

گزارش کار پروژه دوم درس سیگنال ها و سیستم ها

امیرمهدی انصاری پور

شماره دانشجویی: 810198358

قسمت اول: Dot product

A)

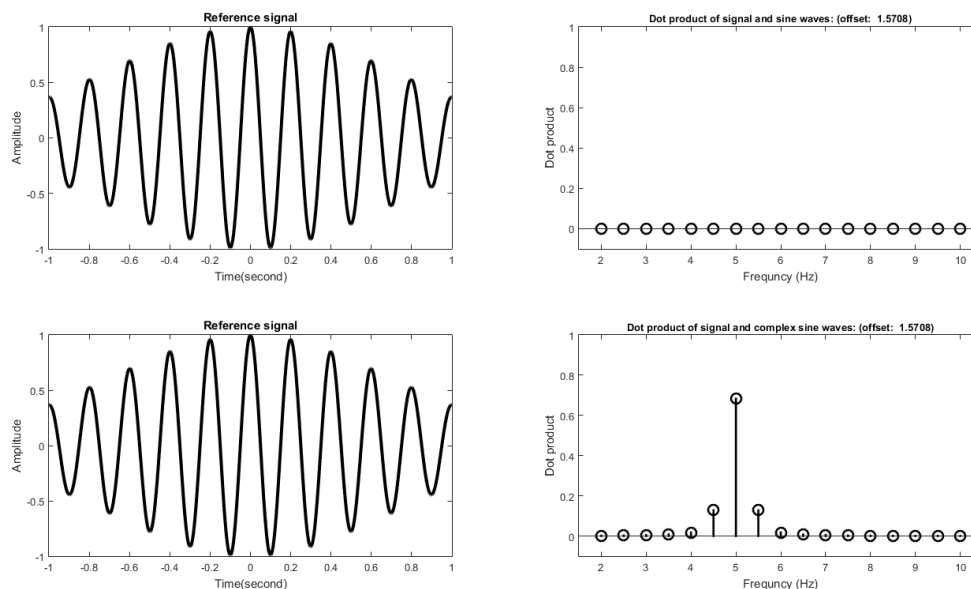


Figure 1-a: First row: output of $\sin(2\pi t + \pi/2)e^{-t^2} \cdot \sin(2\pi f t)$

Figure 1-b: Second row: output of $\sin(2\pi t + \pi/2)e^{-t^2} \cdot e^{-i2\pi f t}$

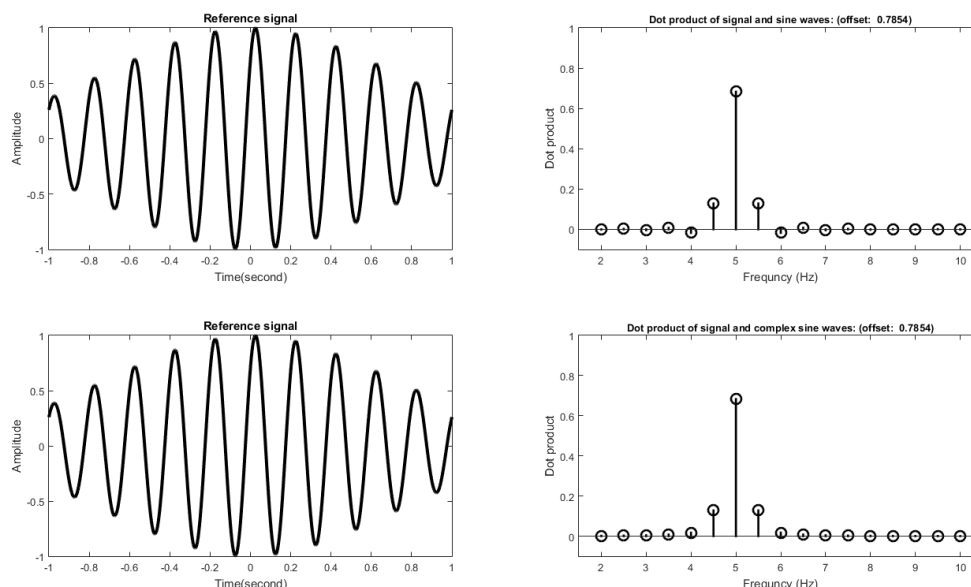


Figure 2-a: First row: output of $\sin(2\pi t + \pi/4)e^{-t^2} \cdot \sin(2\pi f t)$

Figure 2-b: Second row: output of $\sin(2\pi t + \pi/4)e^{-t^2} \cdot e^{-i2\pi f t}$

(B) همانطور که دیده میشود، حاصل ضرب داخلی سیگنال سینوسی ساده (به ازای θ در $\pi/2=$) در سیگنال رفرنس صفر شده. از این رو این سیگنال برای بررسی شباهت مناسب نیست.

(C) پس از انتخاب سیگنال نمایی مختلط، میتوان پی برد که $f = 5\text{Hz}$ فرکانسی است که به ازای آن حاصل dot با reference signal بیشینه شده. نکته جالب این است که این عدد همان فرکانس سیگنال مرجع نیز می باشد.

قسمت دوم: Implementing DTFT

برای این قسمت تابعی بنام fourier پیاده سازی کردیم که 3 ورودی میگیرد: سیگنال،

زمان، ضریب تصحیح (بخش B).

(A) سیگنال $\sin(2\pi t + \pi/4)e^{-t^2}$:

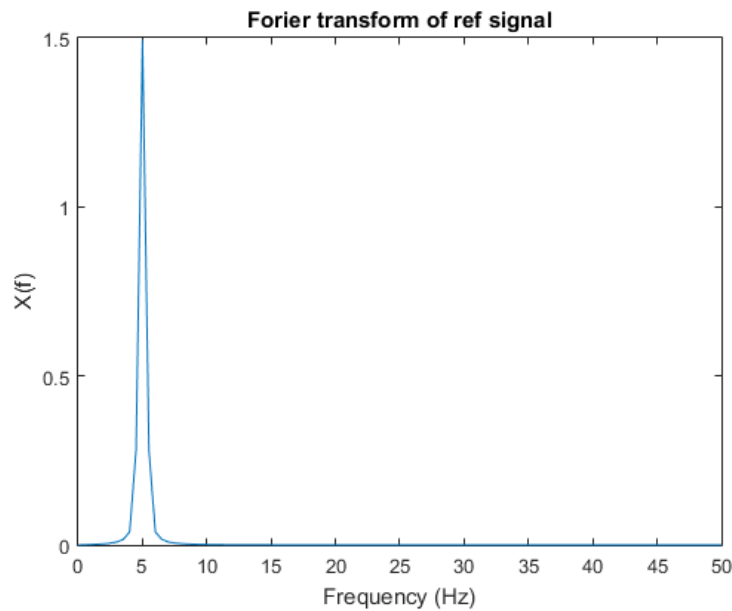
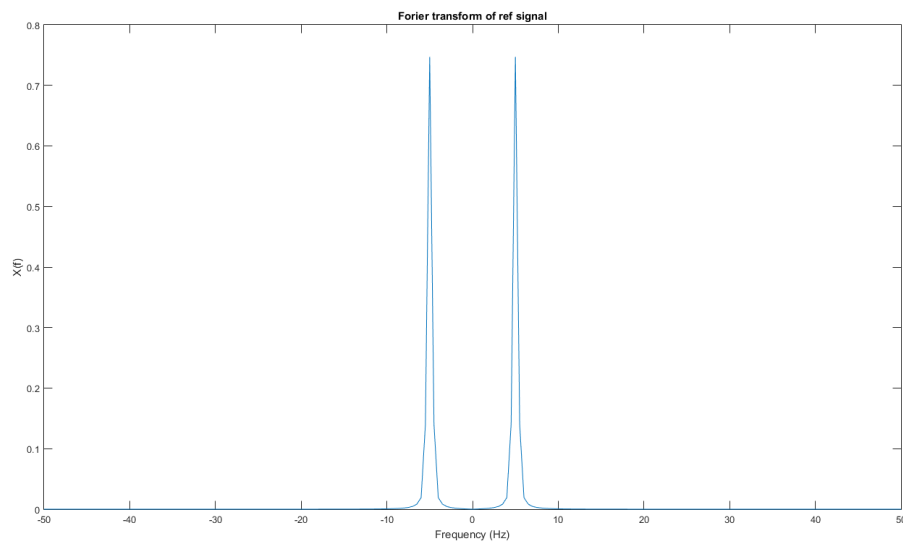


Figure3-a: ضرایب سری فوریه برای هر دو رنج فرکانس

ضرایب سری فوریه فقط برای فرکانس های مثبت (ضریب تصحیح اول): Figure3-b:

از آنجا که ضرایب سری فوریه نسبت به محور $f=0$ قرینه هستند، میتوان تنها یک رنج فرکانسی (مثبت) را در نظر گرفت، اما برای آنکه اثر ضرایب فرکانس های منفی از بین نرود، باید C_n های به ازای $n > 0$ را x_2 کنیم (Figure3-b).

ضریب تصحیح دوم نیز که طبق متن پروژه برابر npts است (برای وابسته نبودن $X(f)$ به تعداد نقاط نمونه برداری).

(B) سیگنال $1.5 + 2.5 * \sin(2\pi t)$:

همانطور که گفته شد، در نمایش سوم تبدیل فوریه، تمامی C_n های مثبت را x_2 میکنیم تا اثر قرینه آن ها در سمت منفی محور فرکانس از بین نرود. اما در مورد $X[f = 0]$ باید دقت بیشتری خرج دهیم. از آنجا که این ضریب قرینه ندارد و فقط یکبار لحاظ میشود، ضرب در 2 کردن آن اشتباه است. پس ضریب تصحیح سوم بصورت زیر تعریف میشود:

$$\text{if } X[f = 0] > 0: X[f=0] = X[f = 0]/2;$$

اعمال شدن این ضریب در figure-4-b نمایش داده شده است.

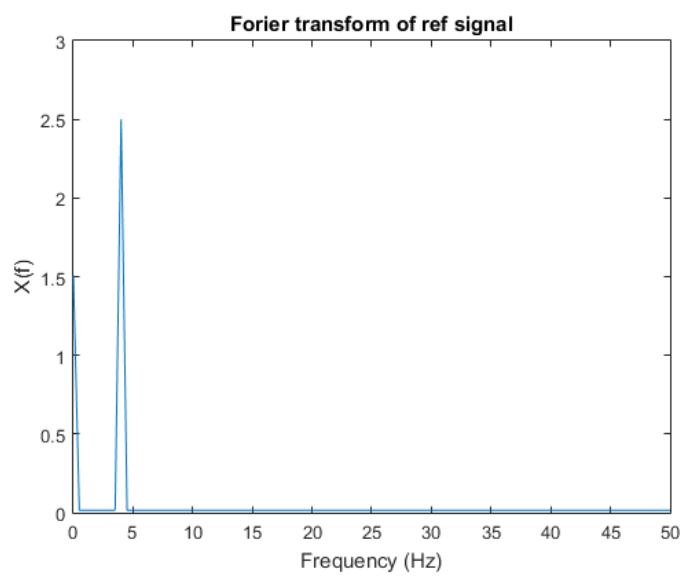
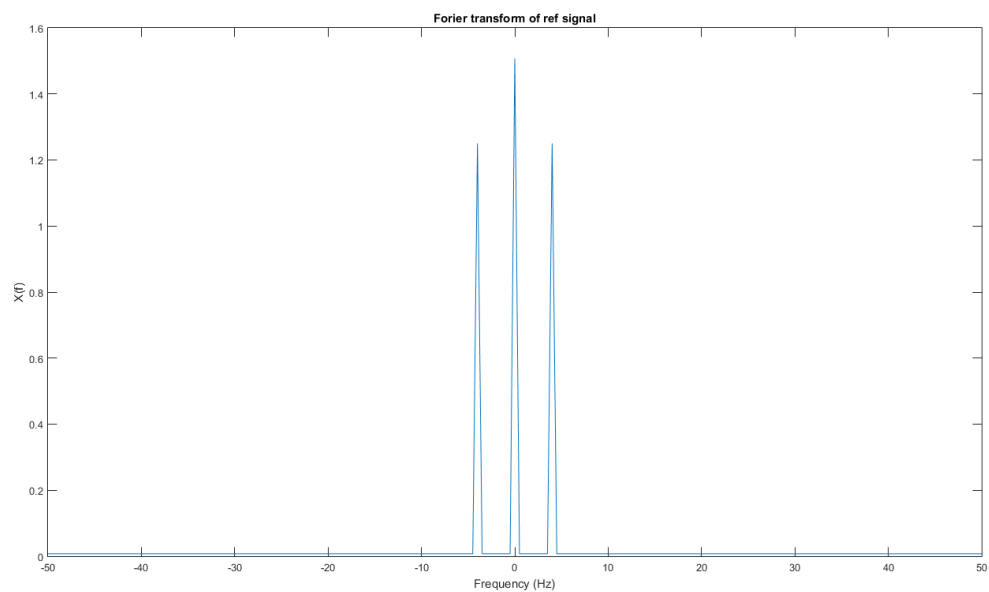


Figure4-a: ضرایب سری فوریه برای هر دو رنج فرکانس

Figure4-b: ضرایب سری فوریه فقط برای فرکانس های مثبت و اعمال ضریب تصحیح سوم

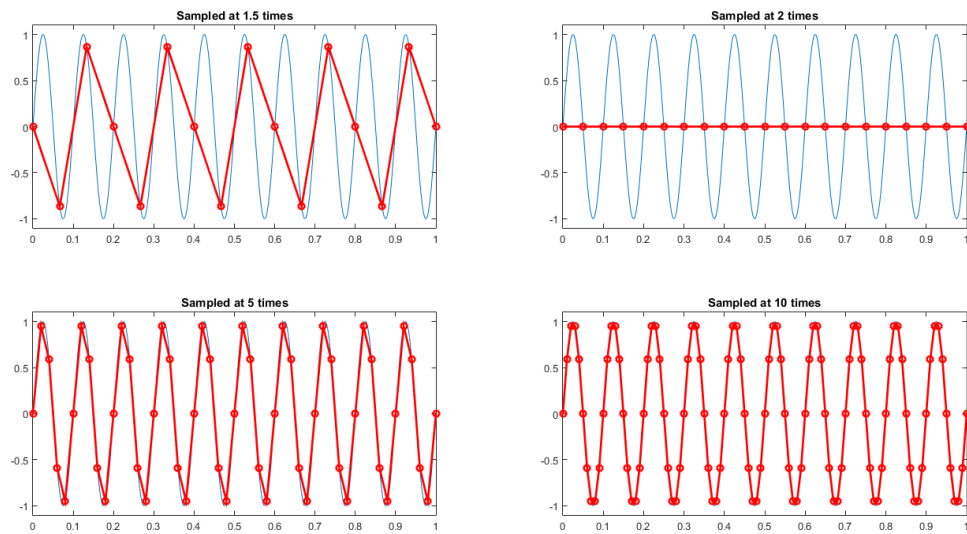
قسمت سوم: What is aliasing, how to avoid it

برای این قسمت دو تابع تعریف شده است. `plot_sampled` که مربوط به نمایش سیگنال

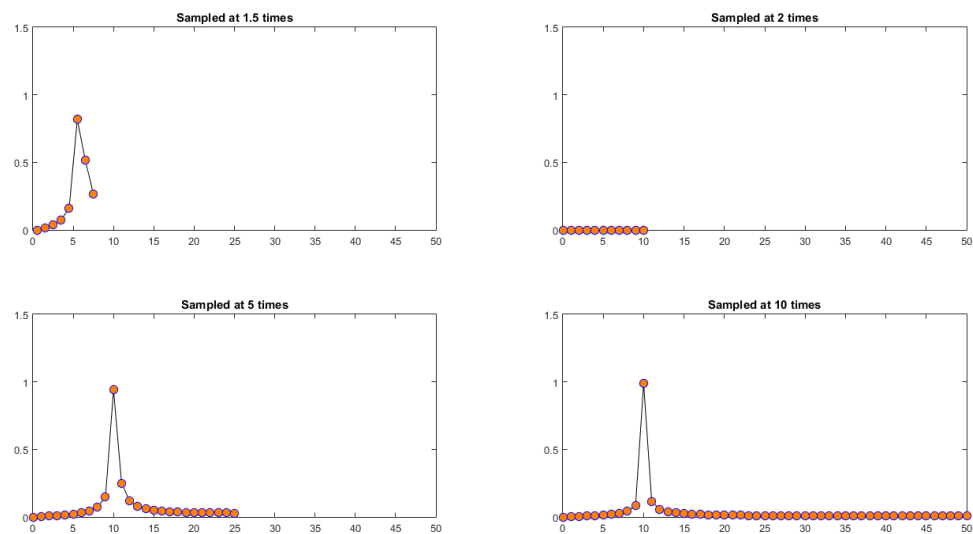
های گسته نمونه برداری شده از سیگنال اصلی است (بخش الف)، و تابع

`plot_sampled_fourier` که وظیفه اش رسم تبدیل فوریه سیگنال های بخش الف است.

Time Domain



Frequency Domain



سیگنال های گسسته نمونه برداری شده (با رنگ قرمز): Figure 5:

تبدیل فوری سیگنال های گسسته بخش الف: Figure 6:

طبق قضیه نایکوئیست، برای آنکه بتوانیم از یک سیگنال پیوسته نمونه گیری کنیم، حداقل فرکانس نمونه گیری باید دو برابر فرکانس سیگنال پیوسته باشد. همانطور که در Figure 5 مشاهده میشود، سیگنال پیوسته $\sin(20\pi t)$ می باشد (فرکانس 10 هرتز). در تلاش اول با $sr = 15$ سیگنال بازپایی شده مناسب نیست. در تلاش دوم با $sr = 20$ اگر چه شرط نایکوئیست را رعایت کردیم، اما نقطه شروع نمونه برداری ما اشتباه است (همچنین sr مضرب دوره تناوب سیگنال است). در تلاش های بعدی با sr های بزرگتر سیگنال بازپایی شده به خوبی سیگنال پیوسته را $cover$ میکند.

قسمت چهارم: Frequency resolution, zero padding

(A) بررسی اثر zero padding بر ضرایب تبدیل فوری:

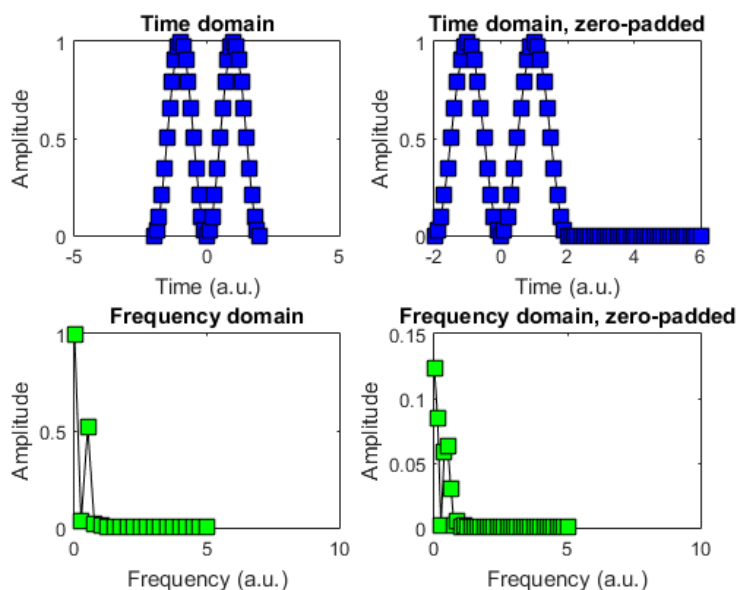


Figure7-a: First column: raw signal and its fourier transform

Figure7-b: Second column: zero-padded signal and its fourier transform

(B) همانطور که دیده میشود، با افزایش تعداد نقاط نمونه برداری (افزودن صفر در مثال فوق)، frequency-resolution کم میشود. یعنی فرکانس هایی که در آن $X(f)$ مقدار بزرگتر از صفر دارد زیاد میشوند اما نسبت به حالت unpadded, دامنه (اندازه) ضرایب با مقدار بیشینه کاهش می یابد.

اندازه ضرایب فوریه در حالت zero-padded کوچکتر از حالت عادی هستند.
رابطه میان پارامتر های frequency_resolution و sampling_rate و npts بصورت زیر است:

$$\text{Frequency_resolution} = \text{sampling_rate} / \text{npts}.$$

(C) بررسی تغییرات sampling rate و npts در frequency_resolution سیگنال ها را بر اساس فرمول مطرح شده در بالا مرتب میکنیم:

$$\text{FR}(s1) > \text{FR}(s3) > \text{FR}(s2)$$

$$s1: \text{sr} = 100 \text{ and interval} = [0 \ 1]$$

$$s2: \text{sr} = 100 \text{ and interval} = [0 \ 10]$$

$$s3: \text{sr} = 50 \text{ and interval} = [0 \ 1]$$

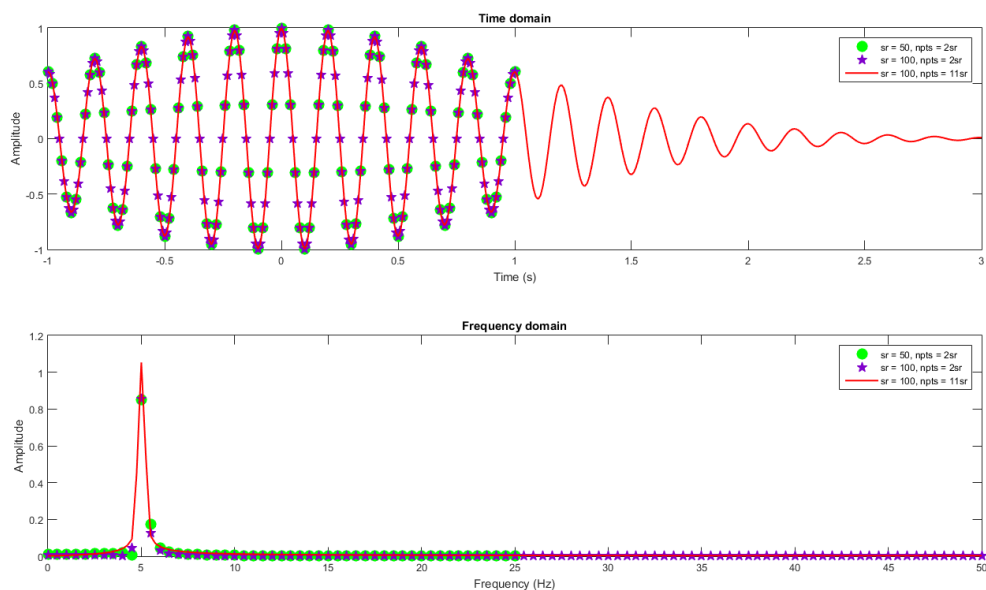


Figure 8: The effect of changing sr and npts on fourier transform

قسمت پنجم: Inverse Discrete Foruier Transform

(A) برای بازیابی سیگنال اصلی از روی تبدیل فوریه، باید سیگنال های پیوسته متناظر با هر ضریب را بدست آوریم و در مرحله آخر آنها را با هم جمع کنیم.

$$x(t) = \text{dot}(X(f_i), e^{i2\pi f_i t_f})$$

(C) با افزودن ضریب α سیگنال در حوزه زمان به اندازه α به سمت چپ شیفست میخورد. در حوزه فرکانس نیز تغییری در اندازه ضرایب سری فوریه رخ نمی دهد. فقط فاز آنها به اندازه α شیفست می خورد.

قسمت ششم: Non-stationary signals

(A) سیگنال Amplitude non-stationary

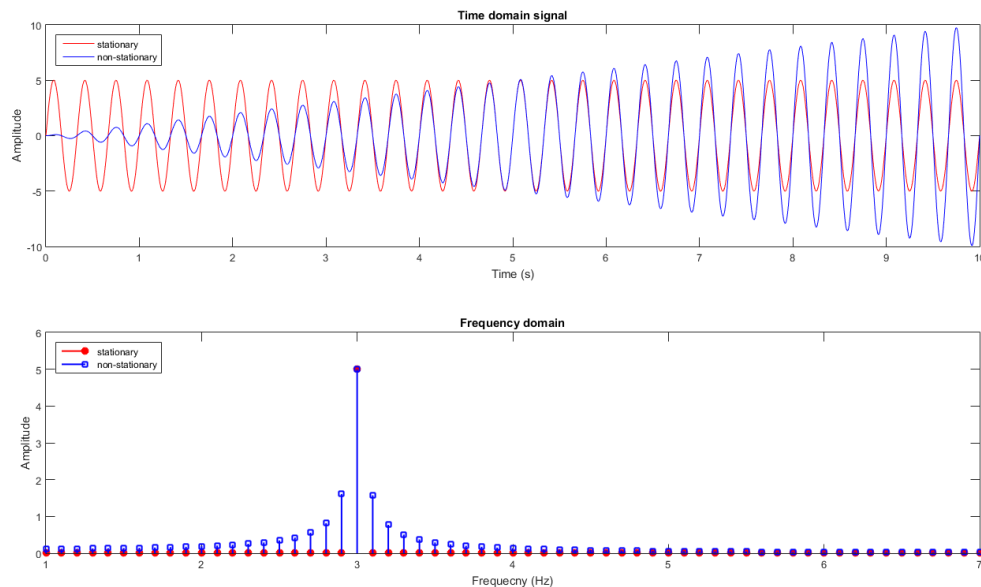


Figure 9: Amplitude non-stationary signal and its fourier transform

همانطور که دیده میشود، با متغیر بودن دامنه سیگنال در حوزه زمان، در حوزه فرکانس شاهد انرژی در فرکانس هایی غیر از فرکانس اصلی سیگنال (3Hz) هستیم. ضرایب فوریه برای signal stationary (قرمز در نمودار پایین) به درستی دامنه سیگنال (5) و فرکانس سیگنال (3Hz) را نشان میدهند، درحالیکه با نگاه کردن به ضرایب فوریه آبی در حوزه زمان نمیتوان اطلاعات دقیقی از x در حوزه زمان داشت.

(B) سیگنال Frequency non-stationary

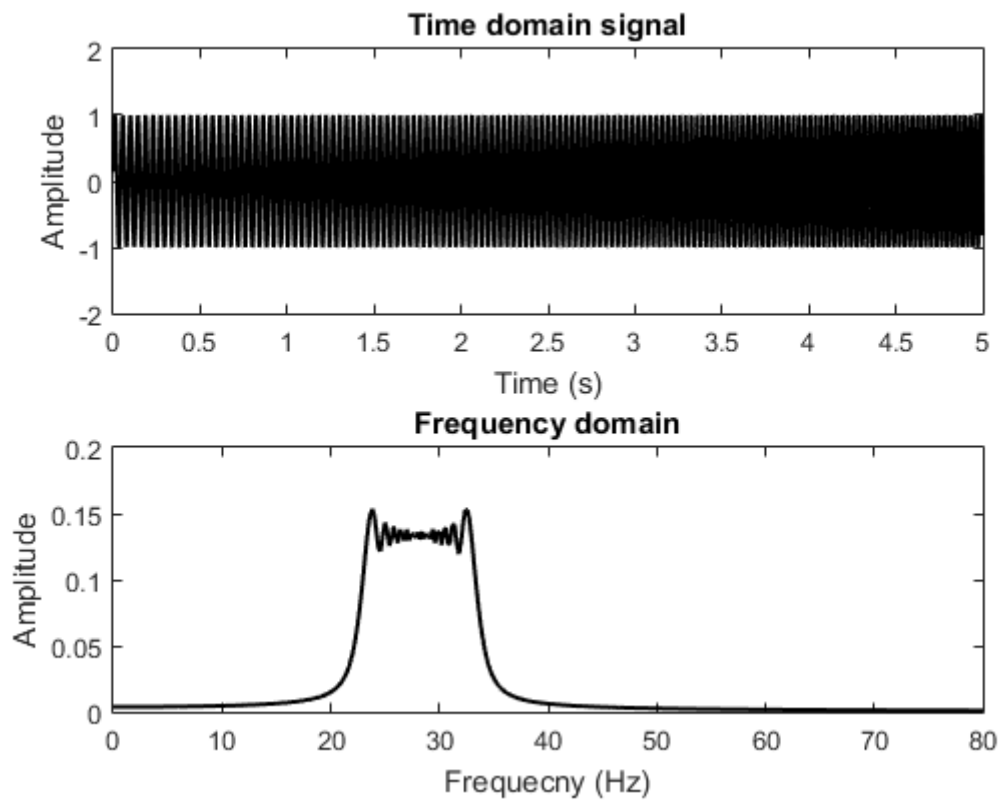


Figure 10: Frequency non-stationary and its fourier transform

همانطور که دیده میشود، در حوزه زمان دامنه سیگنال ثابت و برابر 1 است. اما در حوزه فرکانس دامنه ضرایب همگی حدود 0.13 است. پس با مشاهده ضرایب فوریه این سیگنال نمیتوان به درستی سیگنال را در حوزه زمان تفسیر کرد.

(D) سیگنال Sharp transition

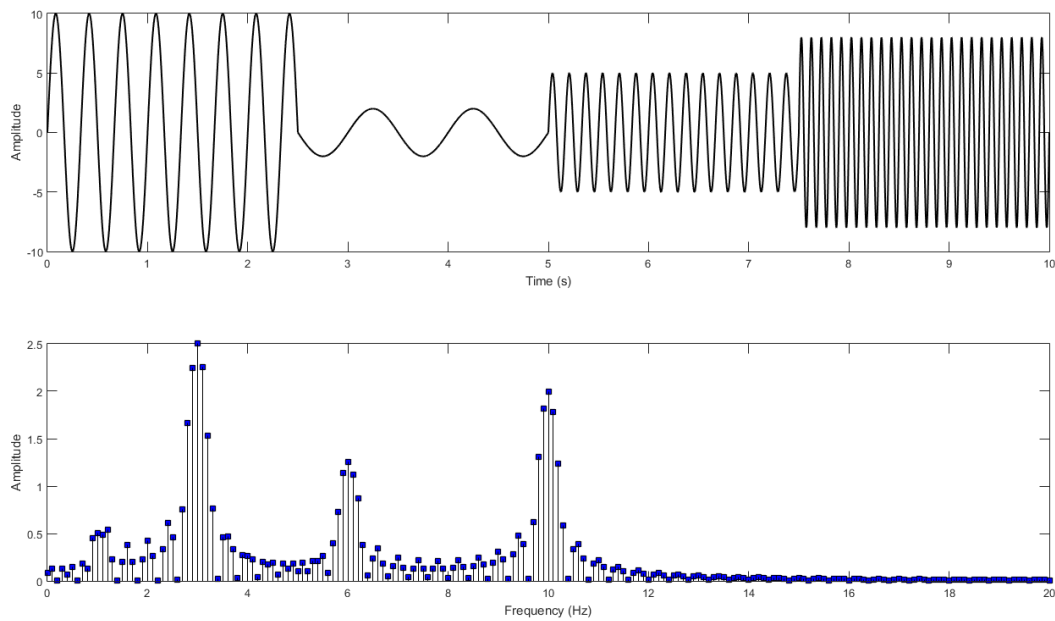


Figure 11: Sharp transition signal and its fourier transform

همانطور که دیده میشود، در این حالت به تعداد زیادی ضرایب فوریه غیر صفر داریم. با این حال، شاهد پیک در فرکانس های هر کدام از segment ها (1,3,6,10 هرتز) در حوزه فرکانس هستیم.

C) سیگنال Phase revered

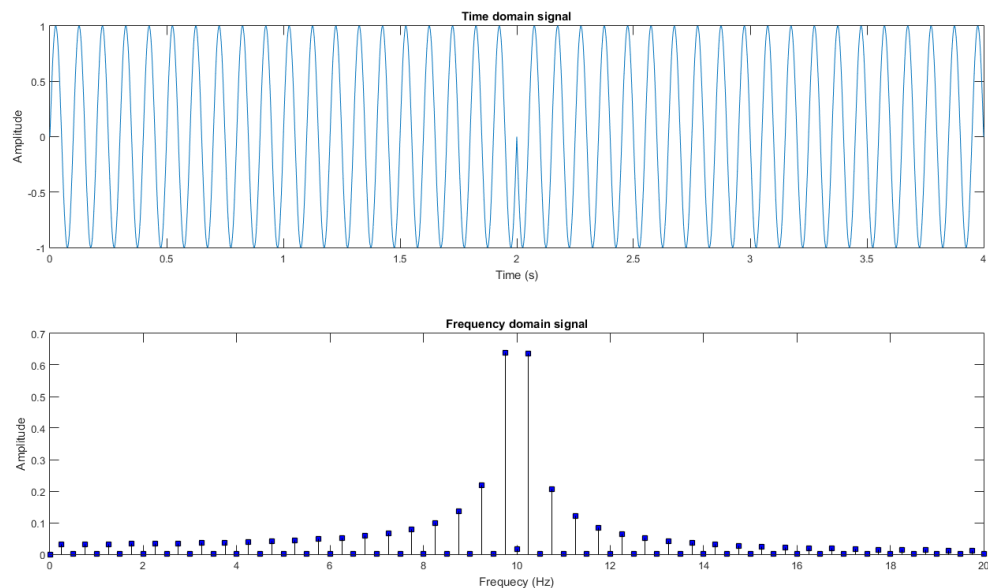


Figure 12: Phase reversed signal and its fourier transform

همانطور که دیده میشود، مقدار Xf در $f = 10$ که تنها فرکانس اصلی سیگنال برابر صفر است (سیگنال فرکانس و دامنه ایستا هست). دلیل این موضوع آن است که فاز های دو segment این سیگنال قرینه همد و یکدیگر را خنثی میکنند. در نتیجه در حوزه فرکانس برای $f = 10$ انرژی نخواهیم داشت.

(E) سیگنال Edge-affected

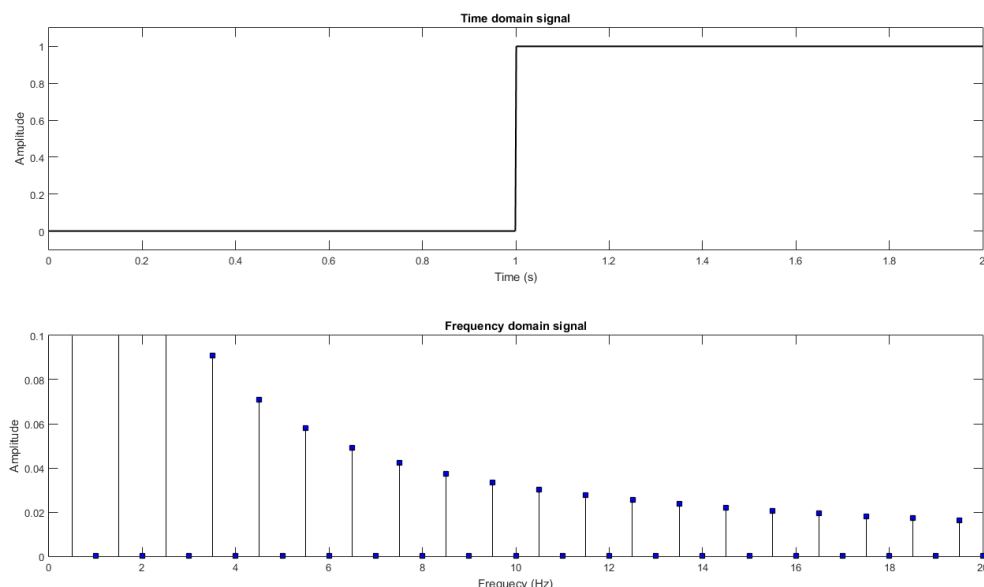


Figure 13: adding sharp-edge and viewing its effect

با دیدن ضرایب سری فوریه متوجه می شویم که در فرکانس های صحیح، انرژی سیگنال صفر میشود. با این حال اگر به یک سیگنال ایستا sharp edge اضافه کنیم، باز میتوان اطلاعاتی در مورد آن یافت. برای مثال سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = 0.1 * \sin(6 * \pi * t) + u(t - 1)$$

در واقع به سیگنال ایستای سینوسی با دامنه 0.1 و فرکانس 3 یک تابع پله افزودیم. با نگاه کردن به ضرایب فوریه متوجه میشویم که ضریب فوریه $f = 3$ با دامنه 0.1 بطور خطی به حوزه زمان افزوده شده. پس تا حدودی میتوان اطلاعاتی در مورد سیگنال اصلی یافت، اما همچنان تفسیر کامل سیگنال در زمان ممکن نیست.

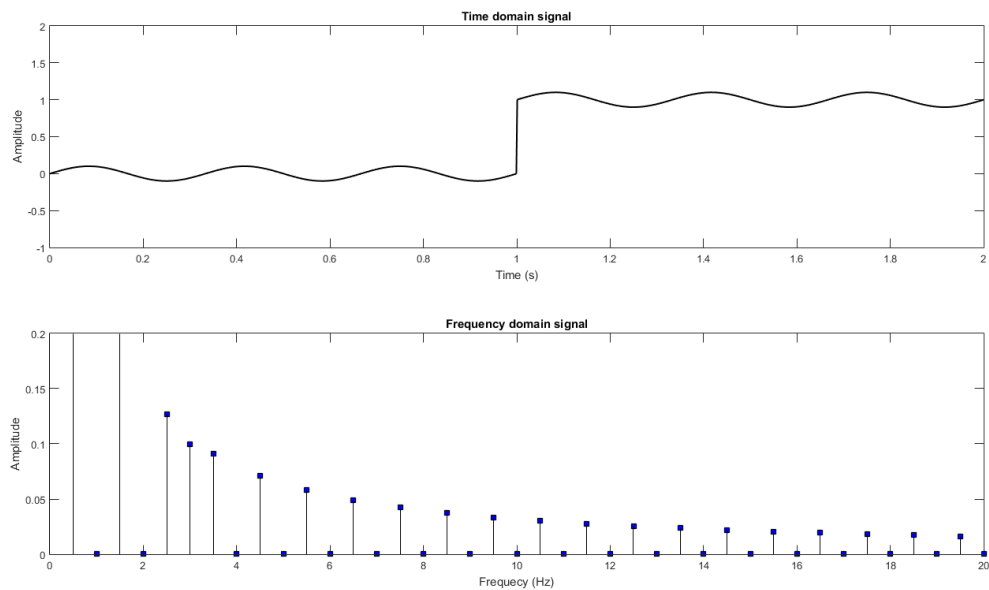
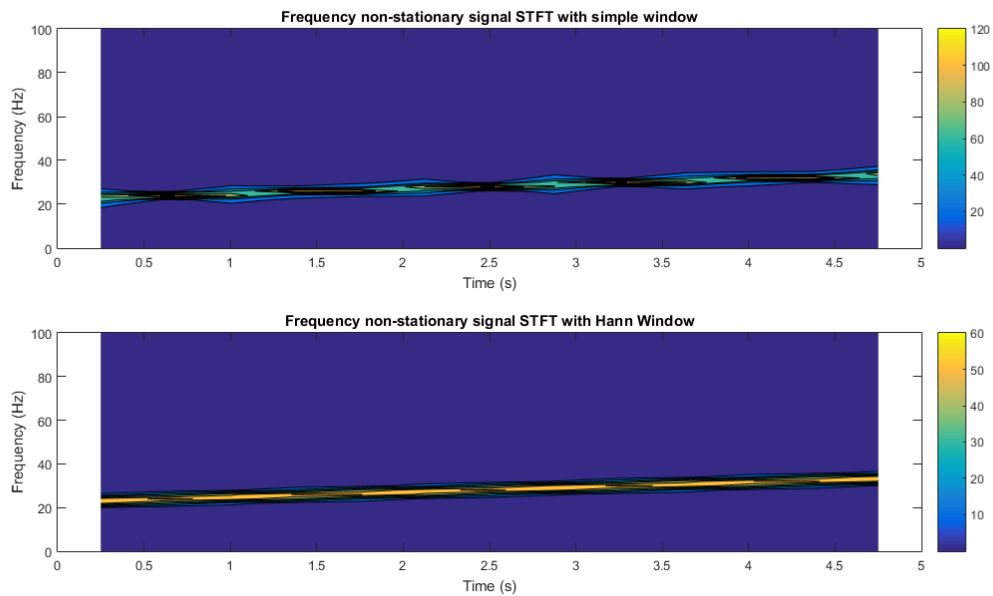


Figure 12: adding edge to a stationary signal and viewing its results

قسمت هفتم: Short time fourier transform

همانطور که دیده شد، تبدیل فوریه سیگنال های نایستا مشکلاتی داشت و بخوبی نمی توانست سیگنال را در حوزه زمان تفسیر کند. بنابراین از روش stft و تکنیک هایی مانند پنجره هان و ست کردن مقدار درست step size , window استفاده میکنیم.

(A) استفاده از stft برای سیگنال frequency non-stationary :



(B) استفاده از stft برای سیگنال sharp-transission :

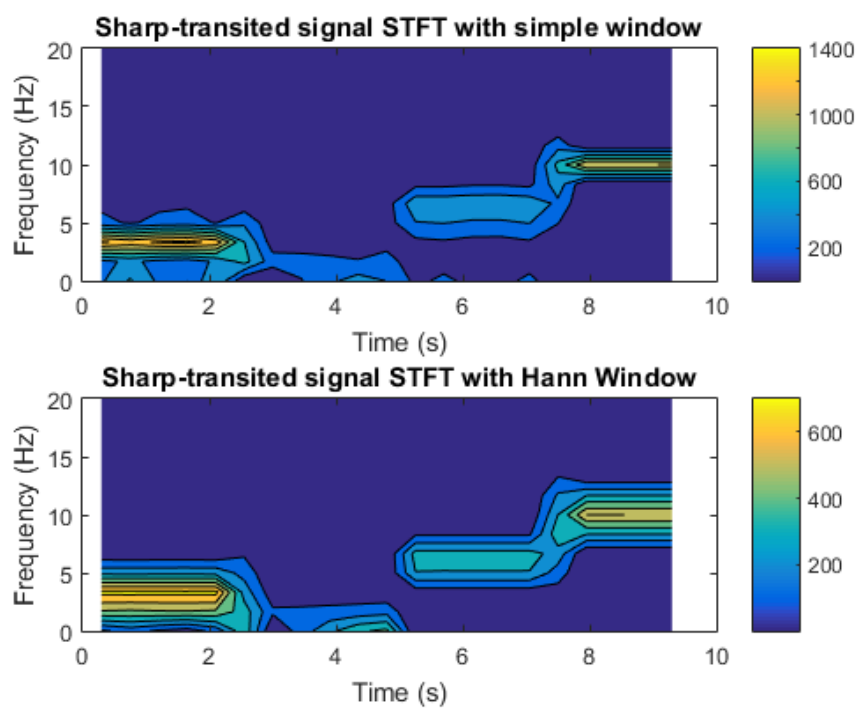
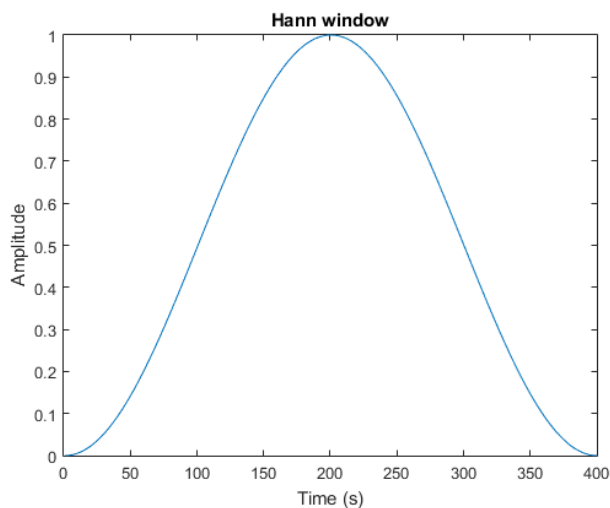


Figure 14-a: stft for a shift-transited signal (rectangular window)

Figure 14-b: stft for a shift-transited signal (Hann Window)

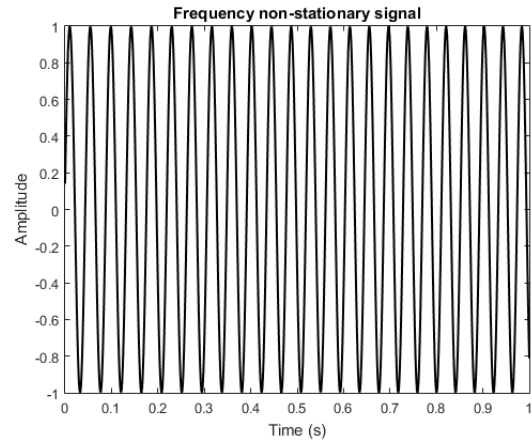
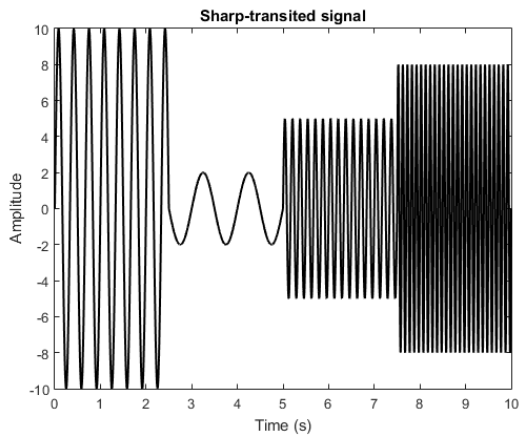
همانطور که دیده میشود، در حالت simple window، بدلیل وجود تابع ضربه در ابتدا و انتهای هر پنجره، تبدیل فوریه حالت spiked یا sharpened دارد. اما Hann Window خروجی را smooth میکند و sharp edge effect را از بین می برد.

(C) ابتدا شکل hann window را بررسی میکنیم:



همانطور که دیده میشود، این پنجره از 0 (ابتدای window) شروع میشود، به 1 می رسد (میانه window) و در انتها هم دوباره به صفر می رسد. به عبارت دیگر، مقادیر میانی سیگنال non-stationary در پنجره دست نخورده باقی می ماند، ولی مقادیر ابتدا و انتهای پنجره به صفر میل میکنند. حال چنانچه سیگنال **non-stationary** متناوب باشد و در ابتدا و انتهای هر **window** مقدار صفر داشته باشد، استفاده از hann window با استفاده از rectangle window (پنجره ساده) تفاوتی نمی کند.

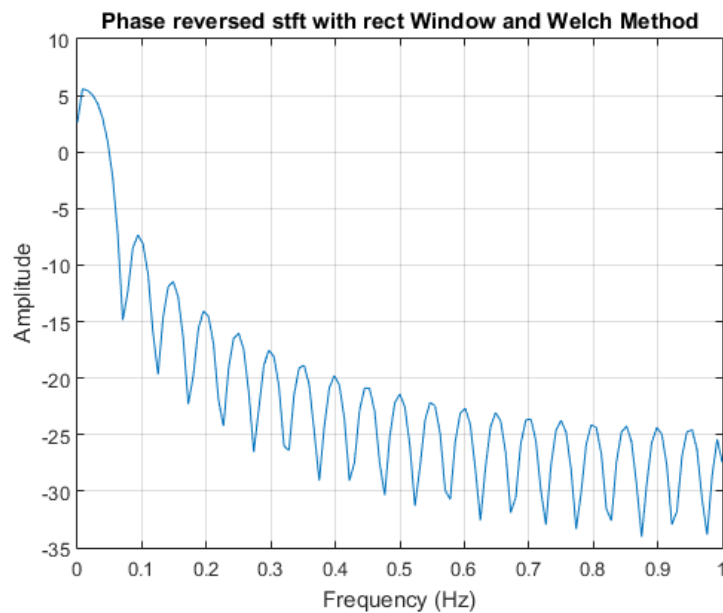
با بررسی دو سیگنال بخش A, B که stft روی آنها اعمال شد:



میتوان متوجه شد که پنجره هان قاعدتا باید تاثیر بیشتری روی سیگنال sharp-transited بگذارد، که با نگاه کردن به خروجی contourf آنها نیز این نتیجه حاصل میشود.

قسمت هشتم: Welch's Method

در روش welch مقدار noverlap (تعداد نقاط overlap بین هر دو پنجره) را صفر میگذاریم. در ضمن تاثیر Hann window را هم لحاظ میکنیم:



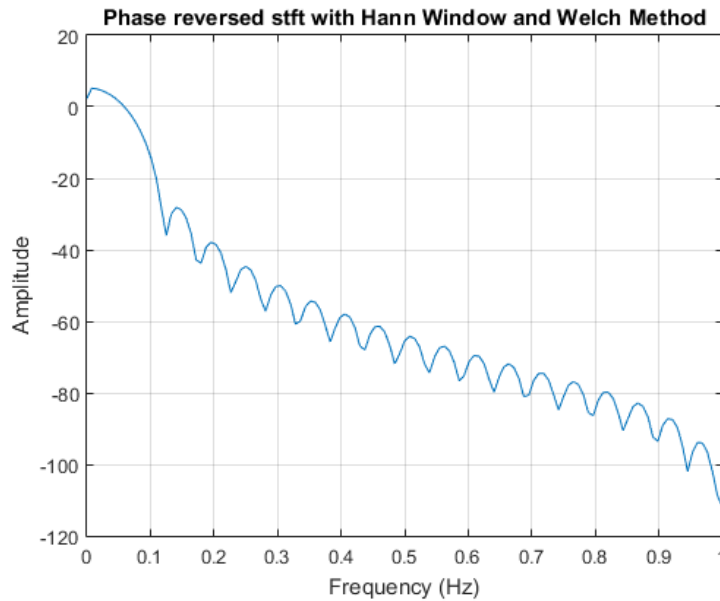


Figure 15-a: Using Welch Method and rect window for phase reversed signal

Figure 15-b: Using Welch Method and Hann Window for phase reversed signal

(B) همانطور که دیده شد، این ویژگی روش Welch که هیچ overlap بین دو پنجره نباید وجود داشته باشد محدودیت بوجود می آورد. در واقع با overlapping بین پنجره ها، ما اجازه نمی دهیم داده ها در فرآیند hann window محو شوند.

بنابراین میتوان گفت استفاده از Welch's Method برای سیگنال های غیر ایستایی که sharp edge یا sharp transission یا بطور کلی نقطه ناپیوستگی دارند، مناسب نیست.

روش stft با انتخاب مناسب window size و overlap percentage و Hann Window تقریباً برای تمام سیگنال های غیر ایستا مناسب است.