Subject: Algorithmic Game Theory
Year. Month. Date. ( )

Machanism Design:

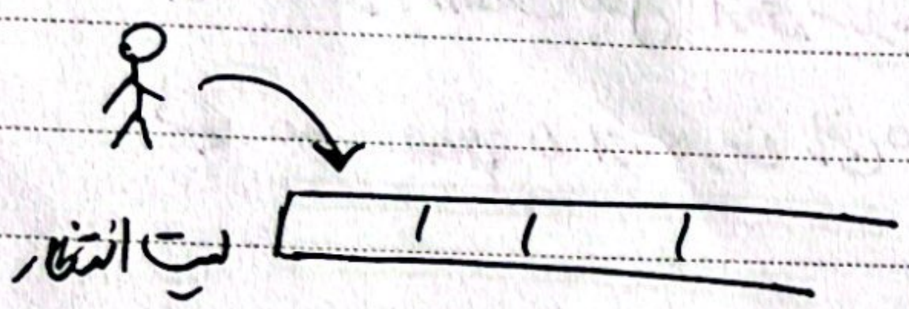
- a set of selfish and strategic agents
- Rule making
- Director / orcherstrator

هدف { → بهترین بازی را انجام دهند
→ همه با هم خوش حال باشند

⇐ برای مثال طراحی مسابقات فوتبال برای تیم‌های A, B, ..., P

↳ بازی های هیجان انگیز ← درکه زایی ← کنترل تهانی ...

⇐ فروش کلیه ← مخفی



لیست انتظار

نسبت نزدیک ↔ بدون شباهت

Kidney Exchange Market

⇒ (A,B): A → B } but impossible
(C,D): C → D

↳ Matching → $\begin{pmatrix} C \to B \\ A \to D \end{pmatrix}$

↳ هدف auchonier کامل‌ترین میر / هدف شرکت کنندگان استریسی سریع‌تر به کلیه

1- به محض اینکه یک زوج با زوج دیگر match شد matching انجام شود

می‌تواند به همه برسد ↳ (O, C1), (O, AB+)

مبادلات انجام شود و به تاخیر بیفتد

۲- اگر یک زوج به شبکه اضافه شد تا زمان T منتظر بماند تا یک لیست O تا از زوج ها قبل match شدن باید بهینه شود تا درست عمل کند

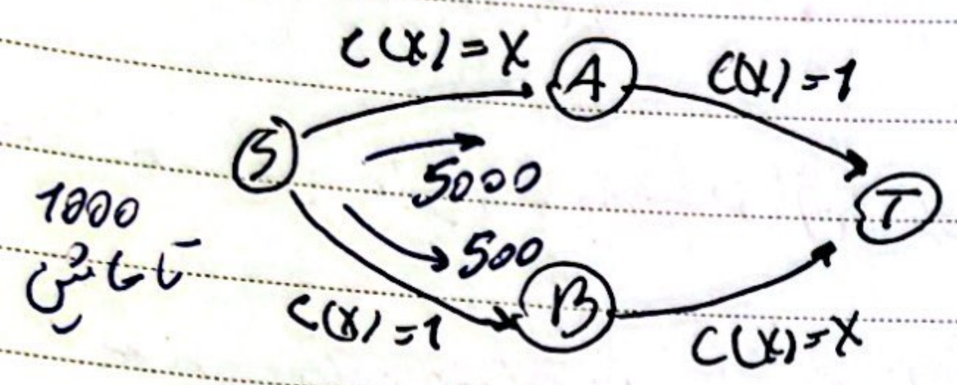
Subject:
Year. Month. Date. ( )

Price of Anarchy: → selfish strategic

↳ mechanism بررسی اینکه چقدر در اثر این های selfish agent بودن عملکرد

را بدی می‌کند. (هزینه بدترین NE)

$C(x) = 1000$



⇐ برای شکل Braess

سیزان تاخیر کل = 501

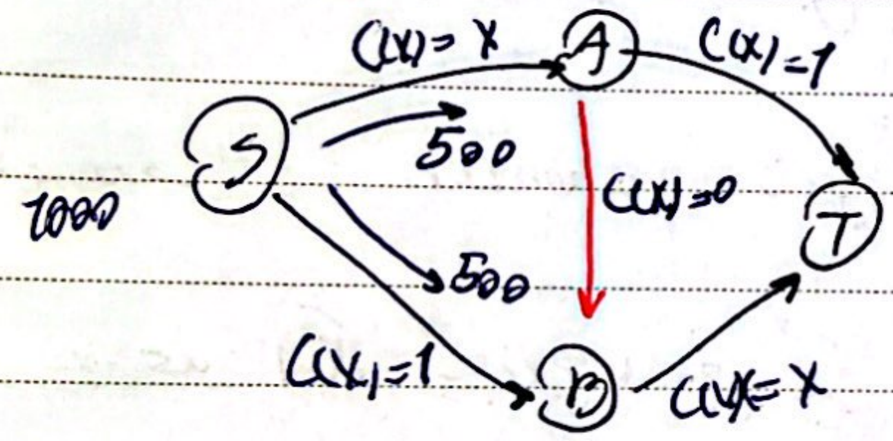
↳ 1000 × 501

با فرض اینکه همه اطلاعات کامل از همه مسیرها دارند.

⇐ همه agent ها از کار خود راضی هستند و حاضر به تغییر کل نیست، زیرا تغییر مسیر خودش هزینه دارد.

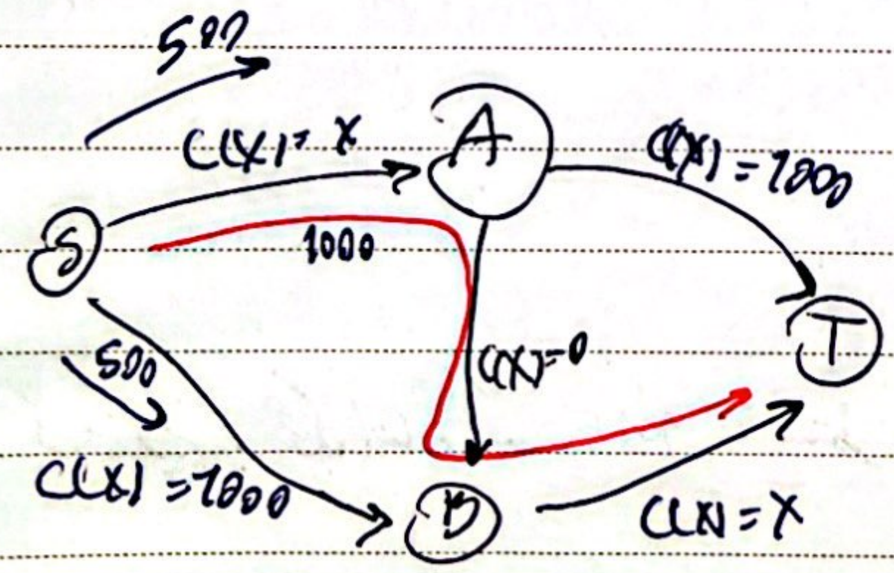
NASH Equilibrium ⇒ پیشبینی ها از کجا اتفاق می‌افتد ← یافتن NE

همه agent ها از action خود راضی هستند و حسرت نمی‌خورند و حاضر به تغییر کل نیستند



⇐ هنوز هم nash equilibrium است زیرا

حاضر به تغییر نیستند و از تصمیم خود راضی اند



⇐ در حالی که 500 تا از سر بالا بروند و 500 تا

از سر پایین، NE نیست زیرا اگر یکی

بخواهد مسیرش را از SAT به SABT

تغییر بدهد هزینه از 1500 به 1000 کاهش

می‌یابد

⇐ در حالی که همه 1000 تا از مسیر SABT بروند NE هست چون در اثر تغییر مسیر هزینه 2000 باقی می‌ماند.

PAPCO

NE به

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$PoA = \frac{\text{هزینه بدترین } NE}{\text{هزینه بهترین}} = \frac{2000 \times 1000}{1000 \times 1500} = \frac{4}{3} \rightarrow$$ ٪۳۳ بدتر می‌شود

NE نه لزوماً

⇐ معمای زندانی

A \ B	Silent	Testifies
Silent	$R_A = R_B = 1$	$R_A = 3$, $R_B = 0$
Testifies	$R_A = 0$, $R_B = 3$	$R_A = 2$, $R_B = 2$

حالت 2,2 ، NE است

$$PoA = \frac{2+2}{2} = 2$$

unilatral movement

⇐ اگر تعداد حالات زیاد شود، یافتن Nash equilibrium (Pure) دشوار خواهد بود.

⇐ سنگ، کاغذ، قیچی

		r	p	s
$\frac{1}{3}$	r	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
$\frac{1}{3}$	p	(1,-1)	(0,0)	(-1,-1)
$\frac{1}{3}$	s	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

به طور عادی pure nash equilibrium ندارد.

Mixed nash equilibrium : قرار دادن یک توزیع احتمال روی action ها تا NE شود

$$E(P_1) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}(0) = 0$$

اگر توزیع احتمال انجام action ها $\frac{1}{3}$ باشد nash equilibrium است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Nash lemma

هر بازی حتماً دارای یک Mixed nash equilibrium است.

⇐ بازی Zero-Sum

که در زمان چند جمله‌ای می‌توان MNE را حساب کنید.

MNE یک مسئله PPAD-HARD است.

فرض یک بازی zero-sum نسبتاً ← MNE ؟

در مسائل NP هدف این است بفهمیم مسئله جواب دارد یا خیر. اما در MNE طبق Nash می‌دانیم جواب وجود دارد.

Overall

- Selfish agents → { strategic behavior
  selfish

- Director/orchestrator → { best game
  overall happiness → social surpluss
  truthful

rules/payments

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Sealed bid Auction :

مزایده انگلیسی : شروع از یک قیمت و افزایش کل به ترتیب توسط افراد تا جایی که کسی قیمت بالاتر ندهد.

مزایده ژاپنی : از یک قیمت بالا شروع می‌کنند، اگر در قیمت خریدار نباشد، کالا را کاهش می‌دهند.

افراد قیمت پیشنهادی را در پاکت نوشته و می‌فرستند، بالاترین به عنوان خریدار انتخاب می‌شود (در یک iteration)

که اینکه فرد برنده چه مبلغی پرداخت توسط director تعیین می‌شود. (ممکن است برابر مبلغ پیشنهادی نباشد)

$b_1, b_2, \dots, b_n$

ارزشی که فرد برای کالا قائل است

پولی که در قانون بازی فرد باید بپردازد.

utility etc

$$u_i(b_i, b_{j\neq i}) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{if win} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

First Price Auction

$$\begin{cases} p_{argmax(b_i)} = \max(b_i) \\ \quad \hookrightarrow \text{winner} = \text{argmax}(b_i) \\ p_{i\neq winner} = 0 \end{cases}$$

فرض: $v_1 = 2\times10^9,\ v_2 = 1\times10^9,\ v_3 = 9\times10^8$

اگر $\boxed{v_i = b_i \text{ باشد truthful}} \Leftarrow$

برنده

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 - 0 = u_3 \end{cases}$$

$\hookrightarrow v_i = 0$ چون برنده نشده

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در Fixed Price Auction اگر نفر برنده قیمتی بین V_1 برنده و نفر دوم دهد (دروغ بگوید):

$u_1 = 2+10^9-(10^9+1) \neq 0$

← بنابراین راستگو نیست!!

* در مزایده انگلیسی به دلیل اینکه مبلغ پیشنهادی نفر اول کمی بیشتر از value نفر دوم است و بر اساس value خود فرد $V_1 \gg V_2 \gg \dots$ ← پس FPA نیست.

$b_{argmax(b_i)} = V_{second\ bid}$

← مشکل این است که V_1 نامشخص می‌ماند.

$P_{argmax(b_i)} = V_{second\ bid} = V_2$

← پرداخت برنده کمی بیشتر از نفر دوم یعنی second price.

$u_{winner} = V_{winner} - V_2 = V_1 - V_2 \geq 0$

Second Price Auction → based on sealed bid auction / truthful / awesome

$b_1 > b_2 > \dots > b_n$

← همه در مجموع خوشحال اند ($u_i \geq 0$)

$winner = argmax(b_i)$

$P_1 = V_2 = b_2$

$P_2 = P_3 = \dots = P_n = 0$

چون صرفا به اندازه b_2 پرداخت می‌کند اگر برنده شود انگیزه‌ای برای دروغ گفتن، بالاتر گفتن قیمت ندارد. ← از راست گفتن پشیمان نیست

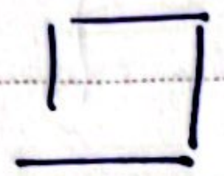
چون اگر کمتر از b_1 قیمت بدهد ممکن است برنده نشود. پس دروغ نمی‌گوید.

کسانی که برنده نمی‌شوند نیز انگیزه‌ای برای بیش‌تر گفتن قیمت ندارند زیرا سودی خواهد شد.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Sealed bid Auction :



$b_1, b_2, \dots, b_n$

$v_1, v_2, \dots, v_n$

allocation function

$X(b)$ → مشخص می‌کند هر فرد چقدر از کالا می‌رسد.

↳ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

payment rule

$P(b)$ → مشخص می‌کند هر فرد چه هزینه‌ای باید پرداخت کند.

↳ $R^n \to R^n$

برای مثال :

$$X(b) = \begin{cases} i = \arg\max(b_i) : & X_i(b) = 1 \\ o.w & X_i(b) = 0 \end{cases}$$

$$P(b) = \begin{cases} i = \arg\max(b_i) : & P_i(b) = b_i \\ o.w : & 0 \end{cases}$$

هر فرد بر اساس سه علم v_i ، $X(b)$ ، $P(b)$ یک مقدار پیشنهادی b_i را ارائه می‌دهد.

$$U_i(b_i, b_{-i}) = X_i(b_i, b_{-i}) \cdot v_i - P_i(b_i, b_{-i})$$

$j \neq i$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Awesome Auction

1- Dominent strategy of every player is to tell the truth

$b_i = v_i$ is a dominant strategy for each $i \in N$

$\forall i, b'_i \neq v_i, b_{j\neq i} : u_i(b_i = v_i, b_{j\neq i}) \geq u_i(b'_i, b_{j\neq i})$

Dominant strategy Intensive compatible (DSIC)

2- Performance garantee

$x_i \longrightarrow$ متوسط از کالا به فرد i داده ام , $b_i = v_i$, $v_1 > v_2 \dots v_n$

$\rightarrow x_1 = 1, x_{j\neq 1} = 0$

Social surplus $\rightarrow \sum x_i v_i \rightarrow$ maximize

3- Computational efficient

با یک الگوریتم در زمان چند جمله ای بتوانیم برنده و payment ها را مشخص کنیم.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1) DSIC : $v_i = b_i$ is a dominant strategy for each $i \in N$

به استراتژی s ، DS گفته می‌شود اگر:

$\forall s', b_{-i} \quad U_i(s, b_{-i}) \geq U_i(s', b_{-i})$

$U_i(v_i, b_{-i}) \geq U_i(b_i, b_{-i})$

2) Social Surplus

$\sum X_i(b) \cdot v_i \rightarrow$ maximize

social welfare $= \sum U_i(b)$

3) Computable In polynomial time

Single Parameter Environment

در هر مرحله فقط یک متغیر تعیین می‌شود ← مثلا فقط b_i

غیر single مثل اینکه فرد یک بازه $b_{min} - b_{max}$ اعلام کند.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Implimentable Alocation Rule:

X ، Implementable است اگر و تنها اگر یک Payment Rule وجود داشته باشد که

(X, P) ، DSIC باشد. ← برای اینکه DSIC باشد، باید صعودی باشد.

Mayerson's Lemma

قضیه: تابع X قابل پیاده سازی است اگر و تنها اگر X صعودی باشد.

$$\forall_{\substack{i \\ b_i, \varepsilon > 0}} : X_i(b_i, b_{-i}) \leq X_i(b_i + \varepsilon, b_{-i})$$

if $v_i = z$, $y \leq z$ $\rightarrow$ $U_i(z) \geq U_i(y)$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow z \cdot X_i(z) - P(z) \geq z \cdot X(y) - P(y) \quad (1)$$

if $v_i = y$, $y \leq z$ $\rightarrow$ $U_i(y) \geq U_i(z)$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow y \cdot X(y) - P(y) \geq y \cdot X(z) - P(z) \quad (2)$$

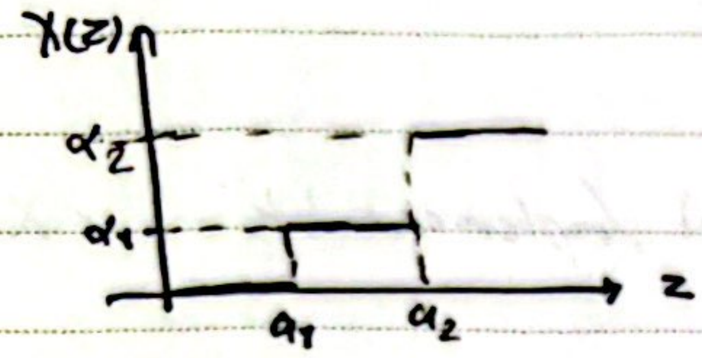
$$\xrightarrow{1,2} z(\overbrace{X(z) - X(y)}^{\text{jump in } X}) \geq \overbrace{P(z) - P(y)}^{\text{jump in } P} \geq y(X(z) - X(y))$$

$$\rightarrow \overbrace{(z-y)}^{+}(X(z) - X(y)) \geq 0 \rightarrow \underline{X(z) - X(y) \geq 0}$$

صعودی باشد

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )



Jump in $X = \alpha_1$, $z = \alpha_1 + \varepsilon$, $y = \alpha_1$ $\Rightarrow$ Jump in $p = \alpha_1 \times \alpha_1$

$$p(z) = \sum_{\alpha_i \leq z} \alpha_i - \alpha_{i-1}) . \alpha_i \quad , \quad p_i(b_i, b_{-i}) = \int_0^{b_i} 2 . \frac{d}{dz} \chi_i(z, b_{-i}) \, dz$$

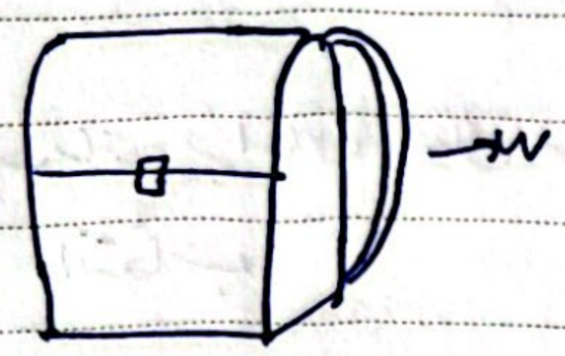
Scanned with CamScanner

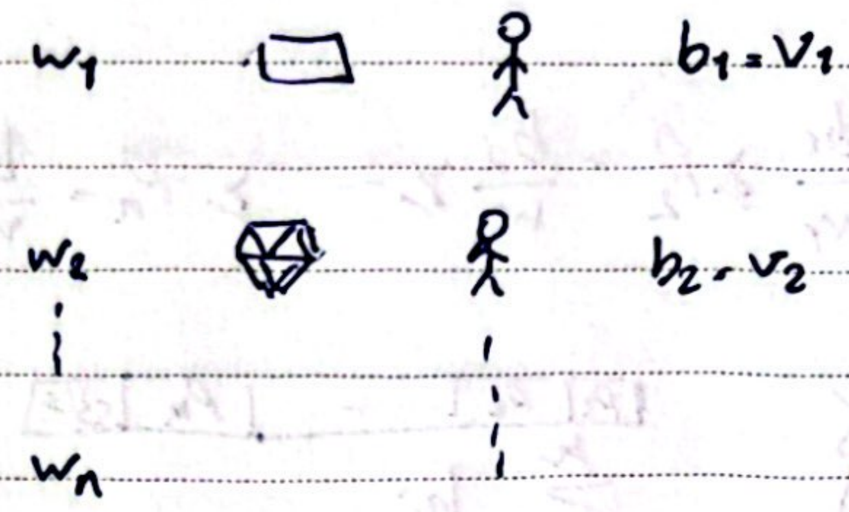
Subject:
Year. Month. Date. ( )

شل تبلیغات زمین فوتبال (مزایده تبلیغات با تعداد مشخص)

Knap Sack Auction:

DSIC





$$\max \sum x_i w_i \le W \quad , \quad x_i \in \{0,1\}$$

↳ social surplus

معادل مسئله کوله پشتی 0,1 در یک مسئله ها NP-complete است.

تقریب ← Awesome شود

① social surplus بهترین کسی باید نزدیک بهینه باشد

② باید معنی باشد

③ باید در زمان چند جمله ای قابل محاسبه باشد.

if w polynomial

$O(nW) \rightarrow A(w)$

$A(w,s)$

dynamic programming

↳ pseudo polynomial

↳ monotone problem??

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Greedy Solution:

$P_1 = \frac{b_1}{w_1} \geq P_2 = \frac{b_2}{w_2} \geq \dots \geq P_n = \frac{b_n}{w_n}$ → مرتب سازی بر اساس حرکالی سپس انتخاب.

یکی از این موارد را انتخاب می‌کنیم

$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{P_1 \mid P_2 \mid \dots \mid P_k \mid \text{خالی}} \\ \sum_i^k b_i \\ \text{argman } b_i \end{array} \right.$

$\geq \frac{1}{2}$ optimum

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k \leq opt \\ opt \leq b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} \quad * \end{cases}, \quad \max \begin{cases} b_{max} \\ b_1 + \dots + b_k \end{cases}$$

فرض خلف : $ans < \frac{1}{2} opt \rightarrow b_{max} + b_1 + \dots + b_k < \frac{1}{2} opt + \frac{1}{2} opt < opt$ ①

از طرفی : $b_{k+1} < b_{max} \xrightarrow{①} b_{k+1} + b_1 + \dots + b_k < opt$ در تناقض با *

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Revelation Principle:

Directive Revelation ⇒ Incentive compatible ⇒ truthfull

$S_i = \arg\max v_i(s)$

↳ $X_i(b_i, b_{-i})$ ، صعودی نباشد

↳ DSIC → { Dominant Strategy → $\forall s \rightarrow U(s, b_i) \geq U(s, b_i')$
Incentive compatible → $v_i = b_i$ }

فرض کنید بازی DS دارد اما IC نیست. آیا می‌توان بازی را IC کرد؟

DS → $S_i = b_i = \frac{v_i}{2}$ ← به ازای مثال هر فرد دو برابر در نظر گرفته می‌شود

تا در بازی پیروز شود. بیش‌تر از v_i نمی‌دارد.

راه حل ← یک عامل مالی قرار دهیم تا هر کس b_i را ارائه دهد اما عمل مالی (از جانب S_i) لکن را به $\frac{v_i}{2}$ تغییر دهد.

⇐ هر مکانیزم M که در آن هر شرکت کننده‌ای دارای استراتژی غالب باشد، دارای یک مکانیزم M' است که DSIC است.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Revenue Maximizing Auction:

Social surplus Maximizing → $\sum x_i v_i$

DSIC

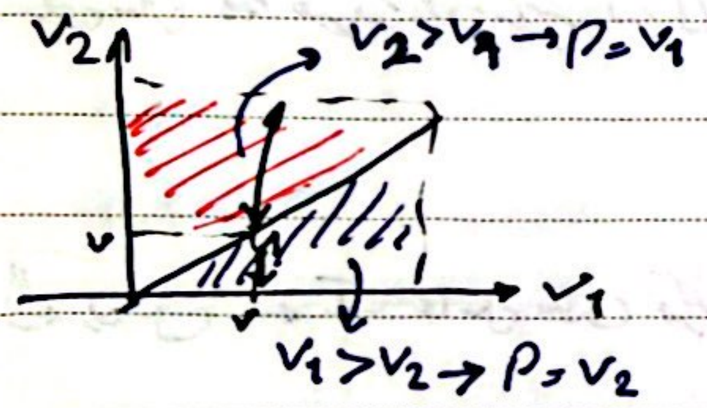
$v_1 \sim F_1(v_1)$ با توجه به اطلاعات افراد (توزیعی از v_i)

$v_2 \sim F_2(v_2)$

$\vdots$

$v_n \sim F_n(v_n)$

$v_1, v_2 \to$ i.i.d, $\sim$ Uniform $[0,1]$ (با $f(x)=1, F(x)=x$), second price auction فرض



$E[x] = \int f(x)\, x\, dx$

مثلث بالا و پایین

$$E_{v_1, v_2 \sim U[0,1]}[R] = 2\int_0^1 \int_0^{v_1} v_2 \, dv_2 \, dv_1 = \int_0^1 \frac{1}{2} v_2^2 \Big|_0^{v_1} dv_1 = \frac{1}{6} v_1^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$$

محاسبه از طرف دیگر

$$= 2\int_0^1 \int_{v_1}^1 v_1 \, dv_2 \, dv_1 = \int_0^1 v_1 v_2 \Big|_{v_1}^1 dv_1 = \int_0^1 (v_1 - v_1^2)\, dv_1 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

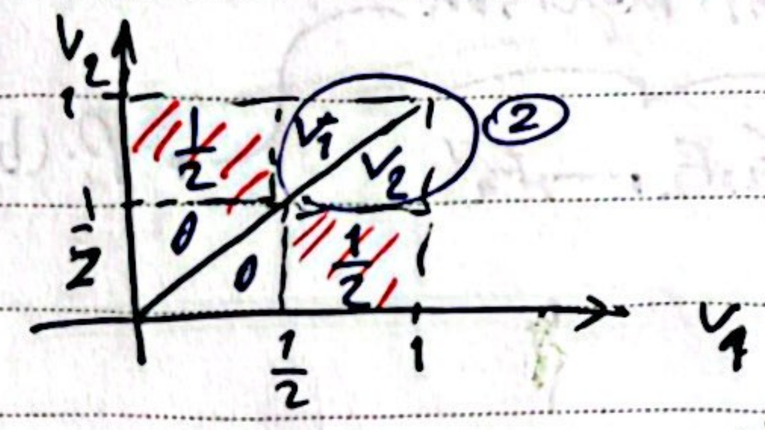
Subject:
Year. Month. Date. ( )

Reserve Price:

فرد دیگری به مزایده حضور دارد که قیمت حداقل فروشنده را اعلام می‌کند. در این صورت اگر افراد کمتر از proxy

این مقدار پیشنهاد دهند، فرد کالا را نمی‌فروشد (بدون اینکه بقیه مطلع شوند)

Reserve price $= \frac{1}{2} \Rightarrow$



① $E_1[R] = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\, dv_2\, dv_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} v_2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} dv_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{4}\, dv_1 = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$

② $E_2[R] = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{v_1} v_2\, dv_2\, dv_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} v_2^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{v_1} dv_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{8}\right) dv_1 = \frac{1}{12} \times 2 = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow E[R] = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

General Form $\rightarrow$ use alpha instead of $\frac{1}{2}$

Revenue Maximizing Auction

$\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\left[\sum P_i(v)\right]$, $P_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \underbrace{x_i'(z, b_{-i})}_{x_i \text{ مشتق}}\, dz$

$\Rightarrow \mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\left[\sum_1^n \int_0^{v_i} z \cdot x_i'(z, v_{-i})\, dz\right] = \sum_1^n \mathbb{E}\left[\int_0^{v_i} z \cdot x_i'(z, v_{-i})\, dz\right]$

$\mathbb{E}\left[\int_0^{v_i} z \cdot x_i'(z, b_{-i})\, dz\right] = \int_0^{v_{max}} \left(\int_0^{v_i} z \cdot x_i'(z, b_i)\, dz\right) \cdot f_i(v_i)\, dv_i$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \int_0^{v_{max}} \underbrace{\int_z^{v_{max}} f_i(v_i)\, dv_i}_{1-F_i(z)} \, z \cdot x_i'(z, b_{-i})\, dz$$

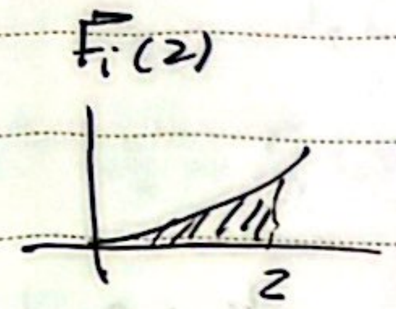
Recall

DSIC → $x(b)$: monotone → $\sum_i^n P_i(v)$

$p(b)$: myerson

$F_1, F_2, \dots, F_n$

$$P_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot x'(z, b_{-i})\, dz$$



$$\mathbb{E}_{v_i \sim F_i}\left[\sum p_i(v_i; v_{-i})\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \int_0^{v_i} z \cdot x'(z, v_{-i})\, dz\right]$$

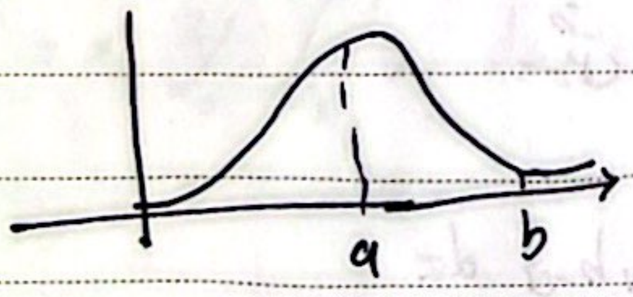
$$= \int_0^{v_{max}} \sum_i^n \int_0^{v_i} z \cdot x'(z, v_{-i})\, dz \cdot f_i(v_i)\, dv_i$$

⇐ برای یک نمونه :

جابجایی انتگرال

$$\mathbb{E}[P_i(v_i; v_{-i})] = \int_0^{v_{max}} \int_0^{v} z\, x'(z)\, dz \cdot f_i(v_i)\, d(v_i)$$

$$= \int_0^{v_{max}} z \cdot x'(z) \int_z^{v_{max}} f_i(v_i)\, dv_i \; dz = \int_0^{v_{max}} \underbrace{z}_{u} \underbrace{x'(z)}_{dv} \underbrace{(1-F_i(z))}_{u} \underbrace{dz}_{dv}$$



احتمال

$$\int_a^b f_i(v_i) = P_r(a; v_i; b) = F_i(b) - F_i(a)$$

Recall → انتگرال جزء به جزء → $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\hookrightarrow = \underbrace{z(1-F_i(z))\, x_i(z) \Big|_0^{v_{max}}}_{0} - \int_0^{v_{max}} x_i(z)\,(1 - F_i(z) - z f_i(z))\, dz$$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \int_0^{v_{max}} x_i(z) \cdot \underbrace{\left(\frac{1-F_i(z)}{f_i(z)} - z\right)}_{\phi_i(z) = v_i - \left(\frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}\right)} f_i(z)\, dz$$

$$= \mathbb{E}[\phi_i \cdot x_i(v_i)] \rightarrow \text{Revenue} = \mathbb{E}\left[\sum \phi_i \cdot x_i(v_i)\right]$$

غرامت

virtual values

$$\text{Social Surplus} = \mathbb{E}\left[\sum x_i(v_i) \cdot v_i\right]$$

maximum of profit

$$\begin{cases} F_i = F \\ \phi(v_i) \rightarrow \text{صعودی} \end{cases} \Rightarrow \text{Regular Setting}$$

• تفاوت با Social surplus این است که برخلاف v_i ها، ϕ_i می‌تواند منفی باشد و نباید در جمع حساب شود $\Leftarrow$ افراد اضافی در auction لحاظ می‌کنیم که ϕ_i آنها صفر باشد. بنابراین باید value ای داشته باشد که $\phi_i = 0 \leftarrow$ reserved price $= \phi^{-1}(0)$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

$$\phi(v_i) = v_i - \frac{1-F(v_i)}{f(v_i)}$$

$$\mathop{E}_{v_i \sim F}\left[\sum p_i(v_i)\right] = \mathbb{E}\left[\sum \phi_i(v_i) \cdot x_i(v_i)\right]$$

$\Rightarrow$ reserve price $= \phi^{-1}(0)$

$\Rightarrow$ what if $\Rightarrow \begin{cases} \phi_i \rightarrow \text{معمولی نباشد} \\ \text{یا} \\ \phi_i \rightarrow \text{از توزیع های متفاوت} \end{cases}$ $\rightarrow$ problem

max of profit: $\mathbb{E}\left[\sum \phi_i^+(v_i)\right] \rightarrow \phi_i^+ = \max(0, \phi_i)$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Prophet Inequality:

→ if we do not have regular setting, we have to set a setting that gives us max profit with a good probability

a number distributions → $G_1, G_2, \dots, G_n$ → $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$

Known distributions

Take prophet rule

→ in each step we either accept π_i (sample) from G_i or discard it and check next i

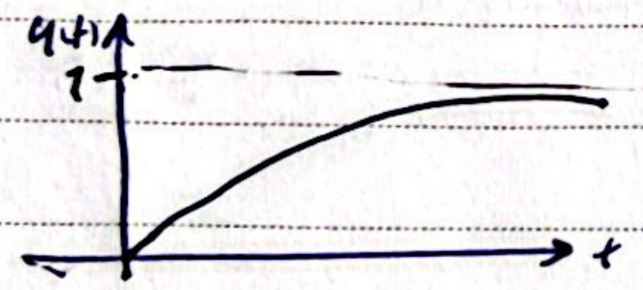
قضیه پیامبر: به ازای هر رشته‌ای از توزیع های $G_1, \dots, G_n$ که مستقل از هم هستند، استراتژی وجود دارد که

$\mathbb{E}[\text{Revenue}] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[\pi^{max}]$ را برای ما تضمین می‌کند. $\frac{1}{2}\mathbb{E}[\pi^{max}]$

t-treshold Strategy:

define a t as treshold & we accept first $\pi_i \geq t$

$q(t)$: احتمال اینکه در همه مراحل مقادیر π_i را reject کنیم



$$\mathbb{E}[\text{Revenue}] \geq (1-q(t))t + \sum_i^n \mathbb{E}[\pi_i - t \mid \pi_i \geq t, \pi_j < t] \times \Pr[\pi_i \geq t] \cdot \Pr[\pi_j < t]$$

$$= (1-q(t))t + \sum_i^n \mathbb{E}[(\pi_i - t)^+] \cdot \underbrace{\Pr[\forall j<i\ \pi_j < t]}_{\geq q(t)}$$

$$\Rightarrow \geq (1-q(t))t + \sum \mathbb{E}[(\pi_i - t)^+] \cdot q(t)$$

if $q(t) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \geq \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sum \mathbb{E}[(\pi_i - t)^+] = \frac{1}{2}[t + \sum \mathbb{E}[(\pi_i - t)^+]] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[\pi_i^{max}]$

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1) choose $\underline{\underline{t}}$ such that $\Pr(\max \phi_i(v_i)^+ \geq t) = \frac{1}{2}$

2) Give the item to the bidder with $\phi_i \geq t$

$\hookrightarrow$ Reserve Price $\rightarrow v_i = \phi_i^{-1}(t) \rightarrow$ if $v_i \geq v_i \rightarrow$ give the item

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Blower-Klemperer :

what we do not know the distributions? $\{v_i\} \sim \{F_i\}$ ↳ unknown

(recap) $\sum p_i(v_i) = \sum x_i(v_i) \cdot Q_i(v_i)$

فرض کنید
- $\forall i: F_i = F$ (متقارن)
- F یک توزیع regular است ⟷ $\phi(v)$ صعودی باشد.

Second bid auction

★ $\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_{n+1}\sim F}[Rev(VA)\ (n+1 \text{ bidders})] \geq \mathbb{E}_{v_1,\dots,v_n\sim F}[Rev(OPT_F)\ (n \text{ bidders})]$

, $\mathbb{E}(\text{profit } (VA)) \geq \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(OPT_F)$

← اگر ملزم باشیم که کالا را اختصاص بدهیم ($\sum x(v_i) = 1$) ، آنگاه VA بهینه است. ($\sum p_i(v_i) = \max$)

1. OPT_F از بین n نفر که شامل $A-\{i\}$ هست را حساب می‌کنیم
2. اگر اختصاص نداد، رایگان به i اختصاص می‌دهیم.

⟸ در این صورت ★ برقرار است.

Spectrum Auction :

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

For multiple Items: Combinatorial Auction

① راجع به تک تک item ها جداگانه bid بدهند. ✗ ← ممکن است چند item بخاطر عدم ارزش داشتن باشند و نه تنهایی

② راجع به مجموعه item ها bid بدهند. ← مورد قبول ✓

where is: $v_i(\text{الماس}) = 10^6\$$, $v_i(\text{الماس}) \neq 0$ (نداشتن) , $v_i(\text{ق} \leftarrow \text{الماس}) < 0$

تضاد منافع

یعنی اگر به شخص خاص برسد ناراحت می‌شود، فضا پیچیده‌تر از حالت عادی است.

Multi-Parameters Mechanism Design:

① n تا strategic agent (A)

② مجموعه‌ای از outcome ها داریم (Ω) combinatorial auction

$\Omega = \{ \{(S_i, a_i)\}_{i=1-n} \mid \bigcap S_i S_j = \emptyset \}$

③ هر agent راجع به هر $\omega \in \Omega$ یک valuation دارد که با تابع $v_i(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$

↳ $b_i(\omega) \leftarrow |\Omega| \times |A|$ تعداد بیدهای کل نزایده

مشخص می‌شود.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱- در این فضا از هر agent درخواست یک v_i به ازای هر ω می‌کنیم، $b_i(w)$

قضیه:

VCG (Vickery clarke Groves)

در هر محیط MPMD environment، یک مکانیزم DSIC social surplus را بیشینه کند وجود دارد.

$$b = b_1, b_2, \dots, b_n \quad , b_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

$|\Omega|$

outcome مورد انتخاب

$$X(b) = \underset{w \in \Omega}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{n} b_i(w) \rightarrow$$

بین outcome ها آن مورد را انتخاب می‌کنیم

allocation rule

که مجموع bid های افراد روی آن بیشینه باشد.

$$P_i(b_i, b_{-i}) = \max_{w \in \Omega} \sum_{j \neq i}^{n} b_j(w) - \sum_{j \neq i}^{n} b_j(w^*) \geq 0$$

$X(b)$ در

مثال: ستا spectrum در پیرو

1) 1MHz - 2MHz

2) 2MHz - 3MHz

3) 3MHz - 4MHz

	Z	A	P	
$\Omega = \{ 1 \to 2, 2 \to P, 3 \to A$, etc	1000	1500	0	ت1
$1,2 \to A, 3 \to Z, \emptyset \to P$, etc	3000	3000	4000	ت3
$1,2 \to A, 3 \to P, \emptyset \to Z$, etc				
$1,2 \to Z, 3 \to A, \emptyset \to P$				
$1,2 \to Z, 3 \to P, \emptyset \to A$				
$1,2 \to P, 3 \to Z, \emptyset \to A$				
$1,2 \to P, 3 \to A, \emptyset \to Z$				
$1,2,3 \to A, \emptyset$	5000	4000	4500	ت3
$1,2,3 \to Z, \emptyset$				
$1,2,3 \to P, \emptyset$				

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$w^* = \{2 \to P, 3 \to A\} \Rightarrow 5500\$$

$P_P(b) = 5000 - 1500 = 3500\$$

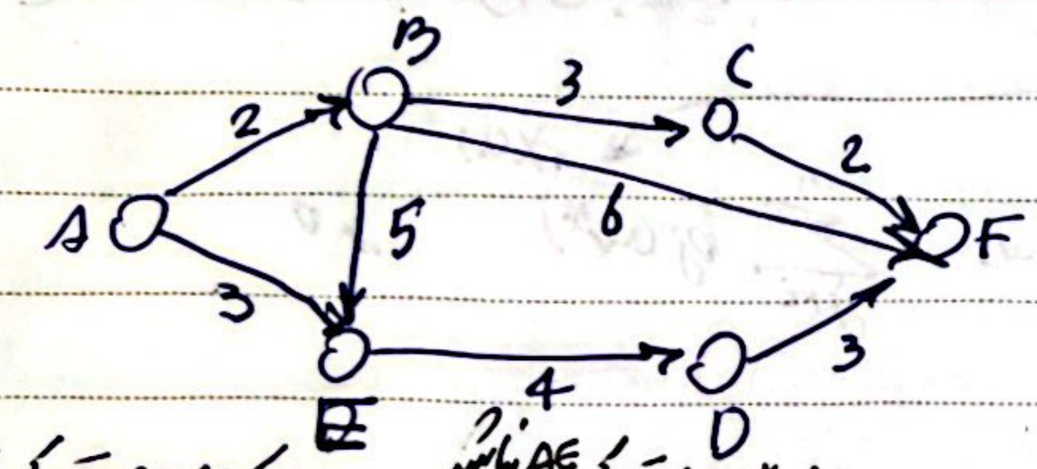
$P_2(b) = 5500 - 5500 = 0\$$

$P_A(b) = 5000 - 4000 = 1000\$$

$$\rightarrow P_i(b) = b_i(w^*) - \left[\sum_{j=1}^{n} b_j(w^*) - \max_{w} \sum_{j \neq i} b_j(w)\right]$$

مثال ۲)

اگر اعداد بال ما value باشد، bid



کمترین در صورتی که AE نباشد

هزینه w^* در صورتی که AE نباشد

$P_{AE} = \overbrace{-7} - \overbrace{(-7)} = 0$

$P_{AD} = -10 - (-5) = -5$

$P_{BC} = -8 - (-4) = -4$

$P_{CF} = -8 - (-5) = -3$

روی این بخش شانسی نداریم فقط w^* قابل دستکاری است.

$$U_i(b) = v_i(w^*) - P_i(b) = \left[v_i(w^*) + \sum_{j \neq i} b_i(w^*)\right] - \left[\max_{w \in \Omega} \sum b_j(w)\right]$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یک سری محدودیت ها ممکن است وجود داشته باشد (وابسته به Payment Rule) که VCG قادر به حل کل را

ندارد ⟸ $\boxed{\text{non linear utility function}}$

Budget Constraints :

B_i's are Known $\Rightarrow$ $u_i(w) = \begin{cases} P_i(w) \le B_i \rightarrow n_i(w).v_i(w) - P_i(w) \\ o.w \rightarrow -\infty \end{cases}$

Clinching Auction :

- m identical items
- each agent has a known budget B_i
- " " " a valuation for each item $\rightarrow v_i$, and wants to have as many items as possible

$\hookrightarrow$ $u_i(k_i) = \begin{cases} \overbrace{k_i}^{\text{number of items bought}} v_i - \sum_{j=1}^{k_i} \overbrace{P_{ij}}^{\text{payment for each item (can be different for each one)}} & o.w \\ -\infty & P_i > B_i \end{cases}$

$D_i(p) = \begin{cases} p > v_i & 0 \\ o.w & \min(\lfloor \frac{B_i}{p} \rfloor, m) \end{cases}$

i's agent demand

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

P را از یک مقدار کم شروع می‌کنیم، ولی را افزایش می‌دهیم تا شرط $\sum D_i(P_i) \le m$

جمع D_i ها

$P_{=0} \longrightarrow P^*$

$\hookrightarrow \sum_i^n D_i(P^* - \varepsilon) > m \rightarrow \sum_i^n D_i(P^*) \le m$

* its not DSIC !! → Market - cleaning

Clinching Auction

تعداد کالا های باقی مانده

$S = m$, $P = 0$

while $S > 0$:

- increase P until there is a bidder i such that

$K = S - \sum_{j \neq i} D_j(P) > 0$

جمع کل به بدون i

- give K item to bidder i with price P

- $S = S - K$

- $B_i = B_i - KP$

$\Rightarrow$ DSIC

exp. → $m = 2$, $v_1 = 6$, $B_1 = \infty$ | $v_2 = 5$, $B_2 = 5$

$\frac{S=2}{P=0}$ → $D_1 = 2$, $D_2 = 2$ → $P = 2.5 + \varepsilon$ → $D_1 = 2$, $D_2 = 1$ → $P = 5 + \varepsilon$ → $D_1 = 2$, $D_2 = 0$

1 کالا به نفر اول می‌دهیم

$S = 1$

1 کالا به نفر اول می‌دهیم

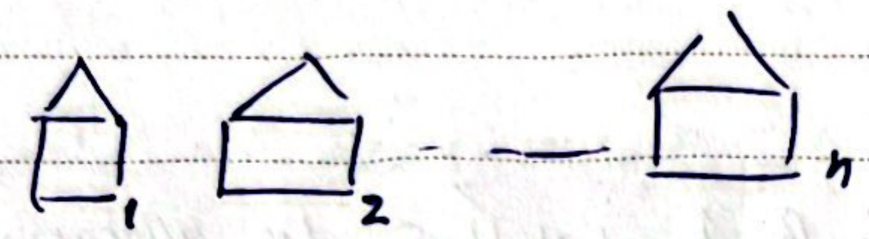
$S = 0$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Mechanisms without Money,

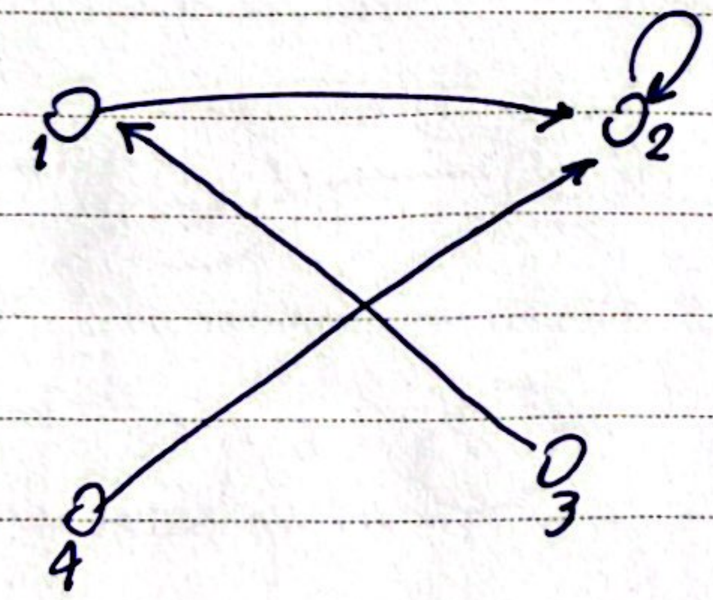
House allocation problem:



preference: 2>3>1>4 , 2>1>3>4 , --

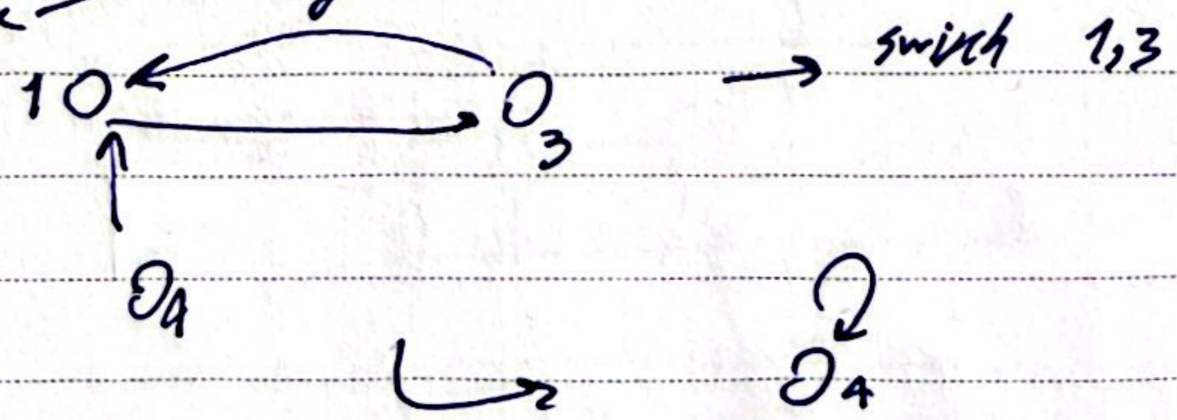
TTCA (Top Trading Cycle Algo)

start → get rank 1st of each agent:
form



delete loops, allocate houses

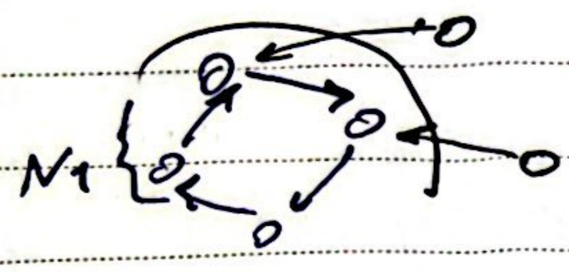
2nd rank → remaining



→ switch 1,3

Subject:
Year. Month. Date. ( )

N_1 : کوم هایی که در دور اول به تک ها خانه اختصاص شده است.



* یک allocation بدست است اگر دو نفر A و B با شند که هر دو تک ها A→D و B→C ، خوشحال تر باشند.

core allocation

اعضای N_1 حاضر به تغییر نیستند در نتیجه افراد خارج N_1 قادر به همکاری با تک ها نیستند.

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

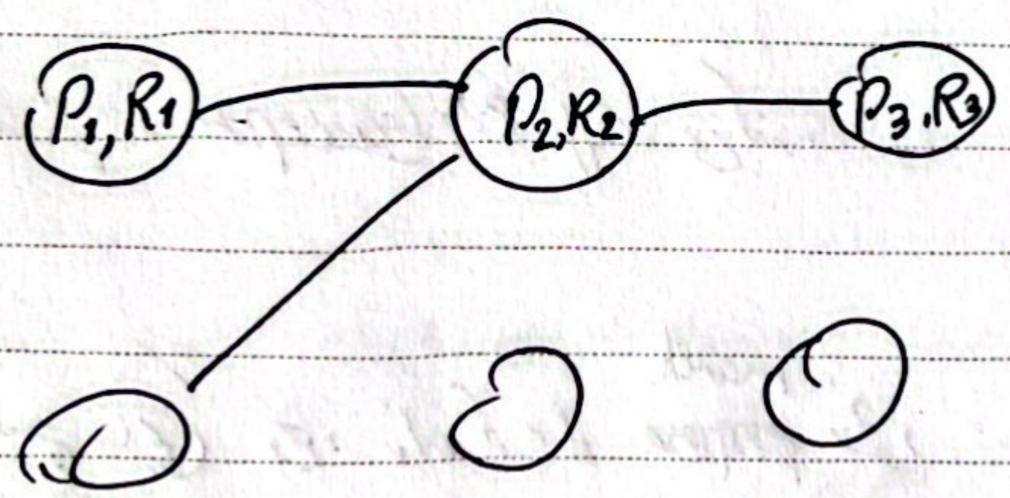
Kidney Exchange

⇐ یک matching که در یک هر فرد به فرد دیگر که می‌تواند کلیه بدهد به یک وصل باشد و جواب یافتن دور در این گراف است. ← یافتن همین دوری در گراف دشوار است.

Matching:

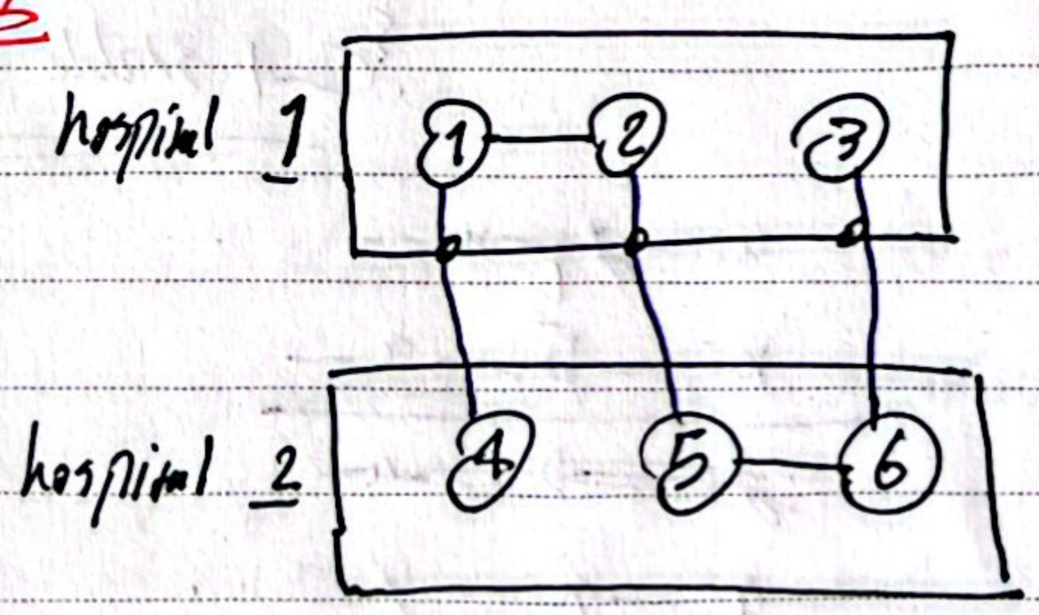
در گراف $G(V,E)$ ، $S \subseteq E$ یک تطابق گفته می‌شود اگر به ازای هر $x,y \in S$ ، $x \cap y = \emptyset$

⇐ یک گراف بدون جهت در نظر می‌گیریم، در یک max. matching را می‌یابیم.



$\Rightarrow \begin{cases} P_2 \to R_3 \\ P_3 \to R_2 \end{cases}$

Crossing Edge:



Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Matching Market

Stable Matching:

proposal Algo:

تا زمانی که یک $u \in U$ وجود دارد که unmatched است، به ترتیب لیست اولویت

به اولین کسی که تا به حال propose نکرده است، propose می‌کند.

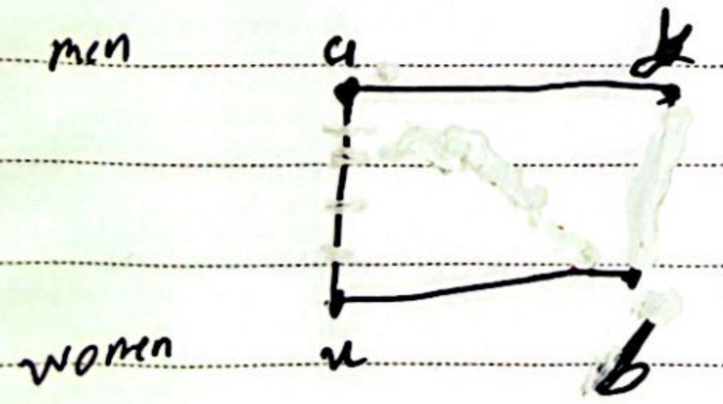
خانم‌هایی که propose می‌شوند، بنا به این که u در لیست کدام از مردها match شده بهتر یا بدتر

است accept یا reject می‌کند.

⟸ هیچ خانمی وجود ندارد که به او ~~propose~~ match نشود زیرا در لیست همه آقایان وجود دارد و در نتیجه حداکثر یکبار

به او propose می‌شود. در نتیجه چون $n_{men} = n_{women}$، همه match می‌شوند و الگوریتم یک matching حساب

می‌کند ← آیا stable است؟



a: —y — x —

x: — b — a —

~~y — b — a~~

a: — x — y

x: — a — b

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Recap ⇒ Marching Markets

$x>y>z$ A — X — X $c>b>a$

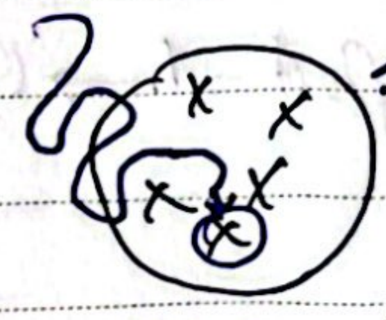
$x>y>z$ B — Y $b>c>a$

$z>x>y$ C — Z $a>b>c$

→ stable matching

A — Y

X — B



stable matchings

حتماً به جواب unique می‌رسد.

⇒ A: --Y --- X

یا

X: --- B --- A

الویت افراد در صورتی که گراف بالا یک match باشد.

قضیه: به ازای هر مرد a تعریف می‌کنیم h(a) برابر با بهترین خانمی که وی در همه stable matchها میتواند به دست آورد. در الگوریتم پروپوزال هر مرد a به h(a) دست می‌یابد.

|||

به ازای هر $(u,v)\in R$ هیچ stable matching وجود ندارد که u, v با هم ازدواج کنند.

$R=\{(u,v) \mid v \text{ reject } u\}$ ⇒

مکان A

خانم

به هم match کند.

اثبات:

v reject u

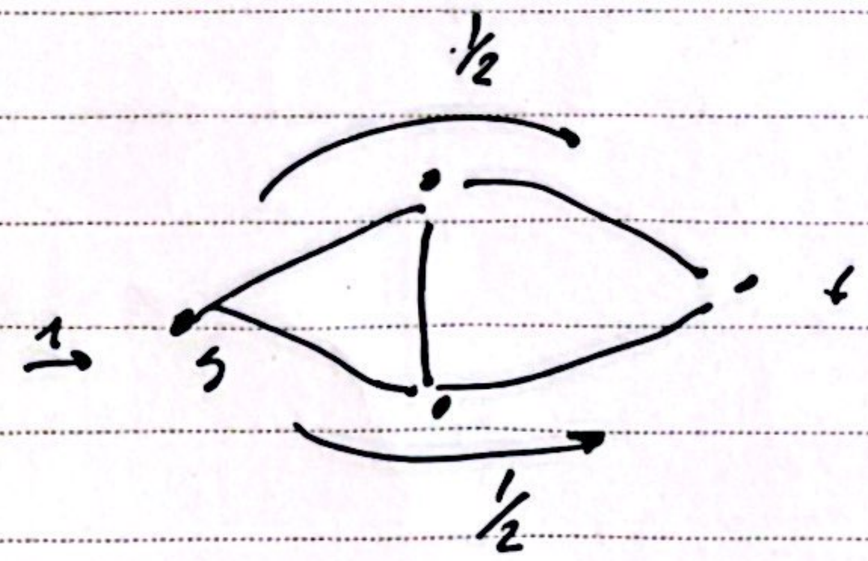
$\Rightarrow (u,v)\in R$, $\exists u'$: v: --u' --- u---

$(u',v)\in R$, v --- v' --- : u' چرا u' به v پیشنهاد کرده

فرض خلف: $(u,v)\notin R$ ⇒ پس u باید قبلاً با کسی match شده باشد ← (u',v) که طبق فرض $(u',v)\notin R$ است که مخالف فرض است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Braess paradox



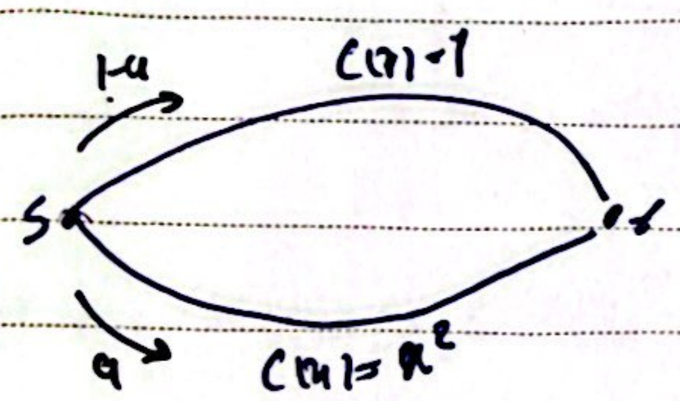
$cost(NE) > cost(opt)$

$\hookrightarrow PoA = \dfrac{\sup\{cost(NE)\}}{cost(opt)}$

اگر $PoA = 1 \rightarrow$ تعادل جواب ممکن است (هم بهترین هم بدترین) opt
جواب

Selfish Rowing:

مثال



$cost(NE) = 1$

$cost(opt) = (1-a) + a^3.$

$\rightarrow \dfrac{\partial cost(opt)}{\partial a} = -1 + 3a^2 = 0 \rightarrow a = \sqrt{1/3}$

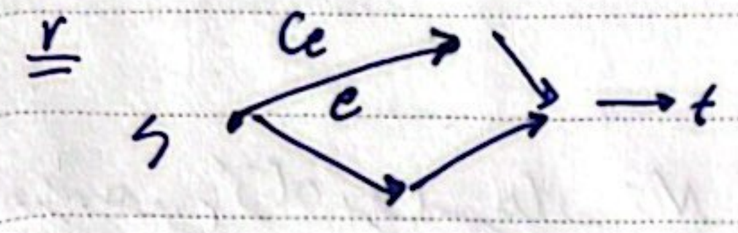
$\rightarrow cost(opt) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Selfish Routing

↳ Price of Anarchy



$c_e \in C \to c_e(x)$ = x واحد از e عبور کند چقدر تأخیر خواهد داشت

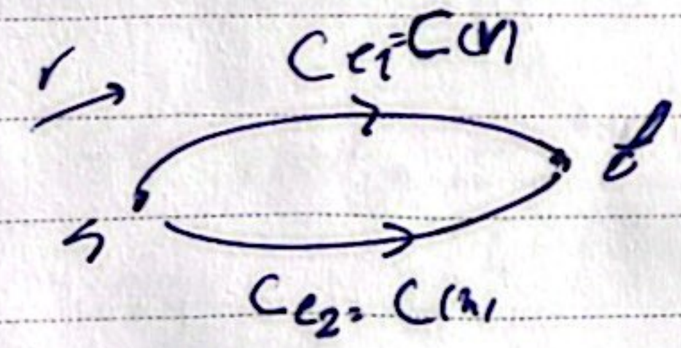
$$C(f) = \sum_{p \in P} \underbrace{c_p(f)}_{\text{هزینه مسیر p به ازای جریان f}} \times \underbrace{f_p}_{\text{جریان مسیر p}}$$

جریان

$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f) \cdot f_e$ برای گراف

قضیه: حد بالای PoA برای مجموعه تأخیرهای گراف‌ها $\alpha(C)$ است

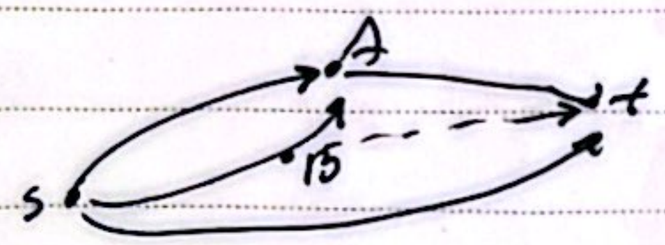
PoA در گراف Pigou



$$\Rightarrow \alpha(C) = \sup_{c \in C} \sup_{r \geq 0} \sup_{x \geq 0} \left\{ \frac{r \cdot C(r)}{x \cdot C(x) + (r-x) \cdot C(r)} \right\}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: در حالت NE، جریان فقط از یال‌هایی عبور می‌کند که حداقل متعلق به یکی از کوتاه‌ترین مسیرهای $s \to t$ باشند.



قضیه: هزینه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها در NE برابر است. (L)

قضیه: فرض کنید در NE از یال e، $c_e(f)$ عبور کند. اگر هزینه یال‌ها را ثابت و مساوی با $c_e(f)$ در نظر بگیریم، آنگاه جریان f (NE) یک جریان بهینه است.

جریان NE

$$C(f) = \sum_{p \in \hat{P}} f_p \cdot \underbrace{c_p(f)}_{\text{ثابت و برابر } L} = L \sum_{p \in \hat{P}} f_p = r \cdot L$$

مسیرهای فعال در NE

$$\left.\right\} \Rightarrow C(f^*) \le C(f)$$

f^*: جریان بهینه در گراف با وزن‌های fixed $\rightarrow$ $C(f^*) = \sum_{p \in P^*} f_p \cdot \underbrace{c_p(f^*)}_{\ge L} \ge r \cdot L$

$\hat{f}^*$ ← چون لزوماً کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب نکرده است.

$$\Rightarrow \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) \cdot \underbrace{c_e(f_e)}_{\text{هزینه ثابت در NE}} \ge 0 .$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

f_e^* , f_e

$C(OPT) = \sum c_e(f_e^*) \cdot f_e^*$ $\quad C(NE) = \sum c_e(f_e) \cdot f_e$ $\quad \Rightarrow \frac{C(NE)}{C(OPT)} \leq \alpha(C)$

$x = f_e$

$n = f_e^*$

$c = c_e$

$$\Rightarrow \alpha(C) = \sup_{r \geq 0} \sup_{n \geq 0} \sup_{c \in C} \frac{r \cdot c(n)}{n \cdot c(n) + (r-n) c(r)}$$

$$c_e \in C \Rightarrow \alpha(C) \geq \frac{f_e \cdot c_e(f_e)}{f_e^* \cdot c_e(f_e^*) + (f_e - f_e^*) c_e(f_e)}$$

$$\alpha(C) \times \{ c_e(f_e^*) \cdot f_e^* + (f_e - f_e^*) \cdot c_e(f_e) \} \geq f_e \cdot c_e(f_e)$$

$$f_e^* \cdot c_e(f_e^*) \geq \frac{1}{\alpha(C)} \cdot f_e \cdot c_e(f_e) + (f_e^* - f_e) c_e(f_e)$$

$$\text{Cost}(OPT) \geq \frac{1}{\alpha(C)} \cdot \text{Cost}(NE) + \underbrace{\sum (f_e^* - f_e) c_e(f_e)}_{\geq 0} \geq \frac{\text{Cost}(NE)}{\alpha(C)}$$

$$\Rightarrow PoA = \frac{\text{Cost}(NE)}{\text{Cost}(OPT)} \leq \alpha(C)$$

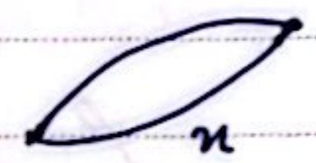
Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$C_e(x) = \begin{cases} \frac{1}{u_e - x} & x < u_e \\ \infty & o.w \end{cases}$$

ظرفیت یال

B_over-provisioned Network



r^P

$f_e \le (1-\beta) u_e$

$\hookrightarrow \beta A \le \frac{L}{2}(1+\sqrt{1/\beta})$

قضیه: به ازای یک گراف G و میزان جریان r:

$$Cost(NE(G,r)) \le Cost(OPT(G,2r))$$

$$Cost(OPT(G,r)) \le Cost(OPT(G,2r))$$

L_1 NE در جریان r

f^*: OPT در جریان $2r$

هزینه مسیر

$$\sum_{p \in P} f_p \times \underbrace{C_p(f)}_{L} = L \times \sum_{p \in P} f_p = rL$$

اگر از گراف با وزن های fixed شده، $C_p(f)$ را بشمار، $\frac{2r}{\beta}$ را عبور دهیم،

$$\sum_{p \in P} f^*_p \times \underbrace{C_p(f)}_{\ge L} \ge L \times \underbrace{\sum f^*_p}_{2r} = 2rL$$

$C_e(f)$ خواهیم داشت:

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

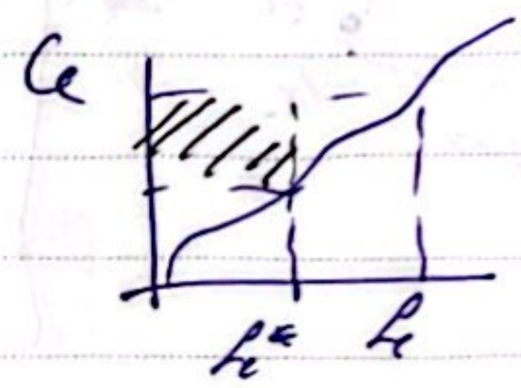
$$\underbrace{\sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e^*)}_{\geq rL} \geq \sum f_e \cdot c_e(f_e)$$ طبق ۱

$$\hookrightarrow \sum f_e^* \cdot c_e(f_e^*) \geq \underbrace{\sum f_e^* \cdot c_e(f_e)}_{\geq 2rL} - \underbrace{\sum f_e \cdot c_e(f_e)}_{=rL} \geq rL$$

$$\forall e: f_e^* \cdot \underline{c_e(f_e^*)} \geq c_e(f_e) \cdot (f_e^* - f_e)$$

$$f_e^* \left(c_e(f_e) - c_e(f_e^*) \right) \leq f_e \cdot c_e(f_e)$$

$\forall f_e > f_e^*$:



PAPCO

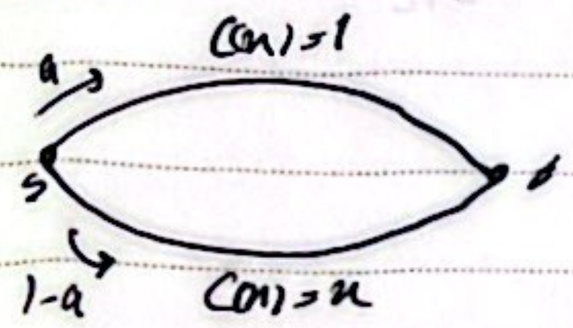
Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

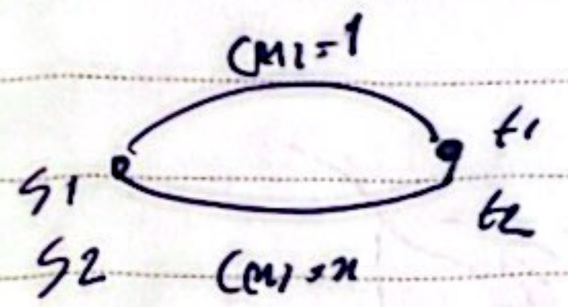
Atomic Selfish Routing

P_i, t_i, S_d ها نفر، هر کدام دارای یک واحد بار هستند.

recap:



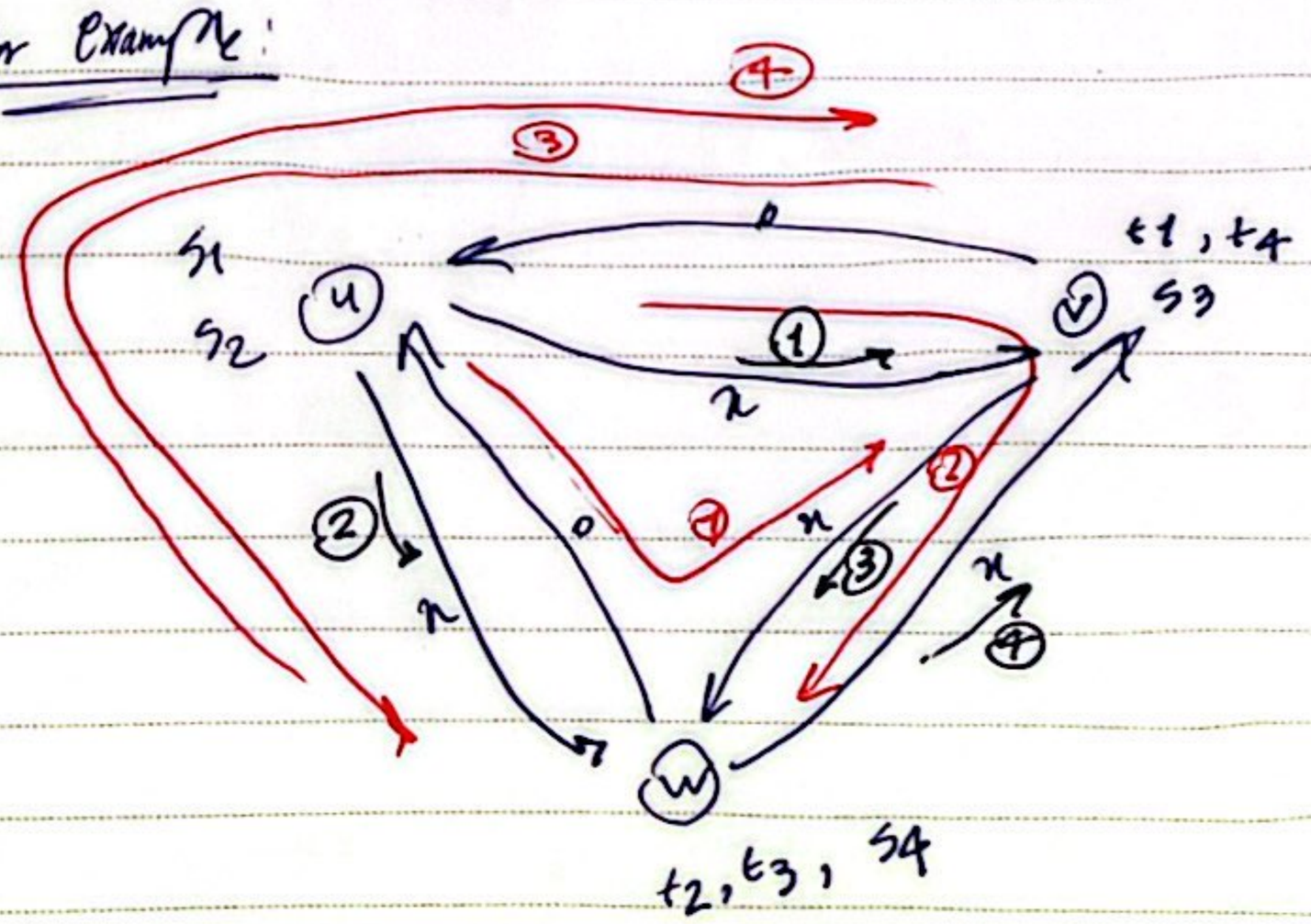
$a + (1-a).(1-a) =$



$\Rightarrow \begin{cases} 2+2=4 & \text{2 نفر از پایین} \quad X \\ 2 & \text{دو نفر از بالا} \quad NE \\ 2 & \text{1 پایین 1 بالا} \quad NE \end{cases}$

$PoA = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow$ 1 OPT 6 NE

another example:



OPT.4

NE = 10

$PoA \geq \frac{10}{4}$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: در هر Atomic selfish Routing با affine cost function ($an+b$)، PoA حداکثر 2.5 است.

فرض کنیم f^* یک NE و f جریان بهینه است.

$c_e(x) = a_e x + b_e$

بازیکن i ام P_i را در f انتخاب کرده است و P_i^* را در f^* انتخاب کرده است.

$$\sum_{e\in P_i} c_e(f_e) \le \underbrace{\sum_{e\in P_i\cap P_i^*} c_e(f_e)}_{\text{بخش مشترک } f \text{ با } f^*} + \underbrace{\sum_{e\in P_i^*\setminus P_i} c_e(f_e+1)}_{\text{اگر سهم NE را عوض کند یک واحد به سهم جدید اضافه می‌شود}}$$

$$\hookrightarrow \sum_{e\in P_i} c_e(f_e) \le \sum_{e\in P_i^*} c_e(f_e+1)$$

$$\text{for all players} \Rightarrow \underbrace{\sum_i \sum_{e\in P_i} c_e(f_e)}_{C(f)} \le \sum_i \sum_{e\in P_i^*} c_e(f_e+1)$$

$$= \sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e+1) = \sum_{e\in E} a_e \underbrace{f_e^*}_{y} \cdot \underbrace{(f_e+1)}_{z} + b_e f_e^*$$

recall: $\forall y,z \in \mathbb{R}^+ = \{0,1,\dots\}$; $y(z+1) \le \frac{5}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2$

$$\rightarrow C(f) \le \sum_{e\in E} \left[a_e\left(\tfrac{5}{3}(f_e^*)^2 + \tfrac{1}{3}f_e^2\right) + b_e f_e^*\right]$$

$$\le \tfrac{5}{3}\left[\sum f_e^*(a_e f_e^* + b_e)\right] + \tfrac{1}{3}\sum a_e f_e^2 \le \tfrac{5}{3}C(f^*) + \tfrac{1}{3}C(f)$$

Scanned with CamScanner