سؤال ۱:

فرض کنید برای $b=(b_1,b_2,\dots,b_i,\dots,b_n)$ احتمال به صورت $x=(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$ و برای

$b'=(b_1,b_2,\dots,b_i',\dots,b_n)$ به صورت $x'=(x_1,x_2,\dots,x_i',\dots,x_n)$ باشد که $b_i<b_i'$.

حال داریم:

$$x^T b \geq x'^T b \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \geq \sum_{j=1}^{n} x_j' b_j \Rightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j (x_j - x_j') \geq b_i (x_i' - x_i)$$

$$x'^T b' \geq x^T b' \xRightarrow{\text{مشابه بالا}} \sum_{j\neq i, j=1}^{n} b_j (x_j - x_j') \leq b_i' (x_i' - x_i)$$

در نتیجه داریم:

$$b_i (x_i' - x_i) \leq b_i' (x_i' - x_i)$$

چون $b_i \leq b_i'$ پس داریم.

$$x_i' - x_i \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_i' \geq x_i} \dots \checkmark$$

سؤال ۳:

برای اثبات NP-hard بودن یک مسئله کافی است یک مسئله معروف NP-hard را به مسئله اصلی کاهش دهیم.
یک مسئله معروف در این راستا، یافتن مجموعه مستقل در گراف ها با حداکثر وزن است.
فرض کنید گرافی با n رأس با وزن ها $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ داریم. همچنین مجموعه یال های گراف را E می نامیم
حال اگر هر رأس را یک خریدار، مجموعه یال ها را مجموعه کل اشیا (M)، مجموعه یال های واقع بر رأس i را مجموعه
اشیا مورد علاقه نفر i ام (T_i) و ارزش دستیابی به کل یال ها واقع بر رأس i، برای رأس i را v_i در نظر بگیریم،
آنگاه یافتن Social Surplus بیشینه در اصل همان یافتن مجموعه مستقل با بیشترین وزن خواهد بود
(هر یال حداکثر توسط یک رأس انتخاب خواهد شد.)

سؤال ۴:

الف) بله، با افزایش پیشنهاد، در صورت داشتن مجموعه‌ی قبل، طبق الگوریتم همچنان مجموعه را در اختیار خواهیم داشت.

ب) فرض کنید طبق الگوریتم، مجموعه‌ی $S = \{P_1, \dots, P_r\}$ برنده شوند، در حالیکه در OPT مجموعه‌ی $S' = \{P'_1, \dots, P'_{r'}\}$.

(فرض کنید $b_{p_i} > b_{p_j}$ ، $\forall\, i<j$) حال برای هر عضو S مانند P_i تعریف می‌کنیم:

$$\emptyset_i = \left\{ P \;\middle|\; P \in S',\ P \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} \emptyset_j,\ T_P \cap T_{P_i} \neq \emptyset \right\}$$

در واقع $\emptyset_i$، مجموعه افرادی است که حداقل یک شیء مشترک با P_i دارند در حالیکه در $\emptyset_1$ تا $\emptyset_{i-1}$ حاضر نیستند.

حال ۳ نکته وجود دارند.

نکته ۱: $|\emptyset_i| < d$. زیرا به ازای هر دو عضوی از $\emptyset_i$ مانند P و P' داریم $T_P \cap T_{P'} = \emptyset$ هستند و همچنین $T_P \cap T_{P_i} \neq \emptyset$. (لانه کبوتری)

نکته ۲: $\bigcup_{i=1}^{r} \emptyset_i = S'$. طبق تعریف می‌دانیم $\bigcup_{i=1}^{r} \emptyset_i \subseteq S'$. حال فرض کنید $a \in S'$ که $a \notin \bigcup_{i=1}^{r} \emptyset_i$.

داشتیم $T_a \cap T_{P_j} = \emptyset$ ، $\forall\, 1 \le j \le r$. پس $S \cup \{a\}$ باید انتخاب الگوریتم می‌بود (تناقض)

نکته ۳: $\forall\, 1 \le i \le r\ \forall\, \sigma \in \emptyset_i\ \ b_{p_i} \geq b_\sigma$. در مرحله iام الگوریتم مذکور هر دو σ و P_i جز کاندیدها برای انتخاب الگوریتم هستند ولی الگوریتم P_i را انتخاب کرده است. یعنی $b_{p_i} \geq b_\sigma$. پس داریم:

$$d\, b_{p_i} \geq |\emptyset_i|\, b_{p_i} \geq \sum_{\sigma \in \emptyset_i} b_\sigma$$

و از تجمیع نکات داریم:

$$d \sum_{i=1}^{r} b_{p_i} \geq \sum_{i=1}^{r'} b_{p'_i}$$

سوال ۵ :

الف) مرجع: لینک

ب) فرض کنید ۵ خریدار داریم که پیشنهاد آن‌ها به صورت scale شده 5,4,4,2,2 باشد. و اگر خریداری که بیشترین bid را دارد، پیشنهادش را افزایش دهد به صورتی که scaling تغییر می‌دهد 5,4,4,1,1.

$$\left(P_i' = \left\lfloor \frac{P_i}{k} \right\rfloor , \quad k = \frac{\varepsilon P_{max}}{n}\right)$$

همچنین فرض کنید اگر ظرفیت C باشد آنگاه حجم ترافیک به صورت δ, δ و $C/2, C/2$ و $C-2\delta$ باشد. ($\delta \ll C$)
در این صورت در حالیکه فرد با بیشترین bid در ابتدا پیروز می‌شد (5,2,2) با افزایش bid شکست می‌خورد. (4,4)

سوال ۴ :

الف) سوال ۵ بخش ب. $\left(\frac{n-1}{n+1} = 1/2\right)$

ب) مشابه مسئله در کلاس با حالت‌بندی حل می‌کنیم.

حالت ۱: $x_1 > x_2 > x_3 > 1/2$ (۶ حالت)

$$6 \int_{1/2}^{1}\int_{x_3}^{1}\int_{x_2}^{1} x_2 \, dx_1 dx_2 dx_3 = 6 \int_{1/2}^{1}\int_{x_3}^{1} x_2 - x_2^2 \, dx_2 dx_3$$

$$= 6 \int_{1/2}^{1} \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \Big|_{x_3}^{1} dx_3 = 6 \int_{1/2}^{1} 1/6 + \frac{x_3^3}{3} - \frac{x_3^2}{2} \, dx_3$$

$$= 6 \left(1/6 \, x_3 + x_3^4/12 - x_3^3/6 \Big|_{1/2}^{1} \right) = 3/32$$

حالت ۲: $x_1 > x_2 > 1/2 > x_3$ (۶ حالت)

$$6 \int_{0}^{1/2}\int_{1/2}^{1}\int_{x_2}^{1} x_2 \, dx_1 dx_2 dx_3 = 6 \int_{0}^{1/2}\int_{1/2}^{1} x_2 - x_2^2 \, dx_2 dx_3 = 6 \int_{0}^{1/2} \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \Big|_{1/2}^{1} dx_3$$

$$= 6 \int_{0}^{1/2} 1/12 \, dx_3 = 1/2 \; x_3 \Big|_{0}^{1/2} = 1/4$$

حالت ۳: $x_1 > 1/2 > x_2, x_3$ (۳ حالت)

$$3 \int_{0}^{1/2}\int_{0}^{1/2}\int_{1/2}^{1} 1/2 \, dx_1 dx_2 dx_3 = 3/16$$

$$3/32 + 3/16 + 1/4 = 17/32 > 1/2 \; ...$$

سوال ۷ .

$$\varphi(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$$

الف)

$$\varphi(v) = v - \frac{1-\frac{v}{a}}{\frac{1}{a}} = v - (a-v) = 2v-a$$

ب)

$$\varphi(v) = v - \frac{1-(1-e^{-\lambda v})}{\lambda e^{-\lambda v}} = v - \frac{1}{\lambda}$$

ج)

$$\varphi(v) = v - \frac{1-\left(1-\frac{1}{(v+1)^c}\right)}{\frac{c}{(v+1)^{(c+1)}}} = v - \frac{v+1}{c}$$

سوال ۱۵ .

$$F(q) = q \Rightarrow V(q) = 1-q \Rightarrow R(q) = q(1-q)$$

الف)

ب)

$$R'(q) = \frac{d}{dq} q\,V(q) = V(q) + q\,V'(q) = V(q) - q \times \frac{1}{F'(F^{-1}(1-q))} = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

$$\varphi(V(q)) = V(q) - \frac{1-F(V(q))}{f(V(q))} = V(q) - \frac{1-(1-q)}{f(V(q))} = V(q) - \frac{q}{f(V(q))}$$

ج) از قسمت قبل داریم،

$$R''(q) = \frac{d\varphi}{dv} \times \frac{dv}{dq}$$

می‌دانیم V پیوسته و اکیداً نزولی است پس اگر φ صعودی باشد، R'' همواره منفی و اگر R'' همواره منفی باشد، به علت پیوستگی V، φ' همواره مثبت و φ صعودی خواهد بود

د) این نامساوی با فرض Regular بودن برقرار است.

چون R مقعر است داریم، $R(E[q]) \geq E[R(q)]$. حال فرض کنید $q \sim Unif(0,1)$. داریم $R(1/2) \geq E[R(q)]$

تعریف می‌کنیم $q^* = \arg\max R(q)$. حال از LOTUS داریم،

$$E[R(q)] = \int_0^1 R(q)\,dq = \int_0^{q^*} R(q)\,dq + \int_{q^*}^1 R(q)\,dq = \text{I}$$

حال با کمک از مقعر بودن R، $R(0)=R(1)=0$ داریم.

$$R\left(\frac{q}{q^*} \times q^* + 0 \times \left(1-\frac{q}{q^*}\right)\right) = R(q) \geq \frac{q}{q^*} R(q^*)$$

سؤال ۱۰.

به طریق مشابه داریم

$$R(q) = \frac{1-q}{1-q^*} \, R(q^*)$$

پس داریم.

$$\text{I} = R(q^*) \left(\int_0^{q^*} \frac{q}{q^*} \, dq + \int_{q^*}^{1} \frac{1-q}{1-q^*} \right) = \tfrac{1}{2} R(q^*)$$

سوال ۱۱ :

الف) فرض کنید برای هر $j \neq i$ داشته باشیم $b_j(v_j) = \frac{n-1}{n} v_j$ حال کافی است نشان دهیم امید payoff بازیکن i ام در صورتی بیشینه می‌شود که $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$. در محاسبه امید باید در نظر داشت در صورت برنده شدن با پیشنهاد b، سود نفر i ام $v_i - b$ است. در غیر این صورت این مقدار ۰ است. حال داریم:

$$P[\text{نفر } i \text{ ام برنده شود} \mid b] = \int_0^{\frac{n}{n-1}b} \cdots \int_0^{\frac{n}{n-1}b} dv_1 \dots dv_{i-1} dv_{i+1} \dots dv_n = \left(\frac{n}{n-1} b\right)^{n-1}$$

(نفر i زمانی برنده می‌شود که برای هر $j \neq i$، $b_i \geqslant b_j$ که یعنی $b_i \geqslant \frac{n-1}{n} v_j$ باشد)

پس داریم:

$$u_i(b) = \left(\frac{n}{n-1} b\right)^{n-1} (v_i - b) + 0 \times \left(1 - \left(\frac{nb}{n-1}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} b\right)^{n-1} (v_i - b)$$

و داریم:

$$u_i'(b) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left((n-1)v_i - nb\right) b^{n-2}$$

که یعنی

$$\boxed{b^* = \frac{n-1}{n} v_i} \quad \dots \checkmark$$

ب)

دقت کنید، برای n تا متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0,b]$ به صورت i.i.d داریم:

$$E[\max b_i] = \sum_i E[b_i \mid \forall j \neq i \;\; x_i > x_j] \, p(\forall j \neq i \;\; x_i > x_j)$$

$$= n \int_0^b \int_0^{b_1} \cdots \int_0^{b_1} b_1 \times \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)^n}_{\text{joint dist.}} db_1 \dots db_n = n \int_0^b \frac{b_1^n}{b^n} db_1 = \boxed{\frac{n}{n+1} b}$$

پس برای First-price داریم، (v_i یکنواخت)

$$b_i \sim \mathrm{Unif}\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E\left[\max_i b_i\right] = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1}$$

سؤال ۴ ،

حال Vickrey Auction را بررسی می‌کنیم .

$$I = E\left[\sum P_i(v)\right] = E\left[E\left[\sum P_i(v) \,\middle|\, b = \max b_i\right]\right] = E\left[E\left[\max_{\text{i+losers}} b_i \,\middle|\, b = \max_i b_i\right]\right]$$

توزیع یکنواخت در بازه $[0,b]$

مسئله قبل

$$\overset{\text{۹}}{=} E\left[\frac{n-1}{n} \max_i b_i\right] = \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{n-1}{n+1}}$$

ساده‌ش