



۱ تعاریف اولیه

یک بازی را میتوان با دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ که $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ نشان داد. به این شکل که در صورتی که بازیکن اول عمل i و بازیکن دوم عمل j را انجام دهد، به ترتیب مقادیر a_{ij} و b_{ij} را به عنوان پاداش دریافت میکنند. یک استراتژی مخلوط برای یک بازیکن، توزیعی است بر روی عمل‌های ممکن آن بازیکن و میتوان آنرا با یک بردار $x \in \Delta_k$ که k تعداد اعمال آن بازیکن است نشان داد. یک پروفایل استراتژی یک دوتایی (x, y) است که $x \in \Delta_n$ و $y \in \Delta_m$.

۱.۱

تعریف ریاضی یک تعادل نش مخلوط (احتمالاتی) را با توجه به نوشتن گفته شده بنویسید.

۲.۱

درباره‌ی Pareto Efficiency تحقیق کنید و آنرا با توجه به نوشتن بالا بیان کنید.

۳.۱

دو ماتریس پاداش باید در چه شرطی صدق کنند تا بازی متقارن باشد؟

۲ بازی‌های معروف

۱.۲

در ادامه ۳ ماتریس پاداش برای ۳ بازی مختلف که اسامی آنها Prisoner's Dilemma و Battle of the Sexes و Chicken هستند (نه لزوماً به همین ترتیب) میباشند.

۲.۲

درباره‌ی این بازی‌ها تحقیق کنید و بیان کنید کدام ماتریس برای کدام بازی است.

۳.۲

تعادل نش هر بازی را محاسبه کنید (هر راه درستی قابل قبول است).

-10,-10	3,-2
-2 3,	0,0

-1,-1	-5,0
0,-5	-3,-3

10,2	-5,-5
-5,-5	2,10

۳ تکنیک‌های محاسبه تعادل نش

۱.۳

درباره‌ی تکنیک Indifference Principle تحقیق کنید و از نوتیشن مطرح شده در سوال ۱ استفاده کنید و آنرا به شکل ریاضی بیان کنید (میتوانید نوتیشن جدید معرفی کنید).

۲.۳

درباره‌ی تکنیک Iterative Elimination of Dominated Strategies تحقیق کنید و با استفاده از این روش تعادل نش ماتریس زیر را پیدا کنید:

4,4	3,1	4,2
2,2	1,1	2,3
3,3	4,1	3,4

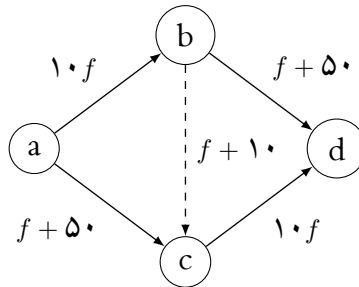
۴

n نفر در یک بازی شرکت کرده اند و هرکدام بدون اطلاع از دیگری به بازی می‌پردازند. هرکس میتواند تصمیم بگیرد که داوطلب بشود یا خیر. در صورتی که تعدادی داوطلب بشوند به افرادی که نشدند ۱۵۰۰ تومان و به افرادی که شدند ۱۰۰۰ تومان پاداش تعلق می‌گیرد و در صورتی که کسی داوطلب نشود به هیچکس پاداشی داده نمیشود. تعادل نش این بازی را پیدا کرده و نشان دهید که یکتاست.

۵ پارادوکس بریس: بازبینی

۱.۵

پارادوکس بریس را در شبکه زیر توضیح دهید (یال خط چین بناست که اضافه شود). به یالی که f واحد ترافیک از خود عبور میدهد مقداری که روی هر یال نوشته شده هزینه تعلق میگیرد. در کل ۶ واحد صحیح ترافیک داریم که از نقطه a به d میروند.



۲.۵

پارادوکس بریس رخ داده در این مثال را به زبان Pareto Efficiency و تعادل نش بیان کنید.

۶ هزینه آشوب در شبکه‌های ترافیکی

شبکه‌ی ترافیکی زیر با f واحد پیوسته ترافیک در نظر بگیرید که از a به b می‌رود. فرض کنید هزینه کل جامعه (مجموع هزینه‌های f واحد ترافیک) در حالتی که یال خط چین وجود ندارد و شبکه به تعادل رسیده برابر C_1 و در حالتی که آنرا اضافه کنیم و شبکه در تعادل جدید باشد برابر C_2 باشد. تمامی توابع هزینه یال‌ها خطی هستند. برای درک بهتر، اگر میزان ترافیک یالها را در حالت اولیه با x_e و در حالت ثانویه را با x'_e نشان دهیم، در آنصورت

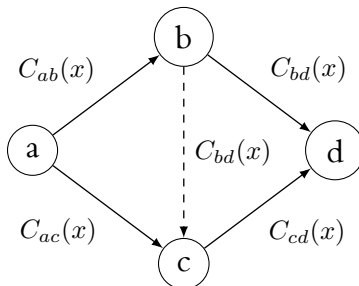
$$C_1 = C_{ab}(x_{ab})x_{ab} + C_{ac}(x_{ac})x_{ac} + C_{bd}(x_{bd})x_{bd} + C_{cd}(x_{cd})x_{cd}$$

$$C_2 = C_{ab}(x'_{ab})x'_{ab} + C_{ac}(x'_{ac})x'_{ac} + C_{bd}(x'_{bd})x'_{bd} + C_{cd}(x'_{cd})x'_{cd} + C_{bd}(x'_{bd})x'_{bd}.$$

حال نشان دهید

$$C_2 \leq 2C_1.$$

با توجه به نتیجه بالا، درباره‌ی هزینه آشوب چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: این قضیه پتانسیل تعمیم به تمامی شبکه‌های ترافیک خطی را دارد).



۷ مثال‌های دیگر پارادوکس

یک راه تبیین پارادوکس بریس این است که بگوییم اضافه شدن امکانات همیشه به نفع جامعه نیست و لزوماً اوضاع آنرا بهتر نمیکند. مثال دیگری از این پدیده بیان کنید و وجود این پارادوکس را در آن شرح دهید.

۸ سختی محاسبه تعادل نش

۱.۸

در حالت کلی پیدا کردن تعادل نش میتواند کار سختی باشد. کلاس پیچیدگی این مسئله را (در حالت کلی) پیدا کنید و آنرا تعریف کنید.

۲.۸

در بعضی حالات اما این محاسبه امکان پذیر است. یکی از این موارد شبکه‌های ترافیکی است. درباره‌ی بازی‌های پتانسیلی تحقیق کنید و سپس الگوریتم چندجمله‌ای برای پیدا کردن تعادل نش در شبکه‌های ترافیکی بیان کنید (راهنمایی: از یک پروفایل استراتژی شروع کنید و آنرا بهبود دهید).