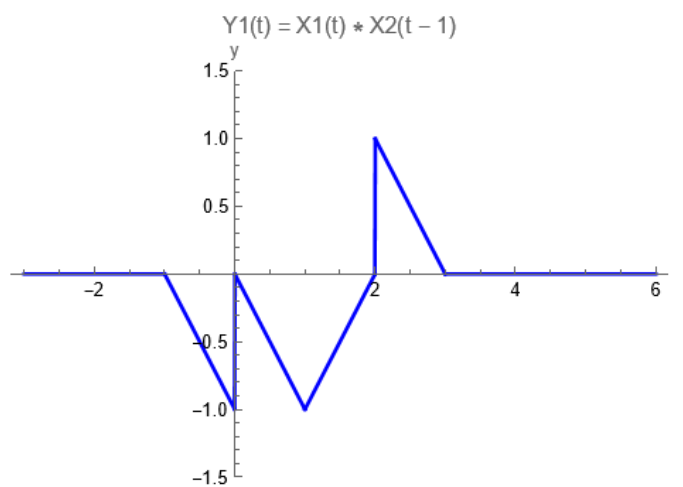
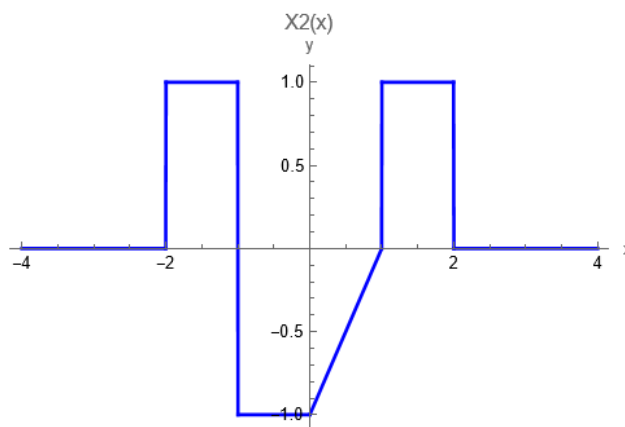
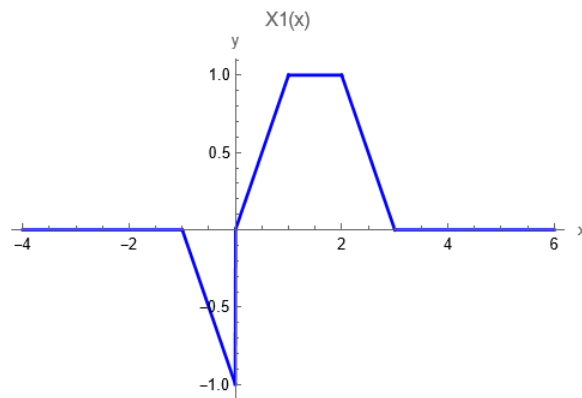
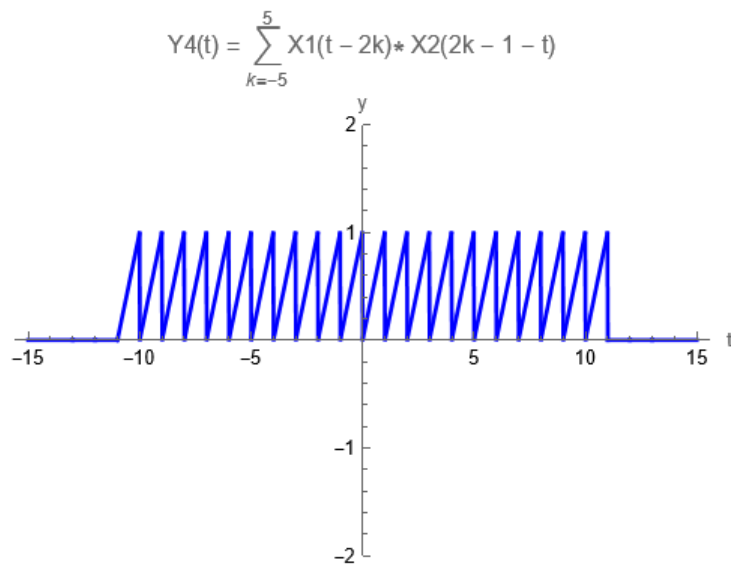
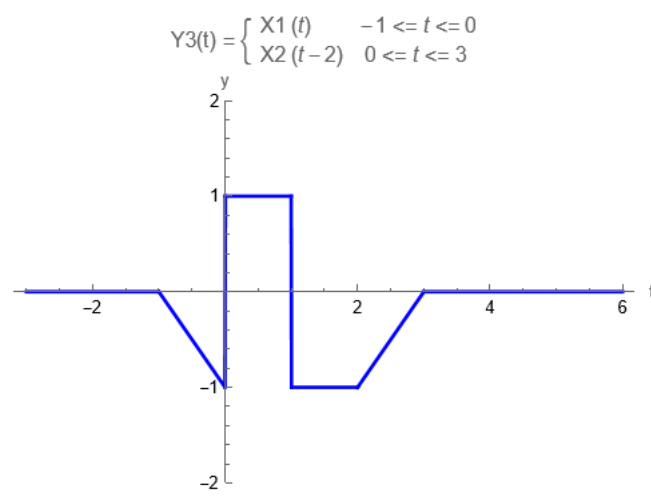
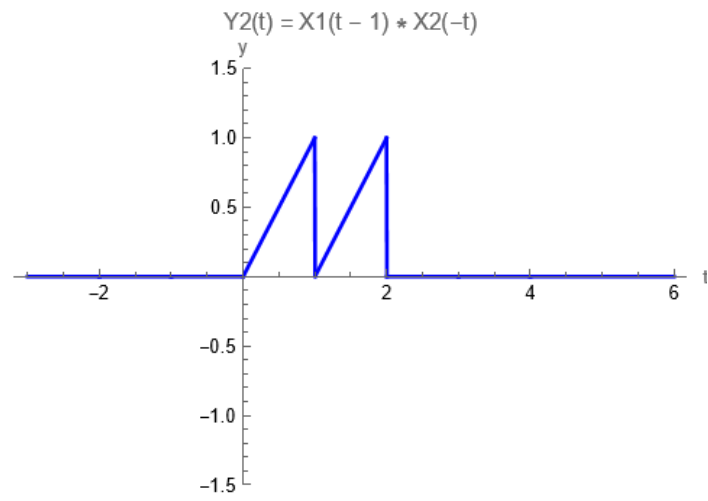


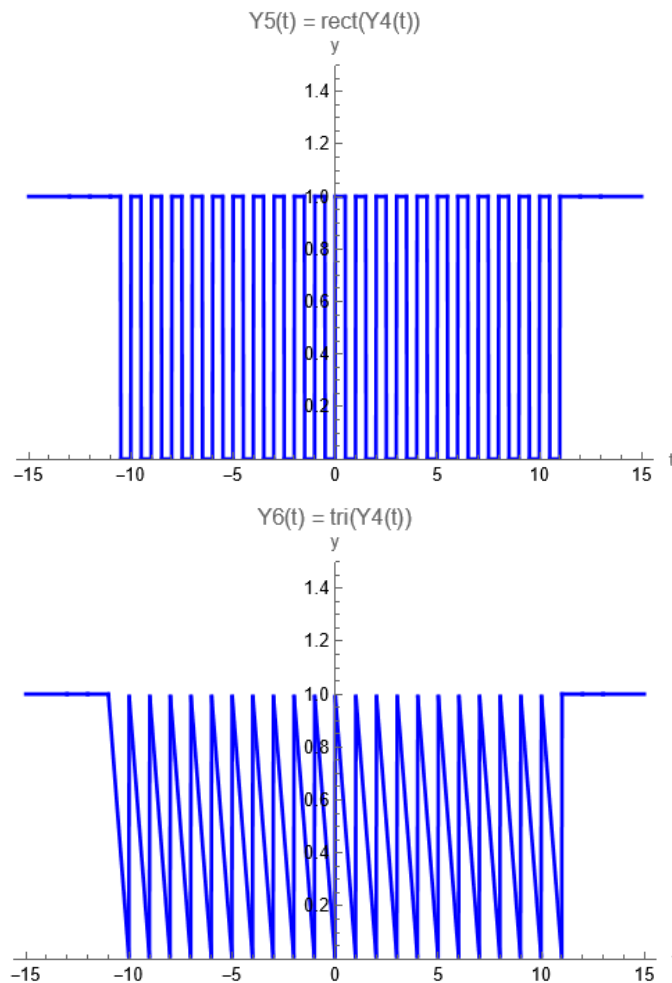
گزارش کار پروژه اول درس سیگنال و سیستم
امیر مهدی انصاری پور
شماره دانشجویی: 810198358

بخش اول (رسم سیگنال ها):

در ابتدا سیگنال های x_1 , x_2 رسم شده اند. سپس سیگنال های Y_i که بر اساس x_1 , x_2 بدست می آیند رسم شده اند.



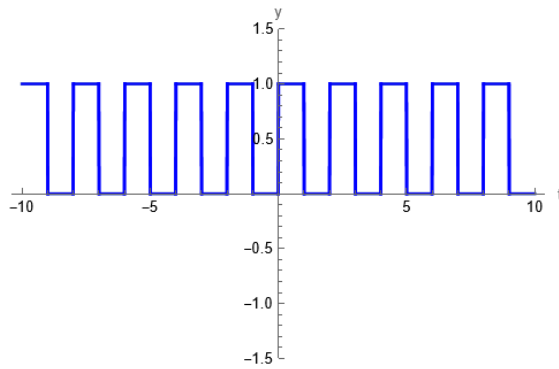




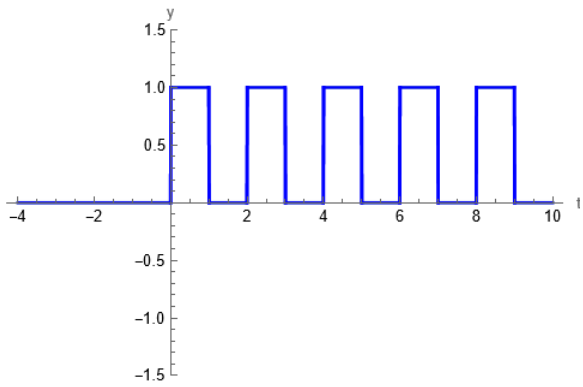
بخش دوم (تشخیص متناوب بودن سیگنال ها):

در فولدر `q2_results` بررسی گرافیکی متناوب بودن یا نبودن تمامی سیگنال ها به صورت فایل های `gif` ذخیره شده اند. در اینجا تنها به صورت تئوری دوره تناوب سیگنال ها بدست آمده اند.
(سیگنال های `X1` و `X5` به وضوح متناوب نیستند.)

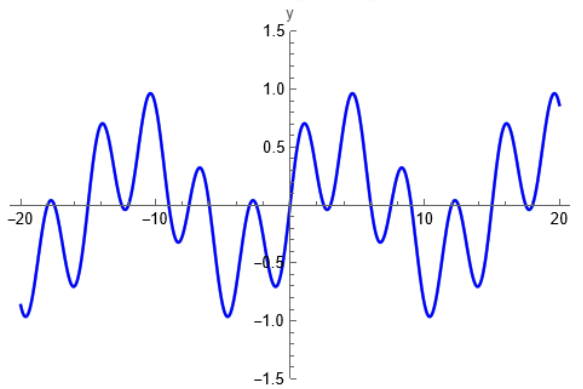
$$X_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - 2n) * u(1 + 2n - t)$$



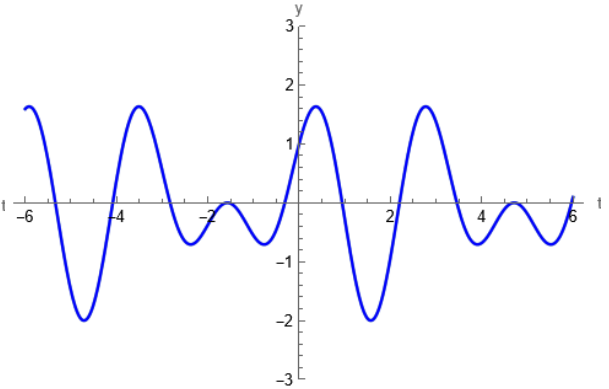
$$X_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - 2n) * u(1 + 2n - t)$$



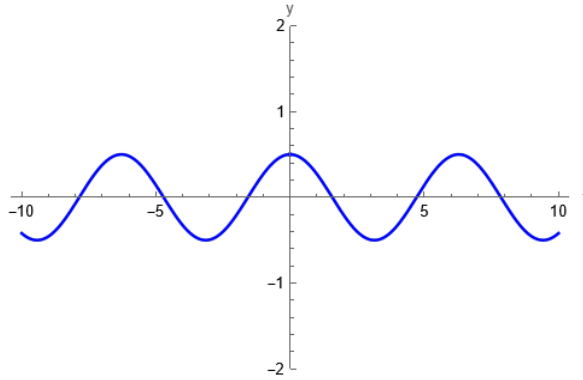
$$X_4(t) = \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{\pi t}{3}\right]$$



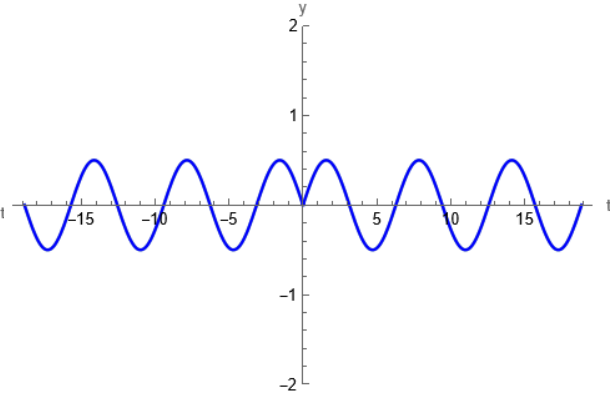
$$X_3(t) = \cos(2t) + \sin(3t)$$



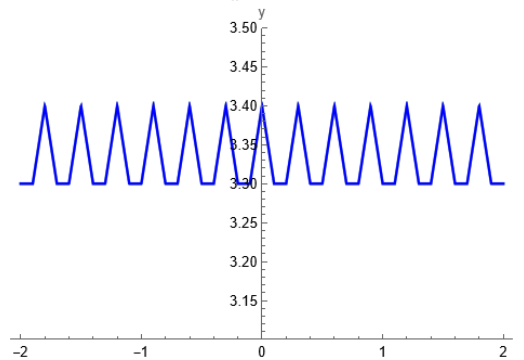
$$X_6(t) = X_e(t), \text{ s.t. } X(t) = \cos(t) u(t)$$



$$X_5(t) = X_e(t), \text{ s.t. } X(t) = \sin(t) u(t)$$



$$X_7(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri}(t - 0.3k)$$



(2)

(A) دوره تناوب این سیگنال برابر 2 است زیرا:

(B)

$$X_2(t) = \begin{cases} 1 & 2n \leq t < 2n+1 \\ 0 & 2n-1 \leq t < 2n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow T = 2n+1 - (2n-1) = 2$$

(بیاریت دایره زمانی که از عدد فرد در راستای محور n به سمت عدد زوج بعدی این حرکت می‌کنیم)

مقدار 0 و زمانیکه از عدد زوجی به سمت عدد فرد بعدی این حرکت می‌کنیم مقدار 1 می‌گیریم.

$$\cos(2t) + \cos(3t)$$

(C)

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

$$k_1 \pi = k_2 \frac{2\pi}{3} = T \Rightarrow$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3,$$

$$T = 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \quad (D)$$

$$\frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{8\pi t}{15}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{15}\right) \right]$$

$$\frac{2\pi}{8/\pi} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{2\pi}{2/\pi} = 15$$

$$\frac{15}{16} k_1 = 15 k_2 = T \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{16} \Rightarrow k_1 = 16, k_2 = 1,$$

$$T = 15$$

$$X_G(t) = \frac{X(t) + X(-t)}{2} = 0.5 [\cos(t) u(t) + \cos(t) u(-t)] \quad (F)$$

$$= 0.5 \cos(t) \left[\frac{u(t) + u(-t)}{1} \right] = 0.5 \cos(t), T = 2\pi$$

$$(G) \text{ با توجه به فرمول } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 0.3k), \text{ و تبدیل خود را به بازه های از } \pi$$

مستوان نیمه کره که دوره تناوب سیگنال $X_G(t)$ برابر $T = 0.3$ می باشد.

بخش سوم (محاسبه انتگرال به کمک ویژگی های تابع ضربه):

در این بخش ابتدا خروجی کد را برای انتگرال های خواسته شده نشان می دهیم. سپس به صورت تئوری و با استفاده از خواص تابع ضربه مقدار انتگرال ها را بدست می آوریم.

```
In[91]:= Clear[t, z]
z[t_] = (E^(3t) * D[DiracDelta[t - 2], {t, 2}])
Integrate[z[t], {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[92]= $e^{3t} \text{DiracDelta}''[-2 + t]$

Out[93]= $9 e^6$

```
In[94]:= Clear[t, z]
z[t_] = (Cos[2*Pi*t]) * (DiracDelta[t - 2] + DiracDelta[t - 7])
Integrate[z[t], {t, 5, 10}]
```

Out[95]= $\text{Cos}[2 \pi t] (\text{DiracDelta}[-7 + t] + \text{DiracDelta}[-2 + t])$

Out[96]= 1

```
In[97]:= Clear[t, z, tri]
tri[t_] = { t + 1 -1 ≤ t ≤ 0
           1 - t 0 ≤ t ≤ 1
           0      True
z[t_] = ((E^(-3t) * Cos[(Pi*t)/2]) + tri[0.5t - 1]) * DiracDelta'[t - 0.5]
Integrate[z[t], {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[98]=
$$\begin{cases} 1 + t & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Out[99]=
$$\left(e^{-3t} \text{Cos}\left[\frac{\pi t}{2}\right] + \left(\begin{cases} 0.5 t & -1 \leq -1 + 0.5 t \leq 0 \\ 2 - 0.5 t & 0 \leq -1 + 0.5 t \leq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) \text{DiracDelta}'[-0.5 + t] \right)$$

Out[100]= 0.221166

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t} \underbrace{\delta''(t-2)}_{dv \Rightarrow v = \delta'(t-2)} dt = e^{3t} \delta'(t-2) \Big|_{-\infty}^{\infty} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{3t} \delta'(t-2) dt \quad (A)$$

$$= e^6 \left[\underbrace{\delta'(\infty)}_0 - \delta'(-\infty) \right] - 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{3t} \underbrace{\delta'(t-2)}_{dv \Rightarrow v = \delta(t-2)} dt =$$

$$- 3 \left[e^{3t} \delta(t-2) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + 9 \int_{-\infty}^{\infty} e^{3t} \delta(t-2) dt =$$

$$- 3e^6 \left[\underbrace{\delta(\infty)}_0 - \delta(-\infty) \right] + 9e^6 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) dt = \boxed{9e^6}$$

$$\int_5^{10} \cos(2\pi t) (\delta(t-2) + \delta(t-7)) dt = \quad (B)$$

تابع $\cos(2\pi t) \delta(t-2)$ تنها در $t=2$ مقدار دارد. با توجه به کراچنک استفاده.

حاصل استفاده برای این تابع صفر است.

$$\cos(4\pi) \underbrace{\int_5^{10} \delta(t-2) dt}_0 + \cos(14\pi) \underbrace{\int_5^{10} \delta(t-7) dt}_1 =$$

$$\boxed{\cos(14\pi) = 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-3t} \cos(\frac{\pi t}{2}) + \Lambda(0.5t-1)) \underbrace{\delta'(t-0.5)}_{dv \Rightarrow v = \delta(t-0.5)} dt \Rightarrow \quad (C)$$

$$\left[(e^{-3t} \cos(\frac{\pi t}{2}) + \Lambda(0.5t-1)) \cdot \delta(t-0.5) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\delta(\infty) = \delta(-\infty) = 0$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(-3e^{-3t} \cos(\frac{\pi t}{2}) - \frac{\pi}{2} e^{-3t} \sin(\frac{\pi t}{2}) + 0.5 (\Lambda'(0.5t-1)) \right) \delta(t-0.5) dt$$

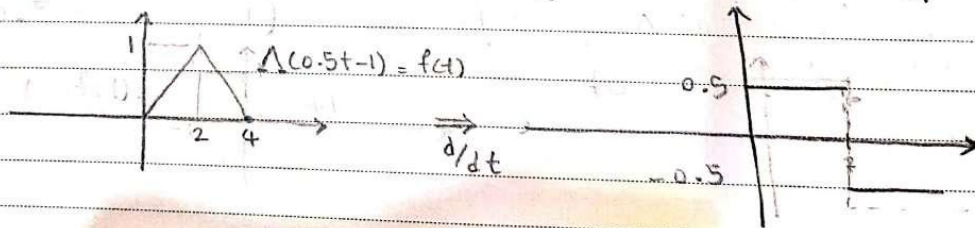
Subject:

Year. Month. Date. ()

برای حل انتگرال معده قبل جابجایی خاصیت غربالگری داریم:

$$+ 3 e^{-1.5} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} e^{-1.5} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0.5 = 0.221$$

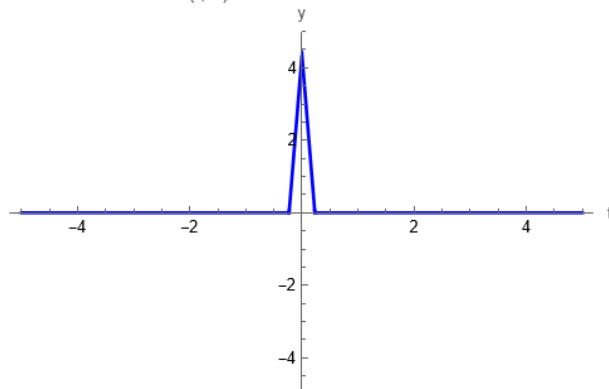
دیت عدد برای مشتق $\Delta(0.5t-1)$ داریم:



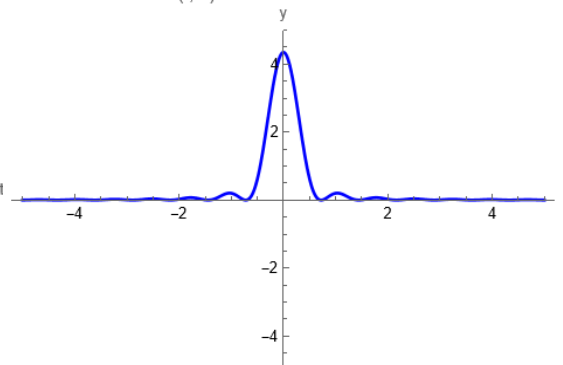
بخش چهارم: (تعریف تابع دلتای دیراک):

خروجی دستور `animate` برای تمامی سیگنال ها بصورت فایل های `gif` در فولدر `q4_results` قرار داده شده اند. در اینجا تنها به صورت تئوری برای هر سیگنال بررسی می کنیم که آیا با $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon)$ خروجی به دلتای دیراک میل میکند یا خیر.

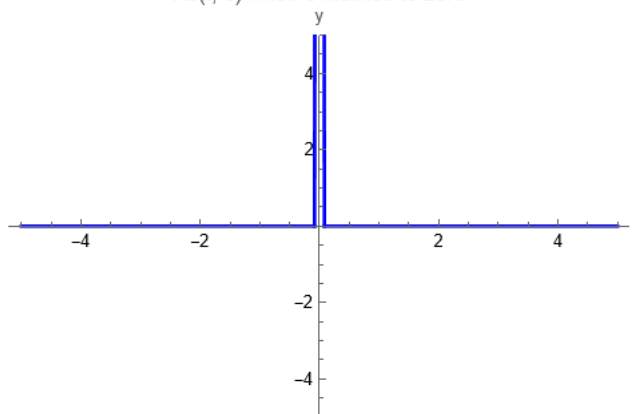
$X_2(t, \epsilon)$ when ϵ inclines to zero



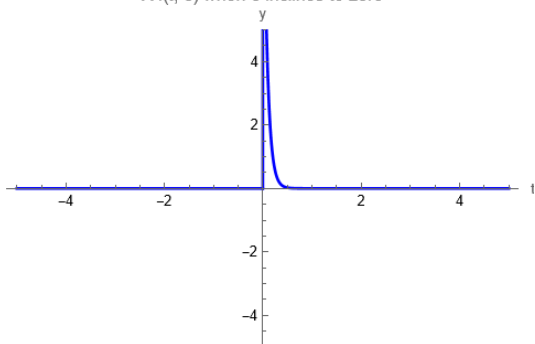
$X_1(t, \epsilon)$ when ϵ inclines to zero



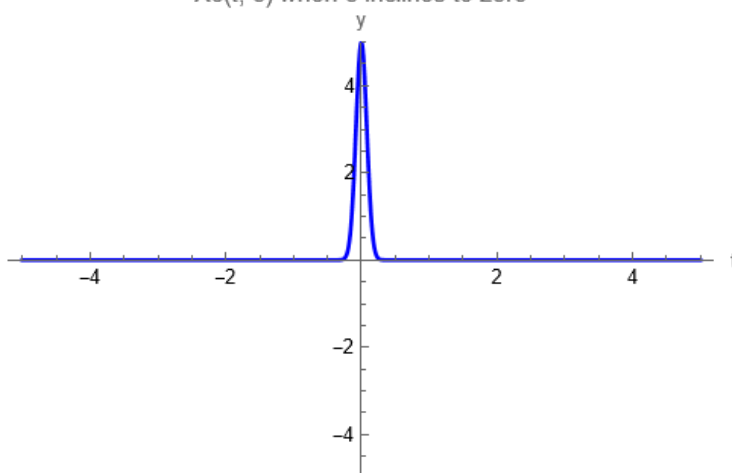
$X_3(t, \epsilon)$ when ϵ inclines to zero



$X_4(t, \epsilon)$ when ϵ inclines to zero



$X_5(t, \epsilon)$ when ϵ inclines to zero



Subject.

Year.

Month.

Date.

/ /

(4) برای هر تابع باید ثابت کنیم:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(n, \epsilon) dx \right] = 1 \quad \textcircled{I}$$

$$\forall n \neq 0: \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(n, \epsilon)] = 0 \quad \textcircled{II}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(0, \epsilon) = \infty \quad \textcircled{III}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{a}\right) dx = |a|$$

(A) می داریم:

$$\left(\text{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{(\pi n)} \right) \quad \text{دست شود (sinc) را به صورت دهم تعریف کردیم:}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{\epsilon}\right) dt =$$

حال داریم:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} |\epsilon| = \boxed{1} \quad \textcircled{I} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{\epsilon} |\epsilon| = \boxed{-1} \quad \textcircled{I}$$

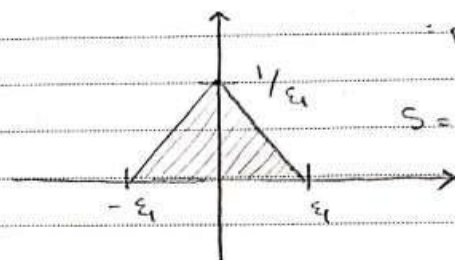
$$\forall t \neq 0: \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right)}{\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right)^2} \quad \text{II}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\epsilon} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{\epsilon}\right)}{(nt)^2} \quad \frac{t \neq 0}{\text{محدود}} \quad 0 \times \frac{\text{محدود}}{\text{محدود}} = 0 \quad \textcircled{II}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{t}{\epsilon}\right)}_{\text{چون } 0/\epsilon = 0} = \frac{1}{\epsilon} \text{sinc}^2(0) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} = \infty \quad \textcircled{III}$$

$X_2(t, \epsilon_1) :$

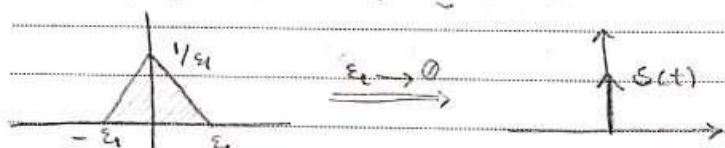


(B) با رسم نمودار داریم :

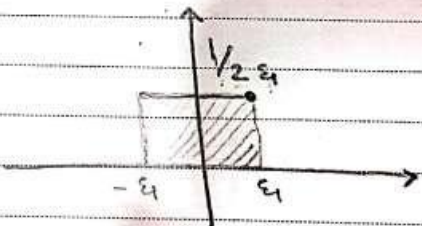
$$S = \frac{2\epsilon_1 \times \frac{1}{\epsilon_1}}{2} = 1$$

همانطور که دیده می شود، سطح زیر نمودار برابر 1 است. و با میل دادن $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ،

ارتفاع مثلث به بی نهایت و قاعده آن به صفر میل می کند که معادل تابع ضرب است.



$X_3(t, \epsilon_1) :$

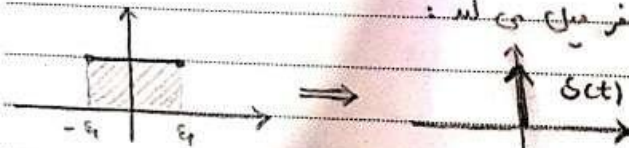


(C) با رسم نمودار داریم :

$$S = 2\epsilon_1 \times \frac{1}{2\epsilon_1} = 1$$

همانطور که دیده می شود، سطح زیر نمودار 1 است. و با میل دادن $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ، عرض

مستطیل به بی نهایت و طول آن به صفر میل می کند :



Subject:

Year. Month. Date. ()

$$X_q(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} u(t) \quad (D)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_q(t, \varepsilon) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} e^{-t/\varepsilon} dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\varepsilon} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \varepsilon du \quad \text{با تغییر متغیر } t/\varepsilon = u$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \boxed{1} \quad (I)$$

$$\forall t \neq 0: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} u(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} & t > 0 \\ \boxed{0} & t < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} \text{ با } \frac{1}{\varepsilon} = m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} m e^{-tm} = \frac{m}{e^{tm}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{(L'H)} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{t e^{tm}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \quad (II)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_q(0, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-0/\varepsilon} u(0)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon} u(0) = \frac{\infty}{0} = \boxed{\infty} \quad (III) \quad \leftarrow 0 = \frac{\text{مفرداتی}}{\text{صفری}}$$

$$X_5(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \quad (E)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_5(t, \varepsilon) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt$$

$$\frac{|t|}{\sqrt{2}\varepsilon} = m \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} \sqrt{2}\varepsilon dm$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} dm = \boxed{1} \quad (I)$$

$$\forall t \neq 0: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi}|\varepsilon|} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}\varepsilon} = m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{-m^2}}{\frac{t\sqrt{\pi}}{m}} = \frac{m e^{-m^2}}{t\sqrt{\pi}} = \frac{m}{e^{m^2} t \sqrt{\pi}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m e^m t \sqrt{\pi}} \quad t \neq 0 = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \quad (II)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_5(0, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-0/2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} = \frac{e^{-0}}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty} \quad (III)$$

بخش پنجم (بررسی انرژی / توان بودن سیگنال ها):

در این بخش با استفاده از فرمول انرژی و توان متوسط یک سیگنال، برای هر سیگنال بررسی می کنیم که آیا از نوع سیگنال انرژی است یا توان. می دانیم:

$$E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

if ($E(x(t)) \neq 0 \ \&\& \ E(x(t)) < \infty$) $x(t)$ is an energy signal

$$P(x(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

if ($P(x(t)) \neq 0 \ \&\& \ P(x(t)) < \infty$) $x(t)$ is a power signal

سیگنال اول: این سیگنال از نوع انرژی است.

$$X_1(t) = A e^{-a t} u(t), \Re(a) > 0$$

```
Clear[x1, t, A, a, T]
x1[t_] = A*E^(-a*t)
Integrate[(x1[t])^2, {t, 0, Infinity}, Assumptions->(Re[a] > 0)]
Limit[(1/(2*T))*Integrate[(x1[t])^2, {t, 0, Infinity}, Assumptions->(Re[a] > 0)], T->Infinity]
```

$A e^{-a t}$

$$\frac{A^2}{2 a}$$

0

سیگنال دوم:

$$X_2(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

از پریودیک بودن تابع \cos می توان به سادگی پی برد که انتگرال انرژی برابر بی نهایت میشود (converge نمی کند). در نتیجه این سیگنال از نوع انرژی نمی تواند باشد.


```
Clear[x2, t, A, w, o]
x2[t_] = A*Cos[w*t + o]
Integrate[(x2[t])^2, {t, -Infinity, Infinity}]
Limit[1/(2*T)*Integrate[(x2[t])^2, {t, -T, T}], T->Infinity]
```

$A \cos[o + t w]$

⋯ **Integrate:** Integral of $A^2 \cos[o + t w]^2$ does not converge on $\{-\infty, \infty\}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos[o + t w]^2 dt$$

$$\frac{A^2}{2} \text{ if } w \in \mathbb{R}$$

با توجه به مقدار انتگرال دوم، این سیگنال از نوع توان است.

سیگنال سوم:

$$X_3(t) = \frac{u(t-3)}{\sqrt[4]{t}}$$

```
Clear[x3, t]
x3[t_] = 1 / (t)^(0.25)
Integrate[(x3[t])^2, {t, 3, Infinity}]
Limit[1/(2*T)*Integrate[(x3[t])^2, {t, 3, T}], T->Infinity]
```

$$\frac{1}{t^{0.25}}$$

⋯ **Integrate:** Integral of $\frac{1}{t^{0.5}}$ does not converge on $\{3, \infty\}$.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{t^{0.5}} dt$$

0.

این سیگنال نه از نوع توان است و نه انرژی (زیرا انتگرال انرژی آن برابر بی نهایت میشود و انتگرال توان آن نیز صفر است).

سیگنال چهارم:

$$X_4(t) = t e^{-2t} u(t)$$

```
Clear[x4, t]
x4[t_] = t*E^(-2t)
Integrate[x4[t]^2, {t, 0, Infinity}]
Limit[1/(2*T)*Integrate[x4[t]^2, {t, 0, Infinity}], T->Infinity]
```

$$e^{-2t} t$$

$$\frac{1}{32}$$

$$0$$

این سیگنال از نوع انرژی می باشد.

سیگنال پنجم:

$$X_5(t) = e^{-2t} \cos(0.5 \pi t) u(t)$$

```
Clear[x5, t]
x5[t_] = E^(-2t) * Cos[0.5*Pi*t]
Integrate[Abs[x5[t]]^2, {t, 0, Infinity}]
Limit[1/(2*T)*Integrate[Abs[x5[t]]^2, {t, 0, Infinity}], T->Infinity]
```

$$e^{-2t} \cos[1.5708 t]$$

$$0.202311$$

$$0.$$

این سیگنال از نوع انرژی است.

سیگنال ششم:

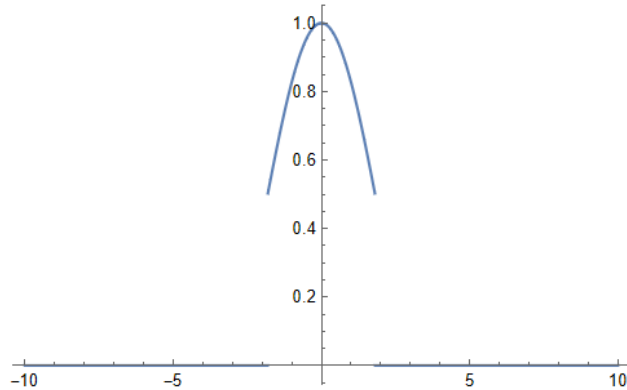
$$X_6(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(t - 4k)$$

$$s.t. X(t) = (1 - \Pi(\text{Sinc}(\frac{\pi t}{3}))) \text{Sinc}(\frac{\pi t}{3})$$

این سیگنال را با کمی دقت می توان ساده تر کرد.

```
y[t_] = Sinc[Pi*t / 3] - (rect[Sinc[Pi*t/3]] * Sinc[Pi*t/3])
Plot[y[t], {t, -10, 10}]
```

$$\text{Sinc}\left[\frac{\pi t}{3}\right] - \text{Sinc}\left[\frac{\pi t}{3}\right] \left(-\text{UnitStep}\left[-0.5 + \text{Sinc}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right] + \text{UnitStep}\left[0.5 + \text{Sinc}\left[\frac{\pi t}{3}\right]\right] \right)$$

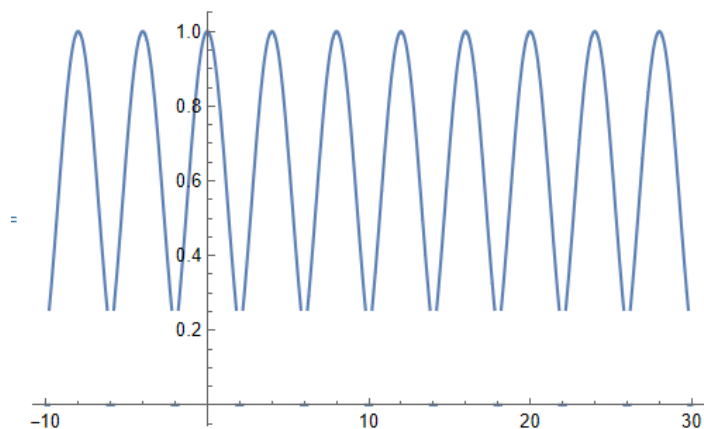


```
FindRoot[Sinc[Pi * t / 3] - 0.5 == 0, {t, 1}]
```

{t → 1.81006}

این سیگنال فقط در بازه $\{-1.8, 1.8\}$ مقدار دارد. پس با تکرار آن در بازه های چهارتایی خواهیم داشت:

```
= Clear[x6, t]
x6[t_] = Sum[y[t - 4k], {k, -10, 10}]^2
Plot[x6[t], {t, -10, 30}]
```



سیگنال پریودیک فوق قطعاً انتگرال انرژی اش converge نمی کند و انتگرال توانش هم مخالف صفر میشود. پس بدون نیاز به محاسبه انتگرال (که برای mathematica هم سنگین بود) میتوان پی برد که این سیگنال از نوع توان است.