



۱. ارتباط ورودی - خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت زیر است.

$$y[n] = \begin{cases} -x[n] & \text{if } x[n] \geq x[n-2] \\ x[1-n] & \text{if } x[n] < x[n-2] \end{cases}$$

(آ) پاسخ این سیستم به ورودی  $x[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$  را محاسبه کنید.

(ب) دو خاصیت حافظه‌دار بودن و خطی بودن را برای این سیستم اثبات کرده یا با آوردن مثال نقض رد کنید.

۲. (آ) یک سیستم LTI زمان گسسته علی با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

به ازای ورودی  $x[n]$  توان متوسط خروجی این سیستم،  $y[n]$  را حساب کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{if } n \text{ is even} \\ 2 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

(ب) تابع تبدیل سیستم فوق را مشخص نموده و ناحیه همگرایی آن را تعیین نمایید.

(ج) معادله‌ی تفاضلی مربوط به پاسخ فرکانسی زیر را بدست آورید. همینطور تبدیل  $z$  آن را به دست آورید.

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \frac{e^{-j\omega}}{(1 - 0.5e^{-j\omega} + 1)(1 + 0.25e^{-j\omega})}$$

(د) معادله‌ی تفاضلی مربوط به پاسخ ضربه‌ی زیر را بدست آورید.

$$h[n] = \delta[n] + 2(0.5)^2 u[n] + (-0.5)^n u[n]$$

۳. سیستم زمان پیوسته زیر را در نظر بگیرید.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} e^{-4|t-\tau|} x(\tau-2) d\tau$$

(آ) پاسخ ضربه‌ی این سیستم را بدست آورید.

(ب) علی بودن و پایداری سیستم را بررسی کنید.

۴. فرض کنید اطلاعات زیر را در مورد سیگنال زمان پیوسته  $x(t)$  داریم.  $x(t)$  را بیابید.

- $x(t)$  یک سیگنال حقیقی است.
  - $x(t)$  متناوب با دوره تناوب  $T = 6$  است. همینطور ضرایب سری فوریه آن را  $a_k$  در نظر بگیرید.
  - ضرایب سری فوریه به ازای مقادیر  $k = 0$  و  $k > 2$  برابر  $a_k = 0$  است.
  - $x(t) = -x(t - 3)$
  - $\frac{1}{6} \int_{-3}^3 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$
  - $a_1$  یک عدد حقیقی و مثبت است.
۵. یک سیستم LTI با تابع تبدیل  $H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{8}z^{-3}}$  داده شده است. می‌دانیم  $h(t)$  سمت راستی است.
- (آ) نمودار صفر-قطب را رسم و ناحیه‌ی همگرایی را مشخص کنید.
  - (ب) در مورد علی بودن و پایداری سیستم با آوردن دلیل اظهار نظر کنید.
  - (ج) معادله‌ی تفاضلی که رابطه‌ی بین ورودی و خروجی این سیستم را نشان می‌دهد به دست آورید.
  - (د) پاسخ سیستم به ورودی  $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$  را به دست آورید.
  - (ه) پاسخ سیستم به ورودی  $x_1[n] = 2^n \cos(\pi n)$  را به دست آورید.
۶. یک سیستم زمان گسسته با ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  را در نظر بگیرید. ارتباط تبدیل فوریه سیگنال‌های ورودی و خروجی توسط رابطه‌ی زیر توصیف شده است:
- $$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$
- (آ) آیا این سیستم خطی است؟ توضیح دهید.
  - (ب) آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ توضیح دهید.
  - (ج) پاسخ این سیستم به ورودی  $x[n] = \delta[n]$  چیست؟
۷. تابع تبدیل یک سیستم LTI زمان پیوسته به صورت  $H(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+4)}$  با ناحیه همگرایی  $-4 < \text{Re}[s] < 3$  است. به سوالات زیر با ذکر دلیل پاسخ بدهید.
- (آ) آیا این سیستم پایدار است؟ (راهنمایی: شرط پایداری وجود محور  $j\omega$  درون ناحیه همگرایی است.)
  - (ب) آیا این سیستم علی است؟ (راهنمایی: شرط علیت دست راستی بودن پاسخ ضربه سیستم است.)
  - (ج) مقدار  $\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)dt$  را بدست آورید.
  - (د) از روی رابطه‌ی تابع تبدیل پاسخ فرکانسی سیستم را  $(\mathcal{F}(h(t)))$  بیابید.
  - (ه) پاسخ این سیستم به کدام یک از ورودی‌های  $x_1(t) = e^t u(t)$  و  $x_2(t) = e^{-t} u(-t)$  مطلقاً انتگرال پذیر است؟
۸. یک فیلتر FIR با پاسخ ضربه  $h[n]$  و تابع تبدیل  $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$  مفروض است. می‌دانیم  $h[n]$  سیگنالی حقیقی بوده و در بازه  $n < 0$  و  $n \geq N$  برابر با صفر است. اگر  $h[n] = h[N - 1 - n]$  باشد. آنگاه فاز تبدیل این فیلتر که به صورت زیر است را بر حسب  $a$ ،  $b$  و  $c$  بدست آورید.

$$\theta(\omega) = (aN + b)\omega + c$$