

نظریه الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲



گرددآورندگان: مهدی سلمانی، مهدی موسوی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

موعده تمرین: اردیبهشت ۱۴۰۳

تمرین چهارم

دکتر فضلی

سوالات

مسئله‌ی ۱.

فرض کنید در یک مزایده $k \geq 1$ شی مشابه داریم. (به هر خریدار حداکثر یک شی می‌رسد.) ارزش‌گذاری خریداران به صورت i.i.d از توزیع F (Regular) آمده است. ثابت کنید برای هر $n \geq k$ مقدار Expected Revenue در Vickrey Auction با تعداد $n+k$ خریدار (بدون قیمت رزرو) حداقل به اندازه این مقدار در Auction بهینه برای n خریدار با توزیع F است.

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید در یک مزایده تک‌کالایی n خریدار داریم. ارزش‌گذاری خریداران به صورت i.i.d از توزیع F (Regular) آمده است. ثابت کنید مقدار Expected Revenue در Vickrey Auction (بدون قیمت رزرو) با n خریدار، حداقل $\frac{n-1}{n}$ اندازه این مقدار در مزایده بهینه برای n خریدار است.

مسئله‌ی ۳.

یک مزایده تک‌کالایی در نظر بگیرید که ارزش‌گذاری خریدار i ام از توزیع Regular مخصوص خودش (F_i) به دست آمده است.

الف

یک رابطه برای مقدار پرداختی برنده در مزایده بهینه بر اساس مقادیر Virtual Valuation ارائه کنید.

ب

با مثال نشان دهید که در مزایده بهینه، ممکن است بیشترین پیشنهاد برنده نشود حتی اگر مقدار Virtual Valuation آن مثبت باشد.

ج

نشان دهید چرا ویژگی قسمت قبل برای درآمد یک مزایده می‌تواند مفید باشد.

مسئله‌ی ۴.

یک محیط تک پارامتری در نظر بگیرید که هر $(x_1, \dots, x_n) \in X$ Feasible Vector به صورت $1-0$ است که یعنی هر خریدار یا می‌برد و یا می‌بازد. فرض کنید که Feasible Set به صورت Downward-closed باشد که یعنی اگر S

یک مجموعه شدنی از برندگان باشد آنگاه هر $T \subset S$ نیز یک مجموعه شدنی از برندگان است. همچنین فرض کنید برای هر خریدار، تابع ارزش‌گذاری به صورت Monotone Hazard Rate (MHR) باشد که یعنی $\frac{f_i(v_i)}{1-F_i(v_i)}$ به صورت غیرکاهشی باشد.

الف

نشان دهید توزیع MHR همچنین Regular است.

ب

نشان دهید توزیع‌های یکنواخت و نمایی MHR هستند.

ج

فرض کنید که r_i قیمت انحصاری برای یک توزیع F_i با ویژگی MHR باشد که یعنی

$$r_i = \operatorname{argmax}_{r \geq 0} r(1 - F_i(r))$$

حال نشان دهید برای هر $v_i \geq r_i$ خواهیم داشت:

$$r_i + \varphi_i(v_i) \geq v_i$$

د

در ادامه یک قاعده تخصیص را بیان می‌کنیم. فرض کنید S مجموعه خریدارانی باشند که برای آن‌ها $v_i \geq r_i$. حال در این مجموعه، زیر مجموعه‌ای شدنی که مقدار Surplus را بیشینه می‌کند، پیدا می‌کنیم.

$$W = \operatorname{argmax}_{T \subseteq S, T \in X} \sum_{i \in T} v_i$$

و در نهایت خریدارانی که در W هستند برنده شده و بقیه می‌بازند. نشان دهید این قاعده یکنواست.

مسئله ۵.

محیط مسئله قبل را در نظر بگیرید. فرض کنید \mathcal{M} مکانیزم DSIC معرفی شده در سوال قبل باشد و \mathcal{M}^* مکانیزم بهینه باشد.

الف

نشان دهید که مقدار Expected Surplus در \mathcal{M} حداقل به اندازه این مقدار در \mathcal{M}^* است.

ب

نشان دهید که مقدار Expected Revenue در \mathcal{M} حداقل به اندازه نصف Expected Surplus در این مکانیزم است.

ج

نشان دهید که مقدار Expected Revenue در \mathcal{M} حداقل به اندازه نصف این مقدار در مکانیزم بهینه (M^*) است.

مسئله ۶.

موارد زیر را برای پرداختی‌های مکانیزم VCG ثابت کنید.

الف.

همواره اعدادی نامنفی هستند. (برای تمامی بیدرها)

ب.

برای هر بیدر $i \in N$ پرداختی آن دارای کران بالای $b_i(\omega^*)$ است. (که در آن ω^* برابر با allocation محاسبه شده در مکانیزم VCG می‌باشد)

مسئله ۷.

فرض کنید که یک مکانیزم VCG برای فروش دو کالای $O = \{a, b\}$ به سه خریدار به کار گرفته می‌شود. هر خریدار می‌تواند هیچ، یک یا دو کالای موجود را بخرد. از هر خریدار خواسته می‌شود تا تابع ارزیابی خود، یعنی $u_i = (u_i(\emptyset), u_i(\{a\}), u_i(\{b\}), u_i(\{a, b\}))$ را گزارش کند. فرض کنید توابع ارزیابی خریداران به صورت زیر است و سپس به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$u_1 = (0, 10, 3, 13)$$

$$u_2 = (0, 2, 8, 10)$$

$$u_3 = (0, 3, 2, 14)$$

الف.

نحوه تخصیص کالاها به خریداران و همچنین مقدار پرداختی هر خریدار را بیابید.

ب.

بیان کنید چرا خریدار سوم می‌تواند به نتیجه مزایده (مکانیزم) اعتراض داشته باشد.

مسئله ۸.

فرض کنید که یک مزایده چند-آیتمه را بر اساس مکانیزم VCG برگزار می‌کنید. این مزایده دارای ۳ کالای (آیتم) A, B, C و دو شرکت‌کننده X, Y است. اگر بید (تابع ارزیابی) گزارش شده از سوی شرکت‌کنندگان به صورت زیر باشد به سوالات پرسیده شده پاسخ دهید.

bidder i	valuation							
	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(\{A, B\})$	$v_i(\{A, C\})$	$v_i(\{B, C\})$	$v_i(\{A, B, C\})$
$i := X$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i := Y$	0	15	18	11	30	34	32	47

الف.

خروجی مکانیزم VCG یعنی نحوه تخصیص کالاها و مقدار پرداختی هر شرکت‌کننده را پیدا کنید.

ب.

اگر شرکت‌کنندگان پیش از شروع در مزایده بدانند که بر اساس مکانیزم VCG برگزار می‌شود، انتظار می‌رود که به صورت راستگویانه در مزایده شرکت کنند؟

ج.

آیا خروجی مکانیزم VCG که در بخش الف بدست آوردید، یکتا است؟ مقدار سود (revenue) را بدست آورید برای تمام خروجی‌های ممکن. آیا مقدار سود (جمع پرداختی‌های شرکت‌کنندگان) برای تمام خروجی‌های ممکن برابر است؟

د.

آیا به صورت کلی درست است که سود مزایده (جمع پرداختی‌های شرکت‌کنندگان) برای تمامی خروجی‌های مکانیزم VCG یکسان است؟ (برای یک مزایده در حالت کلی، نه فقط مزایده این مساله). ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله ۹.

یک مزایده ترکیبیاتی (combinatorial auction) با n شرکت‌کننده و مجموعه آیتم M با $m = |M|$ عضو در نظر بگیرید. می‌گوییم شرکت‌کننده i دارای تابع ارزیابی unit-demand است، هنگامی که برای هر زیرمجموعه از آیتم‌ها مقدار ارزیابی آن برابر با باارزش‌ترین آیتم موجود در آن زیرمجموعه برای آن فرد باشد. به عبارت دیگر فرض کنید که S یک زیرمجموعه از کالاها باشد و v_{ij} نشان دهنده ارزیابی شرکت‌کننده i برای کالای $j \in S$ باشد، آنگاه می‌گوییم تابع ارزیابی شرکت‌کننده i unit-demand است اگر:

$$v_i(S) = \max_{j \in S} v_{ij}$$

به ازای هر $S \subseteq M$.

حال فرض کنید تمامی شرکت‌کنندگان دارای تابع ارزیابی unit-demand باشند. برای این مزایده ترکیبیاتی یک مکانیزم طراحی کنید که دارای ویژگی‌های زیر باشد.

(۱) سازگار با انگیزه incentive-compatible باشد.

(۲) social welfare را بیشینه کند.

(۳) در زمان چندجمله‌ای بر حسب n و m اجرا شود.

موفق باشید (:)