سوال ۱ :

مشابه اثبات Bulow-Klemperer عمل می‌کنیم. مکانیزم زیر را در نظر بگیرید.

۱. در ابتدا Auction بهینه را برای n نفر اجرا می‌کنیم.

۲. کالاهای باقی مانده و اختصاص نیافته را به صورت تصادفی در اختیار K نفر باقی مانده می‌دهیم.

* دقت کنید Expected Revenue مکانیزم بالا برابر است با همین مقدار برای Auction بهینه برای n نفر. از طرف دیگر این مکانیزم حتماً تمام کالاها را به فردی اختصاص می‌دهد. و البته می‌دانیم در بین مزایده‌ها با این ویژگی که تخصیص می‌دهند و Regular هستند، Vickrey Auction بیشترین Expected Revenue را دارد. پس مکانیزم بالا مقدار Expected Revenue کمتری از Vickrey برای n+k نفر دارد.

سؤال ۲ :

مقدار Expected Revenue برای مزایده بهینه برای n نفر به صورت زیر است.

چه کسی ماکسیمم باشد

PDF برای φ

$$E\left[\max_i^{n} \varphi^{+}(v_i)\right] = \overset{?}{n} \int_0^{\infty} x \left(\int_0^{x} f(y)\,dy\right)^{n-1} f(x)\,dx$$

$$= n \int_0^{\infty} x\left(F(x) - F(0)\right)^{n-1} dx$$

حال داریم :

$$\frac{E\left[\max_i^{n-1} \varphi^{+}(v_i)\right]}{E\left[\max_i^{n} \varphi(v_i)\right]} = \frac{n-1}{n} \times \overbrace{\frac{\int_0^{\infty} x\left(F(x)-F(0)\right)^{n-2} dx}{\int_0^{\infty} x\left(F(x)-F(0)\right)^{n-1} dx}}^{A}$$

حال دقت کنید چون $F(x)-F(0) \leq 1$ پس $A \geq 1$. از طرفی می‌دانیم مزایده vickrey برای n نفر طبق Bulow-Klemperer Expected Revenue حداقل به اندازه‌ی مزایده بهینه برای $n-1$ نفر (صورت کسر B) است. پس حکم ثابت شد.

سوال ۳

الف) واضحاً کسی برنده می‌شود که $\varphi_i(v_i)$ آن بیشینه باشد به شرطی که $\varphi \geq 0$ باشد. از طرفی چون تکیه‌ی قاعده تخصیص در این حالت یکنواست. حال اگر Myerson را اعمال کنیم نتیجه می‌شود که برنده جایزه به میزان ماکسیمم (0) φ_i^{-1} و $\varphi_i^{-1}(\max_{j \neq i} \varphi_j(v_j))$ بپردازند. (اگر i برنده باشد.)

ب) فرض کنید $F_1(v) = \begin{cases} v/2 & 0 \leq v \leq 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ و $F_2(v) = \begin{cases} v & 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ باشند. حال داریم.

$$\varphi_1(v) = v - \frac{1 - v/2}{1/2} = 2v - 2 \quad \text{و} \quad \varphi_2(v) = v - \frac{1-v}{1} = 2v-1$$

پس داریم برای $v_2 = 1$ و $v_1 = 1.4$ با اینکه $v_2 < v_1$ ولی $\varphi_2 = 1 > \varphi_1 = 0.8$. پس برنده در این حالت فردی است که پیشنهاد کمتری داده است.

ج) باعث می‌شود که رقابت در مزایده بیشتر شود و خریدارانی که نسبت به بقیه شانس پایین‌تری دارند سعی کنند نسبت به وضعیت خودشان پیشنهاد بیشتری دهند و درآمد مزایده افزایش یابد.

سوال ۴.

الف) $-\frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ غیرکاهشی $\Leftarrow$ غیرکاهشی $\Rightarrow$ $v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ هم غیرکاهشی است.

ب)

نمایی.

$$\frac{f(v)}{1-F_i(v)} = \frac{\lambda e^{-\lambda v}}{1-(1-e^{-\lambda v})} = \lambda$$ ... است.

یکنواخت.

$$\frac{f(v_i)}{1-F_i(v_i)} = \frac{1}{1-v} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-v)^2}$$ ... است.

ج)

$$r_i + \phi_i(v_i) \geq v_i \iff r_i + v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \geq v_i \iff r_i \geq \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

حال به دلیل MHR می‌دانیم $\frac{1-F_i(r_i)}{f_i(r_i)} \geq \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$. می‌دانیم $r_i = \frac{1-F_i(r_i)}{f_i(r_i)}$ ، ... است.

است . $$\left.\frac{d\, r(1-F_i(r))}{dr}\right|_{r_i} = 0 \Rightarrow 1-F_i(r_i) - r_i f_i(r_i) = 0 \xRightarrow{f_i>0} \boxed{\frac{1-F_i(r_i)}{f_i(r_i)} = r_i}$$

د) درست است. (افزایش v_i باعث می‌شود ارزش تمام گروه‌های feasible که شامل i هستند افزایش یابد)

سؤال ۵ :

الف) کافی است نشان دهیم اگر M^* یک مجموعه از افراد را برنده کند آن مجموعه افراد دارای $v_i \geq r_i$ برنده است. (یعنی M آن را برای بیشینه کردن Social Surplus برنده کرده است.) فرض کنید M^* مجموعه W را به عنوان برندگان اعلام کند و عضوی مانند $i \in W$ باشد که $v_i < r_i$. پس $\varphi_i(v_i) < 0$. پس M^* با حذف i از W، Revenue بیشتری به دست می‌آورد. حال دقت کنید $W - \{i\}$ نیز یک مجموعه feasible است که درآمد بیشتری در زمینه دارد که با بهینه بودن M^* در تناقض است.

ب) از سؤال قبل استفاده می‌کنیم. فرض کنید W مجموعه برندگان باشد، داریم:

Social Surplus
$$\sum_{i \in W} v_i \geq \sum_{i \in W} r_i + \varphi_i(v_i)$$

و چون از Myerson می‌دانیم پرداختی نفرات برنده حداقل r_i است پس داریم:

$$\sum_{i \in W} v_i \geq \underbrace{\sum_{i \in W} p_i}_{A} + \underbrace{\sum_{i \in W} \varphi_i(v_i)}_{B}$$

دقت کنید $E[A]$, $E[B]$ برای مجموعه برندگان ممکن ها Expected Revenue است. حکم ثابت شد.

ج) از ترکیب قسمت الف و ب و با این نکته که مقدار Expected Surplus از Expected Revenue در DSIC ها بیشتر است، حکم برقرار خواهد بود.

(عدم utility ها منفی)