



## مسئله‌ی ۱.

نشان دهید تطابقی وجود ندارد که تمامی مردان آنرا به تطابق پایدار که از الگوریتم Deferred Acceptance نتیجه میشود (بهینه برای مردان) ترجیح بدهند.

## مسئله‌ی ۲.

نشان دهید پیچیدگی زمانی الگوریتم تطابق پایدار  $\Theta(n^2)$  است.

## مسئله‌ی ۳.

### الف

نشان دهید الگوریتم تطابق پایدار برای مردها DSIC است. کنش را اعلام لیست ترجیحات در نظر بگیرید.

### ب

نشان دهید الگوریتم تطابق پایدار برای زن‌ها DSIC نیست. کنش را اعلام لیست ترجیحات در نظر بگیرید.

## مسئله‌ی ۴.

یک مسئله تطابق پایدار را در نظر بگیرید و فرض کنید  $M, M'$  دو تطابق پایدار برای این مسئله باشند. نشان دهید مردانی که جفت خود در  $M$  را به جفت خود در  $M'$  ترجیح میدهند، به زنانی در  $M$  جفت شده اند که آن زن‌ها جفت خود در  $M'$  را به جفت خود در  $M$  ترجیح میدهند.

## مسئله‌ی ۵.

در این سوال کمی clinching auction را که در درس دیدیم، تغییر می‌دهیم. ابتدا مسئله را با فرض اینکه خریداران هیچگونه محدودیتی در بودجه ندارند، ساده‌تر می‌کنیم. سپس مسئله را کمی کلی‌تر و شاید سخت‌تر کرده با فرض اینکه خریدار  $i$  بجای اینکه برای تمامی کالاهایی که بدست می‌آورد مقدار ارزش یکسان  $v_i$  را داشته باشد، برای کالای  $j$ ام که بدست می‌آورد ارزش‌گذاری  $v_{ij}$  دارد. یعنی با فرض اینکه  $1 - j$  کالا دارد، ارزش‌گذاری آن برای کالای بعدی برابر با  $v_{ij}$  خواهد بود. بنابراین اگر خریدار  $i$  تعداد  $k$  کالا را با هزینه  $p$  بدست آورد (هزینه روی کل  $k$  کالا) مقدار سود آن برابر خواهد شد با  $(\sum_{j=1}^k v_{ij}) - p$ . همچنین در طول این مسئله فرض کنید که ارزش‌گذاری خریداران با دریافت کالای بیشتر، کاهش می‌یابد. یعنی برای هر خریدار  $i$  داریم:  $v_{i1} \geq v_{i2} \geq v_{i3} \geq \dots \geq v_{im}$  (که در آن  $m$  همانطور که در درس فرض شده بود، تعداد کل کالاها است).

## الف.

برای مسئله (مزایده) توصیف شده، مکانیزم VCG یک توصیف ساده و مشخص دارد. آن توصیف چیست (یا به عبارتی مکانیزم VCG در این مسئله به چه شکل است)؟

## ب.

حال فرض کنید که ما از clinching auction که در درس دیدیم با تغییر تابع تقاضا، برای مسئله توصیف شده استفاده کنیم. تابع تقاضا (demanding function) را به اینصورت تغییر می‌دهیم: با فرض اینکه خریدار  $i$  تا بحال  $l$  کالا را بدست آورده است و با فرض قیمت  $p$ ،  $D_i(p)$  را به صورت  $\max\{k - l, 0\}$  تعریف می‌کنیم که در آن  $k$  بزرگترین مقدار  $j$  است که  $v_{ij} > p$ . ثابت کنید که نحوه تخصیص کالاها و پرداختی‌ها در این clinching auction (با تابع تقاضا جدید) مانند مکانیزم VCG می‌شود.

## مسئله ۶.

یک مزایده با  $n$  خریدار و  $n$  کالای مشابه را در نظر بگیرید به طوری که هر خریدار تنها یک کالا را می‌خواهد. حال فرض کنید که در صورتی که اقلاً یک برنده داشته باشیم (به حداقل یک نفر کالایی برسد)، به برگزارکننده مزایده هزینه ثابت ۱ واحد تحمیل می‌شود و اگر کالایی فروخته نشود (به کسی تعلق نگیرد) آنگاه هزینه‌ای نیز به برگزارکننده مزایده تحمیل نمی‌شود. مزایده برگزار شده برای این مسئله، budget-balanced نامیده می‌شود اگر حداقل یک برنده داشته باشیم و همچنین مجموع هزینه‌های پرداختی برای برندگان دقیقاً برابر با هزینه تحمیل شده به برگزارکننده مزایده باشد (در اینجا ۱). حال برای این مسئله surplus را به اینصورت تعریف می‌کنیم که اگر  $S$  مجموعه برندگان باشد آنگاه surplus برابر با صفر است وقتی که  $S$  تهی باشد و در غیر اینصورت برابر است با  $1 + \sum_{i \in S} v_i$ .

## الف.

ثابت کنید که مکانیزم VCG برای این مسئله، budget-balanced نیست.

## ب.

ثابت کنید که مکانیزم زیر (با داشتن بردار بید  $b$ ) budget-balanced و DSIC است:

-  $S$  را برابر با تمامی خریداران در نظر بگیر

- تا زمانی که  $S$  تهی نشده است:

\* اگر برای هر  $i \in S$ ،  $b_i \geq \frac{1}{|S|}$  الگوریتم را متوقف کن و خریداران در  $S$  برندگان هستند و هر کدام  $\frac{1}{|S|}$  پرداخت می‌کنند.

\* در غیر اینصورت از  $S$  یک خریدار با  $b_i < \frac{1}{|S|}$  را به طور دلخواه حذف کن.

- اگر  $S$  برابر با تهی شد آنگاه هیچ برنده و هیچ پرداختی نخواهیم داشت.

## ج.

مکانیزم تعریف شده در قسمت ب لزوماً surplus را بیشینه نمی‌کند. نشان دهید که بیشترین اختلاف ممکن بین surplus بیشینه و surplus بدست آمده توسط این مکانیزم دقیقاً برابر با  $\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - 1$  است. (دقت شود که این ماکسیمم روی بردارهای مختلف  $v$  گرفته می‌شود)