نظریه الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

دکتر فضلی | دانا افاضلی

تمرین اول

مسئله‌ی ۱. تعاریف اولیه

یک بازی را میتوان با دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ که $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ نشان داد. به این شکل که در صورتی که بازیکن اول عمل i و بازیکن دوم عمل j را انجام دهد، به ترتیب مقادیر a_{ij} و b_{ij} را به عنوان پاداش دریافت میکنند. یک استراتژی مخلوط برای یک بازیکن، توزیعی است بر روی عمل‌های ممکن آن بازیکن و میتوان آنرا با یک بردار $x \in \Delta_k$ که k تعداد اعمال آن بازیکن است نشان داد. یک پروفایل استراتژی یک دوتایی (x, y) است که $x \in \Delta_n$ و $y \in \Delta_m$.

الف

تعریف ریاضی یک تعادل نش مخلوط (احتمالاتی) را با توجه به نوتیشن گفته شده بنویسید.

ب

درباره‌ی Pareto Efficiency تحقیق کنید و آنرا با توجه به نوتیشن بالا بیان کنید.

ج

دو ماتریس پاداش باید در چه شرطی صدق کنند تا بازی متقارن باشد؟

حل.

الف

یک پروفایل استراتژی (x^*, y^*) را تعادل نش احتمالاتی میگوییم اگر و تنها اگر:

$$\forall x \in \Delta_n, y \in \Delta_m : x^T Ay^* \leqslant (x^*)^T Ay^*, (x^*)^T By \leqslant (x^*)^T By^*$$

ب

این مفهوم را اینطور میتوان بیان داشت که به پروفایل استراتژی Pareto Efficient یا Pareto Optimal گفته میشود که نتوان استراتژی پروفایل دیگری پیدا کرد که تمامی بازیکنان حداقل به همان اندازه پروفایل قبلی مطلوبیت بدست آورند و حداقل یک بازیکن باشد که مطلوبیت بیشتری کسب کند. به عبارتی یک پروفایل (x^*, y^*) را Pareto Optimal گوییم اگر و تنها اگر

$$\nexists x \in \Delta_n, y \in \Delta_m : x^T Ay \geqslant (x^*)^T Ay^*, x^T By \geqslant (x^*)^T By^*, x^T (A + B)y > (x^*)^T (A + B)y^*$$

ج

$$A^T = B$$

▷

مسئله‌ی ۲. بازی‌های معروف

در ادامه ۳ ماتریس پاداش برای ۳ بازی مختلف که اسامی آنها **Prisoner’s Dilemma** و **Battle of the Sexes** و **Chicken** هستند (نه لزوما به همین ترتیب) میباشند.

الف

درباره‌ی این بازی‌ها تحقیق کنید و بیان کنید کدام ماتریس برای کدام بازی است.

ب

تعادل نش هر بازی را محاسبه کنید (هر راه درستی قابل قبول است).

-10,-10	3,-2
-2 3,	0,0

-1,-1	-5,0
0,-5	-3,-3

10,2	-5,-5
-5,-5	2,10

حل. Prisoner’s Dilemma:

-1,-1	-5,0
0,-5	-3,-3

میدانیم که در این مسئله تعادل قطعی $(-3, -3)$ را داریم.

Battle of the sexes

	y	(1-y)
x	10,2	-5,-5
1-x	-5,-5	2,10

1: 10y-5(1-y)
2: -5y+2(1-y)
1=2 -> y=7/22

1: 2x−5(1−x)
2: −5x+10(1−x)
1=2 −> x=15/22

با استفاده از اصل بی تفاوتی به سادگی.

Chicken Game

-10,-10	3,-2
-2 3,	0,0

با استفاده از اصل بی تفاوتی به سادگی. ▷

مسئله‌ی ۳. تکنیک‌های محاسبه تعادل نش

الف

درباره‌ی تکنیک Indifference Principle تحقیق کنید و از نوتیشن مطرح شده در سوال ۱ استفاده کنید و آنرا به شکل ریاضی بیان کنید (میتوانید نوتیشن جدید معرفی کنید).

ب

درباره‌ی تکنیک Iterative Elimination of Dominated Strategies تحقیق کنید و با استفاده از این روش تعادل نش ماتریس زیر را پیدا کنید:

2

1

4,4	3,1	4,2
2,2	1,1	2,3
3,3	4,1	3,4

حل.

الف

این اصل بیان دارد که در یک بازی ۲ نفره، اگر در تعادل نش باشیم، برای یک بازیکن فرقی بین اعمالی که به آنها احتمال مثبت داده نیست (ترجیحی وجود ندارد) چرا که اگر داشت آنرا وزن بیشتری میداد و مطلوبیت بیشتری میگرفت. برای بیان ریاضی، فرض کنید که عنصر i م بردارد v را با v_i نشان دهیم و (x^*, y^*) تعادل نش باشند. پس

$$\exists a : x_i^* > ۰ \iff a = (Ay^*)_i$$

بازیکن اول را در راستای سطر و دوم در راستای ستون بررسی میکنیم

ب

در هر مرحله اگر بازیکنی حرکتی داشت که توسط حرکت دیگری از آن بازیکن کاملا مغلوب بود (تمامی پاداش‌های متناظرش کمتر بود) میتوان گفت که آن بازیکن ان حرکت را انجام نمیدهد چون فارغ از نتیجه برای او گزینه بهتری موجود است. با پیاده سازی این تکنیک به جواب $(۴, ۴)$ میرسیم. ▷

مسئله‌ی ۴.

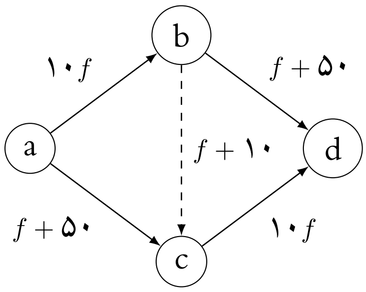
n نفر در یک بازی شرکت کرده اند و هرکدام بدون اطلاع از دیگری به بازی میپردازند. هرکس میتواند تصمیم بگیرد که داوطلب بشود یا خیر. در صورتی که تعدادی داوطلب بشوند به افرادی که نشدند ۱۵۰۰ تومان و به افرادی که شدند ۱۰۰۰ تومان پاداش تعلق میگیرد و در صورتی که کسی داوطلب نشود به هیچکس پاداشی داده نمیشود. تعادل نش این بازی را پیدا کرده و نشان دهید که یکتاست.

حل. احتمال داوطلب نشدن افراد را $v_۱, ..., v_n$ در نظر بگیرید. حال از دید بازیکن ۱ به بازی نگاه کنید و بقیه افراد را به عنوان یک بازیکن در نظر بگیرید که داوطلب میشود اگر حداقل یک نفر از بقیه داوطلب شود. برای بازیکن شماره ۱ و این بازیکن فرضی جدید تعادل نش حساب کنید (با اصل بی نفاوتی). حال میتوان جای بازیکن ۱ هر بازیکن دیگری را قرار داد. به n معادله و مجهول میرسیم و مسئله حل میشود. ▷

مسئله‌ی ۵. پارادوکس بریس: بازبینی

الف

پارادوکس بریس را در شبکه زیر توضیح دهید (یال خط چین بناست که اضافه شود). به یالی که f واحد ترافیک از خود عبور میدهد مقداری که روی هر یال نوشته شده هزینه تعلق میگیرد. در کل ۶ واحد صحیح ترافیک داریم که از نقطه a به d میروند.



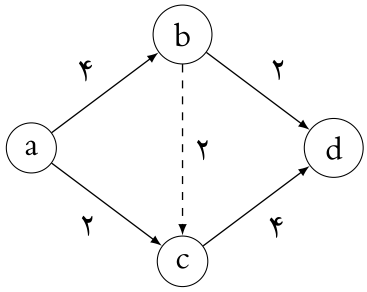
ب

پارادوکس بریس رخ داده در این مثال را به زبان Pareto Efficiency و تعادل نش بیان کنید.

حل.

الف

در حالتی که خط چین نیست از هر مسیر ۳ واحد میگذرد و متوسط زمان سفر هر شخص برابر ۸۳ واحد است. حال اگر خط چین را اضافه کنیم، میزان ترافیک تعادل جدید به شکل زیر خواهد بود:



متوسط زمان مسیر هر شخص در این حالت ۹۲ است.

ب

میتوان گفت که رخ دادن پارادوکس به این معناست که تعادلات نش سیستم بعد از تغییر شبکه، Pareto Optimal نیستند. زیرا پروفایل دیگری وجود دارد که تعادل نیست ولی همه در آن وضع بهتری دارند. ▷

مسئله‌ی ۶. هزینه آشوب در شبکه‌های ترافیکی

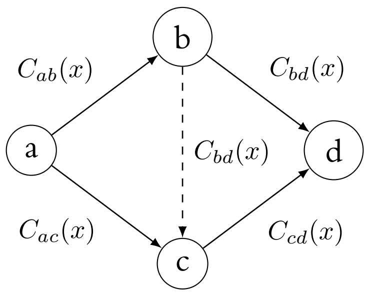
شبکه‌ی ترافیکی زیر با f واحد پیوسته ترافیک در نظر بگیرید که از a به b میرود. فرض کنید هزینه کل جامعه (مجموع هزینه‌های f واحد ترافیک) در حالتی که یال خط چین وجود ندارد و شبکه به تعادل رسیده برابر $C_۱$ و در حالتی که آنرا اضافه کنیم و شبکه در تعادل جدید باشد برابر $C_۲$ باشد. تمامی توابع هزینه یال‌ها خطی هستند. برای درک بهتر، اگر میزان ترافیک یالها را در حالت اولیه با x_e و در حالت ثانویه را با x'_e نشان دهیم، در آنصورت

$$C_۱ = C_{ab}(x_{ab})x_{ab} + C_{ac}(x_{ac})x_{ac} + C_{bd}(x_{bd})x_{bd} + C_{cd}(x_{cd})x_{cd}$$
$$C_۲ = C_{ab}(x'_{ab})x'_{ab} + C_{ac}(x'_{ac})x'_{ac} + C_{bd}(x'_{bd})x'_{bd} + C_{cd}(x'_{cd})x'_{cd} + C_{bd}(x'_{bd})x'_{bd}.$$

حال نشان دهید

$$C_۲ \leqslant ۲C_۱.$$

با توجه به نتیجه بالا، درباره‌ی هزینه آشوب چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: این قضیه پتانسیل تعمیم به تمامی شبکه‌های ترافیک خطی را دارد).



حل. تابع پتانسیل مربوط به شبکه جدید را در نظر بگیرید همچنین فرض کنید تابع T معرف مجموع هزینه پرداخت شده توسط تمام واحدهای یک ترافیک باشد و L_e معرف تابع هزینه برای یال e باشد. تابع پتانسیل برای یک یال با ترافیک $F(e)$ به این شکل تعریف میشود:

$$\Phi(e) = \sum_{i=۰}^{F(e)} L_e(i)$$

و تابع T به این شکل تعریف میشود:

$$C_F = T(F) = \sum_{e \in E} L_e(F(e))$$

، تعادل مربوط به $C_۱$ را $F_۱$ و تعادل مربوط به $C_۲$ را $F_۲$ بنامید. حال میدانیم برای یک ترافیک دلخواه F داریم

$$\Phi(F) \leqslant T(F) \leqslant ۲\Phi(F)$$

عبارت بالا به دلیل خطی بودن توابع هزینه و در نتیجه تشکیل سری حسابی در تعریف تابع پتانسیل است. همچنین توجه کنید که تعادل $F_۲$ تابع پتانسیل را مینیمم میکند (چرا؟). در نتیجه داریم:

$$C_۲ = T(F_۲) \leqslant ۲\Phi(F_۲) \leqslant ۲\Phi(F_۱) = ۲T(F_۱) = ۲C_۱$$

این نشان میدهد که هزینه آشوب حداکثر ۲ است. (مقدار بهینه ۱/۳۳ است) ▷

مسئله‌ی ۷. مثال‌های دیگر پارادوکس

یک راه تبیین پارادوکس بریس این است که بگوییم اضافه شدن امکانات همیشه به نفع جامعه نیست و لزوما اوضاع آنرا بهتر نمیکند. مثال دیگری از این پدیده بیان کنید و وجود این پارادوکس را در آن شرح دهید.

حل. تئوری نفرین منابع یا Resource Curse Theory مثالی از این موارد است. در این تئوری، سعی شده این پدیده برسی و توضیح داده شود که چرا مردمان اکثر کشورهای دارای منابع غنی طبیعی مانند نفت و گاز، در مقایسه با مردمان کشورهایی که از این منابع برخوردار نیستند، سرانه تولید ناخالص داخلی پایینتری دارند. ▷

مسئله‌ی ۸. سختی محاسبه تعادل نش

الف

در حالت کلی پیدا کردن تعادل نش میتواند کار سختی باشد. کلاس پیچیدگی این مسئله را (در حالت کلی) پیدا کنید و آنرا تعریف کنید.

ب

در بعضی حالات اما این محاسبه امکان پذیر است. یکی از این موارد شبکه‌های ترافیکی است. درباره‌ی بازی‌های پتانسیلی تحقیق کنید و سپس الگوریتم چندجمله‌ای برای پیدا کردن تعادل نش در شبکه‌های ترافیکی بیان کنید (راهنمایی: از یک پروفایل استراتژی شروع کنید و آنرا بهبود دهید).

حل.

الف

کلاس سختی این مسئله PPAD-Complete است. برای یادگیری بیشتر درباره این کلاس به این لینک مراجعه کنید:
https://people.cs.pitt.edu/ kirk/CS1699Fall2014/lect4.pdf

ب

فرض کنید n بازیکن داریم که توابع مطلوبیتشان $u_1, ..., u_n$ باشد و هرکدام مجموعه عملشان $A_1, ..., A_n$ باشد. در این صورت بازی پتانسیلی بازی‌ای است که برای آن تابعی مانند Φ وجود دارد که:

$$\forall i \leqslant n, a, a' \in A_i : \Phi(a, \mathbf{a}_{-i}) - \Phi(a', \mathbf{a}_{-i}) = u_i(a, \mathbf{a}_{-i}) - u_i(a', \mathbf{a}_{-i})$$

با توجه به این، ماکسیمم (یا مینیمم، بسته به مسئله) این تابع متناظر است با یک تعادل نش قطعی. حال کافیست یک پروفایل دلخواه را بگیریم و در هر مرحله عمل یک بازیکن را به نحوی تغییر دهیم که مقدار تابع پتانسیل بیشتر شود. $\triangleright$