

سؤال ۱:

نمونه برای $b = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)$ احتمال صورت $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ و برای

$b' = (b_1, b_2, \dots, b'_i, \dots, b_n)$ به صورت $x' = (x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_n)$ باشد که $b_i < b'_i$.

حال داریم:

$$x^T b \geq x'^T b \Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j b_j \geq \sum_{j=1}^n x'_j b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n b_j (x_j - x'_j) \geq b_i (x'_i - x_i)$$

$$x'^T b' \geq x^T b' \xRightarrow{\text{مساوی بالا}} \sum_{j=1}^n b_j (x_j - x'_j) \leq b'_i (x'_i - x_i)$$

در نتیجه داریم:

$$b_i (x'_i - x_i) \leq b'_i (x'_i - x_i)$$

چون $b'_i \leq b_i$ پس داریم:

$$x'_i - x_i \geq 0 \Rightarrow \underline{x'_i \geq x_i} \dots \checkmark$$

سؤال ۳:

برای اثبات NP-hard بودن یک مسئله کافی است یک مسئله معروف NP-hard را به مسئله اصلی کاهش دهیم.

یک مسئله معروف در این راستا، یافتن مجموعه مستقل در گراف با حداکثر وزن است.

نمونه گرافی با n رأس با وزن ها $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ داریم. همچنین مجموعه یال های گراف را E می نامیم.

حال اگر هر رأس را یک خریار، مجموعه یال ها را مجموعه کل اشیا (M) ، مجموعه یال های واقع بر رأس i را مجموعه اشیا مردعلاقه T_i و ارزش دستبای به کل یال ها واقع بر رأس i ، برای رأس i ، v_i در نظر بگیریم،

آنگاه یافتن Social Surplus بیشینه در اصل همان یافتن مجموعه مستقل با بیشترین وزن خواهد بود (هر یال حداکثر توسط یک رأس انتخاب خواهد شد).

الف) بله، با افزایش بیشینه‌ها، در صورت داشتن مجموعه‌های P_i ، طبق الگوریتم پیشنهادی، مجموعه را در اختیار خواهیم داشت.

ب) فرض کنیم طبق الگوریتم، مجموعه $S = \{P_1, \dots, P_r\}$ برنده شود، در حالی که در OPT مجموعه $S' = \{P'_1, \dots, P'_r\}$ (فرض کنیم $b_{P_i} > b_{P'_i} \forall i \leq r$) مثال برای هر عضو S مانند P_i ترفیض می‌کنیم.

$$\emptyset_i = \left\{ P \mid P \in S', P \notin \bigcup_{j=1}^i \emptyset_j, T_P \cap T_{P_i} \neq \emptyset \right\}$$

دایره \emptyset_i ، مجموعه از آن‌هایی است که حاوی یک شی مشترک با P_i دارند. در حالی که \emptyset_i حاوی ترفیض نیست.

نکته ۱: $|\emptyset_i| < d$. زیرا به ازای هر دو عضو P, P' دایره $T_P \cap T_{P'} = \emptyset$ هستند و همچنین $T_P \cap T_{P_i} \neq \emptyset$ (لانگوری).

نکته ۲: $\bigcup_{i=1}^r \emptyset_i = S'$. طبق ترفیض داریم $\bigcup_{i=1}^r \emptyset_i \subseteq S'$. حال فرض کنیم $a \in S' \setminus \bigcup_{i=1}^r \emptyset_i$.

تسیم: $T_a \cap T_{P_j} = \emptyset \forall 1 \leq j \leq r$. پس $a \in S \setminus \{a\}$ باید انتخاب الگوریتم می‌بود (تناقض).

نکته ۳: $b_{P_i} > b_\sigma \forall \sigma \in \emptyset_i \forall 1 \leq i \leq r$. در مرحله i ام الگوریتم مذکور هر $\sigma \in P_i$ جزکانده‌ها برای انتخاب الگوریتم هستند و الگوریتم P_i را انتخاب کرده است. یعنی $b_{P_i} > b_\sigma$ پس داریم:

$$d \cdot b_{P_i} > |\emptyset_i| \cdot b_{P_i} > \sum_{\sigma \in \emptyset_i} b_\sigma$$

$$d \cdot \sum_{i=1}^r b_{P_i} > \sum_{i=1}^r b_{P'_i}$$

و از جمع نکات داریم:

الف) مربع، کینک

ب) فرض کنیم که خریدار یکم به بیشینه‌دار آن ها به صورت Scale شده 5, 4, 4, 2, 2 و اگر فروشنده

بیشترین bid را دارد به بیشینه‌دارش را از بیشینه‌دار به صورت یک Scale مربعی دهه 5, 4, 4, 1, 1.

$$(P'_i, \lfloor \frac{P_i}{k} \rfloor), k = \frac{\epsilon P_{max}}{n}$$

همچنین فرض کنیم اگر طرف C باشد آنگاه حجم ترافیک به صورت 5/8 و C/2 و C/2 و 2-C باشد. (C < 8)

در این صورت در حایکه ترجیح بیشترین bid را انتخاب می‌رود (5, 2, 2) با ترافیک 4/4 و 4/4.

(4, 4)

سؤال ۴ :

الف) سؤال لا بصری. (n-1/n+1 = 1/2)

ب) مشابه مسئله در کمال با حالت بندی حل می‌کنیم.

حالت ۱: $x_1, x_2, x_3, 1/2$ (حالت ۴)

$$\begin{aligned} 6 \int_{1/2}^1 \int_{x_3}^1 \int_{x_2}^1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3 &= 6 \int_{1/2}^1 \int_{x_3}^1 x_2 - x_2^2 dx_2 dx_3 \\ &= 6 \int_{1/2}^1 \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_{x_3}^1 dx_3 = 6 \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{x_3^3}{3} - \frac{x_3^2}{2} \right) dx_3 \\ &= 6 \left(\frac{1}{6} x_3 + \frac{x_3^4}{12} - \frac{x_3^3}{6} \right) \Big|_{1/2}^1 = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

حالت ۲: $x_1, x_2, 1/2, x_3$ (حالت ۶)

$$\begin{aligned} 6 \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 \int_{x_2}^1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3 &= 6 \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 x_2 - x_2^2 dx_2 dx_3 = 6 \int_0^{1/2} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_{1/2}^1 dx_3 \\ &= 6 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} \right) dx_3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

حالت ۳: $x_1, 1/2, x_2, x_3$ (حالت ۳)

$$3 \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{17}{32} > \frac{1}{2} \quad \dots \checkmark$$

$$f(v) = v - \frac{1-f(v)}{f(v)}$$

سؤال ۷

$$f(v) = v - \frac{1 - \frac{v}{a}}{\frac{1}{a}} = v - (a - v) = 2v - a$$

الف)

$$f(v) = v - \frac{1 - (1 - e^{-\lambda v})}{\lambda e^{-\lambda v}} = v - \frac{1}{\lambda}$$

ب)

$$f(v) = v - \frac{1 - (1 - \frac{1}{(v+1)^c})}{\frac{c}{(v+1)^{c+1}}} = v - \frac{v+1}{c}$$

ج)

$$F(q) = q \Rightarrow V(q) = 1 - q \Rightarrow R(q) = q(1 - q)$$

سؤال ۱۵

الف)

$$R'(q) = \frac{d}{dq} q v(q) = v(q) + q v'(q) = v(q) - q \times \frac{1}{F'(F'(1-q))} = v(q) - \frac{q}{f(v(q))}$$

ب)

$$p(v(q)) = v(q) - \frac{1 - F(v(q))}{f(v(q))} = v(q) - \frac{1 - (1-q)}{f(v(q))} = v(q) - \frac{q}{f(v(q))}$$

$$R''(q) = \frac{dp}{dv} \times \frac{dv}{dq}$$

ج) از قسمت قبل داریم.

ری داریم \bar{v} بیش و اینکه نزدیکی است پس اگر φ صعودی باشد، R'' همواره منفی و اگر R'' همواره منفی باشد، به علت برش \bar{v} ، φ' همواره مثبت و f صعودی خواهد بود.

د) این نامعادای بازنس Regular بودن برقرار است.

چون R مقعر است داریم، $R(E[q]) \geq E[R(q)]$. حال فرض کنیم $q \sim \text{Unif}(0,1)$ داریم، $R(1/2) \geq E[R(q)]$

$$E[R(q)] = \int_0^1 R(q) dq = \int_0^{q^*} R(q) dq + \int_{q^*}^1 R(q) dq = \text{I}$$

حال نکته از متواری R ، $R(0) = 0$ ، $R(1) = 0$ ، $R(q) \geq \frac{q}{q^*} R(q^*)$ داریم.

سوال ۱۵

سری متناهی داریم

$$R(q) = \frac{1-q}{1-q^*} R(q^*)$$

سری داریم

$$\textcircled{I} \rightarrow R(q^*) \left(\int_0^{q^*} \frac{q}{q^*} dq + \int_{q^*}^1 \frac{1-q}{1-q^*} \right) = \frac{1}{2} R(q^*)$$

سوال ۱۱:

الف) فرض کنیم برای هر i ، v_i داشته باشیم. $b_j(v_j) = \frac{n-1}{n} v_j$ مثل کافی است نشان دهیم این b_j برای شرط ۱) در

شرطی میثاقی شود. $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$ در محاسبه امید نیز باید در نظر داشت در صورت برده شدن با بیش از یک b ،

سود نیز $b - v_i$ است. در غیر این صورت این مقدار است. حال داریم،

$$P[b | \text{برنده شدن}] = \int_0^{\frac{n}{n-1}b} \dots \int_0^{\frac{n}{n-1}b} dv_1 \dots dv_{i-1} dv_{i+1} \dots dv_n = \left(\frac{n}{n-1}b\right)^{n-1}$$

(n تایی برده می شود که برای من v_i ، $b_i \leq v_i$ که معنی $b_i \leq \frac{n-1}{n} v_i$ باشد)

پس داریم،

$$u_i(b) = \left(\frac{n}{n-1}b\right)^{n-1} (v_i - b) + 0 \times \left(1 - \left(\frac{nb}{n-1}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}b\right)^{n-1} (v_i - b)$$

$$u'_i(b) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} ((n-1)v_i - nb) b^{n-2}$$

و داریم،

یعنی

$$\boxed{b^* = \frac{n-1}{n} v_i} \dots \checkmark$$

ب)

وقت کنیم، برای n مشیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, b]$ به صورت iid داریم.

$$E[\max_i b_i] = \sum_i E[b_i | \forall j \neq i, x_i > x_j] P(\forall j \neq i, x_i > x_j)$$

$$= n \int_0^b \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_1} b_1 \times \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)^n}_{\text{joint dist.}} db_2 \dots db_n = n \int_0^b \frac{b_1^n}{b^n} db_1 = \frac{n}{n+1} b$$

پس برای First-price داریم، (یکنواخت v_i)

$$b_i \sim \text{Unif}\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E\left[\max_i b_i\right] = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1}$$

سوال ۲

حال Vickrey Auction را بررسی کنیم.

$$I = E[\sum P_i(v)] = E[E[\sum P_i(v) | b = \max_i b_i]] = E[E[\max_{i \neq b} b_i | b = \max_i b_i]]$$

توزیع یکنواخت در بازه $[0, b]$

$$\stackrel{\text{مقدار ثابت}}{=} E\left[\frac{n-1}{n} \max_i b_i\right] = \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

نتیجه