جزوه ساختمان داده

Data Structure

استاد: دکتر میرروشندل

نویسنده: امیرمحمد عزتی – سید امیرکسائی

انواع مرتب سازی ها (Sort)

1. Insertion Sort

```
InsertionSort (array) :
    for i in range (2, len(array) ) :
        Key = array[i]
        j = i - 1
        while(j > 0 and array[j] > key):
            swap(array[j], array[j + 1])
            j--
```

$O(n^2)$

2. Merge Sort

```
mergeSort(array, begin, end):
    if begin > end:
        return null
    mid = (begin + end)/2

    mergeSort(array, begin, mid)

    mergeSort(array, mid, end)

    merge(array, begin, end)



merge(array, begin, end):
    tmp = []
    i = begin
    mid = (begin + end)/2
    j = mid + 1
    k = 0
```

```
    while(i < mid and j < end):
        if array[i] <= array[j]:
            tmp[k++] = array[i++]

        else:
            tmp[k++] = array[j++]

    while(j <= end):
        tmp[k++] = array[j++]

    while(i <= mid):
        tmp[k++] = array[i++]

    array = tmp
```

$O(nlgn)$

3. Bubble Sort

```
bubbleSort(array):
    for i in range(1, n):
        for j from n to i+1:
            if array[j-1] > array[j]:
                swap(array[j], array[j-1])
```

$O(n^2)$

Hanoi Tower

```
hanoiTower(n, start, goal, help):
    if n==1:
        print(start + "-->" + goal)
        return

    hanoiTower(n-1, start, help, goal)
    print(start + "-->" + goal)
    hanoiTower(n-1, help, start, goal)
```

$O(2^n)$

Order

$O(n!) = O(n^n)$
$O(\log_x n!) = O(n \log_x n)$

Master theorem

$X = n^{\log_b a}$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \rightarrow \begin{cases} f(n) = O(X) \rightarrow T(n) = \theta(X) \\ f(n) = \theta(X) \rightarrow T(n) = \theta(x \lg n) \\ f(n) = \Omega(\mathrm{X}) \rightarrow T(n) = \theta(f(n)) \end{cases}$$

Elementary data structures

1. Linked list:

```
class LinkedList:
    DataType data
    LinkedList next

```

Insert last

```
Linkedlist insertLast(Linkedlist l, int newData):
    Linkedlist temp = new Linkedlist
    temp.data = newData

    temp2 = l
    while temp2.next != null:
        temp2 = temp2.next

    temp.next = temp
    return l

```

$O(length)$

Insert first

```
Linkedlist insertFirst(Linkedlist l, int newData):
    tmp = LinkedList()
    tmp.data = newData
    tmp.next = l
    return temp

```

Get Length

```
def getLength(LinkedList l):
    length =  0
    while l is not null:
        l = l.next
        length++

    return length



def getLength(LinkedList l):
    if l is null:
        return 0
    return 1 + getLength(l.next)
```

Delete

```
LinkedList delete(LinkedList l, data):
    if l is null:
        return l

    if l.data = data:
        return l.next

    LinkedList tmp = l
    while tmp.next is not null:
        if tmp.next.data == data:
            tmp.next = tmp.next.next

        tmp = tmp.next

        return
```

$O(n)$

Copy

```
LinkedList copy(LinkedList l):
    if  l is null:
        return null

    tmp = LinkedList()
    tmp.data = l.data
    tmp.next = copy(l.next)

    return tmp
```

Merging two sorted linked list

```
LinkedList merge(LinkedList l1, LinkedList l2):
    if l1 is null:
        return l2

    if l2 is null:
    return l1

    if l1.data <= l2.data:
        l1.next = merge(l1.next, l2)
            return l1

    else:
        l2.next = merge(l1, l2.next)
        return l2
```

Reverse

```
linkedList reverse(linkedList l):
    if l is null:
        return null

    if l.next is null:
        return l

    tmp = reverse(l.next)
    l.next.next = l
    l.next = null

    return tmp
```

$O(n)$

Purge1

```
linkedList purge(linkedList l):# removes duplicate data
    i, j = linkedList()
    i = l

    while i.next is not null:
        j = i.next
        while j.next is not null:
            if i.data == j.data:
                delete(j)
            else:
                j = j.next

        i = i.next

    return l
```

$O(n^2)$

Purge2

```
linkedList purge(linkedList l):
    meregSort(l)
    tmp = l
    while tmp.next is not null:
        while tmp == tmp.next:
            delete(tmp.next)

        tmp = tmp.next

    return l
```

$O(n \lg n)$

2. Queue

Is Empty

```
isEmpty(queue q):
    if q.head == q.tail + 1:
        return True

    return False
```

Enqueue and Dequeue

```
enqueue(q, data):
    q.tail = q.tail + 1
    q[q.tail] = data


dequeue(q):
    return q[head++]
```

3. Rounded Queue

Next

```
next(int k):
    return (k+1)%max
```

Is Empty

```
isEmpty(q):
    return next(q.tail) == q.head
```

Is Full

```
isFull(q):
    return next(next(q.tail)) == q.head
```

Enqueue

```
enqueue(data):
    if isFull():
        return -1

    q.tail = next(q.tail)
    q[q.tail] = data
```

Dequeue

```
dequeue():
    if isEmpty():
        return "ERROR"

    tmp = q[q.head]
    q.head = next(q.head)
    return tmp
```

4. General linked List

Get general List from expression

```
getList(input):

    l = new List
    t = l

    if data is null:
        return null

    while input.data is not ")":

        if input.data is "(":
            t.next.down = getList(input.next)

        else if input.data is not ",":
            t.next.data = input.data

        input = input.next
        t = t.next

    return l
```

Print expression of general linked list

```
printList(gerenalLinkedList l):
    print("(")

    if l is null:
    print(")")
    return

    l = l.next

    while l is not null:
         if l.down is null:
            if l.down.next is null:
```

```
                print(l.data)
            else:
                print(l.data + ",")

        else:
            printList(l.down)

        l = l.next

    print(")")
```

5. Stack

Train station example

```
data = []
train = []
tempTrain = []
trainStation = []
possible = True

n = int(input("Enter number of elements : "))
print("Please enter data (press enter after each element): ")

for i in range(n):
    x = int(input())
    data.append(x)
    train.append(i + 1)
    tempTrain.append(i + 1)


def check(index, pr):
    if index == n:
        return

    if data[index] in train:
        while True:
```

```
            if pr:
                print("push " + str(train[0]))
            trainStation.append(train[0])
            if train[0] == data[index]:
                train.pop(0)
                break
            train.pop(0)

        if pr:
            print("pop " + str(trainStation[-1]))
        trainStation.pop(-1)

    elif data[index] == trainStation[-1]:
        if pr:
            print("pop " + str(trainStation[-1]))
        trainStation.pop(-1)

    else:
        global possible
        possible = False
        return

    check(index + 1, pr)


check(0, False)
if possible:
    train = tempTrain
    check(0, True)
else:
    print("impossible")
```

6. Tree

درخت گراف همبندی است که نه دور دارد نه حلقه.

```
class node:
    data
    children = [node]


class Tree:
    root = node()
```

```
getHeight(binaryTree):
    if t is null:
        return -1

    return 1 + max(getHeight(t.left), getHeight(t.right))
```

$|E| =$ تعداد یال ها

$|V| =$ تعداد گره ها

$|E| = |V| - 1$ اثبات: به روش استقرا

ریشه: گره ای است که یال ورودی ندارد. پدر ندارد!

برگ: گره ای که یال خروجی ندارد. *(بچه ندارد)*

ارتفاع یک گره: طولانی ترین مسیر از آن گره به یکی از برگ ها

ارتفاع درخت: ارتفاع ریشه

عمق یک گره: طول مسیر از آن گره به ریشه

درخت *K* تایی: درختی که هر گره حداکثر *K* فرزند داشته باشد.

درخت *K* کامل: درختی که هر گره آن دقیقا *k* فرزند داشته باشد یا فرزند نداشته باشد.

درخت متوازن: درختی که عمق برگ های آن حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشد.

درخت کاملا متوازن: درختی که عمق برگ هایش با هم برابر باشد.

درخت مرتب*(ordered Tree)*: درختی که بین فرزندان آن ترتیب قائل شویم.

درخت دودویی*(binary)*: درخت دوتایی مرتب.

سوال: تعداد برگ های درخت k تایی کامل با n گره را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} |E| = n-1 \\ |E| = (n-B) \times k = \mathrm{B}' \times k \end{cases} \Rightarrow \; n - B = \frac{n-1}{k}$$

$$\Rightarrow B = n - \frac{n-1}{k}$$

$B =$ تعداد نود هایی که فرزند ندارند

ترتیب پیمایش(ملاقات) گره ها:

۱. پیش ترتیب *preorder*:
اول ریشه سپس فرزندان

۲. پس ترتیب *postorder*:
اول فرزندان سپس ریشه

۳. میان ترتیب *inoerder*:
اول فرزند چپ سپس ریشه سپس بقیه فرزندان

۴. ترتیب سطحی *levelorder*
به ترتیب سطح

```
levelOrder(Tree t):
    q.empty()
    q.enqueue(t)

    while(q is not empty):
        v = q.dequeue()
        print(v)
        q.enqueueAll(v.child)
```

۱. درخت دودویی معادل:
درختی است که گره هایش همان گره های درخت اولیه هستند! فرزند سمت چپ در درخت دودویی معادل سمت چپ ترین فرزند درخت *k* تایی است و فرزند سمت راست درخت دودویی برادر سمت راستی گره مورد نظر است.

```
class node:
    data
    left = node()
    right = node()

class binaryTree:
    root = node()
```

Pre Order

```
preOrder(binaryTree t):
    if t is null:
        return

    print(t.data)
    preOrder(t.left)
    preOrder(t.right)
```

Post Order

```
postOrder(binaryTree t):
    if t is null:
        return

    postOrder(t.left)
    postOrder(t.right)
    print(t.data)
```

In Order

```
inOrder(binaryTree t):
    if t is null:
        return

    inOrder(t.left)
    print(t.data)
    inOrder(t.right)
```

۲. درخت انبوه *Heap Tree*

۱) درخت دودویی
۲) درخت متوازن
۳) برگ هایی عمقشان بیشتر است در سمت چپ برگ های با عمق کمتر ظاهر خواهند شد. (برگها از سمت چپ پر می شود)
۴) ارزش هر گره از فرزندان آن کمتر *(min Heap)* یا بیشتر *(max Heap)* است.

Min-Heap

$root \to min$

$h = [\lg n]$ $height$

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h = \frac{1-2^h}{1-2} + 1 = 2^h \Rightarrow \quad h = [\lg n]$$

اگر نود های درخت باینری را شماره گذاری کنیم، فرزند نود *k* ام به ترتیب نود $2k+1$ ام و $2k+2$ ام است و پدرش نود $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ ام است.

1) *Insert*
   Order: $o(h) = o(\lg n)$
2) *Delete*
   Order: $o(h)$

کاربرد اول:

Heap Sort

Order: $o(n \lg n)$

۱) یک *min heap* تهی می سازیم $o(1)$
۲) باید *n* بار *insert heap* کنیم$o(n \lg n)$
۳) باید *n* بار *delete min* یا *delete root* کنیم$o(n \lg n)$

کاربرد دوم: صف الویت

Priority queue

7. *Binary Search Tree*

فرزند چپ کوچک تر مساوی ریشه است و فرزند راست بزرگتر مساوی ریشه است.

BST Search

```
BSTSearch(BST t, target):
    if is null:
        return null

    if target == t.data:
        return t

    if target < t.data:
        return BSTSearch(t.left, target)

    return BSTSearch(t.right, target)
```

نکته: روش *BST Search* سریعترین جستجوی ممکن است.

$$O(h) = O(\lg n)$$

تعداد *BST* های ممکن با *n* گره:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i-1)T(n-i) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \text{ عدد کاتالان}, \qquad T(0) = 1$$

نکته: *inorder* درخت *BST* برابر آرایه مرتب *(sort)* شده آن است.

BST-Min

```
BST-Min(BST t):
    if t is null:
        return null
    if t.left is null;
        return t

    BST-Min(t.left)

BST-Min(Tree t):
    if t is null:
        return null

    tmp = t
    while tmp.left is not null:
        tmp = tmp.left

    return tmp
```

BST-Successor

```
BST-Successor(BST t):

    if t is null:
        return null

    if t.right is not null:
        return BST-Min(t.right)
        # BST-Min has been defined in class

    else:
        if t.parent is null:
            return null

        else:
            if t.parent.left is equal t:
                return t.parent
```

```
        else if t.parent.right is equal t:
            t = t.parent
            t.right = null
            return BST-Successor(t)
```

Insert BST

```
insertBST(value, BST t, BST parent):
    if t is null:
        tmp = BST(value)

        if parent is not null:
            if value <= parent.data:
                parent.left = tmp

            else:
                parent.right = tmp

    return

    if value <= t.data:
        insertBST(value, t.left, t)

    else:
        insertBST(value, t.right, t)
```

BST-Delete

```
BST-Delete(BST t, int value):
    if t is null:
        return null

    target = BST-Search(t, value)

    # BST-Search & BST-Min has been defined in class

    tmp = BST-Min(target.right)

    target.data = tmp.data

    if tmp.right is null:
        tmp = null

    else:
        tmp = tmp.right

    return t
```

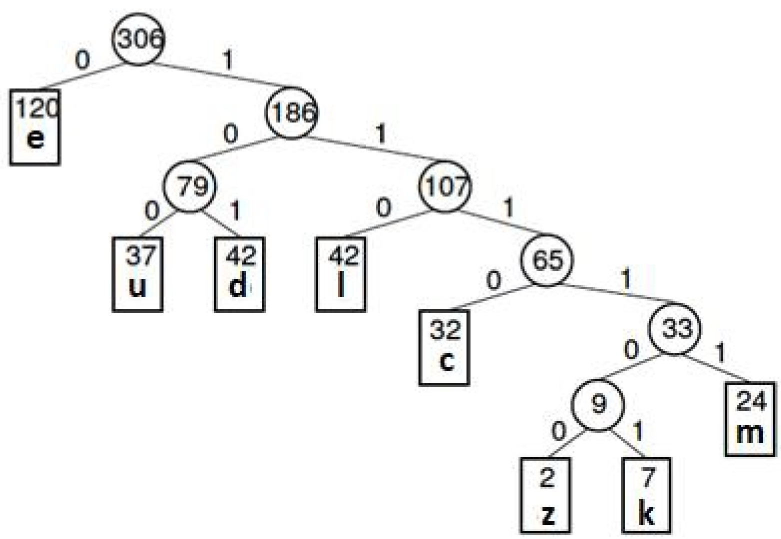
نکته: بعد از *delete* های متعدد در *BST* توازن بهم می خورد برای تشکیل یک درخت متوازن، *inorder* درخت را یافته و از روی آن یک *BST* متوازن جدید می سازیم.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1) \rightarrow O(n)$$

8. Huffman Tree

Letter	Freq	Code	Bits
e	120	0	1
d	42	101	3
l	42	110	3
u	37	100	3
c	32	1110	4
m	24	11111	5
k	7	111101	6
z	2	111100	6

The Huffman tree (for the above example) is given below -



9. Expression Tree

۱) درخت دودویی
۲) درختی است که برگ ها عملوند و غیر برگ ها(گره های داخلی) عملگر
۳) الویت عملگر ها از ریشه به سمت برگ ها افزایش پیدا می کند(ریشه کمترین الویت را دارد)!

به inorder درخت عبارت، infix گفته می شود که همان عبارتی است که در حالت پرانتزی معادل غیر پرانتزی با الویت باشد.

به نتیجه preOrder درخت prefix می گوییم.

به نتیجه postOrder درخت postfix می گوییم.

Calculate Expression

```
calculateExpTree(Tree t):
    if isOprand(t.data):
  return t.data

  case t.data:
    '+':
        return calculateExpTree(t.left) + calculateExpTree(t.right)

    '-':
        return calculateExpTree(t.left) + calculateExpTree(t.right)

    '-1':
    return - calculateExpTree(t.right)
```

$O(n)$

Infix to Postfix

```
inFixToPostFix(inFixEXP):
s1, s2 = stack()

for any token in inFixEXP:
    if isOprand(x):
        s1.push(x)

    else:
        y = s2.top
        if y is null:
            s2.push(x)

        elif priority(x) > priority(y):
            s2.push(x)

        else:
            if y is binary:
                operator = s2.pop()
                opr2 = s1.pop()
                opr1 = s1.pop()
                s1.push("opr1 opr2 operator")
            else:
                operator = s2.pop()
                opr1 = s1.pop()
                s1.push("opr1 operator")
           s2.push(x)


return s1.pop()
```

Postfix to Infix

```
postFixToInFix(postFixEXP):

    Stack s

    for any token x in postFixEXP:

        if isOprand(x):
            s.push(x)

        else if isSingleOperator(x):
            y = s.pop()
            k = x  y
            s.push(k)

        else:
            z = s.pop()
            y = s.pop()
            k = y x z
            s.push(k)


    return s.pop()
```

Postfix to Prefix

```
postFixToPreFix(postFixEXP):
    Stack s

    for any token x in postFixEXP:

        if isOprand(x):
            s.push(x)

        else if isSingleOperator(x):
            y = s.pop()
            k = x  y
```

```
            s.push(k)

        else:
            z = s.pop()
            y = s.pop()
            k = x y z
            s.push(k)


    return s.pop()
```

Prefix to Infix

```
preFixToInFix(preFixEXP):
    Stack s
    Queue q

    for any token x in preFixEXP:
        if isOprand(x) or isSingleOperator(x):
            y = s.pop()
            if y is null:
                s.push(x)

            else:
                z = q.Dequeue()
                if z is null:
                    k = y x

                else if isSingleOperator(y):
                    k = y x z

                else:
                    k = y z x

                s.push(k)

        else if isBinaryOperator(x):
```

```
        q.Enqueue(x)


    retrun s.pop()
```

Prefix to EXP Tree

```
index = 0

Tree preToTree(preFix):
    tmp = Tree()
    if isOprand(preFix.getToken(index)):
        tmp.data = preFix.getToken(index)
        index++
        return tmp

    if isBinaryOperator(preFix.getToken(index)):
        tmp.data = preFix.getToken(index)
        index++
        tmp.left = preToTree(preFix)
        tmp.right = preToTree(preFix)
        retrun tmp

    tmp.data = preFix.getToken(index)
    index++
    tmp.right = preFixToTree(prefix)
    return tmp
```

Sort Orders

1. *Merge Sort* $O(n \lg n)$
2. *Insertion Sort* $O(n^2)$
3. *Heap Sort* $O(n \lg n)$
4. *Bubble Sort* $O(n^2)$
5. *Selection Sort* $O(n^2)$
6. *Quick Sort* $O(n \lg n) \rightarrow O(n^2)$

الگوریتم ها دارای سه تقسیم بندی هستند:

۱. داخلی *(internal)* یا خارجی *(external)* بودن
۲. متعادل *(stable)* یا نامتعادل *(unstable)* بودن:
الگوریتم متعادل الگوریتمی است که ترتیب نسبی عناصری که مقدار کلیدی شان یکسان است را حفظ می کند.
۳. مبتی بر مقایسه و غیر مبتنی بر مقایسه بودن

Radix Sort
Count Sort
Bucket Sort

1. *Count Sort*
   Internal
   Stable
   Independent of comparison

n تا عدد در بازه *0* تا *m-1* می دهد. بر اساس تعداد تکرار اعداد را از اخر *sort* می کنیم.

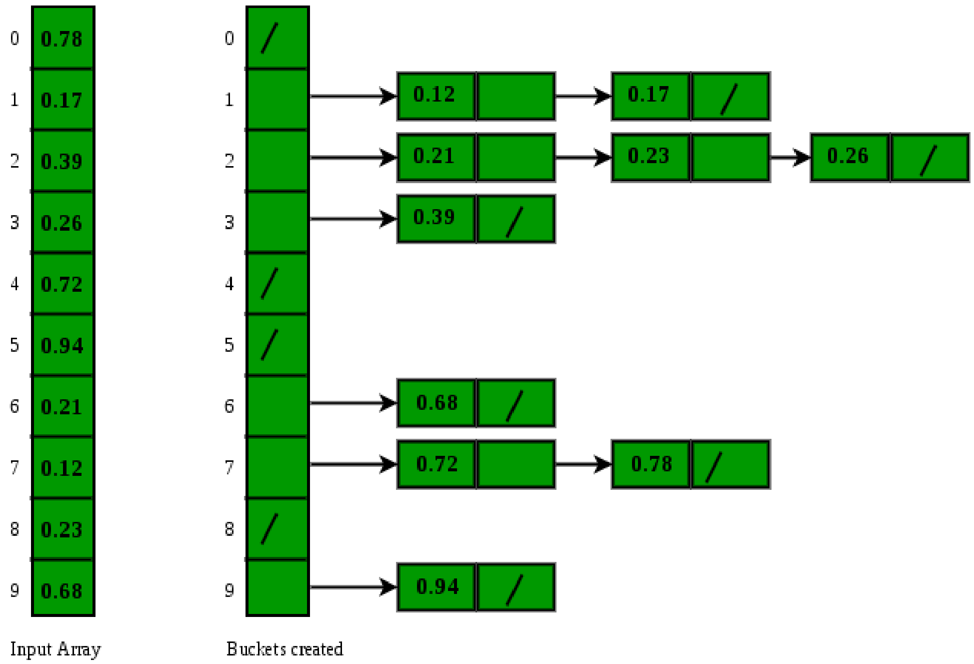
```
countSort(A, n, m):
    C = [0]*m
    B = []*n

    for i in range(n):
```

```
        C[A[i]]++

    for i in range(1,m):
        C[i] = C[i] + c[i-1]

    for i in range(n-1, 0, -1):
        B[C[A[i]]-1] = A[i]
        C[A[i]]--

    return B
```

$$O(n+m) \xRightarrow{m \leq n} O(n)$$

2. *Radix Sort*
   Stable
   Independent of Comparison
   از رقم کم ارزش تا پر ارزش ترین *count Sort* می زنیم
   با فرض اینکه *k* رقم داشته باشیم
   $O(kn)$

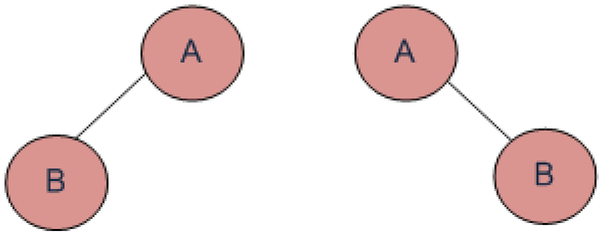
3. *Bucket Sort*
   Stable
   Independent of Comparison



نکته: *merge sort* را می توان *stable* طراحی کرد.

سوال: آیا با داشتن *level-Order* و *Post-Order* می توان یک درخت یکتا درست کرد؟
آیا با داشتن *level-Order* و *In-Order* می توان یک درخت یکتا درست کرد؟
هزینه زمانی آن چقدر است؟

It depends on what traversals are given. If one of the traversal methods is Inorder then the tree can be constructed, otherwise not.



Trees having Preorder, Postorder and Level-Order and traversals

Therefore, following combination can uniquely identify a tree.

Inorder and Preorder.
Inorder and Postorder.
Inorder and Level-order.

And following do not.
Postorder and Preorder.
Preorder and Level-order.
Postorder and Level-order.

For example, Preorder, Level-order and Postorder traversals are same for the trees given in above diagram.

Preorder Traversal = AB
Postorder Traversal = BA
Level-Order Traversal = AB

So, even if three of them (Pre, Post and Level) are given, the tree can not be constructed.

4. Quick Sort $\Rightarrow \begin{cases} O(n \lg n) & \text{بهترین} \\ O(n^2) & \text{بدترین} \end{cases}$

   Stable

   Dependent of Comparison

```
partition(A, begin, end):
    x = A[b]
    i = begin
    j = end

    while i < j:
        while A[i] <= x and i < j:
            i++

        while A[j] >= x and i < j:
            j--

        if i < j:
            swap(A[i], A[j])

    swap(A[b], A[i-1])
    return i-1
```

$O(n)$

```
quickSort(A, begin, end):
    if begin >= end:
        return

    r = partition(A, b, e)
    quickSort(A, b, r - 1)
    quickSort(A, r + 1, end)
```

برای پیدا کردن min یک آرایه با n عنصر حداقل و حداکثر چند مقایسه بطور دقیق انجام می دهیم؟

$n - 1$

برای محاسبه همزمان min و max اردر زمانی چقدر است؟

$$T(n) = T(n-2) + 3 \;\rightarrow\; O\left(\frac{3}{2}n - 2\right)$$

i-Select

i امین عنصر از نظر بزرگی یا کوچکی

```
iSelect(A, begin, end, i):
    if begin = end:
        return A[p]

    r = partition(A,b,e)
    if r == i:
        return A[r]

    if r < i:
        return iSelect(A, r + 1, end, i - r)

    if r > i:
        return iSelect(A, b, r - 1, i)
```

median: میانه

order: $O(n) = \frac{n}{2} Select$

نکته: برای یافتن میانه $\frac{n}{2} select$ را محاسبه میکنیم.

5. External merge Sort

برای n های بزرگ که داخل رم جا نمی شود.

تعداد دسترسی به حافظه مهم است.

Order: $O(2n\lg n)$

اگر k تا sort انجام شود برابر $O\left(\frac{2n}{k}\lg n\right)$

6. Multi way External merge Sort

شکستن و تبدیل به m گروه

Order: $O(2n\log_m n)$

Hashing

1. Directed Hashing

داده i ام در خانه i ام آرایه ذخیره می شود.

2. Chaining Hashing

با استفاده از آرایه ای از linked list ها و روش mod گیری

به عنوان مثال اگر مود m بگیریم، آنگاه طول آرایه m-1 خواهد شد.

$\alpha = \frac{n}{m}\ \ loading\ factor$

$$\text{Order:} \begin{cases} O(n) & \text{بدترین حالت} \\ O(1+\alpha) & \text{میانگین} \end{cases}$$

Simple Uniform Hashing

درهم سازی یکنواخت ساده

بهتر است m توانی از 2 نباشد.

بهتر است m یک عدد اول باشد که نزدیک به توانی از ۲ نباشد.

روش ضرب:

$$h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor , 0 < A < 1$$

$$A = \frac{s}{2^w} \quad 0 < S < S^w$$

$m \in \mathbb{N}, m = 2^p$ مطلوب

درهم سازی کلی *Universal*

نوع درهم سازی مشخص نبوده و قابل سوء استفاده نیست.

آدرس دهی باز *Open Addressing*

$$h(k,i) = k \bmod m + i \times m$$

وارسی خطی *linear hashing*

$$h(k,i) = (h'(k) + i) \bmod m$$

وارسی درجه دو

$$h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$$

درهم سازی دوگانه *Double Hashing*

$$h(k,i) = \left(h_1(k) + i \times h_2(k)\right) \bmod m$$

$$\alpha = \frac{n}{m} \leq 1 \qquad n \leq m$$

جستجوی ناموفق $\rightarrow \dfrac{1}{1-\alpha}$

درج عنصر $\rightarrow \dfrac{1}{1-\alpha}$

جستجوی موفق $\rightarrow \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{1}{1-\alpha}$

ضرب دو عدد به روش تقسیم و حل *divide and conquer*

X = Xl*$2^{n/2}$ + Xr
[Xl and Xr contain leftmost and rightmost n/2 bits of X]
Y = Yl*$2^{n/2}$ + Yr
[Yl and Yr contain leftmost and rightmost n/2 bits of Y]

XY = 2^n XlYl + $2^{n/2}$ * [(Xl + Xr) (Yl + Yr) - XlYl – XrYr] + XrYr

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \rightarrow O(n^{1.59})$$

روش هورنر

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$p_0(x) = x.Q_{n-1}(x) + a_0 \rightarrow O(n)$$

$T(n) = T(n-1) + 1$ ضرب

$T(n) = T(n-1) + 1$ جمع

تعداد نواحی حاصل از تقاطع n خط: $S(n)$

خط n ام با n-1 خط برخورد دارد، n ناحیه جدید:

$$S(n) = S(n-1) + n \rightarrow S(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

تعداد نواحی حاصل از تقاطع n زاویه: $T(n)$

$$T(n) = T(n-1) + 4n - 3 \rightarrow O(n^2)$$

سوال: فرض کنید x1 تا xn اعداد صحیح مثبت باشند و $S = \sum x_i$ الگوریتمی با $O(ns)$ ارائه دهید که این مجموعه از اعداد را به دو مجموعه با مجموع یکسان تبدیل کند.

```
def findSplitPoint(arr, n) :
    leftSum = 0
    for i in range(0, n) :
        leftSum += arr[i]

    rightSum = 0
    for i in range(n-1, -1, -1) :

        rightSum += arr[i]

        leftSum -= arr[i]

        if (rightSum == leftSum) :
            return i

    return -1


def printTwoParts(arr, n) :
    splitPoint = findSplitPoint(arr, n)

    if (splitPoint == -1 or splitPoint == n ) :
        print ("Not Possible")
        return

    for i in range (0, n) :
        if(splitPoint == i) :
            print ("")
        print (arr[i], end = " ")

arr = [1, 2, 3, 4, 5, 5]
n = len(arr)
printTwoParts(arr, n)
```

$O(n)$

شبکه مرتب ساز sorting gate

- Concurrent programing

$O(2n-3)=O(n)$ اردر زمانی

$$S(n)=S(n-1)+n-1$$

$$S(n)=\frac{n(n-1)}{2}\rightarrow O(n^2)$$

Dynamic Programing (DP)

ممکن است همه جا قابل اعمال نباشد، اما اگر کار کند، مرتبه نمایی را به مرتبه زمانی چند جمله ای تبدیل می کند.

مختص مسائل بهینه سازی

استفاده از زیر مسئله های بهینه

حل زیر مسئله ها از پایین به بالا (روش memorization از بالا به پایین عمل می کند.)

ذخیره نتایج زیر مسئله در حافظه

حل مسئله اصلی از روی نتایج زیر مسئله ها

Combination $\binom{n}{m}$

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & m = n \ \ or \ \ m = 0 \\ \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} & ow \end{cases}$$

```
dynamicComb(n, m):
    for i in range(0, n):
        c[i][0] = 1

    for i in range(0, m):
        c[0][i] = 1

    for i in range(1, m):
        for j in range(2, max((i=m), n)):
            c[j][i] = c[j-1][i] + c[j-1][i-1]

    return c[n][m]
```

Matrix chain

تعداد ضرب ها در ضرب ماتریس ها

$$M_{p_0 \times p_1} \times M_{p_1 \times p_2} \times \ldots \times M_{p_{n-1} \times p_n} = \prod_{i=0}^{n} p_i$$

$$M[i,j] = \min\big(M[i,k-1], M[k,j] + p_{i-1} p_{(k-1)} p_j\big) \quad (i < k \leq j)$$

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

عدد کاتالان

```
matrixMult(i, j): # without dynamic programming

    if i >= j:
        return 0

    minMult = +infinity

    for k in range(i+1, j):

        mult = matrixMult(i, k-1) + matrixMult(k, j) +
                           firstDimension(M(i))
                                  *firstDimension(M(k))
                                           *secondDimension(M(j))


        if minMult > mult:
            minMult = mult

    return minMult


print(matrixMult(1, n))
```

$$O(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}})$$

```
matrixMinMult(n): # with dynamic programming
    mult = [][0]*(n+1)[]*2

    for len in range(1, n-1):
        for i in range(1, n-len):
            j = i + len
            minMult = +infinity
            for k in range(i+1, j):

                mult = mult[i][k-1][0] + mult[k][j][0] +
                       firstDimension(M(i))*firstDimension(M(k))
                                                   *secondDimension(M(j))
                if minMult > mult:
                    minMult = mult


            mult[i][j][0] = minMult

    return mult[1][n][0]
```

$O(n^3)$

Memoization

ممکن است همه جا قابل اعمال نباشد، اما اگر کار کند، مرتبه نمایی را به مرتبه زمانی چند جمله ای تبدیل می کند.

مختص مسائل بهینه سازی

استفاده از زیر مسئله های بهینه

روش memoization از بالا به پایین عمل می کند

ذخیره نتایج زیر مسئله در حافظه

Matrix Chain

```
# with memoization
mult = [[]*(n+1)]*(n+1)
for i in in range(n):
    for j in range(n):
        if i == j:
            mult[i][j] = 0
        else:
            mult[i][j] = +infinity


matrixMinMult(i, j):
    if i >= j:
        return 0

    if mult[i][j] < +infinity:
        return mult[i][j]

    minMult = +infinity

    for k in range(i+1, j):

        mult = matrixMinMult(i, k-1) + matrixMinMult(k, j) +
               firstDimension(M(i))*firstDimension(M(k))
                                     *secondDimension(M(j))

        if minMult > mult:
            minMult = mult

    mult[i][j] = minMult
    return minMult


print(matrixMult(1, n))
```

$O(n^3)$

گراف ها **Graph**

$G(V, E) \rightarrow E \subseteq V \times V$

1. *Directed* جهت دار

   Max $E = |V|^2$

2. *Indirect* بی جهت

   Max $E = \frac{|V|^2 - |V|}{2} + |V|$

1. *Sparse Graph* خلوت

   $|E| \ll |V|^2$
2. *Dense Graph* پُر

   $|E| \sim Max|E|$

روش های نمایش گراف:

۱. ماتریس مجاورت $Adjacency\ Matrix$ مناسب برای *Dense* $O(1)$

$M_{u \times v}: \forall(u, v) \in E \rightarrow M[u, v] = 1$

$else: M[u, v] = 0$

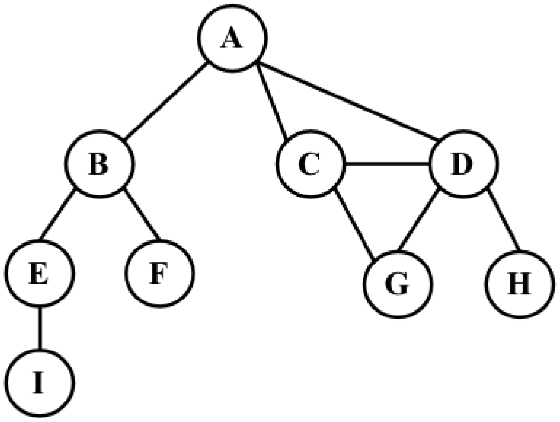
مقدار حافظه لازم $O(|V|^2)$

-برای گراف وزن دار:

$M_{u \times v}: \forall(u, v) \in E \rightarrow M[u, v] = w_{u,v}$

$else: M[u, v] = +\infty$

۲. لیست مجاورت $Adjacency\ List$ مناسب برای *Sparse* $O(1)$



A	B C D
B	A E F
C	A D G
D	A C G H
E	B I
F	B
G	C D
H	D
I	E

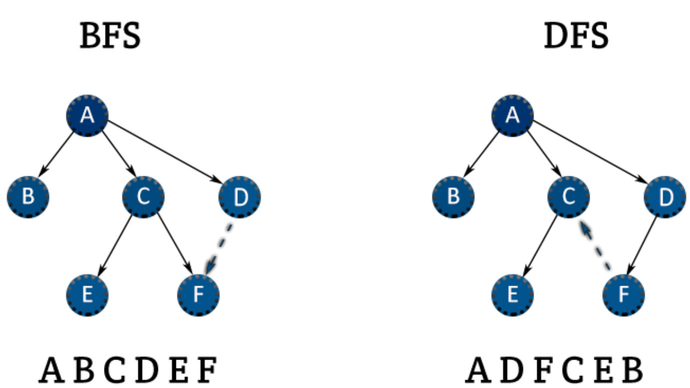
مقدار حافظه لازم:

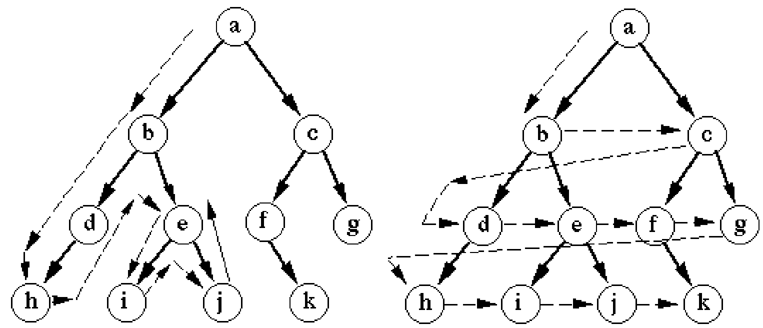
$$O(|V|+|E|) \rightarrow \begin{cases} O(|V|)\ best \\ O(|E|)\ \text{worst} \end{cases}$$

نکته: لیست مجاورت برای گراف *Dense* مناسب نیست چون هزینه حافظه یکسانی با ماتریس مجاورت دارد ولی سرعت $O(V)$ کمتری بدلیل سرچ دارد.

نکته: لیست مجاورت برای گراف *sparse* مناسب تر است چون با سرعت یکسان $O(1)$ حافظه کمتری استفاده می کند $O(V)$.

انواع جستجو *search* در گراف ها





Depth-first search   Breadth-first search

1. *BFS*

   Breath first search جستجوی-سطح اول

```
BFS(Graph g):
    q = Queue()
    q.empty()

    for v in g:
        visited[v] = False

    q.enqueue(source(g)) # source is the start point of search
    visited[source(g)] = True

    while not q.isEmpty():
        # finish time
        u = q.dequeue()
        visited[u] = True

        for v in adjacent(u):
            if not visited[v]:
                # discovery time
                q.enqueue(v)
                father[v] = u
                visited[v] = True
```

Order: $O(v^2)$ ماتریس مجاورت

$O(E+V)$ لیست مجاورت

2. DFS

Depth first search جستجوی-عمق اول

```
DFS(Graph g):
    ss = Stack()
    ss.empty()

    for v in g:
        visited[v] = False

    ss.push(source(g)) # source is the start point of search
    visited[source(g)] = True

    while not ss.isEmpty():
        # finish time
        u = ss.pop()
        visited[u] = True

        for v in adjacent(u):
            if not visited[v]:
                # discovery time
                ss.push(v)
                father[v] = u
                visited[v] = True
```

Order: $O(v^2)$ ماتریس مجاورت

$O(E+V)$ لیست مجاورت

Recursive function for DFS

```
DFS(Graph g):
    visited[s] = True
    # discovery time(s)
    for v in adjacent(s):
        if not visited[v]:
            father[v] = s
            DFS(v)
    # finish time(s)
```

Print Path (for both search methods)

```
path(node):
    if node == s:
        print(s)
        return

    path(father(node))
    print(node)
```

نکته: تعداد گره های قابل دسترسی توسط یک گره خاص:

$$n = \frac{f - d - 1}{2}$$

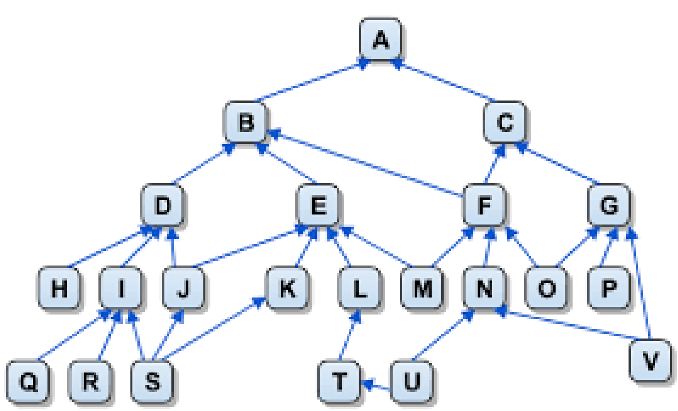
f: finish time

d: discovery time

نکته: *order* های زمانی *DFS* و *BFS* باهم برابر $O(b^d)$ است. ولی *DFS* اردر حافظه کمتری $O(bd)$ دارد.

DAG (*Directed acyclic graph*)

گراف جهت دار بدون دور(مثل دروس پیش نیاز و هم نیاز)



Topological ordering

ترتیبی از بیان رئوس *DAG* که ترتیب پیش نیاز در آن حفظ شود.

برای این کار روی *finish time* هر راس *sort* نزولی میزنیم.

Shortest path کوتاه ترین مسیر

1.single source shortest path $O(n^3) = O(V^3)$

from A to destination (shortest path)

2.all pairs shortest path $O(n^3) = O(V^3)$

find distance of all pairs of sources

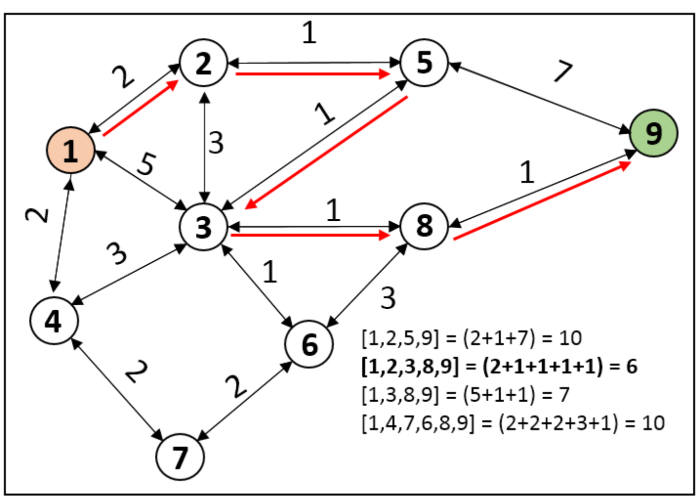
در این الگوریتم ها می توان یال منفی داشت ولی دور منفی نمیتوان داشت.(چون در حلقه بی انتها می افتیم)

$\forall v_i, v_j, E_{i,j} \in E: W_{ij} = 1 \Rightarrow BFS$ در گراف بدون وزن

Dijkstra Algorithm: این الگوریتم یال منفی نیز نمی تواند داشته باشد

for single source shortest path

Order: $O(V \times E) = O(V^3)$



```
Dijkstra(Graph s):
    solved = [s]

    while solved != v: # O(V)
        (i,j) = min{w(u,v)| u in solved and v not in solved} # O(v^2)

        d[j] = w[i, j]

        solved = solved union {j}

        for any k | (j,k) in E and k not in solved: # O(E)
            w[j,k] = w[i,j] + w[j,k]


    return d
```

یافتن کوتاه ترین مسیر از i به j با حداکثر k یال

$$W_{ij}(k) = Min\left(W_{ij}(k-1), Min\left(W_{iu}(1) + W_{uj}(k-1)\right)\right)$$

- *Floyd warshall* با گذشتن از راس های ۱ تا k

$$W_{ij}(k) = Min\left(W_{ij}(k-1), W_{ik}(k-1) + W_{kj}(k-1)\right)$$

$$O(n^3)$$

Red-Black Tree

۱. هر گره یا قرمز است یا سیاه.
۲. هر برگ *null* و سیاه است.
۳. دو فرزند یک گره قرمز سیاه هستند.
۴. هر مسیر ساده از گره به فرزند(نه لزوما فرزند مستقیم) شامل تعداد یکسانی گره سیاه است.
۵. ریشه درخت سیاه است (این شرط اصلی نیست)
۶. حتما خاصیت *BST* را داراست.

حداکثر ارتفاع یک درخت قرمز سیاه که دارای n گره داخلی است برابر $2\lg(n+1)$

زیر درخت با ریشه دلخواه x حداقل دارای $2^{bh(x)}-1$ گره داخلی است.

$$2^{blackHeight(x)}-1<n \rightarrow blackHeight(x)<\lg(n+1)$$

$$h=2\ blackHeight(x)<2\lg(n+1)$$