



## سوالات

### مسئله‌ی ۱.

نشان دهید قاعده تخصیصی که Social Surplus را در Knapsack Auction بیشینه می‌کند، یکنوا است.

### مسئله‌ی ۲.

Revelation Principle را در نظر بگیرید. به نظر شما در عمل چه ایراداتی به استفاده از مکانیزم معرفی شده در این اصل وارد است. دلیل خود را با کمک یک مثال تشریح کنید.

### مسئله‌ی ۳.

مجموعه  $M$  با اشیای متمایز را در نظر بگیرید.  $n$  خریدار وجود دارند و برای هر خریدار  $i$ ،  $T_i \subseteq M$  مجموعه اشیای مورد پسند او می‌باشد. (این اطلاعات در معرض عموم قرار دارند.) اگر به خریدار  $i$  مجموعه  $S_i$  از اشیای با هزینه  $p$  اختصاص داده شود، سود او به صورت  $v_i x_i - p$  خواهد بود، که در آن  $v_i$  ارزش اشیای مورد پسند و  $x_i$  برابر است با:

$$x_i = \begin{cases} 1 & T_i \subseteq S_i \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

نشان دهید یافتن قاعده تخصیصی که در این مسئله Social Surplus را بیشینه می‌کند، NP-hard می‌باشد.

### مسئله‌ی ۴.

---

**Algorithm 1** Allocation Rule

---

```
 $S = \emptyset$  ▷ Winners  
 $X = M$  ▷ Items  
Sort and re-index the bidders so that  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$   
for  $i = 1, 2, \dots, n$  do  
  if  $T_i \subseteq X$  then  
    Delete  $T_i$  from  $X$   
    Add  $i$  to  $S$   
  end if  
end for
```

---

سوال قبل را در نظر بگیرید.

## الف

الگوریتم ۱ برای تخصیص اشیای را در نظر بگیرید. آیا قاعده تخصیص در این حالت یکنواست؟

ب

نشان دهید اگر تمام خریداران صادق باشند و اندازه  $T_i$  ها حداکثر  $d$  باشد، آنگاه مقدار Social Surplus برای قاعده تخصیص قسمت قبل حداقل  $\frac{1}{d}$  برابر حداکثر میزان Social Surplus است.

## مسئله ۵.

الف

در مورد FPTAS تحقیق کنید و سپس با استفاده از آن یک روش تقریبی برای یافتن قاعده تخصیص با بیشینه Social Surplus در Knapsack Auction ارائه کنید.

ب

آیا قاعده تخصیص قسمت قبل یکنواست؟

## مسئله ۶.

فرض کنید که سه خریدار و یک کالا داریم. ارزش کالا برای هر خریدار از یک توزیع یکنواخت در بازه صفر تا یک به صورت مستقل به دست آمده است. (Vickrey Auction)

الف

مقدار Expected Revenue را محاسبه کنید.

ب

اگر مقدار Reserve برابر با  $\frac{1}{3}$  باشد، آنگاه Expected Revenue را بیابید.

## مسئله ۷.

برای هر یک از توابع توزیع زیر مقدار Virtual Valuation را محاسبه کنید.

الف

توزیع یکنواخت در بازه  $[0, a]$  برای  $a > 0$

ب

توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  با  $\lambda > 0$

ج

توزیع به صورت  $F(v) = 1 - \frac{1}{(v+1)^c}$  برای  $c > 0$

مسئله ۸.

الف

در سوال قبل برای هر توزیع مشخص کنید که Regular است یا خیر.

ب

در قسمت ج سوال قبل اگر  $c = 1$  باشد، آیا Expected Revenue برابر با Expected Virtual Surplus است یا خیر؟ چرا؟

مسئله ۹.

الف

ثابت کنید برای هر محیط Single-parameter با توزیع ارزش گذاری Regular، قاعده تخصیصی که Virtual Surplus را بیشینه می کند یکنواست.

ب

فرض کنید  $k$  کالای مشابه داریم و به هر خریدار ( $n$  نفر) حداکثر یکی از این کالاها می رسد. فرض کنید توزیع ارزش گذاری ها به صورت i.i.d و Regular باشند. (توزیع  $F$ ) در این حالت Optimal Auction را توصیف کنید. مقدار قیمت Reserve به چه پارامترهایی وابسته است؟

مسئله ۱۰.

یک توزیع  $F$  به صورت اکیدا صعودی با تابع چگالی اکیدا مثبت  $f$  بر روی بازه  $[0, v_{max}]$  ( $v_{max} < +\infty$ ) در نظر بگیرید. حال برای یک مزایده تک خریدار (با Posted Price به صورت take-it-or-leave-it) با توزیع ارزش گذاری  $F$  تعریف می کنیم:

$$V(q) = F^{-1}(1 - q), \quad 0 \leq q \leq 1$$

و

$$R(q) = qV(q)$$

که  $R$  همچنین Revenue Curve نامیده می شود. در حقیقت اگر احتمال فروش  $q$  باشد،  $R$  مقدار Expected Revenue به دست آمده می باشد.

الف

مقدار تابع Revenue Curve برای توزیع یکنواخت بر روی بازه صفر تا یک را به دست آورید.

ب

نشان دهید که تساوی زیر برقرار است. (در اینجا  $\varphi$  همان Virtual Valuation است.)

$$R'(q) = \varphi(V(q))$$

ج

نشان دهید توزیع  $F$  یک توزیع Regular است، اگر و تنها اگر Revenue Curve یک تابع مقعر باشد.

د

نامساوی زیر را ثابت کنید. معنای این نامساوی چیست؟

$$R\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4} \max_{q \in [0,1]} R(q)$$

## مسئله ۱۱.

یک First-price Auction برای یک کالا را در نظر بگیرید. برای هر خریدار  $i$ ،  $b_i(\cdot)$  استراتژی است که با گرفتن ارزش کالا ( $v_i$ ) پیشنهاد خریدار را خروجی می‌دهد. (فرض کنید این استراتژی در دسترس عموم است ولی  $v_i$  شخصی است) یک خانواده از  $b_1(\cdot), \dots, b_n(\cdot)$  را تعادل Bayes-Nash می‌نامیم اگر برای هر خریدار  $i$  با هر ارزش‌گذاری  $v_i$  استراتژی  $b_i(v_i)$  مقدار Expected Payoff آن خریدار را بیشینه کند. (امید ریاضی بر اساس توابع و ارزش‌گذاری سایر خریداران است.)

الف

فرض کنید هر ارزش‌گذاری مستقلاً از توزیع یکنواخت در بازه صفر تا یک به دست بیاید. نشان دهید  $b_i(v_i) = v_i \frac{n-1}{n}$  یک تعادل است.

ب

نشان دهید مقدار Expected Revenue در این تعادل دقیقاً برابر همین مقدار در Vickrey Auction صادقانه است.

(موفق باشید:)