# نظریه الگوریتمی بازی‌ها

**نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳**

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

دکتر فضلی | دانا افاضلی و مهدی موسوی

**تمرین پنجم**

## مسئله‌ی ۱.

نشان دهید تطابقی وجود ندارد که تمامی مردان آنرا به تطابق پایداری که از الگوریتم Deferred Acceptance نتیجه میشود (بهینه برای مردان) ترجیح بدهند.

**حل.** در مرحله $i$ از الگوریتم Deferred Acceptance مجموعه زنانی که پیشنهاد گرفته‌اند را $W_i$ بنامید و $W$ را مجموعه کل زنان بگیرید. . فرض کنید چنین تطابقی وجود داشته باشد و آنرا $\mu$ بنامید. در اینصورت میدانیم $W_۱ \neq W$ و همچنین $W_۱ \subseteq W_۲ \subseteq ...$ (چرا؟). حال بزرگترین $i$ را در نظر بگیرید که $W_i \neq W$ (چنین اندیسی به دلیل پایان پذیری الگوریتم وجود دارد). حال برای هر مرد در مجموعه $S = \{m | m = \mu^{-۱}(w), w \in W - W_i\}$ به تناقض میرسیم. (چرا؟)

▷

## مسئله‌ی ۲.

نشان دهید پیچیدگی زمانی الگوریتم تطابق پایدار $\Theta(n^۲)$ است.

**حل.** باید نشان دهیم الگوریتم هم $\mathcal{O}(n^۲)$ است و هم $\Omega(n^۲)$. قسمت اول در کلاس نشان داده شده. برای قسمت دوم، $n$ زن و مرد با چنین ترجیحاتی برای مردان در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&m_۱ : w_۱ > w_۲ > ... > w_n\\
&m_۲ : w_۱ > w_۲ > ... > w_n\\
&m_۳ : w_۲ > w_۳ > ... > w_{n-۱} > w_۱ > w_n\\
&m_۴ : w_۳ > w_۴ > ... > w_{n-۱} > w_۱ > w_۲ > w_n\\
&...\\
&m_{n-۱} : w_{n-۲} > w_{n-۱} > w_۱ > ... > wn - ۳ > w_n\\
&m_n : w_{n-۱} > w_۱ > ... > w_{n-۲} > w_n
\end{aligned}
$$

و برای زنان:

$$
\begin{aligned}
&w_۱ : m_۳ > m_۴ > ... > m_n > m_۱ > m_۲\\
&w_۲ : m_۴ > m_۵ > ... > m_n > m_۱ > m_۲ > m_۳\\
&...\\
&w_{n-۱} : m_۲ > ... > m_n > m_۱\\
&w_n : \text{فاقد اهمیت}
\end{aligned}
$$

با این مثال خواسته را نشان دهید.

▷

## مسئله‌ی ۳.

### الف

نشان دهید الگوریتم تطابق پایدار برای مردها DSIC است. کنش را اعلام لیست ترجیحات در نظر بگیرید.

### ب

نشان دهید الگوریتم تطابق پایدار برای زن‌ها DSIC نیست. کنش را اعلام لیست ترجیحات در نظر بگیرید.

**حل.**
بگیرید. اگر فردی هر ترجیحی گزارش کند، در نهایت یک تطابق پایدار از الگوریتم خروجی خواهد گرفت. طبق لم‌هایی که میدانیم در هر تطابق پایداری، فرد جفت شده با هر مردی، بهینه تر از فرد جفت شده با آن مرد در مقایسه با تطابق پایدار بهینه مردانه نیست. پس یک فرد با دروغ سودی نمیکند. میتوان با استفاده از لم زیر حکم قویتری را نیز اثبات کرد. اینکه این مساله برای مردان Collusion Proof یا ضد تبانی است (یعنی هیچ زیرمجموعه از مردان از همدستی و دروغ سود نمیبرند)

**لم** تطابق پایدار بهینه مردانه را $\mu$ بگیرید و $\beta$ را یک تطابق دلخواه. مجموعه $S$ را تعریف کنید

$$S = \{m|\beta(m) >_m \mu(m), m \in M\}$$

که $M$ مجموعه مردان است. در اینصورت جفت $(m, w)$ وجود دارد که برای تطابق $\beta$ ناپایدار است و $m \notin S$.

برای قسمت دوم مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&m_۱ : w_۲ > w_۱ > w_۳\\
&m_۲ : w_۱ > w_۲ > w_۳\\
&m_۳ : w_۱ > w_۳ > w_۲\\
&w_۱ : m_۱ > m_۲ > m_۳\\
&w_۲ : m_۲ > m_۱ > m_۳\\
&w_۳ : m_۱ > m_۲ > m_۳
\end{aligned}$$

و نشان دهید که $w_۱$ با گزارش $m_۱ > m_۳ > m_۲$ در مقایسه با حالت صادقانه سود میکند. ▷

## مسئله‌ی ۴.

یک مسئله تطابق پایدار را در نظر بگیرید و فرض کنید $M, M'$ دو تطابق پایدار برای این مسئله باشند. نشان دهید مردانی که جفت خود در $M$ را به جفت خود در $M'$ ترجیح میدهند، به زنانی در $M$ جفت شده اند که آن زنها جفت خود در $M'$ را به جفت خود در $M$ ترجیح میدهند.

**حل.** یک مرد $\alpha$ را در نظر بگیرید. حال $M(\alpha), M'(\alpha), \sigma = M'^{-۱}(M(\alpha))$ را هم در نظر بگیرید. میدانیم زوج $(\alpha, M(\alpha))$ تحت $M'$ پایدارند. همچنین با در نظر گرفتن فرض مسئله، میتوان به این نتیجه رسید که باید $M'(\alpha)$ مرد $\sigma$ را به مرد $\alpha$ ترجیح دهد که همان حکم است. ▷

## مسئله‌ی ۵.

در این سوال کمی clinching auction را که در درس دیدیم، تغییر می‌دهیم. ابتدا مسئله را با فرض اینکه خریداران هیچگونه محدودیتی در بودجه ندارند، ساده‌تر می‌کنیم. سپس مسئله را کمی کلی‌تر و شاید سخت‌تر کرده با فرض اینکه خریدار $i$ بجای اینکه برای تمامی کالاهایی که بدست می‌آورد مقدار ارزش یکسان $v_i$ را داشته باشد، برای کالای $j$ام که بدست می‌آورد ارزش‌گذاری $v_{ij}$ دارد. یعنی با فرض اینکه $j - ۱$ کالا دارد، ارزش‌گذاری آن برای کالای بعدی

برابر با $v_{ij}$ خواهد بود. بنابراین اگر خریدار $i$ تعداد $k$ کالا را با هزینه $p$ بدست آورد (هزینه روی کل $k$ کالا) مقدار سود آن برابر خواهد شد با $(\Sigma_{j=1}^{k} v_{ij}) - p$. همچنین در طول این مسئله فرض کنید که ارزش‌گذاری خریداران با دریافت کالای بیشتر، کاهش می‌یابد. یعنی برای هر خریدار $i$ داریم: $v_{i1} \geqslant v_{i2} \geqslant v_{i3} \geqslant ... \geqslant v_{im}$ (که در آن $m$ همانطور که در درس فرض شده بود، تعداد کل کالاها است).

### الف.

برای مسئله (مزایده) توصیف‌شده، مکانیزم VCG یک توصیف ساده و مشخص دارد. آن توصیف چیست (یا به عبارتی مکانیزم VCG در این مسئله به چه شکل است)؟

### ب.

حال فرض کنید که ما از clinching auction که در درس دیدیم با تغییر تابع تقاضا، برای مسئله توصیف شده استفاده کنیم. تابع تقاضا (demanding function) را به اینصورت تغییر می‌دهیم: با فرض اینکه خریدار $i$ تا بحال $l$ کالا را بدست آورده است و با فرض قیمت $p$، $D_i(p)$ را به صورت $max\{k - l, 0\}$ تعریف می‌کنیم که در آن $k$ بزرگترین مقدار $j$ است که $v_{ij} > p$. ثابت کنید که نحوه تخصیص کالاها و پرداختی‌ها در این clinching auction (با تابع تقاضا جدید) مانند مکانیزم VCG می‌شود.

## مسئله‌ی ۶.

یک مزایده با $n$ خریدار و $n$ کالای مشابه را در نظر بگیرید به طوری که هر خریدار تنها یک کالا را می‌خواهد. حال فرض کنید که در صورتی که اقلا یک برنده داشته باشیم (به حداقل یک نفر کالایی برسد)، به برگزارکننده مزایده هزینه ثابت ۱ واحد تحمیل می‌شود و اگر کالایی فروخته نشود (به کسی تعلق نگیرد) آنگاه هزینه‌ای نیز به برگزارکننده مزایده تحمیل نمی‌شود. مزایده برگزارشده برای این مسئله، budget-balanced نامیده می‌شود اگر حداقل یک برنده داشته باشیم و همچنین مجموع هزینه‌های پرداختی برای برندگان دقیقا برابر با هزینه تحمیل‌شده به برگزارکننده مزایده باشد (در اینجا ۱). حال برای این مسئله surplus را به اینصورت تعریف می‌کنیم که اگر $S$ مجموعه برندگان باشد آنگاه surplus برابر با صفر است وقتی که $S$ تهی باشد و در غیر اینصورت برابر است با $-1 + \Sigma_{i \in S} v_i$.

### الف.

ثابت کنید که مکانیزم VCG برای این مسئله، budget-balanced نیست.

### ب.

ثابت کنید که مکانیزم زیر (با داشتن بردار بید $b$) budget-balanced و DSIC است:

- $S$ را برابر با تمامی خریداران در نظر بگیر
- تا زمانی که $S$ تهی نشده است:

* اگر برای هر $i \in S$، $b_i \geqslant \frac{1}{|S|}$ االگوریتم را متوقف کن و خریداران در $S$ برندگان هستند و هر کدام $\frac{1}{|S|}$ پرداخت می‌کنند.

* در غیر اینصورت از $S$ یک خریدار با $b_i < \frac{1}{|S|}$ را به طور دلخواه حذف کن.

- اگر $S$ برابر با تهی شد آنگاه هیچ برنده و هیچ پرداختی نخواهیم داشت.

### ج.

مکانیزم تعریف شده در قسمت ب لزوما surplus را بیشینه نمی‌کند. نشان دهید که بیشترین اختلاف ممکن بین surplus بیشینه و surplus بدست آمده توسط این مکانیزم دقیقا برابر با $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + 1 -$ است. (دقت شود که این ماکسیمم روی بردارهای مختلف $v$ گرفته می‌شود)