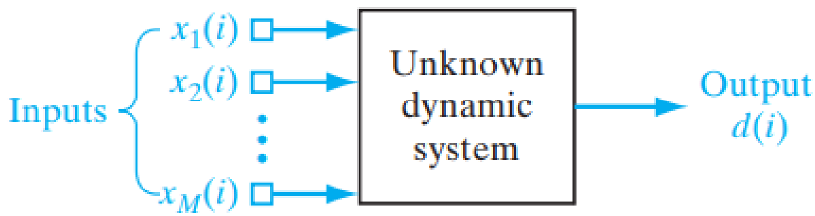
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

تفاوت‌های اساسی بین روش‌های SD و LMS:

۱– در روش SD، محاسبه وزن‌ها به‌طور دقیق صورت می‌گیرد در حالی‌که در روش LMS محاسبه وزن‌ها به‌طور تقریبی است. به این روش، گرادیان اتفاقی یا Stochastic Gradient نیز گفته‌می‌شود.

۲– در روش SD، نیاز به محاسبه توابع همبستگی است $\Leftarrow$ نیاز به حافظه بیشتر

۳– روش SD فقط می‌تواند در شرایط ایستا (Stationary) کارکند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن ثابت است). در حالی که روش LMS می‌تواند در شرایط ناایستا (Non-Stationary) نیز کار کند (شرایطی که فرم سهمی و کمینه آن در طول زمان یا مکان تغییر کند).



$$\Longrightarrow \{\mathbf{x}(i), d(i)\};\ i = 1, \ldots, n, \ldots$$

۴– تعداد دفعات تکرار روش SD معمولا کمتر از روش LMS است.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

جمع‌بندی الگوریتم LMS:

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

جمع‌بندی الگوریتم LMS:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(1) = 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

جمع‌بندی الگوریتم LMS:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(1) = 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

۲- محاسبه خروجی و خطا:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

جمع‌بندی الگوریتم LMS:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(1) = 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

۲- محاسبه خروجی و خطا:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

۳- تنظیم وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

جمع‌بندی الگوریتم LMS:

۱- مقداردهی اولیه وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(1) = 0 \quad k = 1, \ldots, m$$

۲- محاسبه خروجی و خطا:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

۳- تنظیم وزن‌ها:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

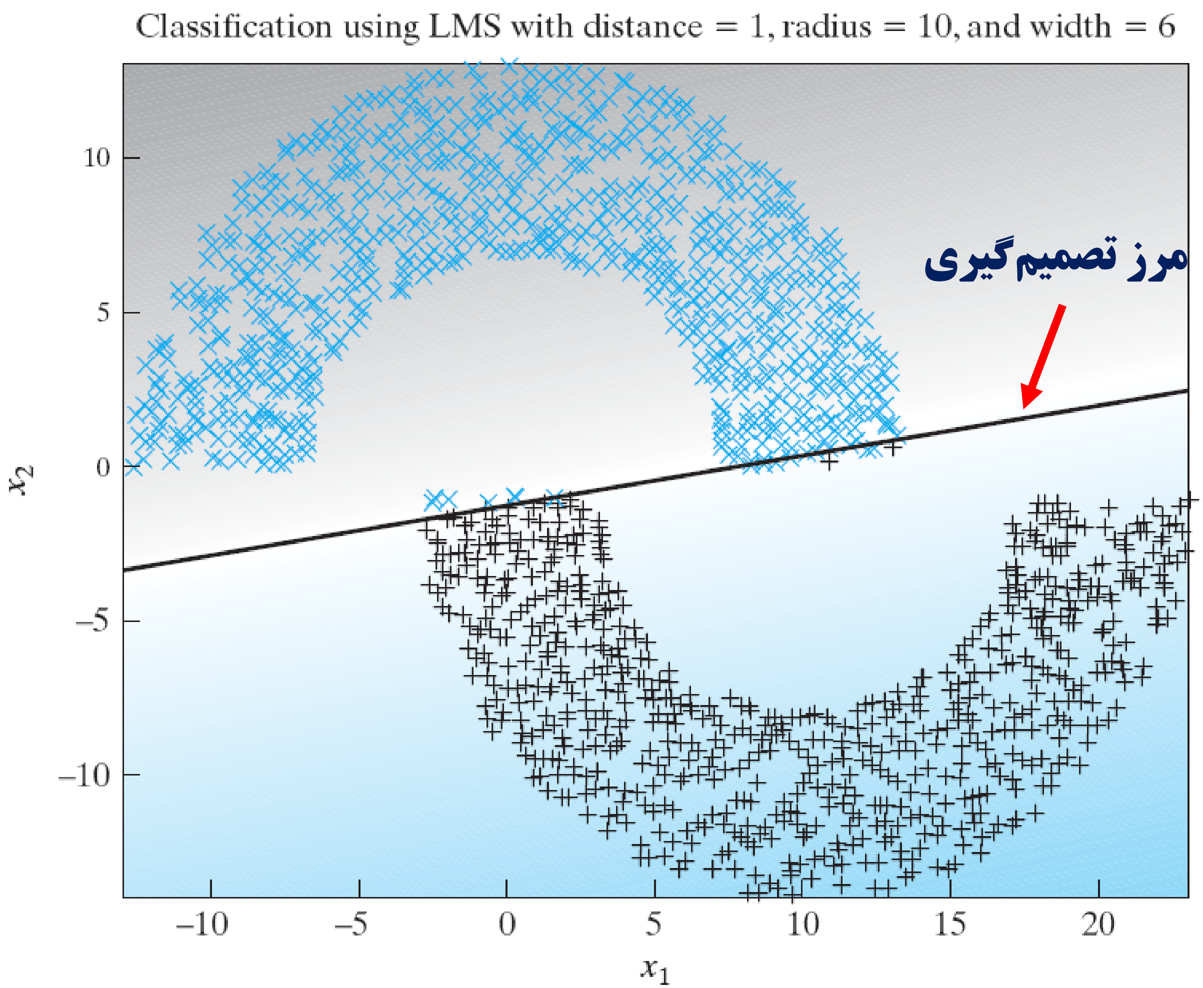
٤- $n = n + 1$ و تکرار گام‌های ۲ تا ٤ تا همگرایی وزن‌ها

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مساله کلاسه‌بندی (Classification Problem)

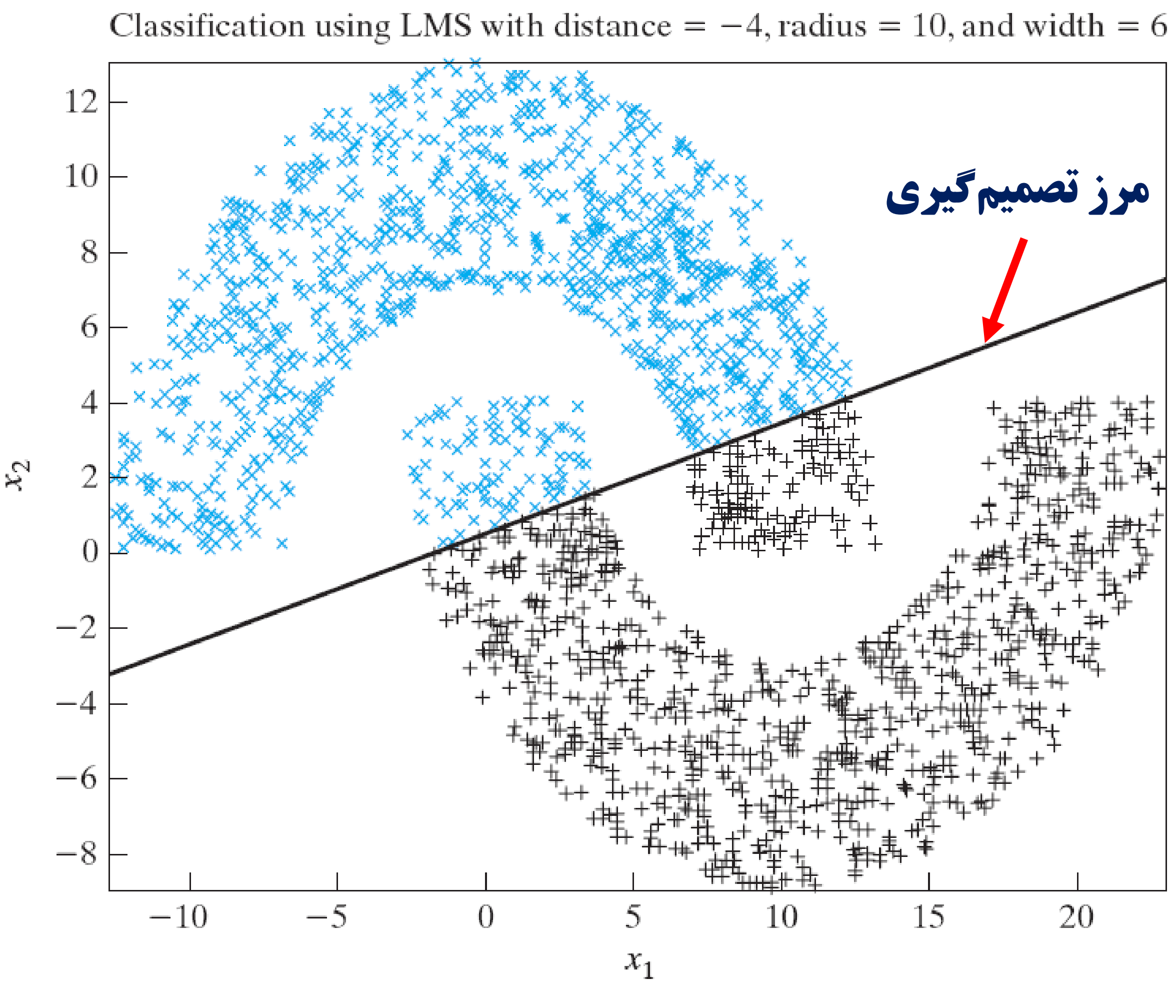
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مساله کلاسه‌بندی (Classification Problem)



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مساله کلاسه‌بندی (Classification Problem)

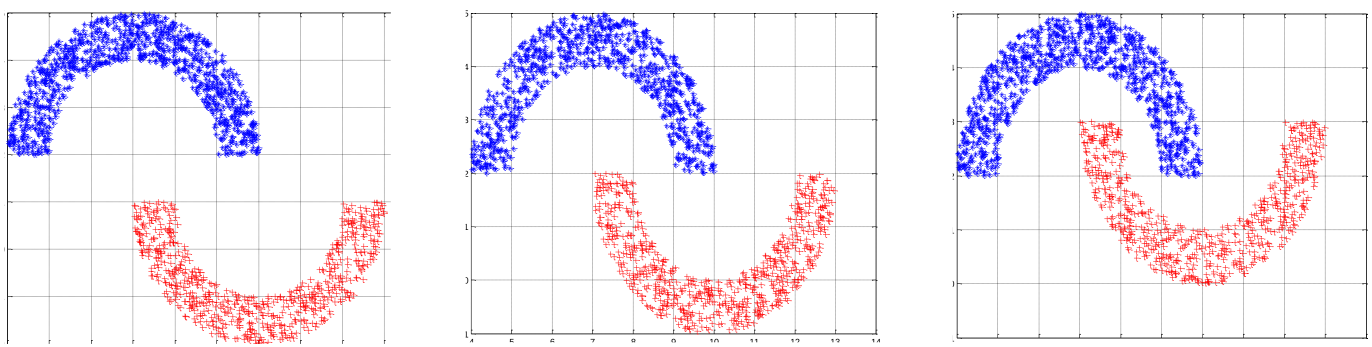


الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مساله کلاسه‌بندی (Classification Problem)

تمرین: الگوریتم‌های **LMS**، و **SD** را برای دو کلاس ماه‌شکل برای موارد زیر اجرا کرده و نتایج را گزارش کنید:

۱- مقادیر مختلف فاصله دو کلاس از هم (d). یعنی جداپذیری خطی و غیرخطی



۲- ضریب آموزش ثابت و متغیر با زمان

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم LMS:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم LMS:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - y(n) \right] x_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم LMS:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \dots, m$$

$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - y(n) \right] x_k(n)$$

$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n) \right] x_k(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم LMS:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - y(n) \right] x_k(n)$$

$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n) \right] x_k(n)$$

به‌صورت برداری:

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta \left[d(n) - \hat{\mathbf{w}}^T(n)\, \mathbf{x}(n) \right] \mathbf{x}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم LMS:

$$\hat{w}_k(n+1) = \hat{w}_k(n) + \eta e(n) x_k(n) \qquad k = 1, \dots, m$$
$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - y(n) \right] x_k(n)$$
$$= \hat{w}_k(n) + \eta \left[d(n) - \sum_{j=1}^{m} \hat{w}_j(n) x_j(n) \right] x_k(n)$$

به‌صورت برداری:

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta \left[d(n) - \hat{\mathbf{w}}^T(n)\, \mathbf{x}(n) \right] \mathbf{x}(n)$$

که در آن

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = \left[\hat{w}_1(n) \quad \cdots \quad \hat{w}_m(n) \right]^T$$
$$\mathbf{x}(n) = \left[x_1(n) \quad \cdots \quad x_m(n) \right]^T$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

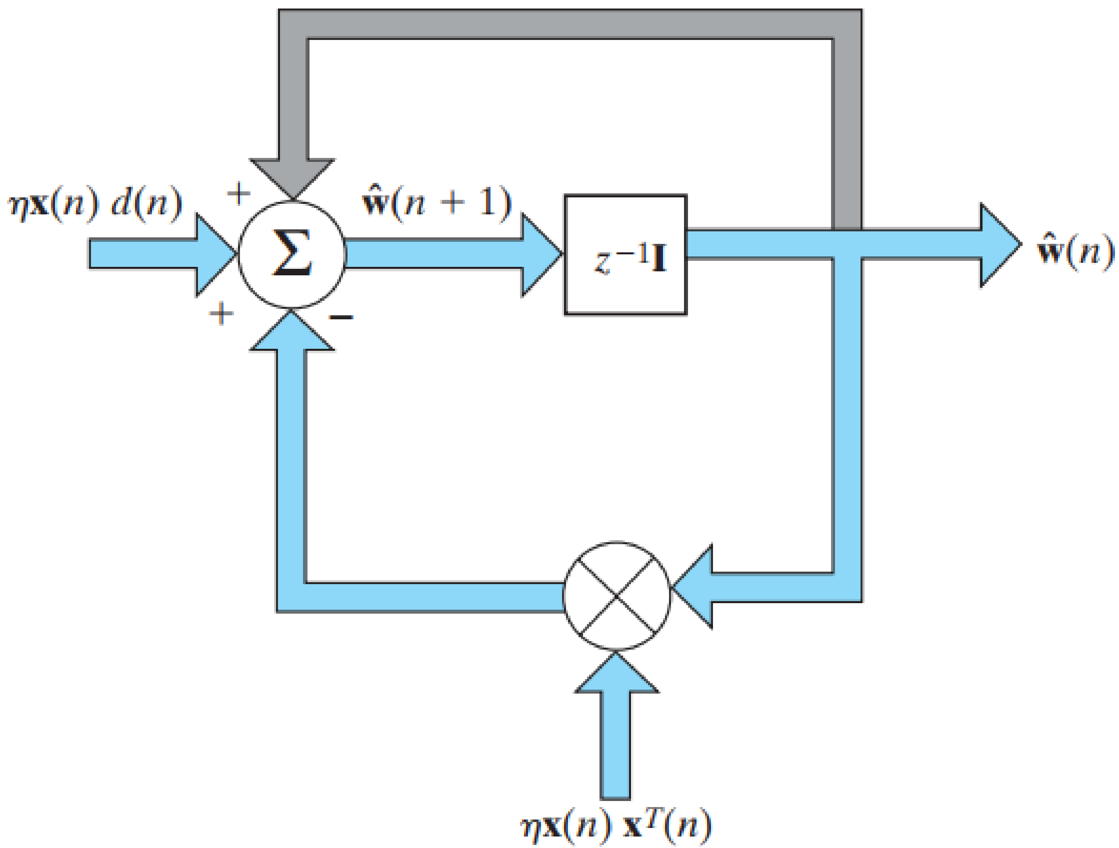
به شکل دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\,\mathbf{x}(n) - \eta\,\mathbf{x}^T(n)\,\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

به شکل دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1)=\hat{\mathbf{w}}(n)+\eta d(n)\mathbf{x}(n)-\eta\,\mathbf{x}^T(n)\,\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$

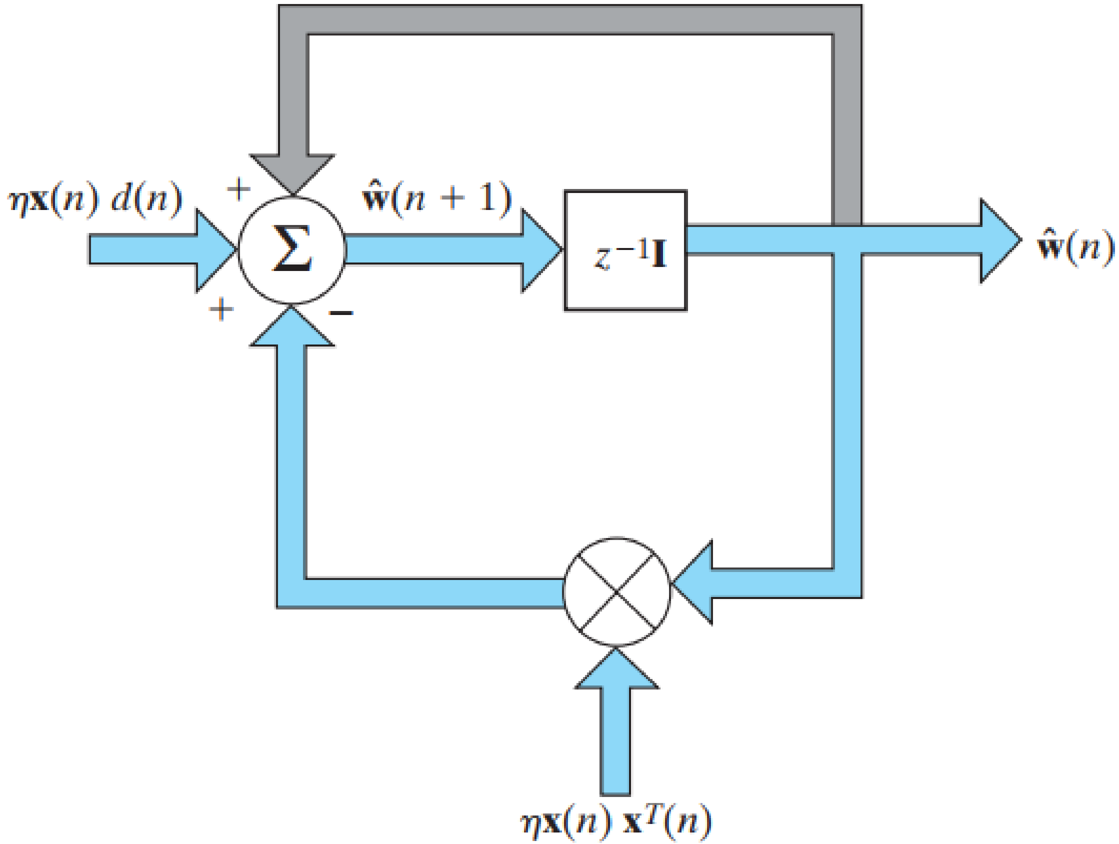


رابطه بالا را می‌توان به صورت
نمودار بلوکی روبرو درنظرگرفت

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

به شکل دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n) - \eta\,\mathbf{x}^T(n)\,\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$



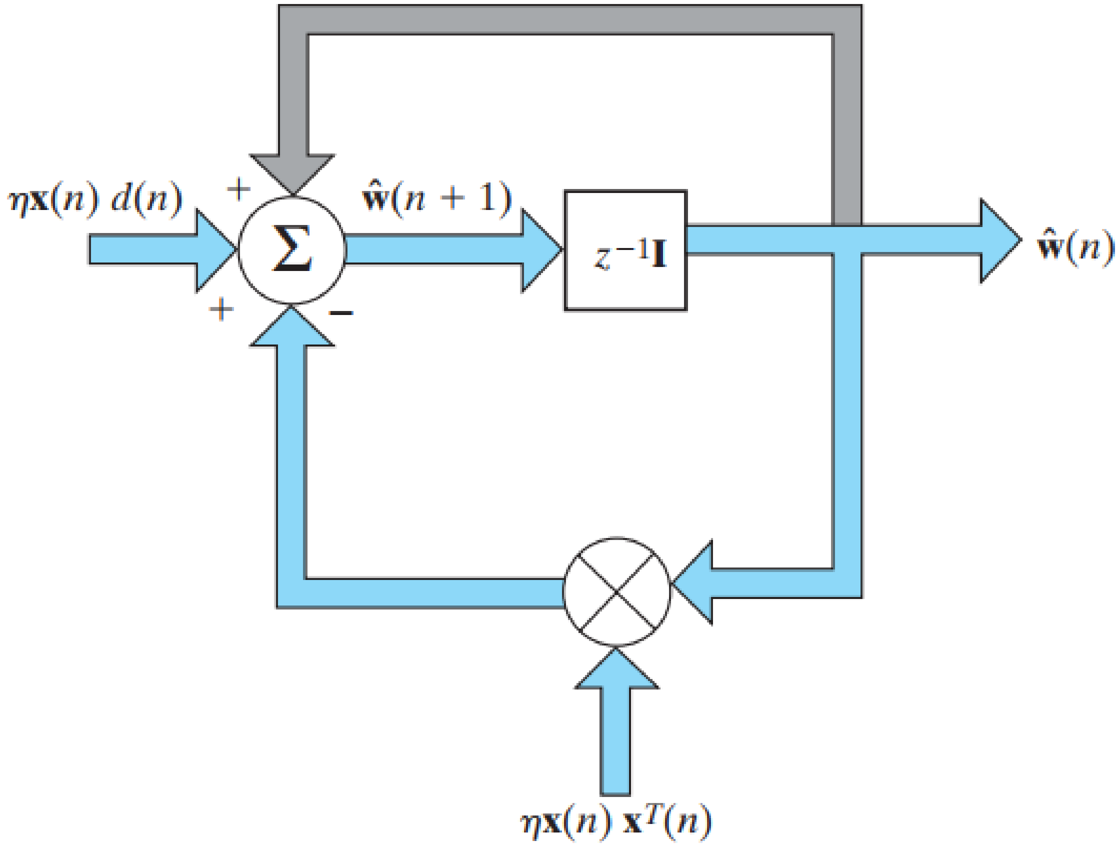
رابطه بالا را می‌توان به صورت
نمودار بلوکی روبرو درنظرگرفت

$$\hat{\mathbf{w}}(n) = z^{-1}\hat{\mathbf{w}}(n+1)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

به شکل دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n) - \eta\,\mathbf{x}^T(n)\,\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$



رابطه بالا را می‌توان به صورت
نمودار بلوکی روبرو درنظرگرفت

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}(n) &= z^{-1}\hat{\mathbf{w}}(n+1)\\ &= z^{-1}\,\mathbf{I}\,\hat{\mathbf{w}}(n+1)\end{aligned}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

<u>همگرایی در الگوریتم LMS:</u>

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

همگرایی در الگوریتم LMS:

همگرایی به دو فرم:

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

<u>همگرایی در الگوریتم LMS:</u>

همگرایی به دو فرم:

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] \underset{n\to\infty}{\to} \hat{\mathbf{w}}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

همگرایی در الگوریتم LMS:

همگرایی به دو فرم:

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] \underset{n\to\infty}{\to} \hat{\mathbf{w}}_o$$

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$E\left[e^2(n)\right] \underset{n\to\infty}{\to} \text{costant}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

معادله قبلی LMS را درنظربگیرید

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n) - \eta \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n)\mathbf{x}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

معادله قبلی LMS را درنظربگیرید

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n) - \eta \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n)\mathbf{x}(n)$$

به‌فرم دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \left[\mathbf{I} - \eta \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

معادله قبلی LMS را درنظربگیرید

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1)=\hat{\mathbf{w}}(n)+\eta d(n)\,\mathbf{x}(n)-\eta\,\mathbf{x}^T(n)\,\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$

به‌فرم دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1)=\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)+\eta d(n)\,\mathbf{x}(n)$$

با گرفتن امیدریاضی از دو طرف رابطه اخیر

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=E\left\{\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)+\eta d(n)\,\mathbf{x}(n)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

معادله قبلی LMS را درنظربگیرید

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n) - \eta \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{w}}(n)\,\mathbf{x}(n)$$

به‌فرم دیگر

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n)$$

با گرفتن امیدریاضی از دو طرف رابطه اخیر

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = E\left\{\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n) + \eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

$$= E\left\{\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)\right\} + E\left\{\eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = E\left\{\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)\right\} + E\left\{\eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \underbrace{E\left\{\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)\right\}}_{=?} + E\left\{\eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\underbrace{E\left\{\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)\right\}}_{=?}+E\left\{\eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

برای دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \underbrace{E\left\{\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\hat{\mathbf{w}}(n)\right\}}_{=?} + E\left\{\eta d(n)\mathbf{x}(n)\right\}$$

برای دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

بنابراین، برای ساده‌سازی فرض می‌شود که بردار وزن‌ها و بردار ورودی از یکدیگر مستقل‌اند؛ یعنی

$$\text{cov}\left[\hat{\mathbf{w}}^T(n)\,\mathbf{x}(n)\right] = 0$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=E\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta E\left[d(n)\,\mathbf{x}(n)\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = E\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=E\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]}_{=\mathbf{R}_{\mathbf{x}}}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

ماتریس خودهمبستگی
(auto-correlation matrix)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = E\left[\mathbf{I} - \eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta \underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]}_{=\mathbf{R}_{\mathbf{x}}}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta \underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

ماتریس خودهمبستگی
(auto-correlation matrix)

بردار همبستگی متقابل
(cross-correlation vector)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=E\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]}_{=\mathbf{R}_{\mathbf{x}}}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta\underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

ماتریس خودهمبستگی
(auto-correlation matrix)

بردار همبستگی متقابل
(cross-correlation vector)

ماتریس خودهمبستگی، ماتریسی متقارن و مثبت نیمه‌معین است که می‌توان آن‌را به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه تجزیه کرد

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

درنتیجه

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=E\left[\mathbf{I}-\eta\,\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{T}(n)\right]}_{=\mathbf{R}_{\mathbf{x}}}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta\underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

ماتریس خودهمبستگی (auto-correlation matrix)

بردار همبستگی متقابل (cross-correlation vector)

ماتریس خودهمبستگی، ماتریسی متقارن و مثبت نیمه‌معین است که می‌توان آن‌را به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه تجزیه کرد

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{T}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{T}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{T}=\mathbf{I}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta \underbrace{E\left[\ \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\ \right]}_{=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta \underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta \underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]}_{=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta \underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

از طرفی، برطبق معادلات وینر-هوف

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_o=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta \underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]}_{=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta \underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

از طرفی، برطبق معادلات وینر-هوف

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_o = \mathbf{r}_{d\mathbf{x}}$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta \underbrace{E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]}_{=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T}\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta \underbrace{E\left[d(n)\mathbf{x}(n)\right]}_{=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}}$$

از طرفی، برطبق معادلات وینر-هوف

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_o=\mathbf{r}_{d\mathbf{x}}$$

بنابراین

$$E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\right\}E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با ضرب‌کردن دو طرف رابطه اخیر در $\mathbf{Q}^T$

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right]=\left\{\mathbf{I}-\eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right]+\eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\mathbf{Q}^T\left\{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o\right\} = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\left\{\mathbf{Q}^T\left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o\right)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\cancel{\mathbf{Q}}^T\left\{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o\right\} = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\left\{\cancel{\mathbf{Q}}^T\left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o\right)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\cancel{\mathbf{Q}}^T\left\{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o\right\} = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\left\{\cancel{\mathbf{Q}}^T\left(\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n)}\right)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\cancel{\mathbf{Q}}^T \left\{\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n+1)}\right\} = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\left\{\cancel{\mathbf{Q}}^T \left(\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n)}\right)\right\}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\cancel{\mathbf{Q}}^T \{\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n+1)}\} = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\{\cancel{\mathbf{Q}}^T(\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n)})\}$$

در نتیجه

$$\mathbf{v}(n+1) = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{v}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

با تفریق کردن $\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$ از دو طرف رابطه اخیر

$$\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{Q}^T E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] + \eta\Lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o - \mathbf{Q}^T\mathbf{w}_o$$

و یا

$$\cancel{\mathbf{Q}}^T \left\{\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n+1)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n+1)}\right\} = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\left\{\cancel{\mathbf{Q}}^T\left(\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o}_{=\mathbf{v}(n)}\right)\right\}$$

در نتیجه

$$\mathbf{v}(n+1) = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{v}(n)$$

این معادله، نشان دهنده m معادله دیفرانسیل گسسته درجه اول و مجزا از یکدیگر است.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{v}(n)$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \left\{\mathbf{I} - \eta\Lambda\right\}\mathbf{v}(n)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_k(n+1) = \left\{1 - \eta\lambda_k\right\}v_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{v}(n)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_k(n+1) = \{1 - \eta\lambda_k\} v_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

جواب این معادله برابر است با

$$v_k(n) = (1 - \eta\lambda_k)^n v_k(0) \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{v}(n)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_k(n+1) = \{1 - \eta\lambda_k\} v_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

جواب این معادله برابر است با

$$v_k(n) = (1 - \eta\lambda_k)^n v_k(0) \qquad k = 1, \ldots, m$$

شرط همگرایی این رابطه برای n های بزرگ

$$|1 - \eta\lambda_k| < 1 \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{v}(n)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_k(n+1) = \{1 - \eta\lambda_k\} v_k(n) \qquad k = 1, \ldots, m$$

جواب این معادله برابر است با

$$v_k(n) = (1 - \eta\lambda_k)^n v_k(0) \qquad k = 1, \ldots, m$$

شرط همگرایی این رابطه برای n های بزرگ

$$|1 - \eta\lambda_k| < 1 \qquad k = 1, \ldots, m$$

با برآورده‌شدن این شرط می‌توان نتیجه گرفت که

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\mathbf{v}(n+1) = \{\mathbf{I} - \eta\Lambda\}\mathbf{v}(n)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_k(n+1) = \{1 - \eta\lambda_k\}v_k(n) \qquad k = 1,\ldots,m$$

جواب این معادله برابر است با

$$v_k(n) = (1 - \eta\lambda_k)^n v_k(0) \qquad k = 1,\ldots,m$$

شرط همگرایی این رابطه برای n های بزرگ

$$|1 - \eta\lambda_k| < 1 \qquad k = 1,\ldots,m$$

با برآورده‌شدن این شرط می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

به‌عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{Q}^T \left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o \right) \right\} \to 0$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

به‌عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{Q}^T \left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o \right) \right\} \to 0$$

که برای برآورده شدن آن باید

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] \to \mathbf{w}_o$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

به‌عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{Q}^T \left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n) \right] - \mathbf{w}_o \right) \right\} \to 0$$

که برای برآورده شدن آن باید

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{\mathbf{w}}(n) \right] \to \mathbf{w}_o$$

دوباره برگردیم به معادله و شرط همگرایی

$$v_k(n) = \left(1 - \eta\lambda_k\right)^n v_k(0)$$

$$\left|1 - \eta\lambda_k\right| < 1 \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن‌ها

$$\lim_{n\to\infty} v_k(n) \to 0$$

به‌عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\mathbf{Q}^T \left(E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] - \mathbf{w}_o\right)\right\} \to 0$$

که برای برآورده شدن آن باید

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{\mathbf{w}}(n)\right] \to \mathbf{w}_o$$

دوباره برگردیم به معادله و شرط همگرایی

$$v_k(n) = \left(1 - \eta\lambda_k\right)^n v_k(0)$$

$$\left|1 - \eta\lambda_k\right| < 1 \qquad k = 1, \ldots, m$$

از روی این دو معادله و در شرایط تساوی می‌توان نوشت

$$\frac{v_k(n+1)}{\underset{n\to\infty}{v_k(n)}} = 1 = \left|1 - \eta\lambda_k\right| \qquad k = 1, \ldots, m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن ها

$$\frac{v_k(n+1)}{\underset{n\to\infty}{v_k(n)}} = 1 = \left|1-\eta\lambda_k\right| \qquad k=1,\dots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن ها

$$\frac{v_k(n+1)}{v_k(n)}_{n\to\infty} = 1 = \left|1-\eta\lambda_k\right| \qquad k=1,\ldots,m$$

برای برآورده شدن شرط بالا باید

$$\eta = \frac{2}{\lambda_k} \qquad k=1,\ldots,m$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن ها

$$\left.\frac{v_k(n+1)}{v_k(n)}\right|_{n\to\infty} = 1 = \left|1-\eta\lambda_k\right| \qquad k = 1,\ldots,m$$

برای برآورده شدن شرط بالا باید

$$\eta = \frac{2}{\lambda_k} \qquad k = 1,\ldots,m$$

که درنهایت خواهیم داشت

$$\eta_{\max} = \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۱- همگرایی در میانگین وزن ها

$$\frac{v_k(n+1)}{v_k(n)}_{n\to\infty} = 1 = \left|1-\eta\lambda_k\right| \qquad k = 1,\ldots,m$$

برای برآورده شدن شرط بالا باید

$$\eta = \frac{2}{\lambda_k} \qquad k = 1,\ldots,m$$

که درنهایت خواهیم داشت

$$\eta_{\max} = \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

و با توجه به مثبت بودن ضریب آموزش

$$0 < \eta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$\underset{n\to\infty}{E\left[e^2(n)\right]} \to \text{costant}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$E\left[e^2(n)\right]_{n\to\infty} \to \text{costant}$$

- به‌دست‌آوردن شرایط همگرایی در این حالت بسیار پیچیده‌تر از قبل است.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$E\left[e^2(n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{costant}$$

- به‌دست‌آوردن شرایط همگرایی در این حالت بسیار پیچیده‌تر از قبل است.
- الگوریتم LMS همگرا در میانگین مربعات خطا است چنانچه ضریب آموزش به‌صورت زیر انتخاب شود:

$$0 < \eta < \frac{2}{\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathbf{x}]}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$\underset{n\to\infty}{E\left[e^2(n)\right]} \to \text{costant}$$

- به‌دست‌آوردن شرایط همگرایی در این حالت بسیار پیچیده‌تر از قبل است.
- الگوریتم LMS همگرا در میانگین مربعات خطا است چنانچه ضریب آموزش به‌صورت زیر انتخاب شود:

$$0 < \eta < \frac{2}{\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathbf{x}]}$$

که در آن

$$\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathbf{x}] = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

۲- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$\underset{n\to\infty}{E\left[e^2(n)\right]} \to \text{costant}$$

- به‌دست‌آوردن شرایط همگرایی در این حالت بسیار پیچیده‌تر از قبل است.
- الگوریتم LMS همگرا در میانگین مربعات خطا است چنانچه ضریب آموزش به‌صورت زیر انتخاب شود:

$$0 < \eta < \frac{2}{\mathrm{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}]}$$

که در آن

$$\mathrm{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}] = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$$

قبلا گفته شد که ماتریس $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$، ماتریس مثبت نیمه‌معین است و برای هر ماتریس مثبت نیمه‌معین

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

- همگرایی در میانگین وزن ها

$$0 < \eta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

- همگرایی در میانگین وزن ها

$$0 < \eta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$0 < \eta < \frac{2}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

- همگرایی در میانگین وزن ها $0 < \eta < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$

- همگرایی در میانگین مربعات خطا $0 < \eta < \dfrac{2}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}$

- نتیجه این که، ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین مربعات خطا کوچکتر از ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین وزن ها است.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

- همگرایی در میانگین وزن ها

$$0 < \eta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$0 < \eta < \frac{2}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}$$

- نتیجه این که، ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین مربعات خطا کوچکتر از ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین وزن ها است.

- به عبارت دیگر، شرط همگرایی در میانگین مربعات خطا شرط همگرایی در میانگین وزن‌ها نیز دربرمی‌گیرد.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مقایسه دو همگرایی

- همگرایی در میانگین وزن ها

$$0 < \eta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

- همگرایی در میانگین مربعات خطا

$$0 < \eta < \frac{2}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}$$

- نتیجه این که، ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین مربعات خطا کوچکتر از ضریب آموزش برای همگرایی در میانگین وزن ها است.

- به عبارت دیگر، شرط همگرایی در میانگین مربعات خطا شرط همگرایی در میانگین وزن‌ها نیز دربرمی‌گیرد.

- با جملات دیگر: اگر وزن‌ها همگرا شوند، خطا نیز همگراست. ولی عکس این در حالت کلی صادق نیست.

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

– در همگرایی در میانگین مربعات خطا می‌توان به‌جای $\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathbf{x}]$ از کل توان ورودی سیگنال نیز استفاده کرد

$$0 < \eta < \frac{2}{\text{total input power}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

– در همگرایی در میانگین مربعات خطا می‌توان به‌جای $\mathrm{tr}[\mathbf{R_x}]$ از کل توان ورودی سیگنال نیز استفاده کرد

$$0 < \eta < \frac{2}{\text{total input power}}$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

– در همگرایی در میانگین مربعات خطا می‌توان به‌جای $\mathrm{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}]$ از کل توان ورودی سیگنال نیز استفاده کرد

$$0 < \eta < \frac{2}{\text{total input power}}$$

– در تمامی این تحلیل‌های ریاضی، ضریب آموزش ثابت درنظرگرفته شد. یعنی

$$\eta(n) = \eta_0 \quad \forall n$$

الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

– در همگرایی در میانگین مربعات خطا می‌توان به‌جای $\mathrm{tr}[\mathbf{R}_x]$ از کل توان ورودی سیگنال نیز استفاده کرد

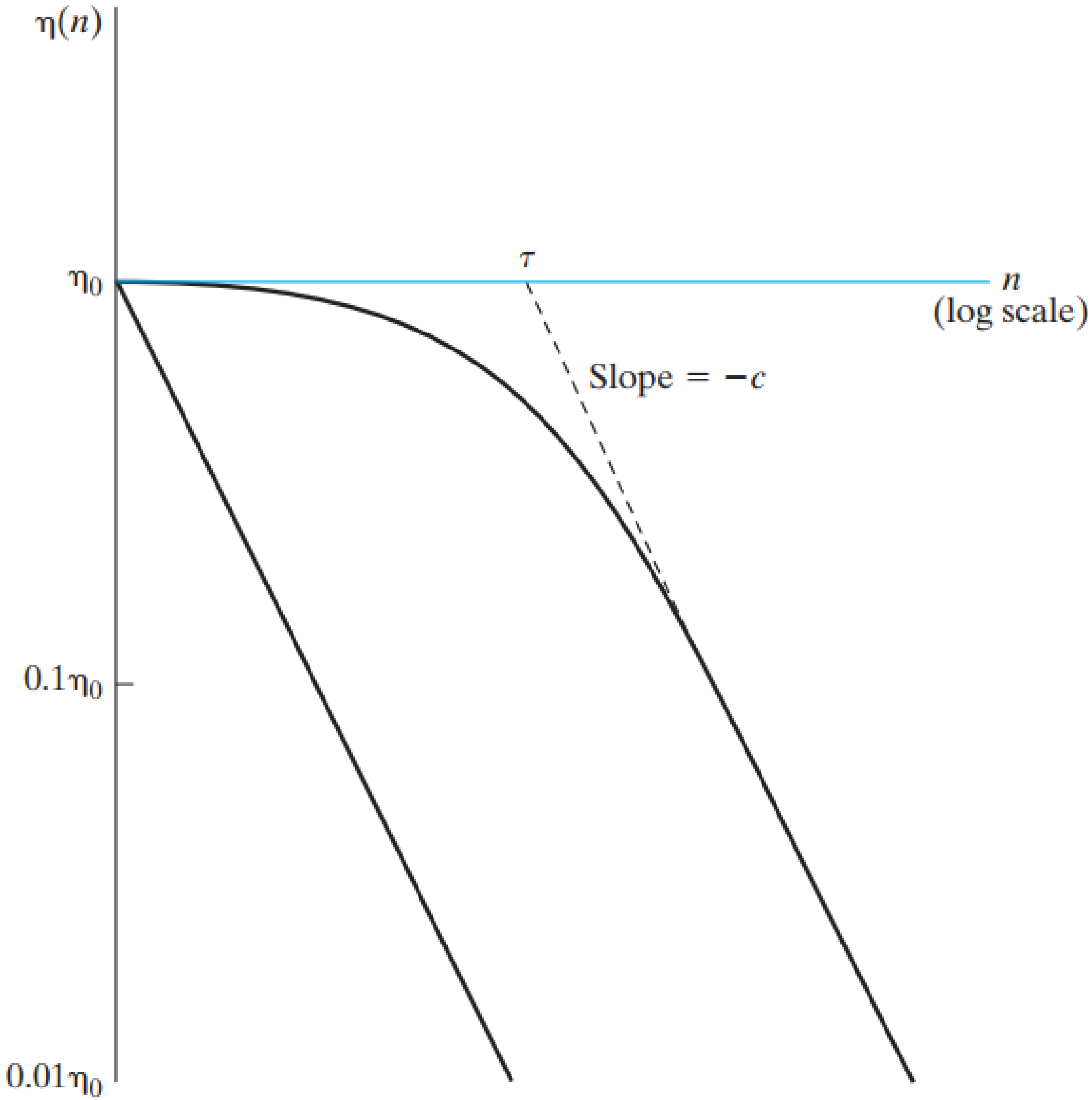
$$0 < \eta < \frac{2}{\text{total input power}}$$

– در تمامی این تحلیل‌های ریاضی، ضریب آموزش ثابت درنظرگرفته شد. یعنی

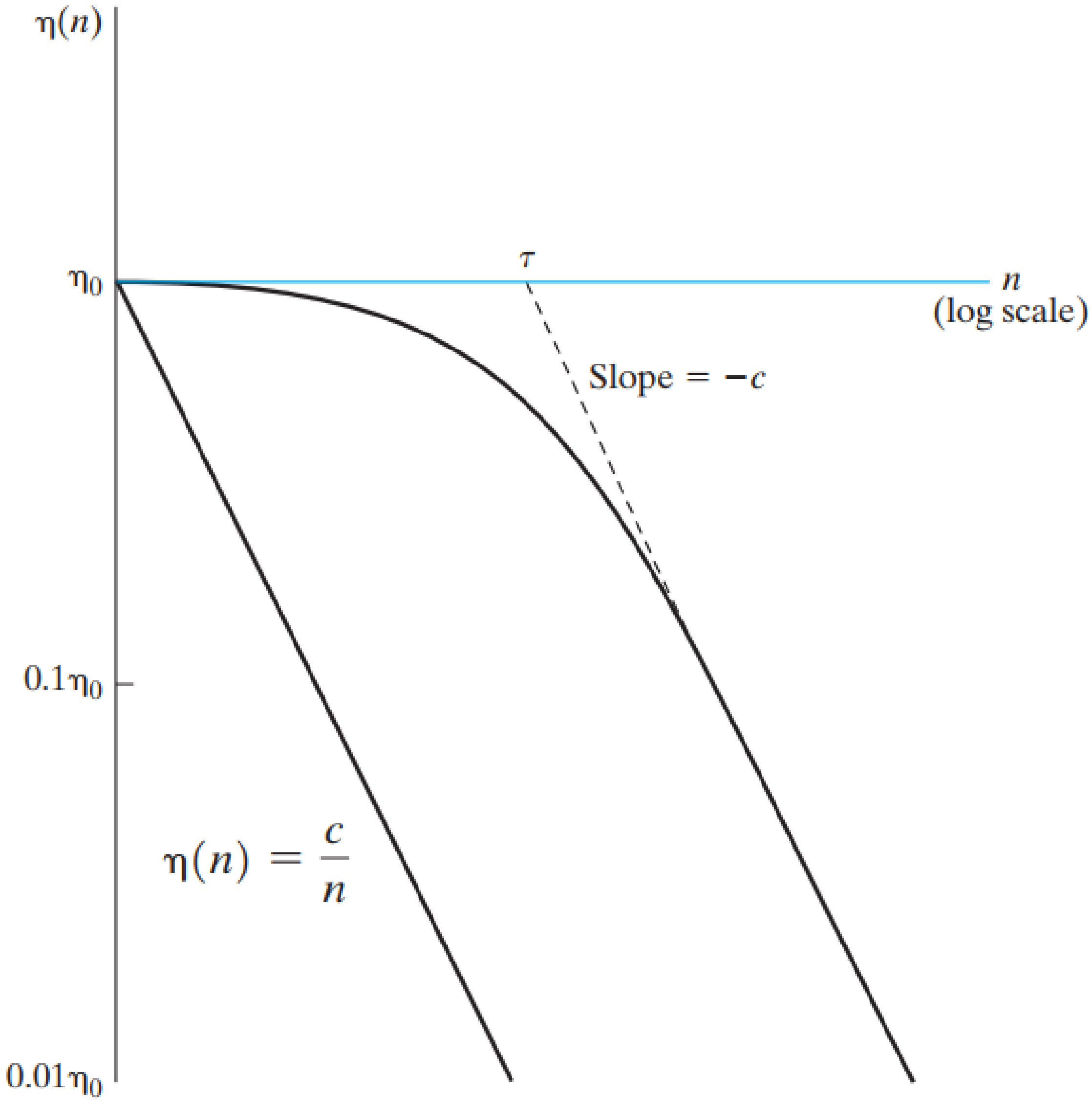
$$\eta(n) = \eta_0 \quad \forall n$$

– ولی می‌توان ضریب آموزش را به‌طور تطبیقی نیز تغییرداد.

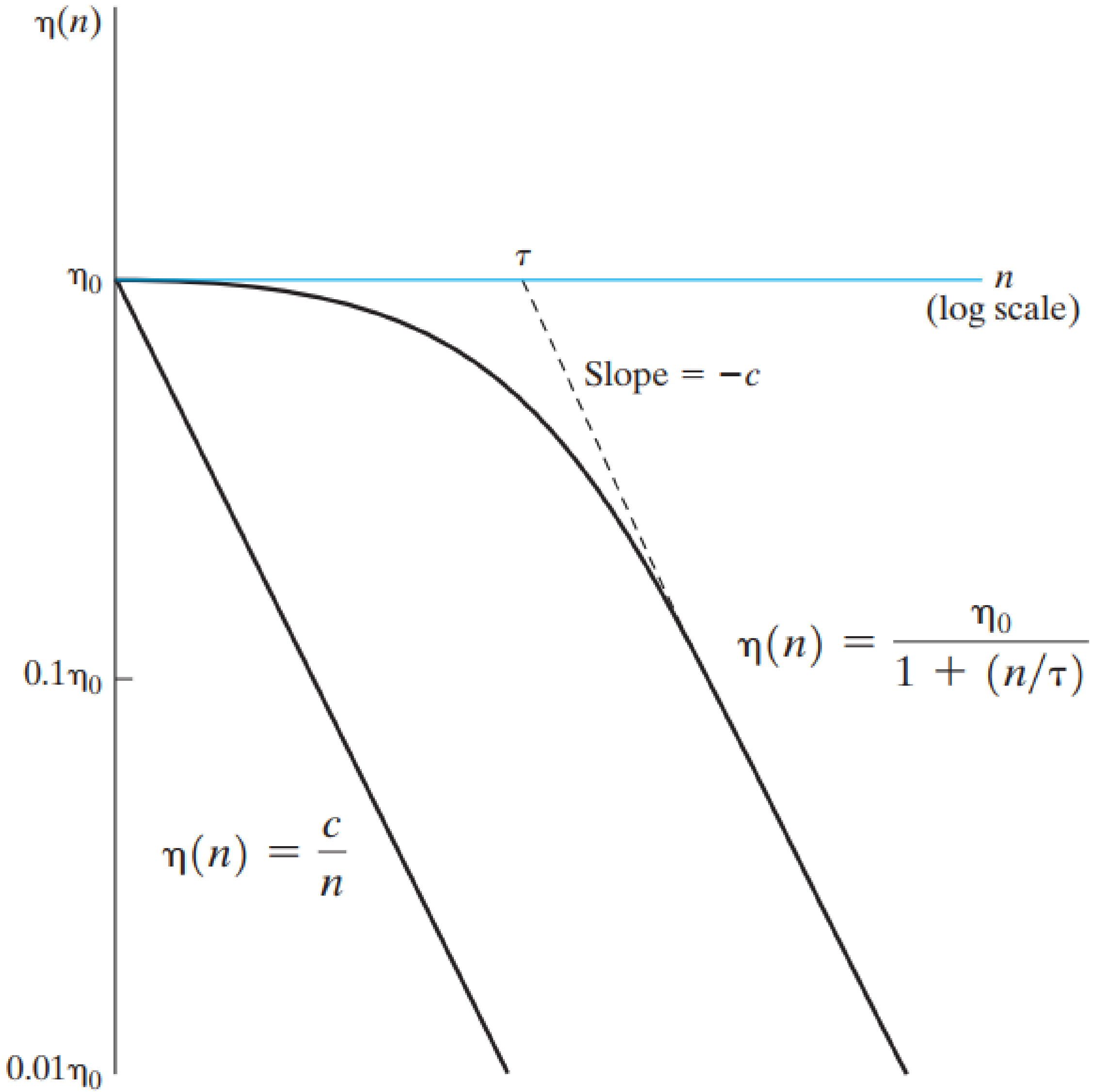
الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)



الگوریتم کمترین میانگین مربعات (LMS)

مسائل فصل ۲ (LMS) را حل کنید!