نظریه الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

دکتر فضلی — دانا افاضلی

تمرین ششم

مسئله‌ی ۱.

الف

فرض کنید مجموعه $\mathcal{C}$ مجموعه تمام توابع نامنفی، صعودی و مقعر باشد. نشان دهید $\alpha(\mathcal{C}) = \frac{4}{3}$

ب

فرض کنید $\mathcal{C}$ مجموعه توابع به فرم $f(x) = ax$ باشد که $a \geqslant 0$. نشان دهید $\alpha(\mathcal{C}) = 1$

مسئله‌ی ۲.

تابع زمان انتظار یک صف بر حسب را در نظر بگیرید:

$$c_e(x) = \begin{cases} \frac{1}{u_e - x} & x < u_e \\ +\infty & x \geqslant u_e \end{cases}$$

نشان دهید در یک شبکه راهیابی اگر برای هر یال در حالت تعادل داشته باشیم $f_e \leqslant (1-\beta)u_e$ در آنصورت

$$\text{POA} \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{\beta}})$$

مسئله‌ی ۳.

هزینه آشوب را برای شبکه‌ای که توابع هزینه‌اش چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب نامنفی و با درجه حداکثر d هستند بیابید.

مسئله‌ی ۴.

تابع هزینه یک شبکه آشوب را بجای جمع هزینه مسیرها، بیشترین هزینه در میان مسیرها تعریف میکنیم. یعنی

$$C(f) = \max_{p \in \mathcal{P}, f_p > 0} \sum c_e(f_e)$$

و فرض کنید تمام توابع هزینه خطی هستند (affine). در اینصورت مثال Pigou به ما هزینه آشوب ۱ را میدهد (چرا؟). نشان دهید هزینه آشوب در حالت کلی $\frac{4}{3}$ است.

مسئله‌ی ۵.

نشان دهید در یک شبکه با هزینه‌های خطی تحت شار بهینه، نسبت طول (مدت زمان مورد نیاز) بلند ترین مسیر به کوتاه ترین مسیر حداکثر ۲ است. نشان دهید این نسبت قابل تحقق است.

مسئله‌ی ۶.

در این مسئله میخواهیم هزینه آشوب را برای Atomic Selfish Routing Problem در حالتی که هر شخص یک ترافیک دلخواه r_i دارد (نسخه وزن دار مسئله) و همچنین توابع هزینه ترافیک Affine هستند کران بالا بزنیم. فرض کنید تابع رفاه اجتماعی $C(f)$ برای یک شار f باشد و آنرا جمع هزینه افراد در بازی تعریف میکنیم.

الف

اگر f بیانگر شار در تعادل و f^* بیانگر شار بهینه باشد، نشان دهید

$$C(f) \leqslant C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*$$

که در اینجا $c_e(f) = a_e f_e + b_e$.

ب

نشان دهید

$$\sum_{e \in E} a_e f_e f_e^* \leqslant \sqrt{C(f)}\sqrt{C(f^*)}$$

ج

نشان دهید

$$\text{POA} \leqslant \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲} \approx ۲/۶۱۸$$