شبکه‌های عصبی مصنوعی

جلسه هفدهم:
شبکه هوپفیلد (۲)
(Hopfield Network)

محمد فرخی (farrokhi AT iust.ac.ir)

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

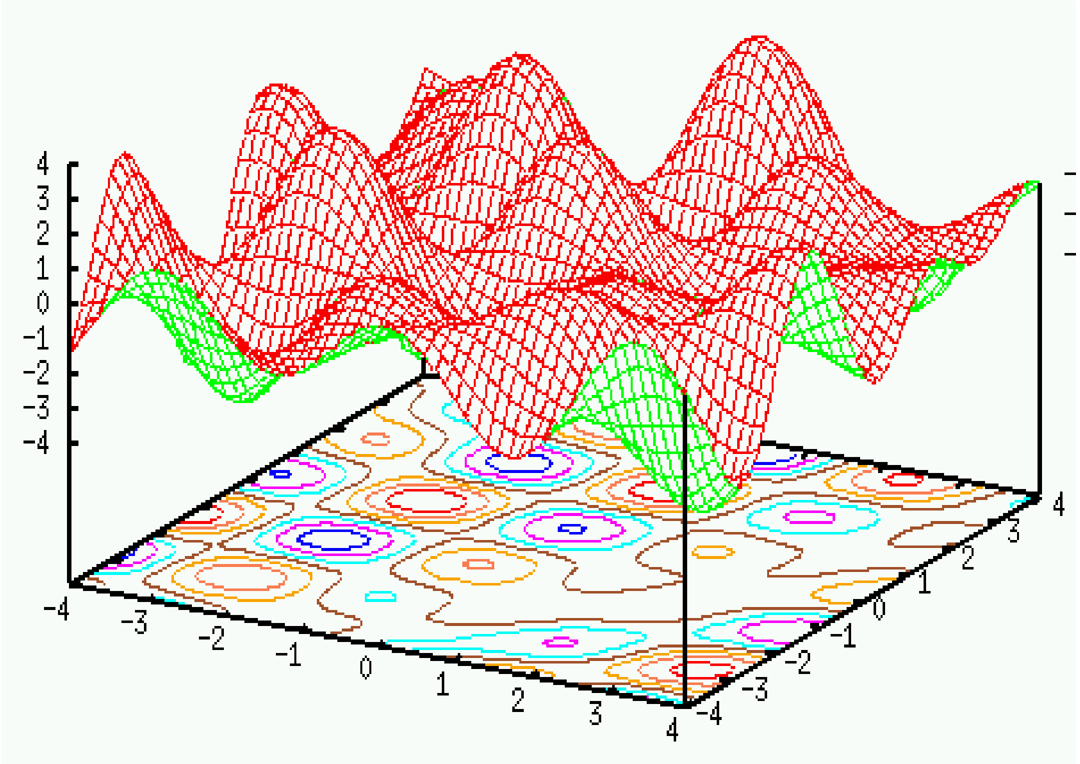
شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

– شبکه هوپفیلد شبکه‌ای است دینامیکی که برمبنای انرژی کار می‌کند.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

– شبکه هوپفیلد شبکه‌ای است دینامیکی که برمبنای انرژی کار می‌کند.

– نقاط با انرژی کم می‌توانند به‌عنوان جاذبه دینامیکی شبکه (داده‌های ذخیره‌شده) به‌کاررونند.



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

– برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

– بعد از محاسبه وزن‌ها، آن‌ها را ثابت نگه می‌داریم.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

- بعد از محاسبه وزن‌ها، آن‌ها را ثابت نگه می‌داریم.

۲- اعمال ورودی‌ها و بازیابی:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

- بعد از محاسبه وزن‌ها، آن‌ها را ثابت نگه می‌داریم.

۲- اعمال ورودی‌ها و بازیابی:

- چنانچه $\mathbf{x}$ بردار ناشناخته با N درایه باشد، در این‌صورت مقدار اولیه بردار حالت شبکه برابر است با

$$y_j(0) = x_j$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

- بعد از محاسبه وزن‌ها، آن‌ها را ثابت نگه می‌داریم.

۲- اعمال ورودی‌ها و بازیابی:

- چنانچه x بردار ناشناخته با N درایه باشد، در این‌صورت مقدار اولیه بردار حالت شبکه برابر است با

$$y_j(0) = x_j$$

۳- تکرار تا همگرایی:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

جمع‌بندی شبکه هوپفیلد:

۱- آموزش (ذخیره‌سازی):

- برای ذخیره‌سازی P الگو $\{\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_P\}$، وزن‌های شبکه به این‌صورت محاسبه می‌شوند:

$$w_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

- بعد از محاسبه وزن‌ها، آن‌ها را ثابت نگه می‌داریم.

۲- اعمال ورودی‌ها و بازیابی:

- چنانچه x بردار ناشناخته با N درایه باشد، در این‌صورت مقدار اولیه بردار حالت شبکه برابر است با

$$y_j(0) = x_j$$

۳- تکرار تا همگرایی:

- درایه‌های بردار حالت y به‌طور ناهمزمان (یعنی به‌طور اتفاقی و یک درایه در هر لحظه) برطبق رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$y_j(n+1) = \operatorname{sgn}\left[\sum_{i=1}^{N} w_{ji} y_i(n) \right]$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۱:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad -1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad -1]^T$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۱:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad -1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad -1]^T$$

۱– ذخیره‌سازی:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۱:

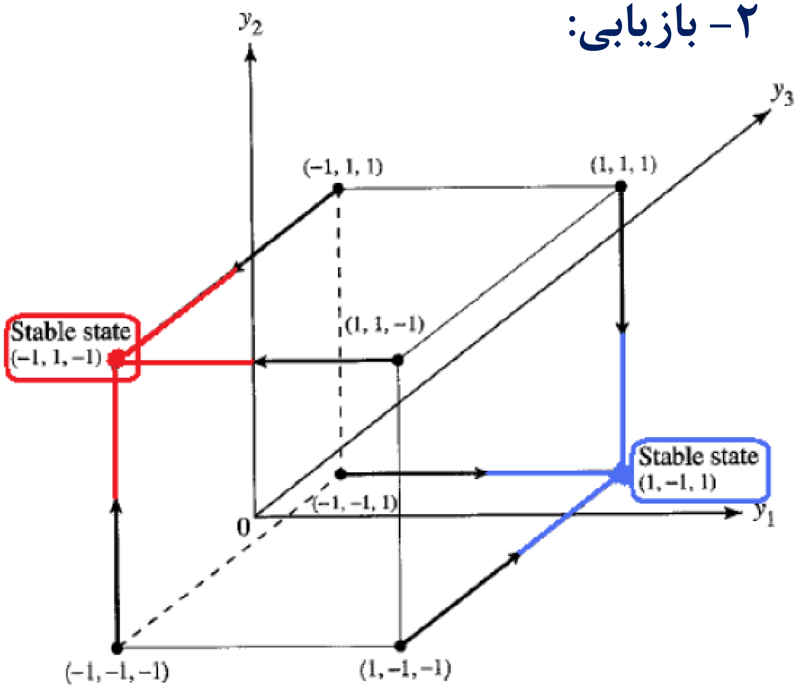
– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad -1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad -1]^T$$

۱– ذخیره‌سازی:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

۲– بازیابی:



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۲:

– فرض کنید دو بردار $[-1 \quad +1]$ و $[+1 \quad -1]$ را در شبکه هوپفیلد با ۲ سلول ذخیره کنیم.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۲:

– فرض کنید دو بردار $[-1 \quad +1]$ و $[+1 \quad -1]$ را در شبکه هوپفیلد با ۲ سلول ذخیره کنیم.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

– حال در مرحله بازیابی، به‌جای تعیین حالت سلول‌ها به‌طور پیاپی، آن‌ها را به‌طور همزمان تغییر دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

سیکل حدی
(Limit Cycle)
با طول ۲

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۳:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم:

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad +1 \quad +1]^T$$

$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad +1]^T$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۳:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم:

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad +1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad +1]^T$$

– دراین‌صورت، بردارهای زیر نیز حافظه پایدار شبکه‌اند (تمرین کنید):

$$\mathbf{y} = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$\mathbf{y} = [+1 \quad -1 \quad -1]^T$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۳:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم:

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad +1 \quad +1]^T$$

$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad +1]^T$$

– دراین‌صورت، بردارهای زیر نیز حافظه پایدار شبکه‌اند (تمرین کنید):

$$\mathbf{y} = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$$

$$\mathbf{y} = [+1 \quad -1 \quad -1]^T$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۳:

– در شبکه هوپفیلد با ۳ سلول می‌خواهیم الگوهای زیر را ذخیره‌کنیم:

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad +1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad +1]^T$$

– دراین‌صورت، بردارهای زیر نیز حافظه پایدار شبکه‌اند (تمرین کنید):

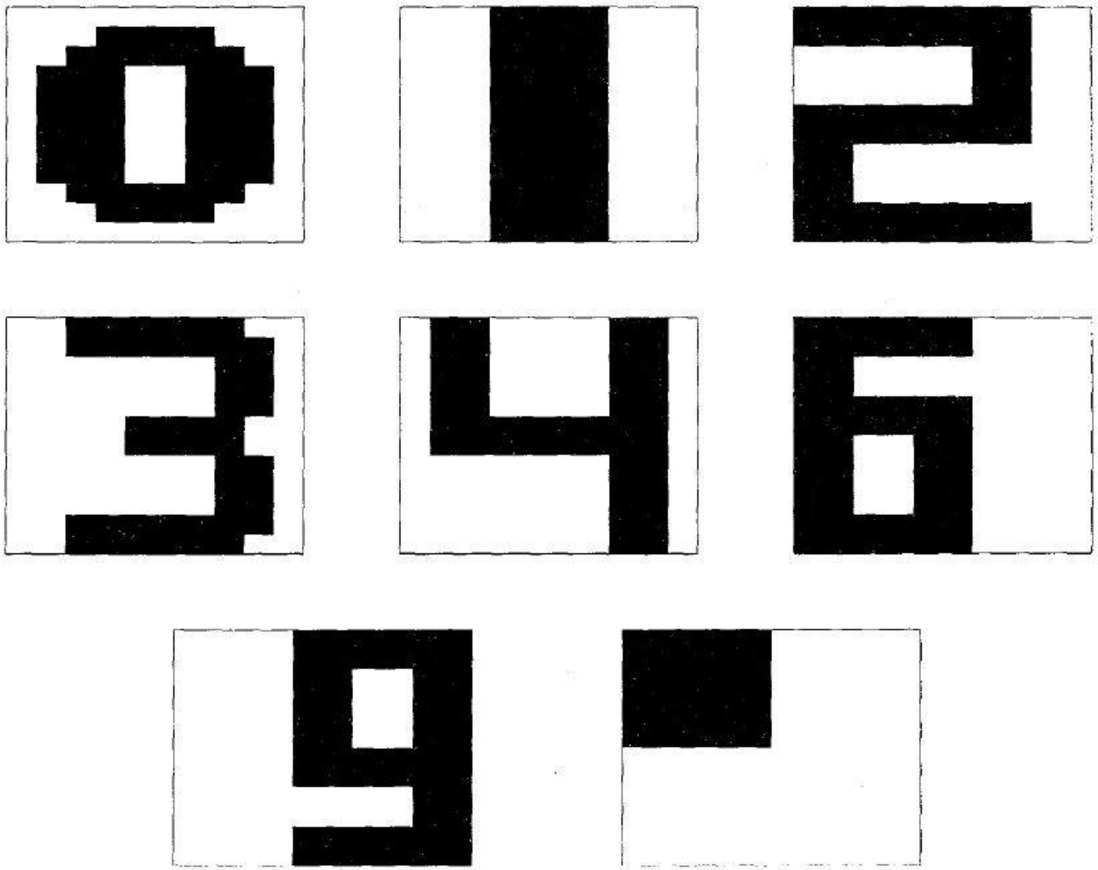
$$\mathbf{y} = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$$
$$\mathbf{y} = [+1 \quad -1 \quad -1]^T$$

– به این جاذبه‌های ناخواسته، حالت‌های بدلی (Spurious States) می‌گویند.

– برای تحلیل این حالت‌ها، تابع انرژی را بررسی خواهیم کرد.

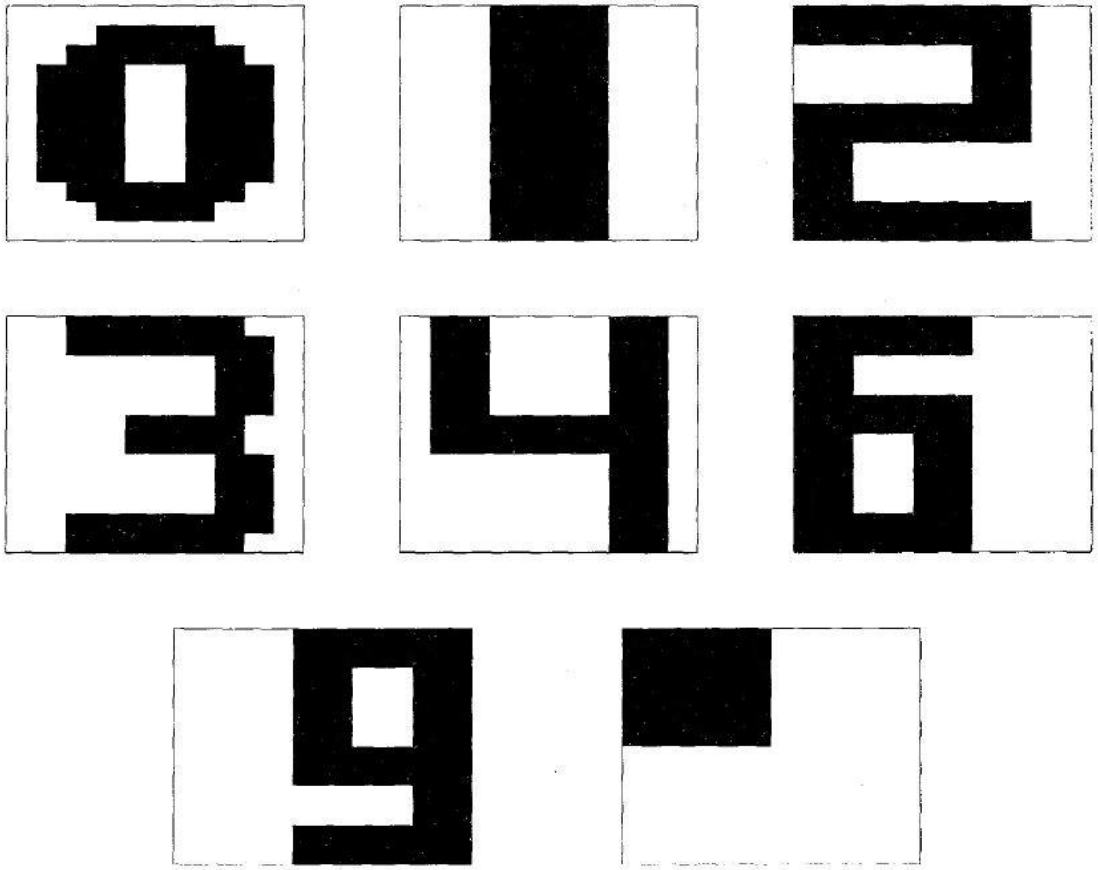
شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۴: ذخیره‌سازی اعداد



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال ۴: ذخیره‌سازی اعداد



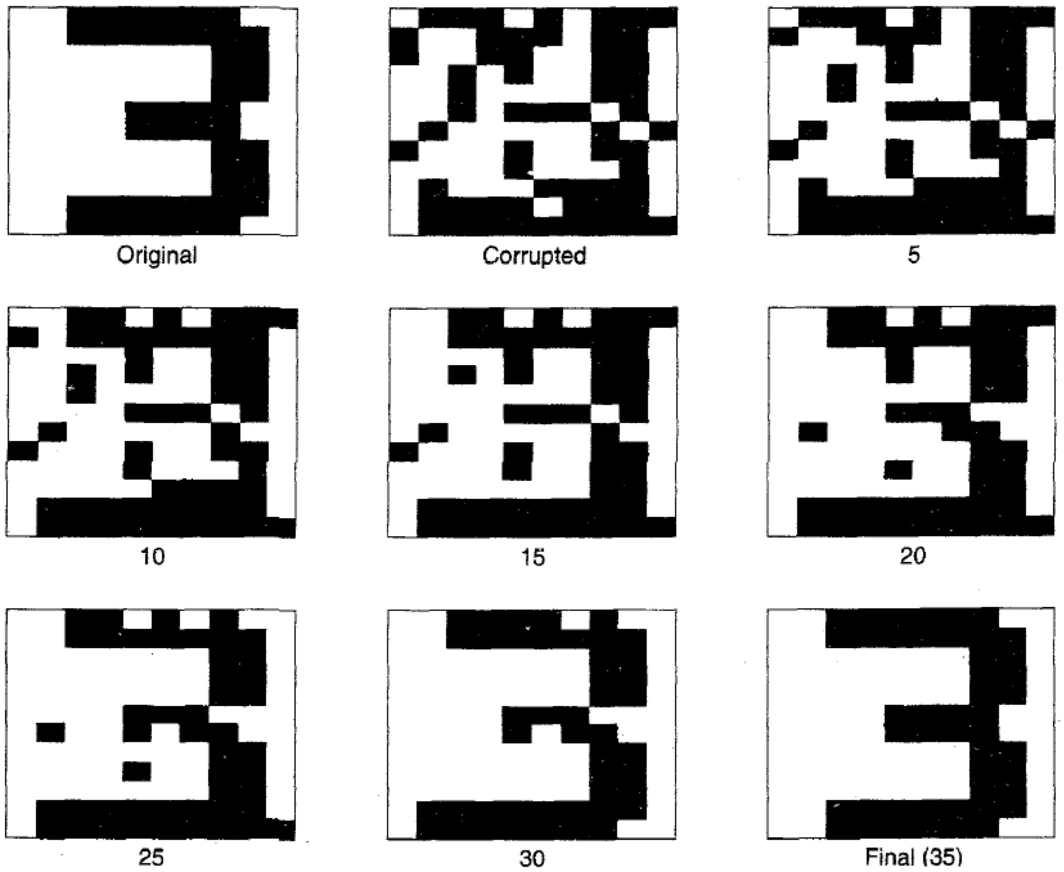
120 سلول

وزن $(N^2 - N) = 14{,}280$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال:

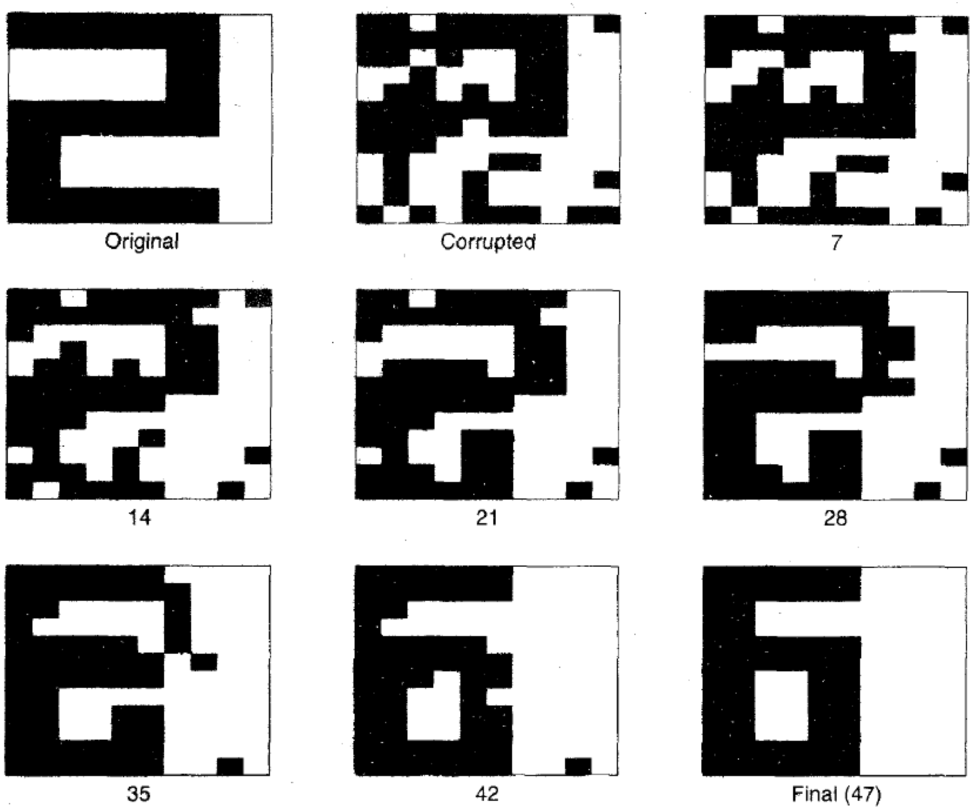
– بازسازی صحیح عدد 3



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال:

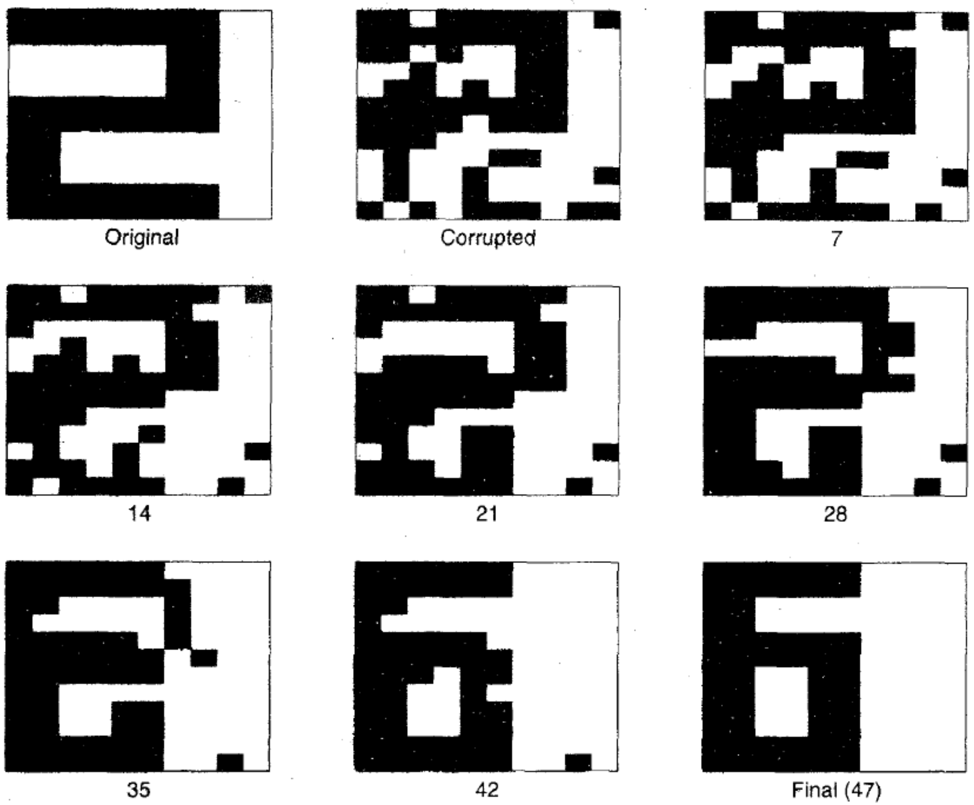
- بازسازی غلط عدد 2

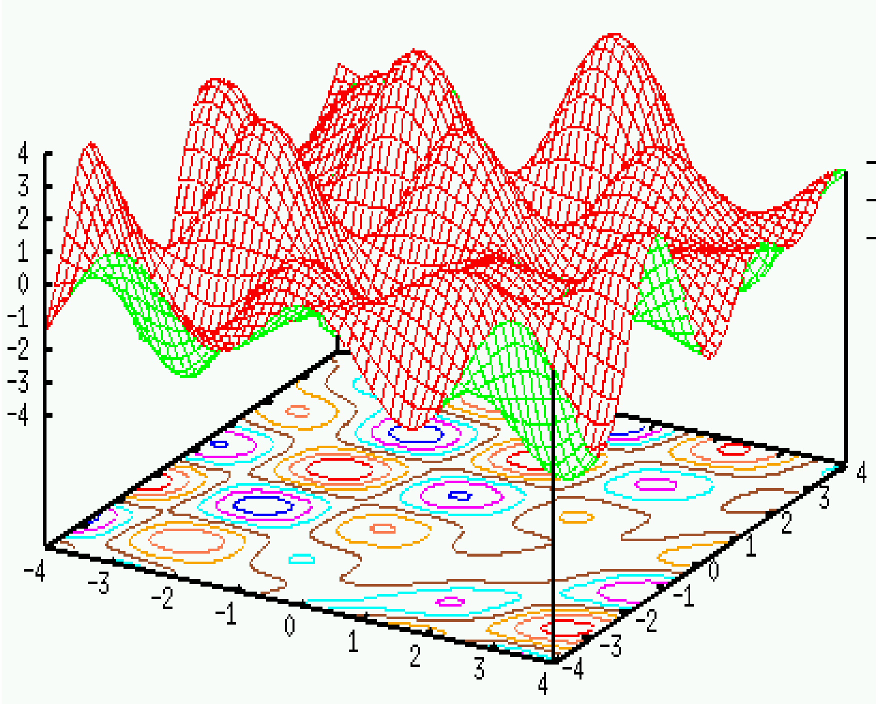


شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال:

- بازسازی غلط عدد 2





شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

مثال:

- مجموعه حالت‌های بدلی

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

- تابع انرژی در شبکه هوپفیلد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_{ji}y_iy_j, \qquad w_{ii}=0,\theta_j=0 \quad \forall i=1,\dots,N$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– تابع انرژی در شبکه هوپفیلد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ji} y_i y_j, \qquad w_{ii} = 0, \theta_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

– برای مثال ۱

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_1 &= [+1 \quad -1 \quad +1]^T \\ \underline{\xi}_2 &= [-1 \quad +1 \quad -1]^T \end{aligned} \Rightarrow \quad E = -2$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– تابع انرژی در شبکه هوپفیلد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ji} y_i y_j, \qquad w_{ii} = 0, \theta_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

– برای مثال ۱

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_1 &= [+1 \quad -1 \quad +1]^T \\ \underline{\xi}_2 &= [-1 \quad +1 \quad -1]^T \end{aligned} \Rightarrow \quad E = -2$$

سایر بردارها: $\Rightarrow \quad E = 2/3$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– تابع انرژی در شبکه هوپفیلد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ji} y_i y_j, \qquad w_{ii} = 0, \theta_j = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

– برای مثال ۱

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad -1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad -1]^T \quad \Rightarrow \quad E = -2$$

سایر بردارها: $\Rightarrow \quad E = 2/3$

– برای مثال ۳

$$\underline{\xi}_1 = [+1 \quad +1 \quad +1]^T$$
$$\underline{\xi}_2 = [-1 \quad +1 \quad +1]^T$$
$$\mathbf{y} = [-1 \quad -1 \quad -1]^T \quad \Rightarrow \quad E = -2/3$$
$$\mathbf{y} = [+1 \quad -1 \quad -1]^T$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– تابع انرژی در شبکه هوپفیلد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ji} y_i y_j, \qquad w_{ii} = 0, \theta_j = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

– برای مثال ۱

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_1 &= [+1 \quad -1 \quad +1]^T \\ \underline{\xi}_2 &= [-1 \quad +1 \quad -1]^T \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E = -2$$

سایر بردارها: $\Rightarrow \quad E = 2/3$

– برای مثال ۳

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_1 &= [+1 \quad +1 \quad +1]^T \\ \underline{\xi}_2 &= [-1 \quad +1 \quad +1]^T \\ \mathbf{y} &= [-1 \quad -1 \quad -1]^T \\ \mathbf{y} &= [+1 \quad -1 \quad -1]^T \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E = -2/3$$

سایر بردارها: $\Rightarrow \quad E = 2/3$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

- هنگامی که در شبکه هوپفیلد تعداد زیادی الگو ذخیره شود، در این‌صورت معمولا جاذبه‌هایی اضافه بر جاذبه‌های مورد نظر در شبکه ذخیره می‌شوند که به آن‌ها جاذبه‌های بدلی می‌گویند. این جاذبه‌ها به‌دلایل زیر به‌وجود می‌آیند:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– هنگامی که در شبکه هوپفیلد تعداد زیادی الگو ذخیره شود، در این‌صورت معمولا جاذبه‌هایی اضافه بر جاذبه‌های مورد نظر در شبکه ذخیره می‌شوند که به آن‌ها جاذبه‌های بدلی می‌گویند. این جاذبه‌ها به‌دلایل زیر به‌وجود می‌آیند:

۱– از معادله انرژی شبکه می‌توان دریافت که مقدار انرژی برای دو حالت y و $-y$ برابر و کمینه است.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– هنگامی که در شبکه هوپفیلد تعداد زیادی الگو ذخیره شود، در این‌صورت معمولا جاذبه‌هایی اضافه بر جاذبه‌های مورد نظر در شبکه ذخیره می‌شوند که به آن‌ها جاذبه‌های بدلی می‌گویند. این جاذبه‌ها به‌دلایل زیر به‌وجود می‌آیند:

۱– از معادله انرژی شبکه می‌توان دریافت که مقدار انرژی برای دو حالت y و $-y$ برابر و کمینه است.

۲– ترکیب تعداد فرد از الگوهای ذخیره‌شده می‌تواند جاذبه به‌وجود آورد. این امر معمولا در شبکه‌های بزرگ پدید می‌آید.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

تابع انرژی و حالت‌های بدلی:

– هنگامی که در شبکه هوپفیلد تعداد زیادی الگو ذخیره شود، در این‌صورت معمولا جاذبه‌هایی اضافه بر جاذبه‌های مورد نظر در شبکه ذخیره می‌شوند که به آن‌ها جاذبه‌های بدلی می‌گویند. این جاذبه‌ها به‌دلایل زیر به‌وجود می‌آیند:

۱– از معادله انرژی شبکه می‌توان دریافت که مقدار انرژی برای دو حالت y و $-y$ برابر و کمینه است.

۲– ترکیب تعداد فرد از الگوهای ذخیره‌شده می‌تواند جاذبه به‌وجود آورد. این امر معمولا در شبکه‌های بزرگ پدید می‌آید.

۳– برای تعداد زیاد الگوی ذخیره‌شده، معمولا کمینه‌های محلی به‌وجود می‌آید که بردار حالت در آن نقاط با الگوهای ذخیره‌شده فرق دارد.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}$$

– اکنون فرض‌کنید بردار آزمایشی x را به شبکه اعمال می‌کنیم. جمع خطی ورودی‌ها به سلول jام:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji}x_i$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i}$$

– اکنون فرض‌کنید بردار آزمایشی x را به شبکه اعمال می‌کنیم. جمع خطی ورودی‌ها به سلول jام:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i$$

– از دو رابطه بالا:

$$v_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} x_i$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}$$

– اکنون فرض‌کنید بردار آزمایشی x را به شبکه اعمال می‌کنیم. جمع خطی ورودی‌ها به سلول jام:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji}x_i$$

– از دو رابطه بالا:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}x_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}x_i$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}$$

– اکنون فرض‌کنید بردار آزمایشی $\mathbf{x}$ را به شبکه اعمال می‌کنیم. جمع خطی ورودی‌ها به سلول jام:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i$$

– از دو رابطه بالا:

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}x_i \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}x_i \end{aligned}$$

– حال فرض‌کنید که بردار آزمایشی $\mathbf{x}$ به یکی از حافظه‌های ذخیره‌شده در شبکه (مثلا $\underline{\xi}_\nu$) همگرا شود. یعنی $\mathbf{x} = \underline{\xi}_\nu$. بنابراین

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– معادله تنظیم وزن‌ها ($w_{ii} \neq 0$):

$$w_{ji} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i}$$

– اکنون فرض‌کنید بردار آزمایشی $\mathbf{x}$ را به شبکه اعمال می‌کنیم. جمع خطی ورودی‌ها به سلول jام:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i$$

– از دو رابطه بالا:

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \xi_{\mu i} x_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \sum_{i=1}^{N} \xi_{\mu i} x_i \end{aligned}$$

– حال فرض‌کنید که بردار آزمایشی $\mathbf{x}$ به یکی از حافظه‌های ذخیره‌شده در شبکه (مثلا $\underline{\xi}_\nu$) همگرا شود. یعنی $\mathbf{x} = \underline{\xi}_\nu$. بنابراین

$$v_j = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_{\mu j} \sum_{i=1}^{N} \xi_{\mu i} \xi_{\nu i}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

سیگنال
دلخواه

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

سیگنال دلخواه

نویز

(تداخل بین $\underline{\xi}_\nu$ و $\underline{\xi}_\mu$)

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

سیگنال دلخواه

نویز (تداخل بین $\underline{\xi}_\nu$ و $\underline{\xi}_\mu$)

– بنابراین، با مساله آشکارسازی سیگنال از نویز مواجه هستیم.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

سیگنال دلخواه

نویز (تداخل بین $\underline{\xi}_\nu$ و $\underline{\xi}_\mu$)

– بنابراین، با مساله آشکارسازی سیگنال از نویز مواجه هستیم.

– برای تعداد زیاد سلول (N) و تعداد زیاد الگو (P)، برطبق قضیه حد مرکزی (Central limit theorem) توزیع جملات نویز به‌صورت گوسی (نرمال) در می‌آید. هرکدام از جملات نویز دارای میانگین صفر و واریانس $1/N^2$ خواهدبود.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$v_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

و یا

$$v_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{P}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

سیگنال
دلخواه

نویز
(تداخل بین $\underline{\xi}_\nu$ و $\underline{\xi}_\mu$)

- بنابراین، با مساله آشکارسازی سیگنال از نویز مواجه هستیم.

- برای تعداد زیاد سلول (N) و تعداد زیاد الگو (P)، برطبق قضیه حد مرکزی (Central limit theorem) توزیع جملات نویز به‌صورت گوسی (نرمال) در می‌آید. هرکدام از جملات نویز دارای میانگین صفر و واریانس $1/N^2$ خواهدبود.

- بنابراین، کل توزیع نرمال دارای میانگین صفر و واریانس زیر خواهدبود:

$$\frac{1}{N^2}[N(P-1)] = \frac{P-1}{N} \simeq \frac{P}{N}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین=صفر و واریانس=۱

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین = صفر و واریانس = ۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین = صفر و واریانس = ۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

– بنابراین، برای این که درایه $\xi_{\nu j}$ حافظه پایدار شبکه باشد (یا به‌عبارت دیگر برای آشکارسازی کامل سیگنال از نویز) باید ρ (نسبت سیگنال به نویز) عددی بزرگ باشد.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

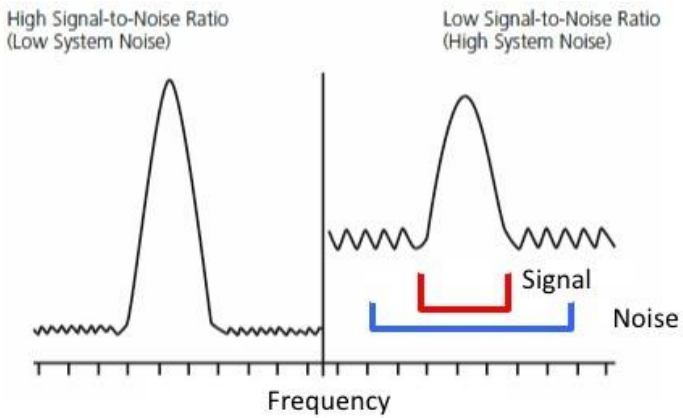
$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین=صفر و واریانس=۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

– بنابراین، برای این که درایه $\xi_{\nu j}$ حافظه پایدار شبکه باشد (یا به‌عبارت دیگر برای آشکارسازی کامل سیگنال از نویز) باید ρ (نسبت سیگنال به نویز) عددی بزرگ باشد.



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

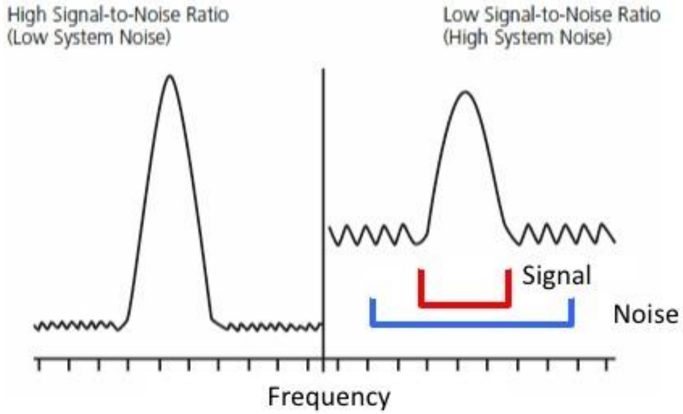
$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین=صفر و واریانس=۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

– بنابراین، برای این که درایه $\xi_{\nu j}$ حافظه پایدار شبکه باشد (یا به‌عبارت دیگر برای آشکارسازی کامل سیگنال از نویز) باید ρ (نسبت سیگنال به نویز) عددی بزرگ باشد.



یعنی

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

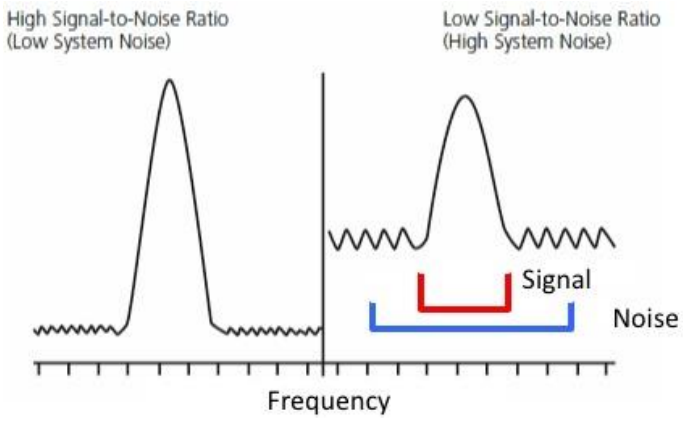
$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین= صفر و واریانس = ۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

– بنابراین، برای این که درایه $\xi_{\nu j}$ حافظه پایدار شبکه باشد (یا به‌عبارت دیگر برای آشکارسازی کامل سیگنال از نویز) باید ρ (نسبت سیگنال به نویز) عددی بزرگ باشد.



یعنی

- P ثابت $\leftarrow N$ بزرگ

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برحسب تعریف، نسبت سیگنال به نویز برابر است با

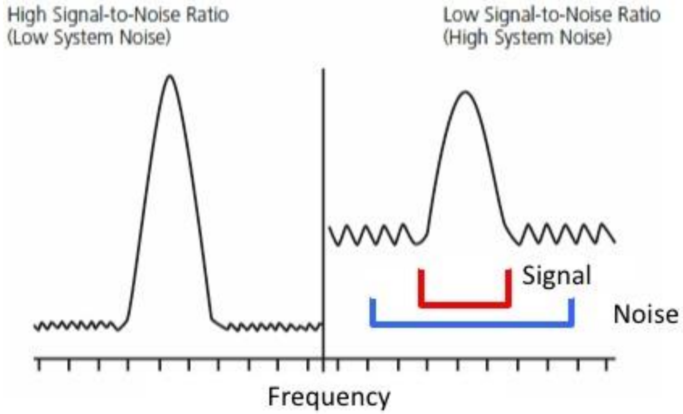
$$\rho = \frac{\text{واریانس سیگنال}}{\text{واریانس نویز}}$$

– برای سیگنال $\xi_{\nu j} \in \{-1, +1\}$ ، میانگین=صفر و واریانس=۱

در نتیجه

$$\rho \cong \frac{1}{P/N} = \frac{N}{P}$$

– بنابراین، برای این که درایه $\xi_{\nu j}$ حافظه پایدار شبکه باشد (یا به‌عبارت دیگر برای آشکارسازی کامل سیگنال از نویز) باید ρ (نسبت سیگنال به نویز) عددی بزرگ باشد.



یعنی

- P ثابت ← N بزرگ
- N ثابت ← P کوچک

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

- رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی
- فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

- رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی
- فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

در این‌صورت، احتمال این‌که مجموع خطی ورودی به سلول j (یعنی v_j) بزرگتر از صفر باشد به‌شرط این‌که $\xi_{\nu j} = +1$ باشد (یعنی احتمال این‌که درایه jام بردار $\underline{\xi}_\nu$ به طور صحیح بازیابی شود) برابر است با

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی

– فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

در این‌صورت، احتمال این‌که مجموع خطی ورودی به سلول j (یعنی v_j) بزرگتر از صفر باشد به‌شرط این‌که $\xi_{\nu j} = +1$ باشد (یعنی احتمال این‌که درایه jام بردار $\underline{\xi}_\nu$ به طور صحیح بازیابی شود) برابر است با

$$\mathrm{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(v_j-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dv_j$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

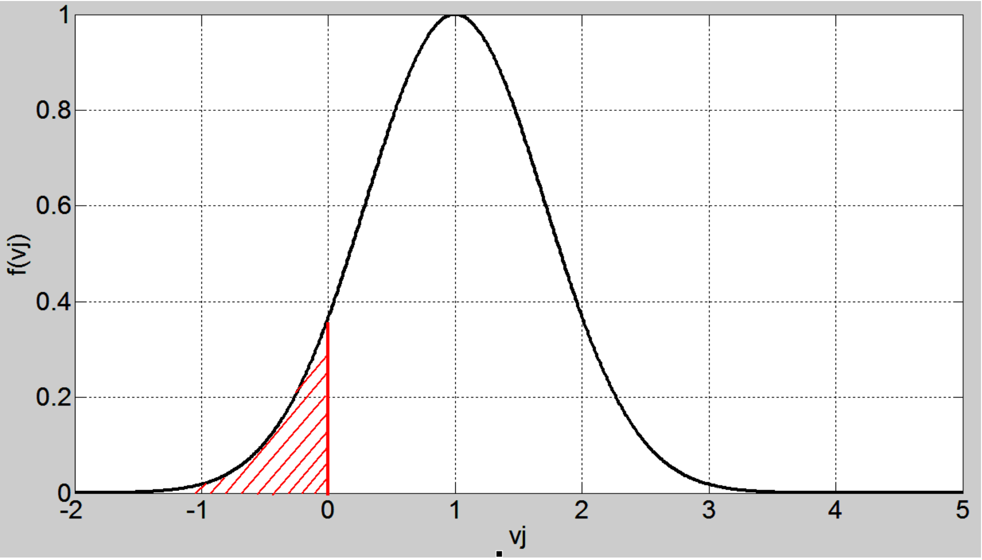
ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی

– فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

در این‌صورت، احتمال این‌که مجموع خطی ورودی به سلول j (یعنی v_j) بزرگتر از صفر باشد به‌شرط این‌که $\xi_{\nu j} = +1$ باشد (یعنی احتمال این‌که درایه jام بردار $\underline{\xi}_\nu$ به طور صحیح بازیابی شود) برابر است با

$$\mathrm{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(v_j - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dv_j$$



شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

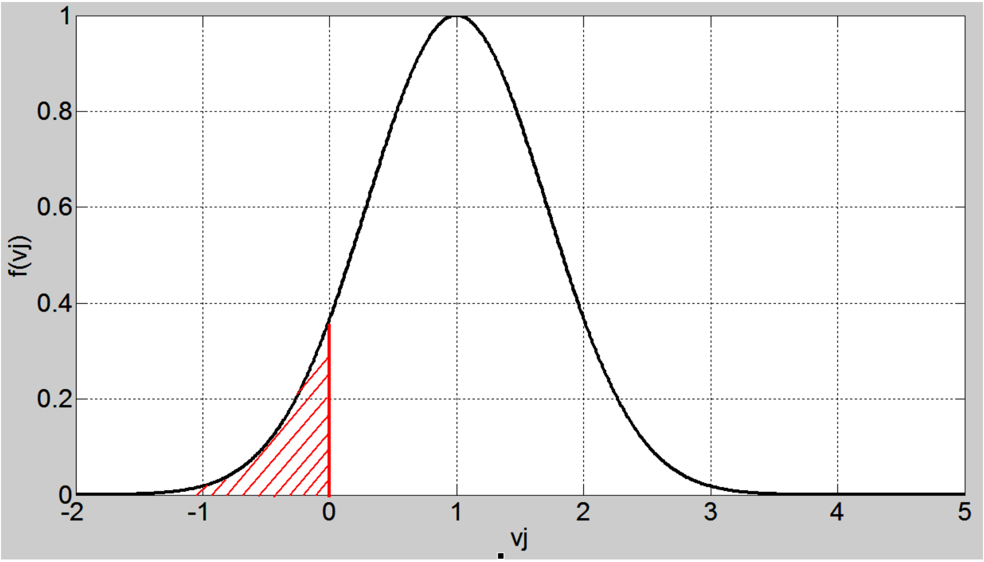
ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی

– فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

در این‌صورت، احتمال این‌که مجموع خطی ورودی به سلول j (یعنی v_j) بزرگتر از صفر باشد به‌شرط این‌که $\xi_{\nu j} = +1$ باشد (یعنی احتمال این‌که درایه jام بردار $\underline{\xi}_\nu$ به طور صحیح بازیابی شود) برابر است با

$$\mathrm{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(v_j - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dv_j$$



میانگین v_j برابر با امید ریاضی $\xi_{\nu j}$ و برابر با ۱ می‌باشد.

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

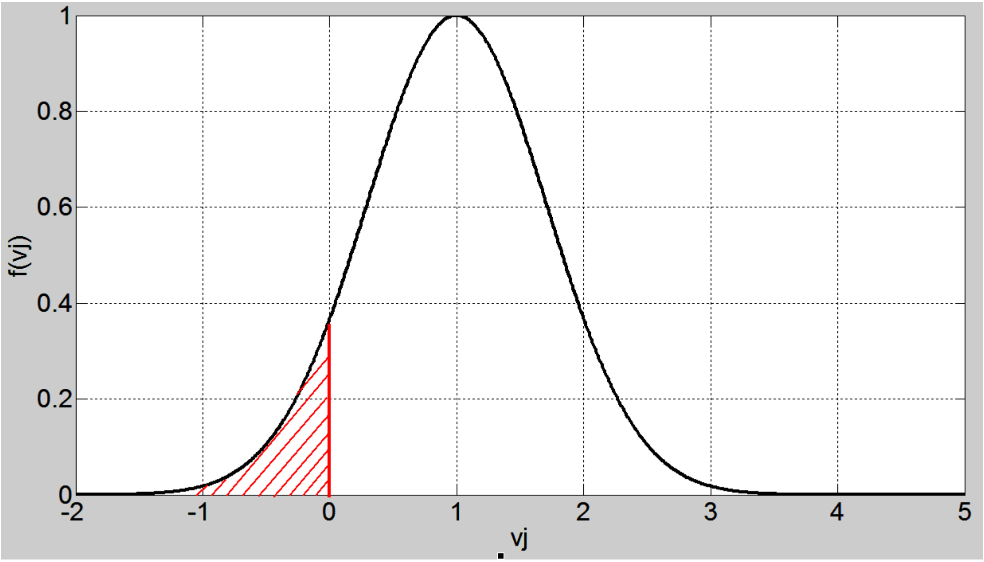
ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– رابطه دقیق‌تر برای احتمال آشکارسازی

– فرض کنید $\xi_{\nu j} = +1$:

در این‌صورت، احتمال این‌که مجموع خطی ورودی به سلول j (یعنی v_j) بزرگتر از صفر باشد به‌شرط این‌که $\xi_{\nu j} = +1$ باشد (یعنی احتمال این‌که درایه jام بردار $\underline{\xi}_\nu$ به طور صحیح بازیابی شود) برابر است با

$$\text{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(v_j-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dv_j$$



میانگین v_j برابر با امید ریاضی $\xi_{\nu j}$ و برابر با ۱ می‌باشد.

واریانس برابر P/N

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$\mathrm{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(v_j - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dv_j$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

$$\text{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(v_j - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dv_j$$

– مقدار رابطه بالا برای واریانس‌های مختلف

$\text{prob}(v_j > 0 \mid \xi_{\nu j} = +1)$	$P_{\max}/N$
0.999	0.105
0.9964	0.138
0.98	0.185
0.95	0.37
0.9	0.61

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_\nu$ با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

- برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_{\nu}$ با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$\left[\mathrm{prob(signal)}\right]^{N} > 0.99$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

- برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_{\nu}$ با احتمال بازیابی ۰٫۹۹ و بیشتر

$$\left[\text{prob}(\text{signal})\right]^{N} > 0.99 \qquad \Rightarrow \qquad P_{\max} = \frac{N}{2\ \ln N}$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_\nu$ با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$[\text{prob(signal)}]^N > 0.99 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{N}{2\ \ln N}$$

– و برای بازیابی تمام P الگو با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_\nu$ با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$\left[\text{prob}(\text{signal})\right]^N > 0.99 \qquad \Rightarrow \qquad P_{\max} = \frac{N}{2\ \ln N}$$

– و برای بازیابی تمام P الگو با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$\left[\text{prob}(\text{signal})\right]^{PN} > 0.99$$

شبکه هوپفیلد (Hopfield Network)

ظرفیت شبکه هوپفیلد:

– برای N درایه در بردار $\underline{\xi}_\nu$ با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$\left[\mathrm{prob}(\mathrm{signal})\right]^{N} > 0.99 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{N}{2\ \ln N}$$

– و برای بازیابی تمام P الگو با احتمال بازیابی ۰/۹۹ و بیشتر

$$\left[\mathrm{prob}(\mathrm{signal})\right]^{PN} > 0.99 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{N}{4\ \ln N}$$