دکتر فضلی | دانا افاضلی

تمرین ششم

مسئله‌ی ۱.

الف

فرض کنید مجموعه $\mathcal{C}$ مجموعه تمام توابع نامنفی، صعودی و مقعر باشد. نشان دهید $\alpha(\mathcal{C}) = \frac{4}{3}$

ب

فرض کنید $\mathcal{C}$ مجموعه توابع به فرم $f(x) = ax$ باشد که $a \geqslant 0$. نشان دهید $\alpha(\mathcal{C}) = 1$

حل.

الف

یک تابع دلخواه در این مجموعه مانند $C \in \mathcal{C}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که برای این تابع دلخواه

$$\arg\sup \alpha(C) = (r_0, x_0).$$

دقت کنید که $r_0 \geqslant x_0$ (چرا؟). حال تعریف کنید

$$l(\theta) = \frac{C(r_0)}{r_0 - x_0}(\theta - x_0) + \frac{C(x_0)}{x_0 - r_0}(\theta - r_0).$$

نشان دهید $l \in \mathcal{C}$ و $l(x_0) = C(x_0)$ و $l(r_0) = C(r_0)$ و سپس نشان دهید $\alpha(l) \geqslant \alpha(C)$ و حکم را نتیجه بگیرید.

ب

دقت کنید که در اینجا نمیتوان از مثال پیگو استفاده کرد چرا که در این حالت توابع ثابت را نمیتوانیم داشته باشیم و عملا مثال پیگو برای این حالت قابل طرح نیست. در واقع میتوان کران بالایی با استفاده از مثال پیگو پیدا کرد اما همیشه قابل تحقیق نیست.

برای اثبات فرض کنید که شار بهینه f^* و شار تعادل نش f باشد. از لمی که در لکچرنوت‌ها اثبات شده میدانیم:

$$\sum_e (f_e^* - f_e)c_e(f_e) \geqslant 0$$

که f_e معرف شار یال e و c_e معرف تابع هزینه آن یال باشد. پس

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_e f_e c_e(f_e) \\ &= \sum_e f_e(a_e f_e) \\ &\leqslant \sum_e f_e^*(a_e f_e) \\ &\leqslant \sum_e \frac{\sum_e a_e f_e^{*۲} + \sum_e a_e f_e^۲}{۲} \\ &= \frac{۱}{۲} L(f^*) + \frac{۱}{۲} L(f). \end{aligned}$$

حال میتوان حکم را نتیجه گرفت (چرا؟). ▷

مسئله‌ی ۲.

تابع زمان انتظار یک صف را در نظر بگیرید:

$$c_e(x) = \begin{cases} \frac{۱}{u_e - x} & x < u_e \\ +\infty & x \geqslant u_e \end{cases}$$

نشان دهید در یک شبکه راهیابی اگر برای هر یال در حالت تعادل داشته باشیم $f_e \leqslant (۱-\beta)u_e$ در آنصورت

$$\text{POA} \leqslant \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{\frac{۱}{\beta}})$$

حل. یک عبارت جدید که مشابه کران پیگو است را تعریف میکنیم:

$$\alpha_\beta = \sup_u \sup_{r \leqslant (۱-\beta)u} \sup_x \frac{rC_u(r)}{xC_u(x) + (r-x)C_u(r)}$$

که $C_u = \frac{۱}{u-x}$. اول از همه نشان دهید که این عبارت زمانی ماکسیمم میشود که $r = (۱-\beta)u$ باشد و سپس نشان دهید این عبارت دقیقا برابر خواسته مسئله است. بعد از این، باید نشان دهیم که با این عبارت میتوان هزینه آشوب شبکه راهیابی را کران زد. برای اینکار کافیست مانند اثبات کران پیگو در حالت عادی (که در لکچرنوت اثبات شد) عمل کنیم با این تفاوت که باید استدلال کنیم که تغییرات داده شده با شرایط مسئله همخوانی دارد. برای اینکار توجه کنید که در اثبات عادی کران پیگو، مقدار دهی‌ها به صورت $r = f_e, x = f_e^*$ بود که f_e شار تعادلی و f_e^* شار بهینه برای یال است. حال استدلال کنید که میتوان از این کران برای این حالت خاص مسئله استفاده کرد. (لازم است روشن و دقیق توضیح دهید) ▷

مسئله‌ی ۳.

هزینه آشوب را برای شبکه‌ای که توابع هزینه‌اش چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب نامنفی و با درجه حداکثر d هستند بیابید.

حل. واضح است که باید کران پیگو را برای این دسته از توابع حساب کنیم. نخست به گزاره‌هایی که در ادامه میایند احتیاج داریم که هر کدام را به سادگی میتوان نشان داد: ۱. برای تک جمله‌ای ax^p مقدار کران برابر خواهد شد

با

$$\alpha_p = \frac{(p+1)\sqrt[p]{p+1}}{(p+1)\sqrt[p]{p+1}-p}.$$

۲. مقدار α_p با افزایش p افزایش پیدا میکند.

حال با استقرا روی d نشان میدهیم که این کران همان α_d خواهد شد. . برای پایه میتوان با محاسبات دستی حکم را نشان داد. حال فرض کنید برای d مقدار دهی بهینه برای کران پیگو توسط C, r, x انجام شود و فرض کنید C از درجه‌ی $p \leqslant d$ باشد. اگر C عبارتی بجز x^p داشته باشد، بنویسید $C(x) = ax^p + Q(x)$ که درجه‌ی Q از C کمتر و ناصفر است. سپس میتوان مقدار کران پیوگو را به این شکل نوشت:

$$\alpha = \frac{ax^{p+1} \quad + \quad rQ(x)}{ax^{p+1} + a(r-x)r^p \quad + \quad xQ(x) + (r-x)Q(x)}$$

که این عبارت بین دو مقدار

$$\beta = \frac{ax^{p+1}}{ax^{p+1} + a(r-x)r^p} \qquad \gamma = \frac{rQ(x)}{xQ(x) + (r-x)Q(x)}$$

میباشد. حال اگر $\gamma > \alpha$ باشد تناقض است چون میدانیم $\alpha_d \leqslant \alpha < \gamma \leqslant \alpha_p \leqslant \alpha_d$. پس $\beta \geqslant \alpha \geqslant \gamma$ پس تنها کافیست عبارات مانند β را برای محاسبه کران پیگو در نظر بگیریم که این مورد را هم در بالا حساب کرده‌ایم. پس حکم اثبات شد. $\triangleright$

مسئله‌ی ۴.

تابع هزینه یک شبکه آشوب را بجای جمع هزینه مسیرها، بیشترین هزینه در میان مسیرها تعریف میکنیم. یعنی

$$C(f) = \max_{p \in \mathcal{P}, f_p > 0} \sum c_e(f_e)$$

و فرض کنید تمام توابع هزینه خطی هستند (affine). در اینصورت مثال Pigou به ما هزینه آشوب ۱ را میدهد (چرا؟). نشان دهید هزینه آشوب در حالت کلی $\frac{4}{3}$ است.

حل.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵.

نشان دهید در یک شبکه با هزینه‌های خطی تحت شار بهینه، نسبت طول (مدت زمان مورد نیاز) بلند ترین مسیر به کوتاه ترین مسیر حداکثر ۲ است. نشان دهید این نسبت قابل تحقق است.

حل. با برهان خلف حکم را اثبات میکنیم. فرض کنید دو مسیر P_1, P_2 داریم که میزان تاخیر در یکی بیش از دو برابر دیگری است. (درستی حکم معادل درستیش برای هر دو مسیر دلخواه است). پس

$$\sum_{e \in P_1} c_e(f_e) > 2 \sum_{e \in P_2} c_e(f_e)$$

که f شار بهینه است. برای ایجاد تناقض، کافیست نشان دهید یک ϵ به اندازه کافی کوچک وجود دارد، که اگر آن مقدار ترافیک را از مسیر طولانی تر به مسیر کوتاه تر انتقال دهیم، مجموعه تاخیرها کمتر میشود که این تناقض است چون فرض کردیم شارمان بهینه است. برای اینکار برای مقداری شار این تغییر مسیر را انجام دهید و نشان دهید چه شرطی برای ϵ باید برقرار باشد تا این اتفاق بیفتد (این شرط به فرم $\epsilon < C$ است).

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶.

در این مسئله میخواهیم هزینه آشوب را برای Atomic Selfish Routing Problem در حالتی که هر شخص یک ترافیک دلخواه r_i دارد (نسخه وزن دار مسئله) و همچنین توابع هزینه ترافیک Affine هستند کران بالا بزنیم. فرض کنید تابع رفاه اجتماعی $C(f)$ برای یک شار f باشد و آنرا جمع هزینه افراد در بازی تعریف میکنیم.

الف

اگر f بیانگر شار در تعادل و f^* بیانگر شار بهینه باشد، نشان دهید

$$C(f) \leqslant C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*$$

که در اینجا $c_e(f) = a_e f_e + b_e$.

ب

نشان دهید

$$\sum_{e \in E} a_e f_e f_e^* \leqslant \sqrt{C(f)}\sqrt{C(f^*)}$$

ج

نشان دهید

$$\text{POA} \leqslant \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲} \approx ۲/۶۱۸$$

حل.

$\triangleright$