مسئله ۶.

الف.

$$p_i(b) = \max_{\omega\in\Omega} \overbrace{\sum_{j\neq i} b_j(\omega)}^{①} - \sum_{j\neq i} b_j(\omega^*)$$

به وضوح ماکسیمم عبارت ①، از این عبارت به ازای هر ورودی دیگری بزرگتر یا مساوی است.

$$\rightarrow p_i(b) \geq 0$$

* * *

ب. همانطور که در کلاس دیدیم $p_i(b)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p_i(b) = b_i(\omega^*) - \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} b_j(\omega^*) - \max_{\omega\in\Omega} \sum_{j\neq i} b_j(\omega)\right]}_{\text{به وضوح عددی مثبت است}}$$

$$\rightarrow p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$$

مسئله ۷ . الف)

allocation ای که social welfare را ماکسیمم می‌کند به صورت زیر است :

$$\left.\begin{array}{l} a \longrightarrow \text{به نفر اول} \\ b \longrightarrow \text{به نفر دوم} \end{array}\right\} \rightarrow SW = 18$$

(به نفر سوم کالایی تعلق نمی‌گیرد)

حال پرداختی هر فرد را حساب می‌کنیم :

نفر اول :

$$\max_{\omega\in\Omega} \sum_{j\neq 1} b_j(\omega) = 14 \quad , \quad \sum_{j\neq 1} b_j(\omega^*) = 8$$

هر دو آیتم به نفر سوم می‌رسند

$$\rightarrow p_1(\vec{b}) = 14-8=6$$

نفر دوم : (به طریق مشابه) $p_2(\vec{b}) = 14-10=4$

نفر سوم : $p_3(\vec{b}) = 0$

ب) خریدار سوم می‌تواند اعتراض کند که برای جفت کالای $\{a, b\}$ مقدار 14 را پیشنهاد داده است ولی به او کالایی تعلق نگرفته است، در حالی که مزایده مجموع کالای a و b را با $4+6=10$ فروخته است.

مسئله ۸ .

الف) ابتدا باید allocation ای را پیدا کنیم که Social Welfare را ماکسیمم می‌کند؛ در این مسئله دو allocation مجزا داریم که هر دو به SW بیشینه می‌رسند.

① $\left.\begin{array}{l} A, C \to X \\ B \to Y \end{array}\right\} \Rightarrow SW = v_x(\{A, C\}) + v_y(\{B\}) = 38 + 18 = 56$

② $\left.\begin{array}{l} A \to X \\ B, C \to Y \end{array}\right\} \to SW = v_x(\{A\}) + v_y(\{B, C\}) = 24 + 32 = 56$

بنابراین مکانیزم یکی از این دو allocation را انتخاب می‌کند، و پرداختی‌ها بر اساس نتیجه انتخابی محاسبه می‌شود. (هریک از این allocation ها به پرداختی‌های کاملاً متفاوتی ختم می‌شوند)

① First Allocation:

$$p_x = \underbrace{\max_{\omega \in \Omega} v_y(\omega)}_{= v_y(\{A,B,C\}) = 47} - v_y(\{B\}) = 47 - 18 = 29 \quad \to p_x + p_y = 41$$

$$p_y = \max_{\omega \in \Omega} v_x(\omega) - v_x(\{A, C\}) = 50 - 38 = 12$$

② Second Allocation:

$$p_x = \max_{\omega} v_y(\omega) - v_y(\{B, C\}) = 47 - 32 = 15 \quad \to p_x + p_y = 41$$

$$p_y = \max_{\omega} v_x(\omega) - v_x(\{A\}) = 50 - 24 = 26$$

* * *

ب) همانطور که در کلاس اثبات شد، با فرض دانستن به‌کارگیری مکانیزم VCG استراتژی غالب (dominant strategy) برای هر فرد این است که به طور راستگویانه در مزایده شرکت کند (ویژگی DSIC).

(این خاصیت به این نکته ربطی ندارد که مزایده می‌تواند دو خروجی کاملاً متفاوت داشته باشد)

ج. برای این مسئله در قسمت الف پاسخ داده شده است و مقدار سود (جمع پرداختی‌ها) در هر دو خروجی ممکن برابر با ۱۴۱ است.

سر بسر . سر .

د. $V=\{1,\dots,n\} \rightarrow$ n شرکت کننده

$v_i \rightarrow$ valuation function for bidder i $\quad (v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$

$\Omega \rightarrow$ مجموعه تمامی خروجی های ممکن

$\rightarrow$ VCG خروجی مکانیزم : $\omega^* \in \arg\max_{\omega \in \Omega} \sum_{j \in V} v_j(\omega)$

پرداختی بیدر i ام : $p_i(\omega^*) = \max_{\omega' \in \Omega} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} v_j(\omega') - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} v_j(\omega^*)$

حال فرض کنید دو خروجی متفاوت ω^A و ω^B داریم، یعنی:

$$\overset{\text{maximum SW}}{\overset{\uparrow}{Z}} = \max_{\omega \in \Omega} \sum_{j \in V} v_j(\omega) = \sum_{j \in V} v_j(\omega^A) = \sum_{j \in V} v_j(\omega^B)$$

فرض کنید: $W_i = \max_{\omega' \in \Omega} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} v_j(\omega')$

، $W = \sum_{i \in V} W_i$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموع پرداختی‌ها در هر دو خروجی ممکن برابر با $W-(n-1)Z$ است، یعنی:

$$\sum_{i \in V} p_i(\omega^A) = \sum_{i \in V} p_i(\omega^B) = W-(n-1)Z$$

اثبات ادعا:

$$\sum p_i(\omega^A) = \sum_{i \in V} \Big[W_i - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} v_j(\omega^A) \Big]$$

$$= W - \sum_{i \in V} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} v_j(\omega^A)$$

$$= W - \Big(\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} v_j(\omega^A) - \sum_{i \in V} v_i(\omega^A) \Big)$$

$$= W - (nZ - Z)$$

$$= W - (n-1)Z$$

به طریق مشابه می تواند دید که $\sum_{i \in V} p_i(\omega^B) = W - (n-1)Z$ $\blacksquare$

مسئله ۹.

نشان می‌دهیم مکانیزم VCG در این مسئله در زمان چندجمله‌ای قابل اجرا است (به خودی خود دو ویژگی اول با فرض به کارگیری VCG برقرار هستند)

گراف دوبخشی زیر را در نظر بگیرید:

$$G=(U,M,E)\ ,\quad U=\underbrace{[n]}_{\text{مجموعه خریداران}}\ ,\quad E=\underbrace{U\times M}_{\text{مجموعه یالهای ممکن بین } U \text{ و } M}$$

$$w(i,j)=v_i^j \longrightarrow$$ وزن یال $(i,j)\in U\times M$

allocation دلخواهی را در نظر بگیرید که به خریدار iام زیرمجموعه S_i را تخصیص می‌دهد، و $x(i)=\arg\max_{j\in S_i} v_i^j$.

آنگاه مجموعه یالهای $E'=\{(i,x(i))\}_{i\in[n]\cap S_i\neq\emptyset}$ یک matching برای G خواهد بود که وزن آن برابر است با:

$$\sum_{(i,x(i))\in E'} w(i,x(i)) = \sum_{(i,x(i))\in E'} \max_{j\in S_i} v_i^j = \sum_{i\in[n]} v_i(S_i)$$

که همان social welfare است

به طور مشابه برای هر matching مانند $\hat{E}$، با تخصیص دادن به هر $i\in[n]$ آیتمی که با آن در $\hat{E}$ match شده است آنگاه یک allocation با social welfare برابر با وزن‌های $\hat{E}$ خواهیم داشت.

بنابراین مسئله پیدا کردن allocation دارای SW ماکسیمم تبدیل به مسئله پیدا کردن maximum matching در گراف دوبخشی شد، در درس طراحی الگوریتم دیدیم که این مسئله از مرتبه چندجمله‌ای قابل حل است (مثلاً از مرتبه $O(nm)$ به کمک Ford-Fulkerson).

برای محاسبه پرداختی هر فرد نیز از همین گراف دوبخشی استفاده می‌کنیم.

$$P_i = \underbrace{\text{SW بدون در نظر گرفتن } i}_{\text{پیدا کردن maximum matching با حذف نود } i} - \underbrace{\text{SW برای بقیه شرکت کنندگان}}_{\text{مجموع یالها با حذف یال } i \text{ در matching متناظر با ماکسیمم SW}} \leftarrow \text{(در محاسبه allocation با وجود } i\text{)}$$