به نام خدا

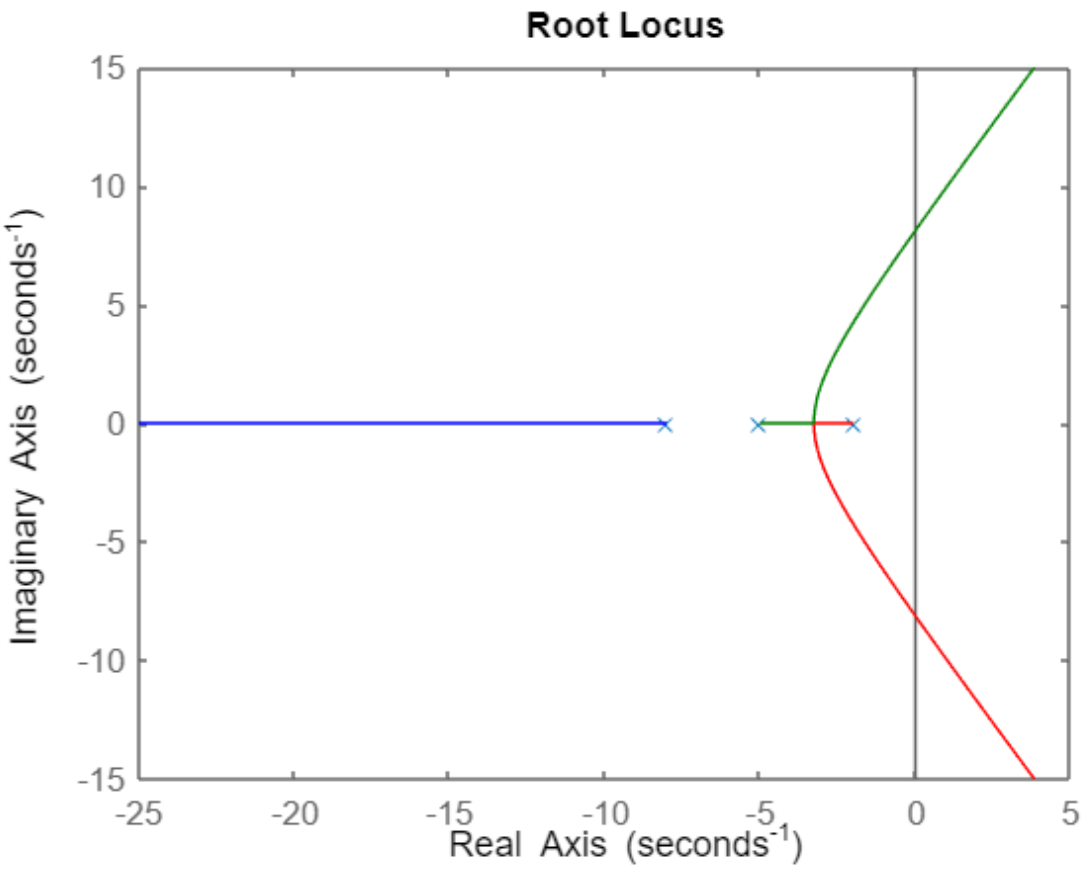
گزارش بخش شبیه‌سازی تمرین چهارم

سیستم‌های کنترل خطی ـ دکتر نیری

امیرمحمد میرحسینی ۸۱۰۱۰۲۶۰۱

سوال ۱)

الف)



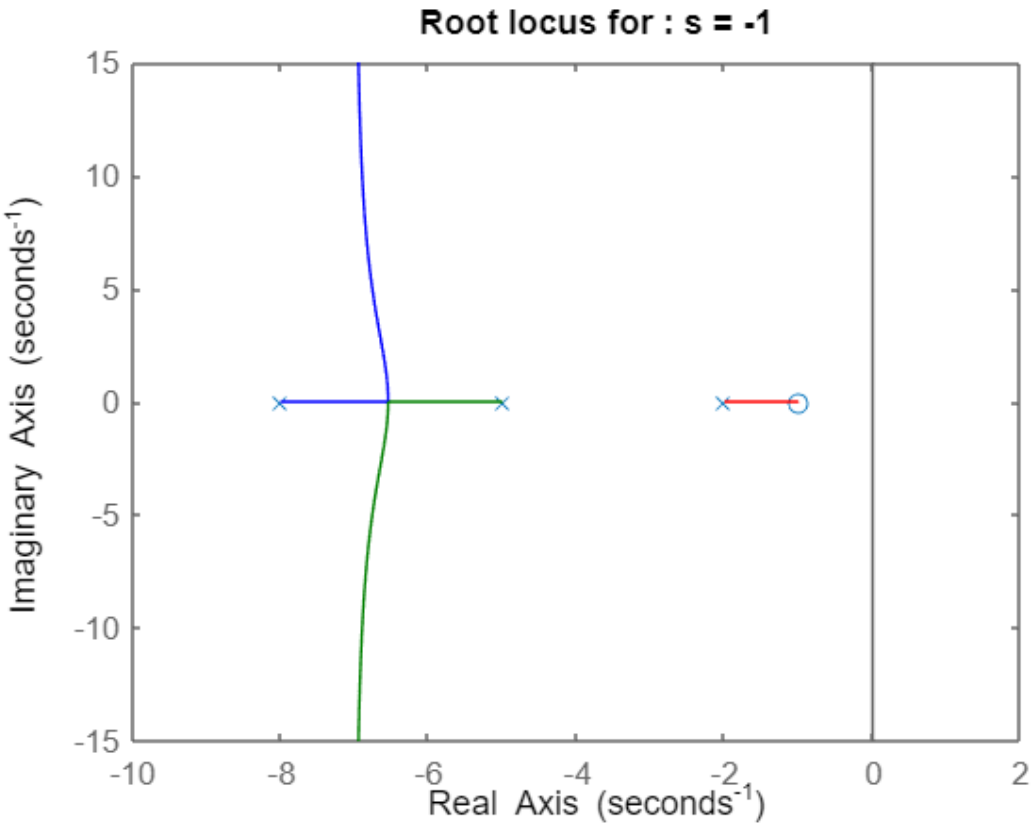
---

۳ قطب داریم و هیچ صفری نداریم بنابراین قطب ها به سه مجانب ها منتهی می‌شوند چون بهره مثبت است مجانب ها ۶۰ و -۶۰ و ۱۸۰ درجه می‌باشد . دورترین(سریعترین) قطب به مجانب ۱۸۰ درجه و منفی بی‌نهایت حرکت می‌کند. دو قطب سمت راست ابتدا به هم حرکت می‌کنند سپس در نقطه برهم شکست از هم جدا شده و به سمت مجانب ها (صفرهای بینهایت) حرکت می‌کنند.

چون بهره مثبت بود از قانون فرد بودن مجموع صفر و قطب های سمت راست می‌توانستیم استفاده کنیم که شاخه های مکان ریشه نیز در این بازه‌های مجاز حرکت کرده است.

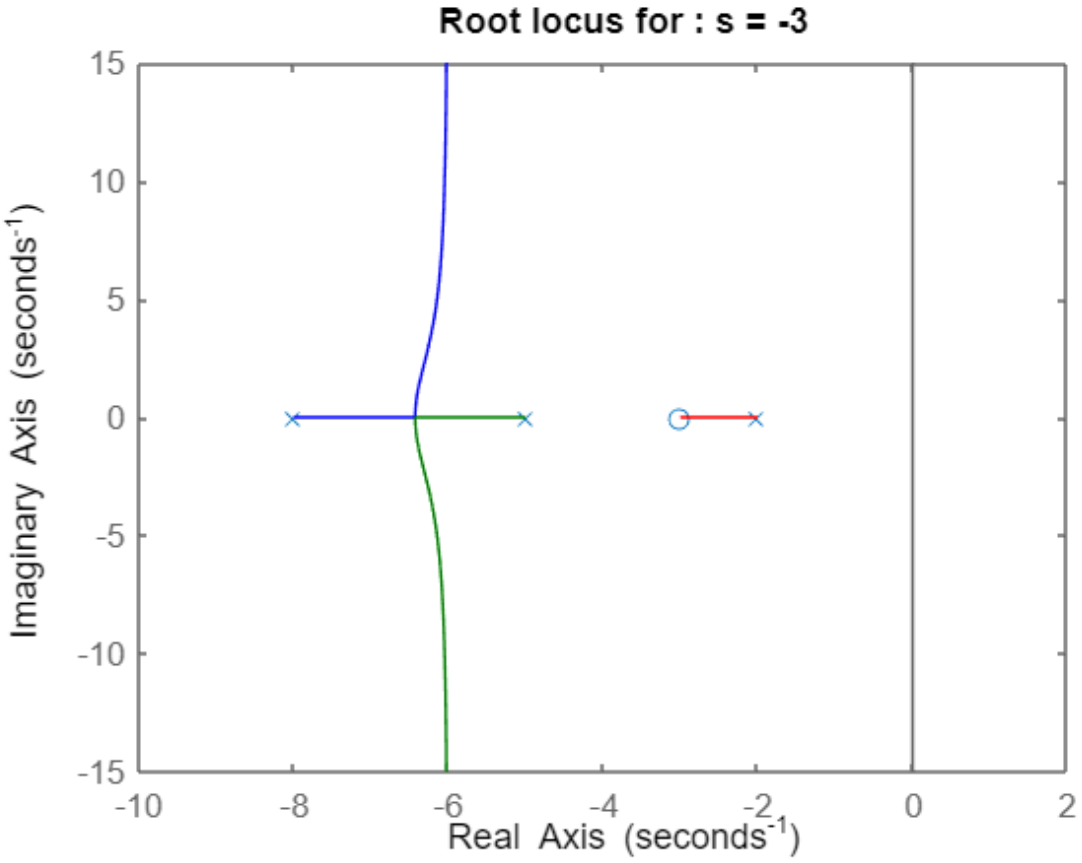
ب)

$$s = -1$$



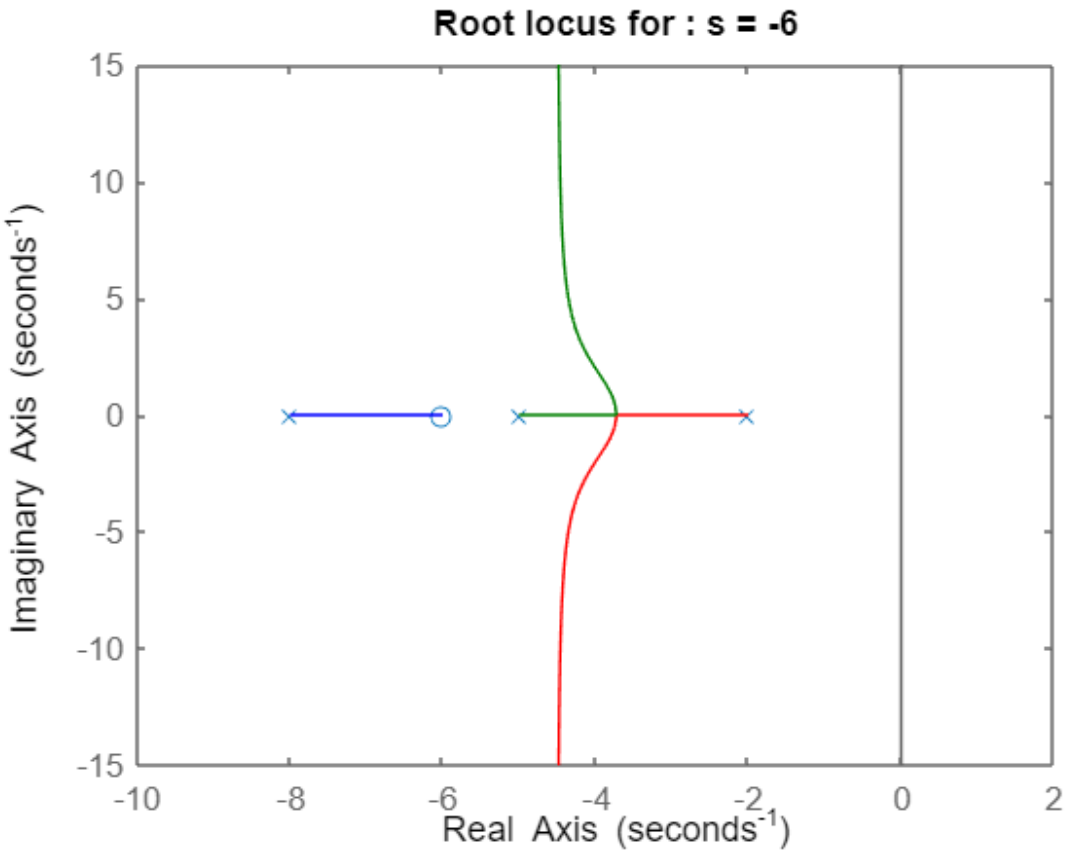
دو مجانب داریم ۹۰ و -۹۰ درجه. باتوجه به بازه **جدید** مجاز قطب سمت راست صرفا می‌تواند به سمت صفر حرکت کند. و دو قطب سمت چپ به سمت مجانب ها و صفر های بی‌نهایت حرکت می‌کنند.

$$s = -3$$



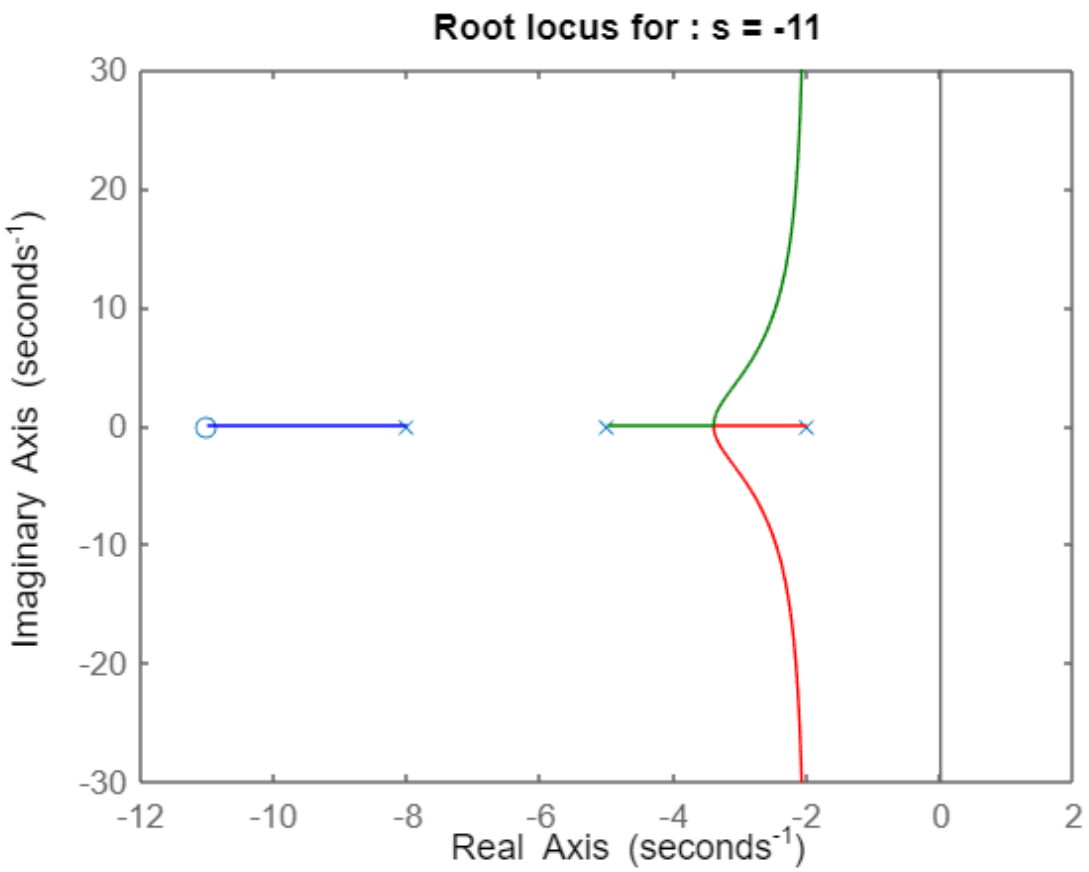
مانند نمودار قبلی با توجه به بازه k مثبت قطب سمت راست صرفا می‌تواند به سمت صفر حرکت کند و دو قطب سمت چپ مجددا به سمت مجدد ها حرکت می‌کنند.

$$s = -6$$



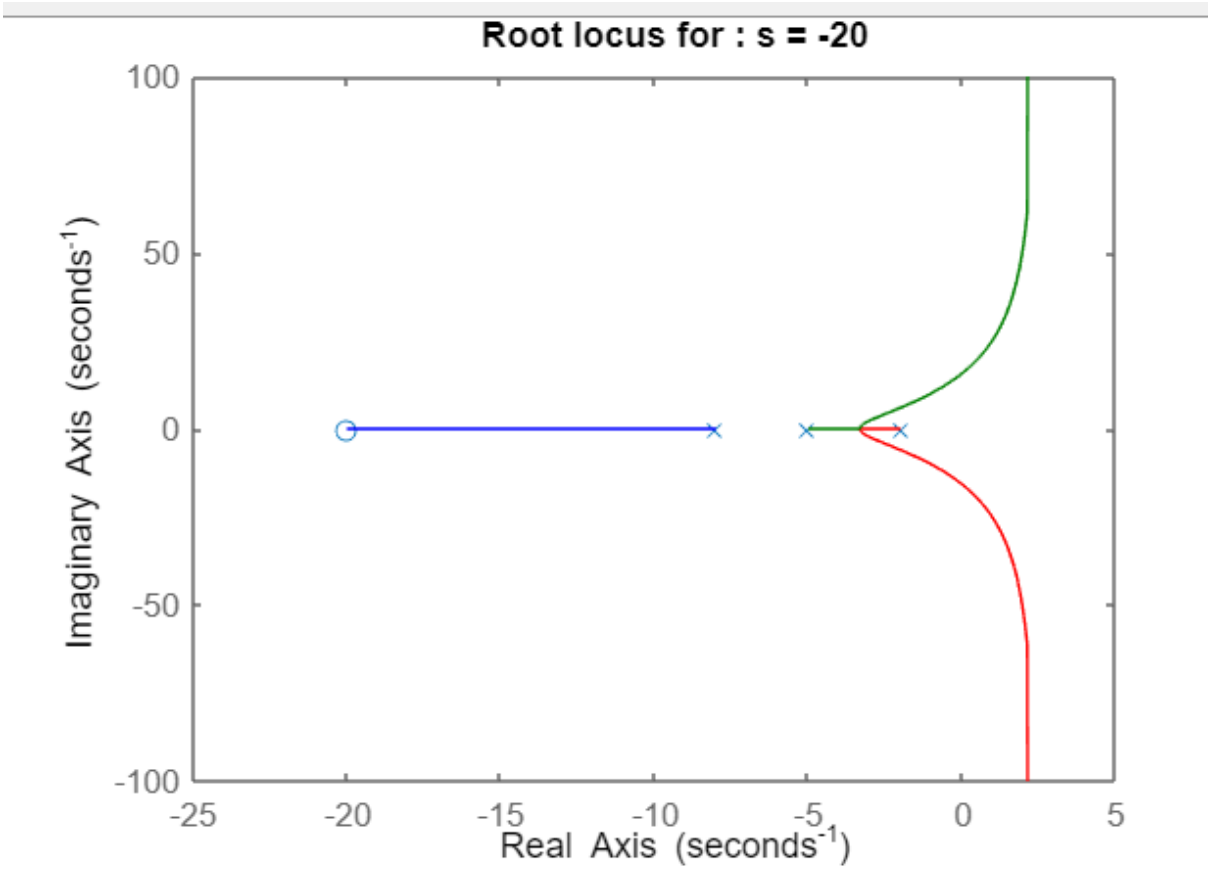
با توجه به اینکه صفر جدید از دو قطب دورتر است، بازه k مثبت نیز تغییر کرده و دو قطب سمت راست مجبورند به سمت هم حرکت کنند و سپس از هم جدا شده و به سمت مجانب‌ها و صفرهای بی‌نهایت حرکت کنند. و قطب سمت چپ نیز به سمت صفر تابع حلقه باز حرکت می‌کند.

$$s = -11$$



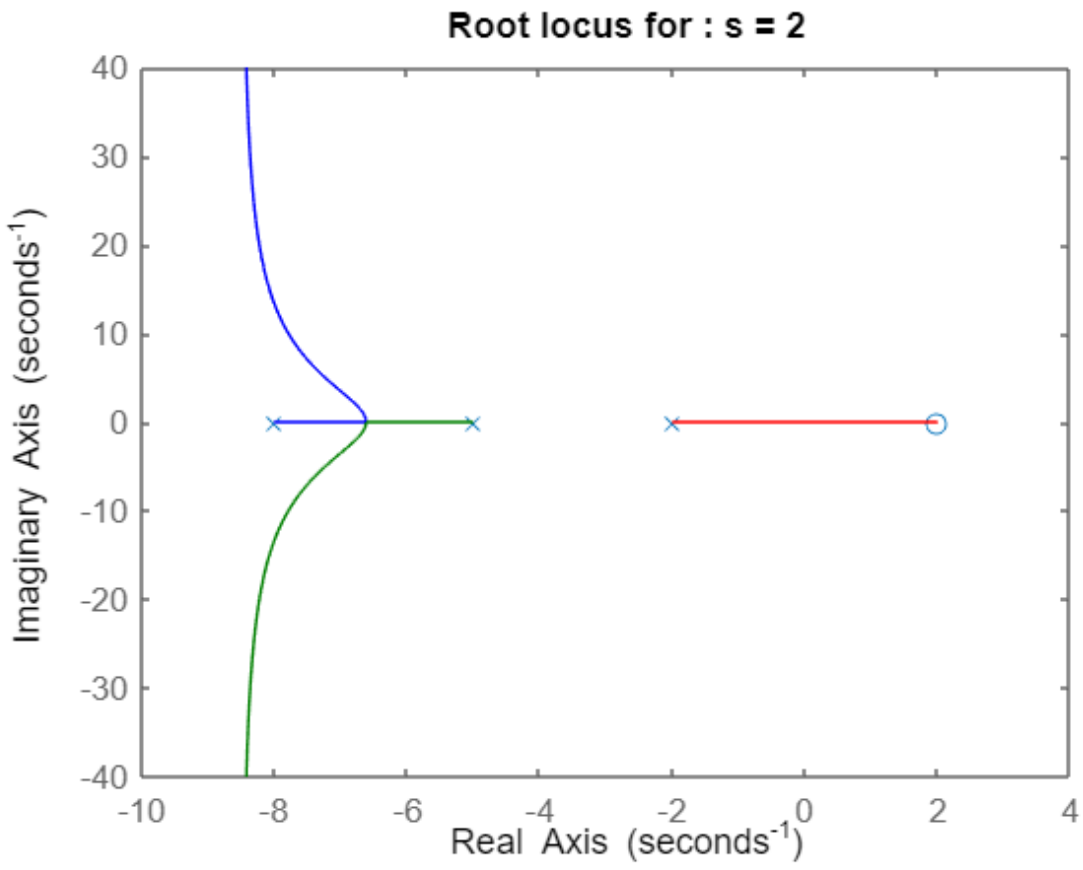
دقیقا مانند بخش قبل صرفا سیگما یا محل تلاقی مجانب‌ها به دلیل بزرگتر شدن اندازه صفر بیشتر به سمت راست حرکت کرده است و مجانب ها در *s=-2* می‌باشند.

$$s = -20$$



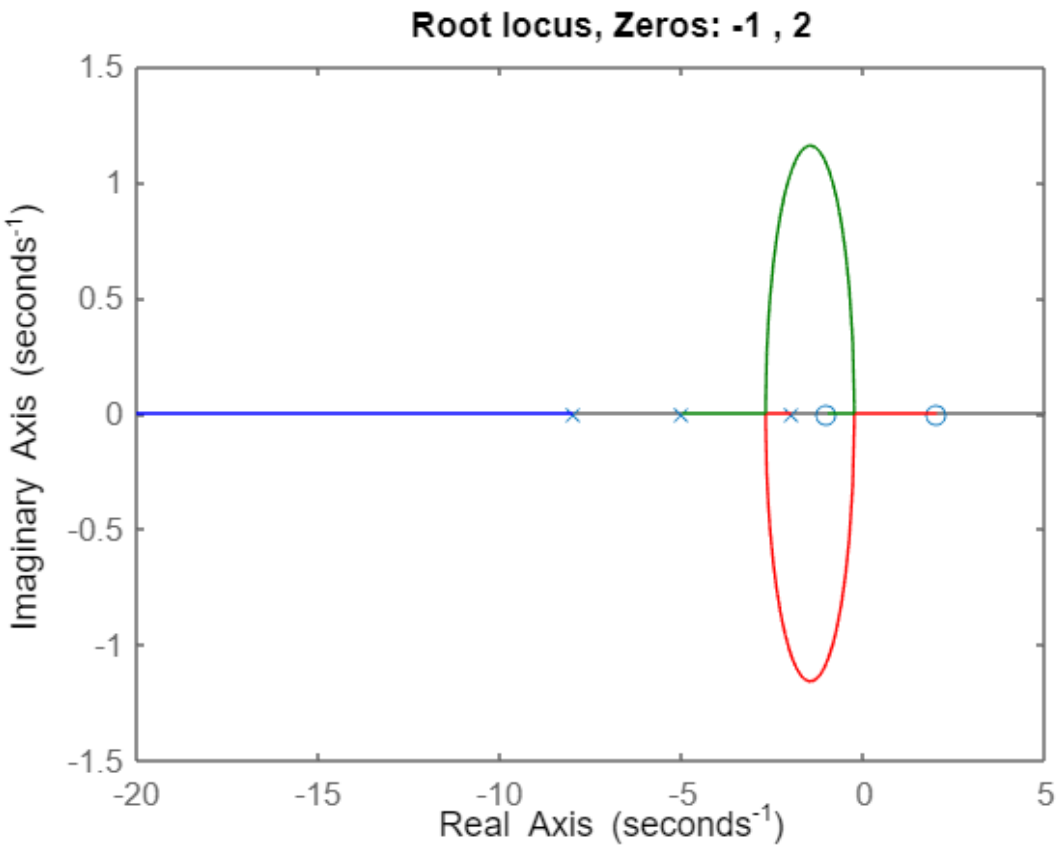
عین حالت قبلی فقط مجانب ها در $s=2.5$ همگرا شده‌اند.

$$s = 2$$



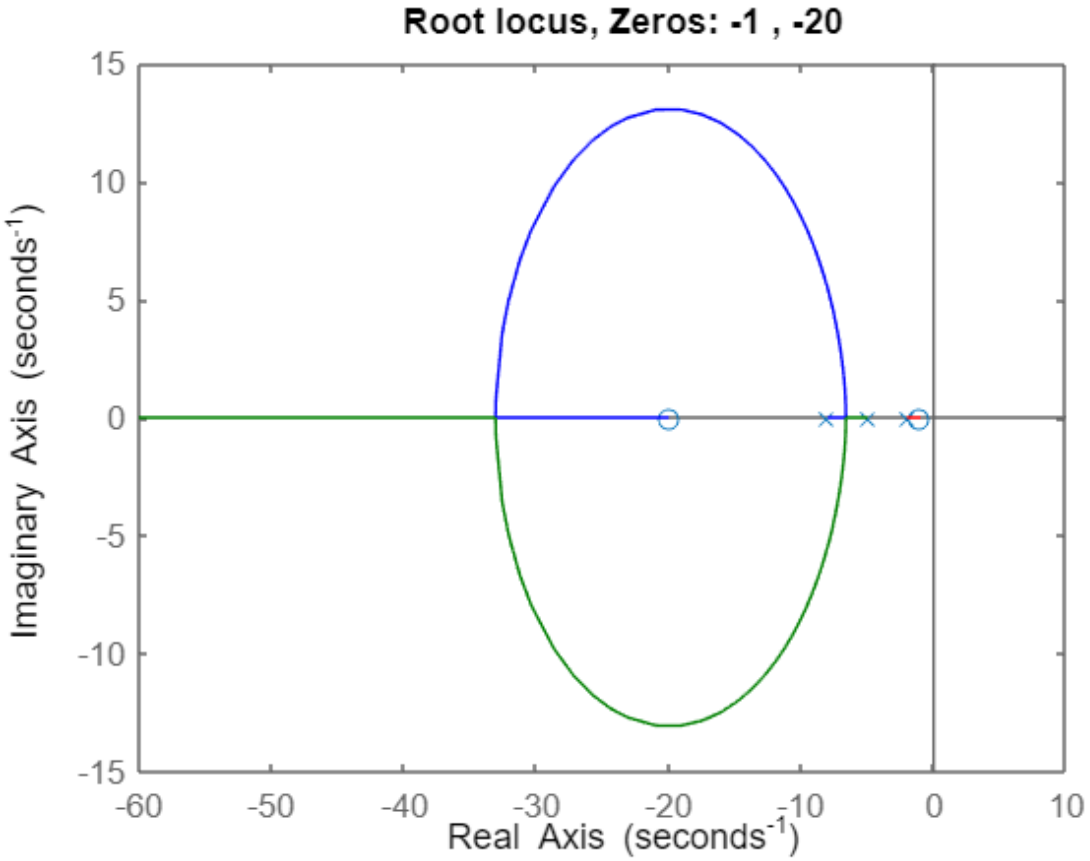
مانند دو حالت اول است فقط صفر در سمت راست محور موهومی قرار دارد. و نقطه تلاقی مجانب ها نیز بیشتر به سمت چپ آمده.

ج)



برای این حالت:

قرار گرفتن قطب در سمت راست محور موهومی معمولاً موجب ایجاد رفتارهای نامطلوبی مانند فروجهش در پاسخ سیستم می‌شود. از طرف دیگر، سیستمی که تنها شامل یک قطب در مثبت ۲ است، با افزایش بهره k به ناحیه مرزی پایداری نزدیک شده و حفظ پایداری آن دشوارتر می‌شود. اضافه کردن یک قطب در نقطه منفی یک می‌تواند تا حدی عدم تعادل فازی ناشی از قطب +۲ را خنثی کند و شرایط پایداری را نسبتاً بهبود دهد. با این وجود، به علت مجاورت این صفر با قطب‌های غالب سیستم، پاسخ گذرا دچار تغییر شده و مقدار فراجهش افزایش می‌یابد.

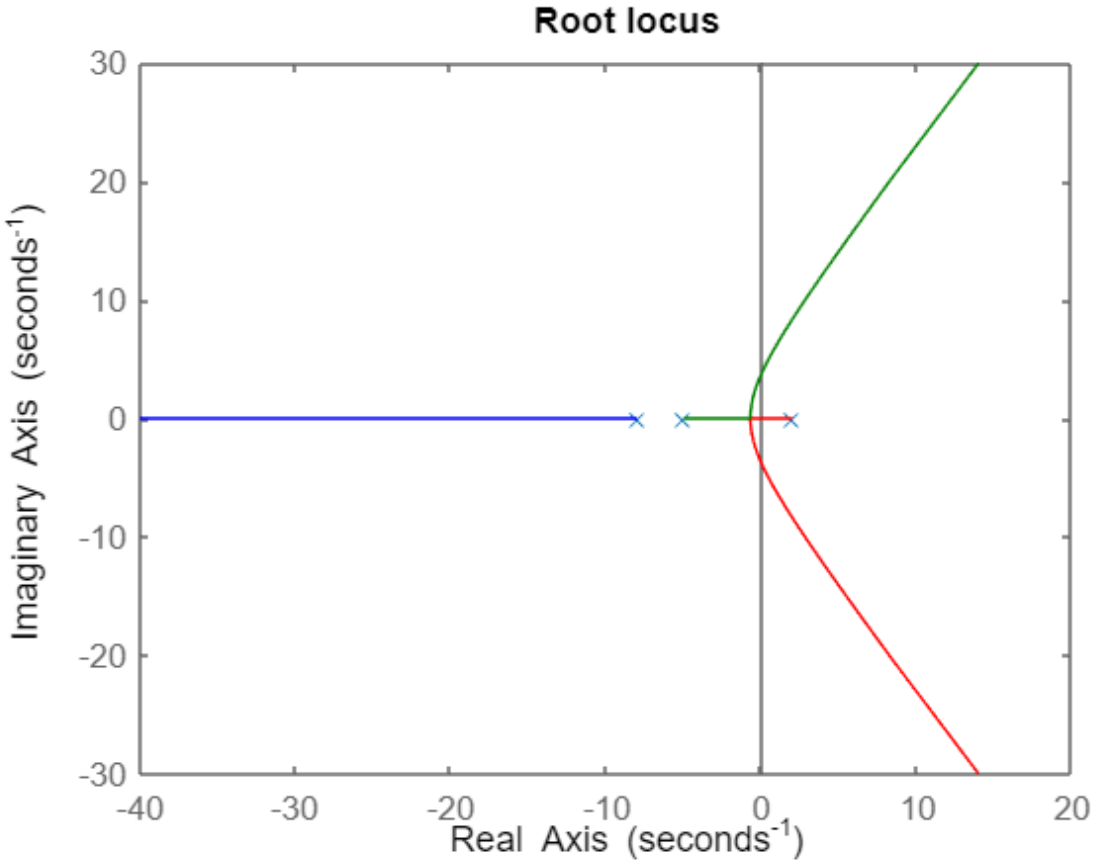


برای این حالت:

در حالت نخست که تنها یک صفر در نقطه ۲۰- وجود دارد، تأثیر این صفر بسیار محدود است و تنها مقدار اندکی فاز مثبت به شرط زاویه اضافه می‌کند؛ به همین دلیل، شکل مکان هندسی ریشه‌ها تفاوت محسوسی با حالت فاقد صفر ندارد. از دیدگاه پایداری، سیستم در این وضعیت کاملاً پایدار است و پاسخ پله نسبت به حالتی که بعداً صفر دیگری به سیستم افزوده می‌شود، آهسته‌تر اما هموارتر و بدون نوسان شدید خواهد بود. در مجموع می‌توان گفت صفرهایی که در فاصله زیادی در نیم‌صفحه چپ قرار دارند، عمدتاً بر مؤلفه‌های فرکانسی بالا اثر می‌گذارند و نقش چندانی در تعیین رفتار قطب‌های غالب ندارند.

با اضافه شدن صفر در نقطه $s = -1$، مقدار قابل توجهی فاز مثبت وارد سیستم می‌شود و شاخه‌های مکان ریشه تمایل پیدا می‌کنند به سمت این صفر حرکت کنند. در نتیجه، پاسخ سیستم سریع‌تر می‌شود، اما معمولاً این افزایش سرعت با افزایش فراجهش در پاسخ زمانی همراه است.

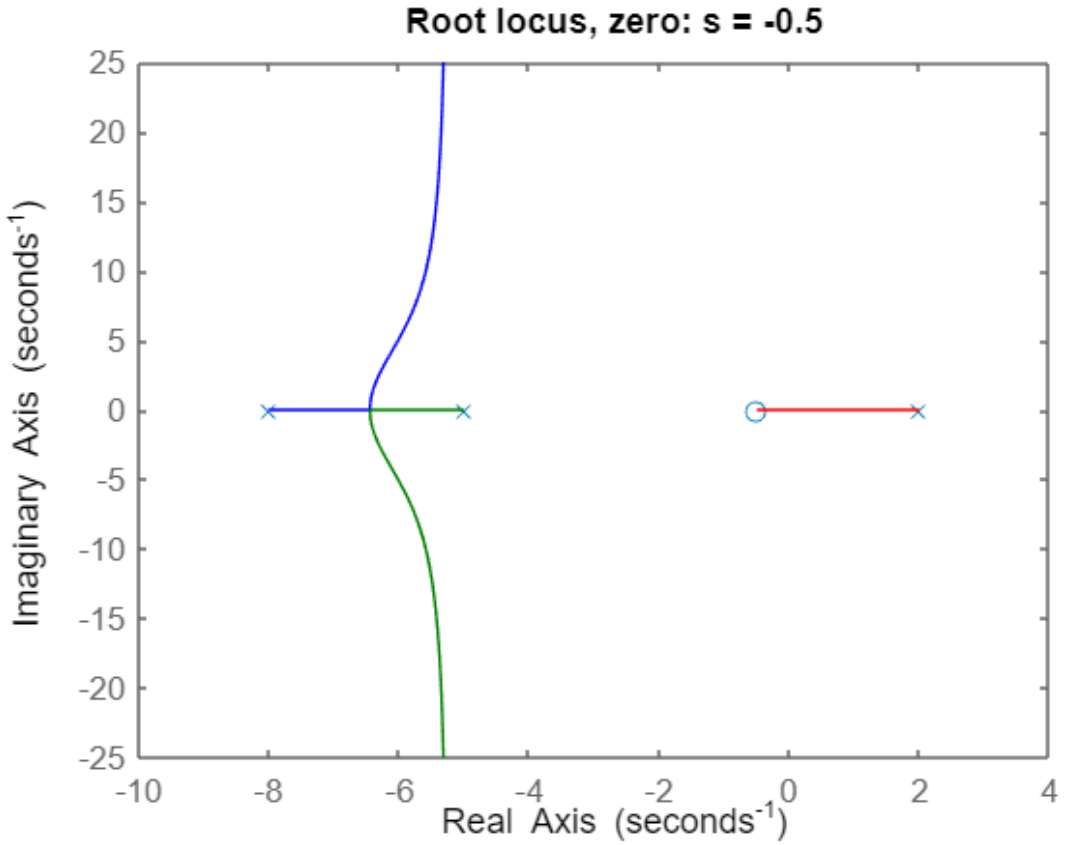
د)



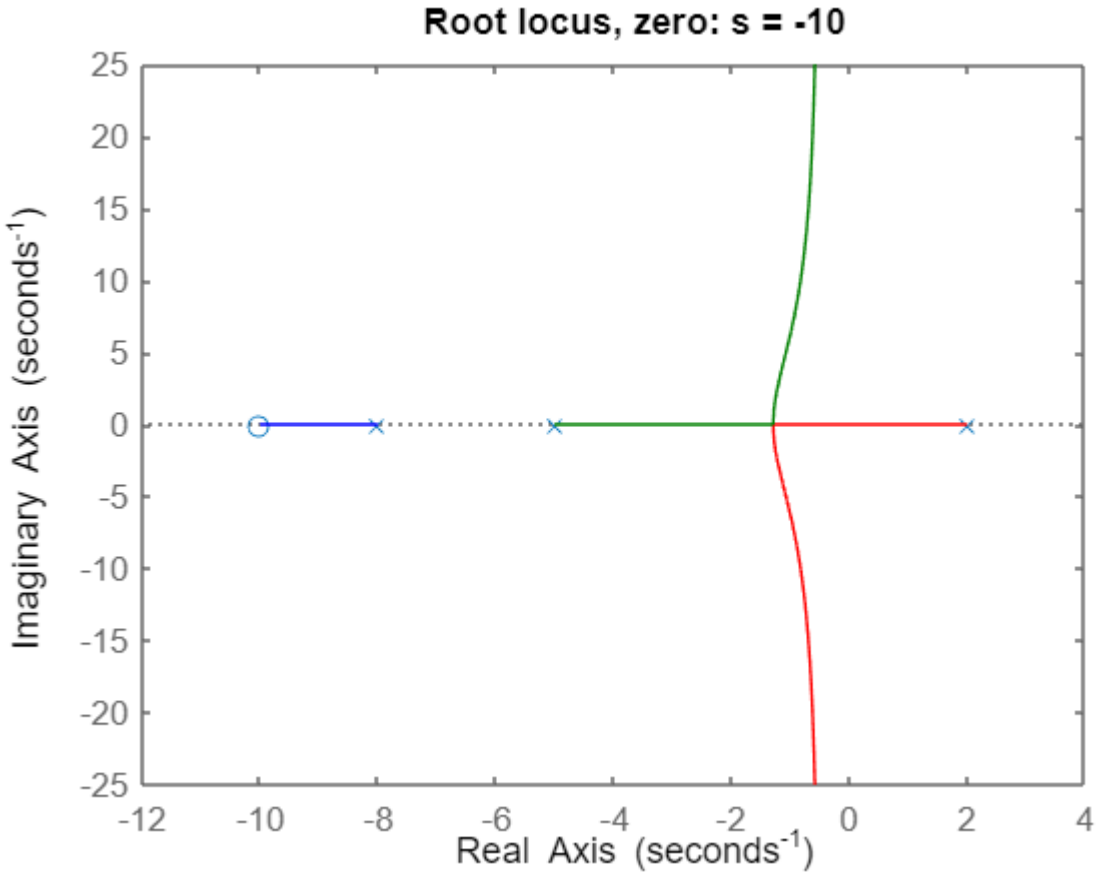
دقیقا توضیحات الف اینجا صادق است:

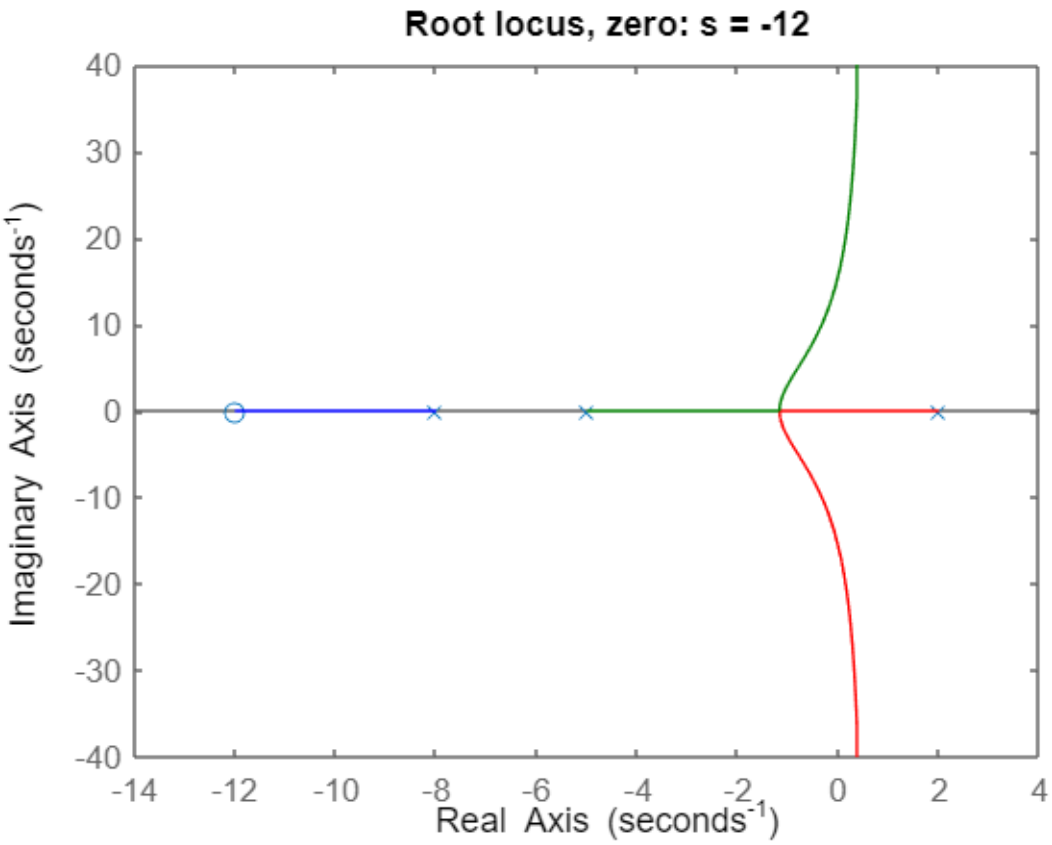
۳ قطب داریم و هیچ صفری نداریم بنابراین قطب ها به سه مجانب ها منتهی می‌شوند چون بهره مثبت است مجانب ها ۶۰ و -۶۰ و ۱۸۰ درجه می‌باشد . دورترین(سریعترین) قطب به مجانب ۱۸۰ درجه و منفی بی‌نهایت حرکت می‌کند. دو قطب سمت راست ابتدا به هم حرکت می‌کنند سپس در نقطه برهم شکست از هم جدا شده و به سمت مجانب ها (صفرهای بینهایت) حرکت می‌کنند.

چون بهره مثبت بود از قانون فرد بودن مجموع صفر و قطب های سمت راست می‌توانستیم استفاده کنیم که شاخه های مکان ریشه نیز در این بازه‌های مجاز حرکت کرده است.



اثر: چون صفر نزدیک به مبدا هست، سرعت پاسخ سیستم را کمی افزایش می‌دهد، ولی چون خیلی نزدیک صفر است، تغییر شکل Root Locus کوچک است. به طور جزئی، مسیر قطب‌ها کمی به سمت چپ منحرف می‌شود، پاسخ کمی سریع‌تر ولی overshoot کم.


Root locus, zero: s = -10
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

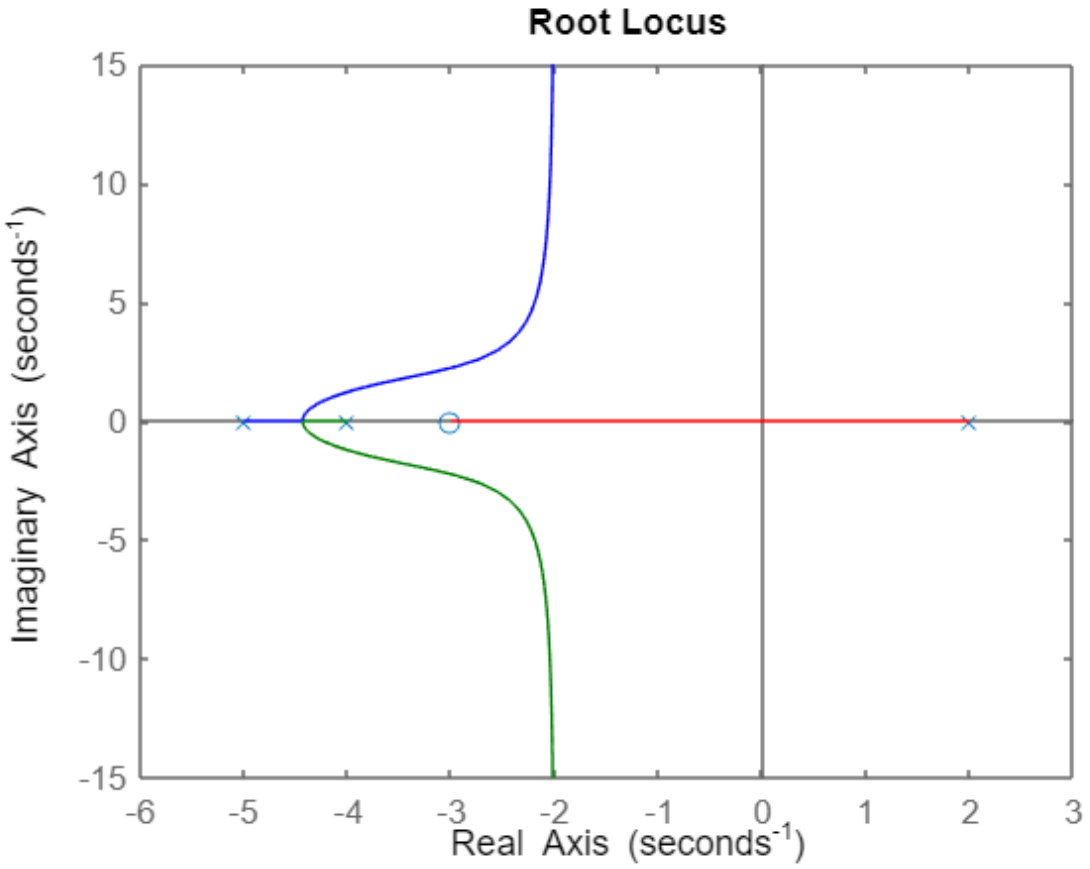

Root locus, zero: s = -12
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

این صفرها باعث می‌شوند مسیر قطب‌ها به سمت صفرها کشیده شوند و شکل مکان ریشه کامل تغییر کند طوری که قطب دورتر به سمت صفر حکرت میکند و دو قطب نزدیک به سمت مجانب ها حرکت می‌کنند.

نتیجه: برخی قطب‌ها ممکن است مسیر طولانی‌تر یا خمیده‌تر پیدا کنند باعث تغییر overshoot و damping سیستم می‌شود.صفرهای دور معمولاً سرعت پاسخ گذرا را خیلی زیاد نمی‌کنند اما می‌توانند فرکانس نوسان و رفتار گذرا را تغییر دهند.

سوال ۲)

الف)



توضیح: مجانب ها چون درجه نسبی تابع حلقه باز ۲ است، =۹۰ و ۹۰ درجه می‌باشد. زاویه خروج را نیز که اندازه‌گیری کنیم برای دو قطب سمت راست ۱۸۰ درجه و قطب دور و صفر ۰ درجه است. همچنین با محاسبه نقطه برهم شکست و محل k های مثبت متوجه می‌شویم دو قطب چپ به هم می‌رسند و سپس در نقطه برهم شکست از هم جدا شده و به سمت مجانب ها حرکت می‌کنند. و قطب سمت راست نیز به سمت صفر صورت حرکت می‌کند.

صفر سمت راست محور موهومی باعث شده نقطه تلاقی مجانب ها کمی به سمت راست نسبت به نقطه برهم شکست بیاید.

ب)

این دستور در نمودار مکان ریشه برای رسم خطوط راهنمای ضریب میرایی (ζ) (خطوطی که از مبدا مختصات می‌گذرند و مقادیر آنها از ۰ تا ۱ متغیر است) و فرکانس طبیعی ω_n (منحنی‌های دایره‌ای که از مرکز می‌گذرند) استفاده می‌شود. یعنی وقتی sgrid را اجرا می‌کنیم، روی نمودار Root Locus خطوطی ظاهر می‌شوند که کمک می‌کنند راحت‌تر تشخیص دهیم قطب‌ها با چه زاویه میرایی و چه فرکانس طبیعی‌ای حرکت می‌کنند. این خطوط بیشتر برای تحلیل پایداری و پاسخ دینامیکی سیستم به کار می‌روند. مانند تحلیل بهره و اورشوت.

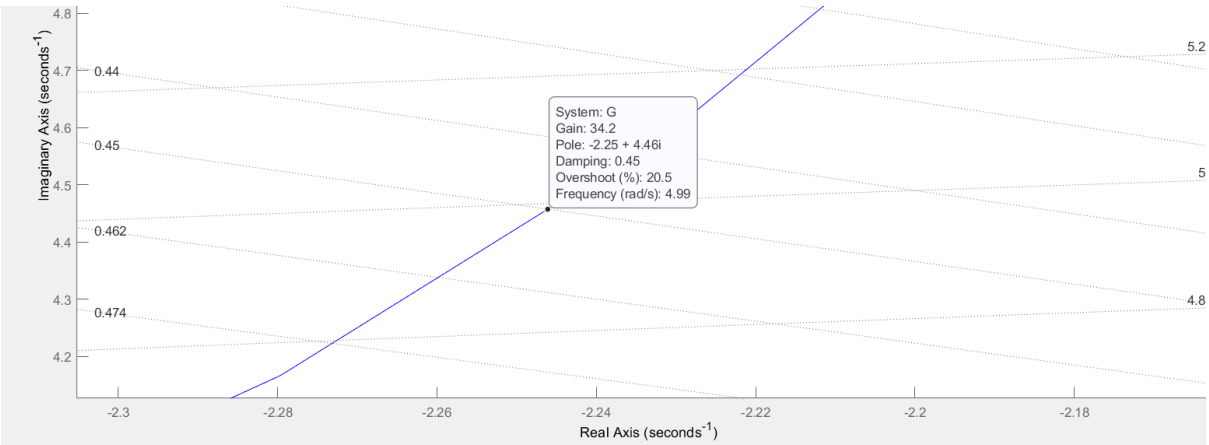
باتوجه به جدول:

مقادیر بالازدگی بر حسب ζ:

ζ	$O.S.$
0.7	5%
0.6	10%
0.5	16%
0.45	20%
0.22	50%
0	100%

.۱

از روی sgrid زتای ۰.۴۵ را پیدا می‌کنیم و با مکان ریشه تقاطع می‌دهیم آنجا باید اوردمپ حدودا ۲۰ درصد را بدهد.



که بله تقریبا درست بود.

(مقدار دقیق زتای ۰.۴۵۵ هست که دقیقا اوردمپ ۲۰ درصد را می‌دهد.)

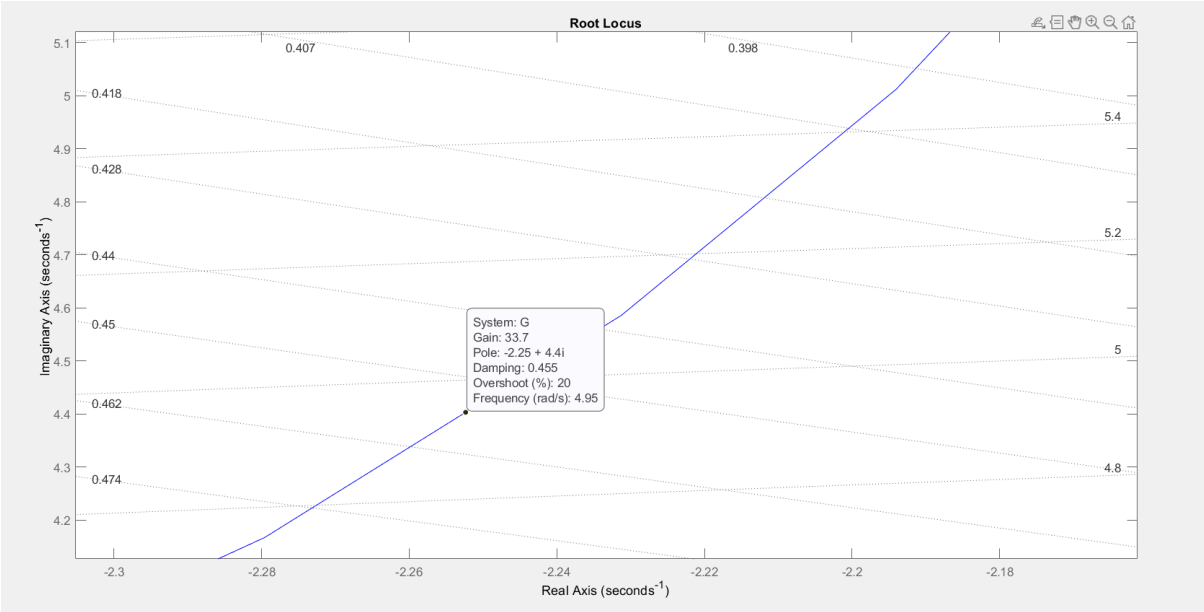
۲)

$$O.S. = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{(\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100 = 20$$

$$\frac{\pi\zeta}{(\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.609438 \rightarrow \zeta = 0.455949810769 \approx 0.456$$

$$\arccos(0.456) = 62.87°$$

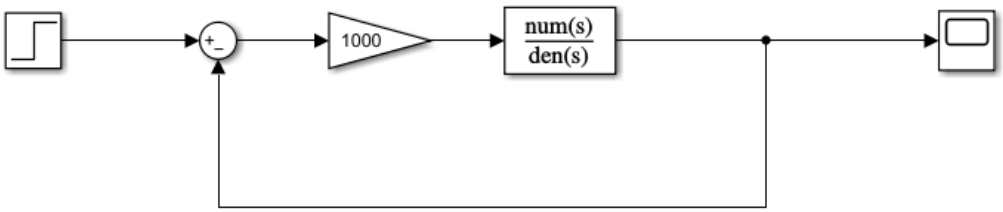
۳)

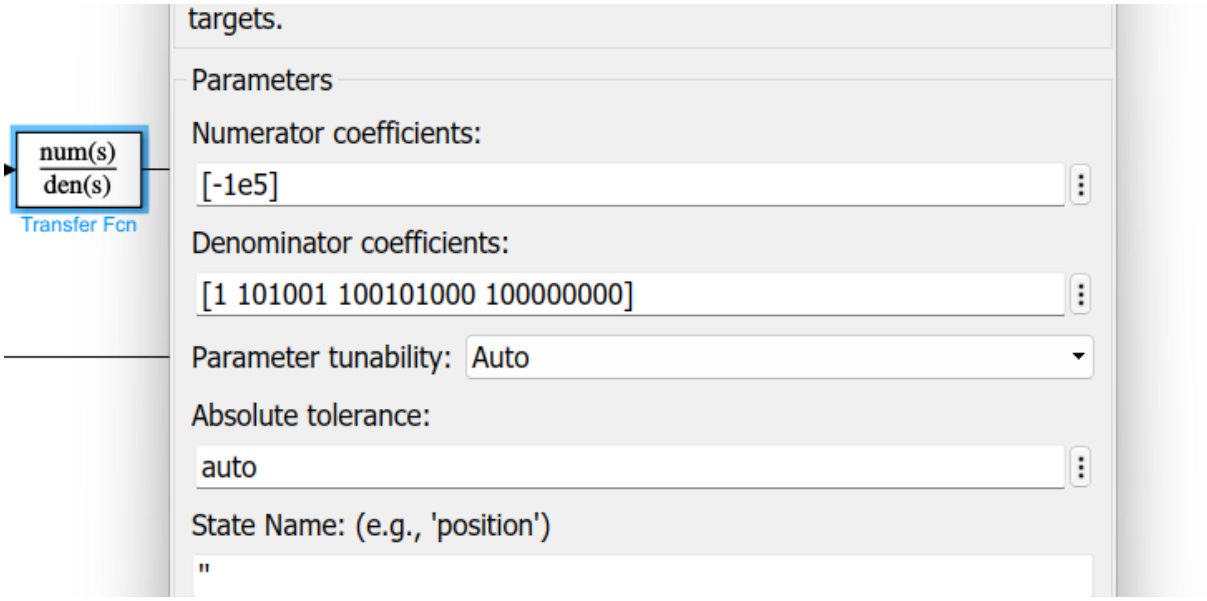


$$\zeta = 0.455 \quad \arccos(0.455) = 62.935°$$

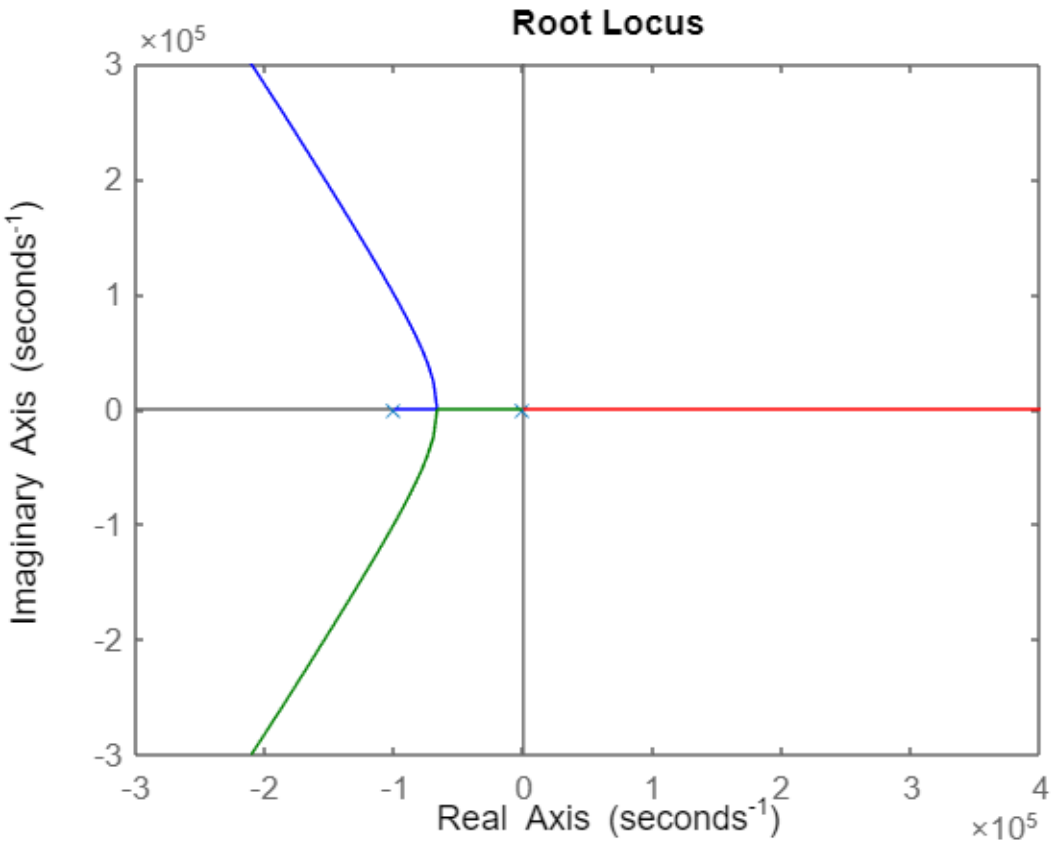
بله سازگار است. علت این موضوع آن است که در دستور *rlocus* در متلب، ناحیه‌ای که مقدار فراجهش به حدود بیست درصد می‌رسد، به‌صورت مشخص روی نمودار نمایش داده می‌شود. همان‌طور که در تصویر بالا مشاهده می‌شود، این ویژگی به‌خوبی قابل تشخیص است و امکان تطبیق مستقیم پاسخ زمانی با مکان هندسی ریشه‌ها را فراهم می‌کند.

سوال ۳)

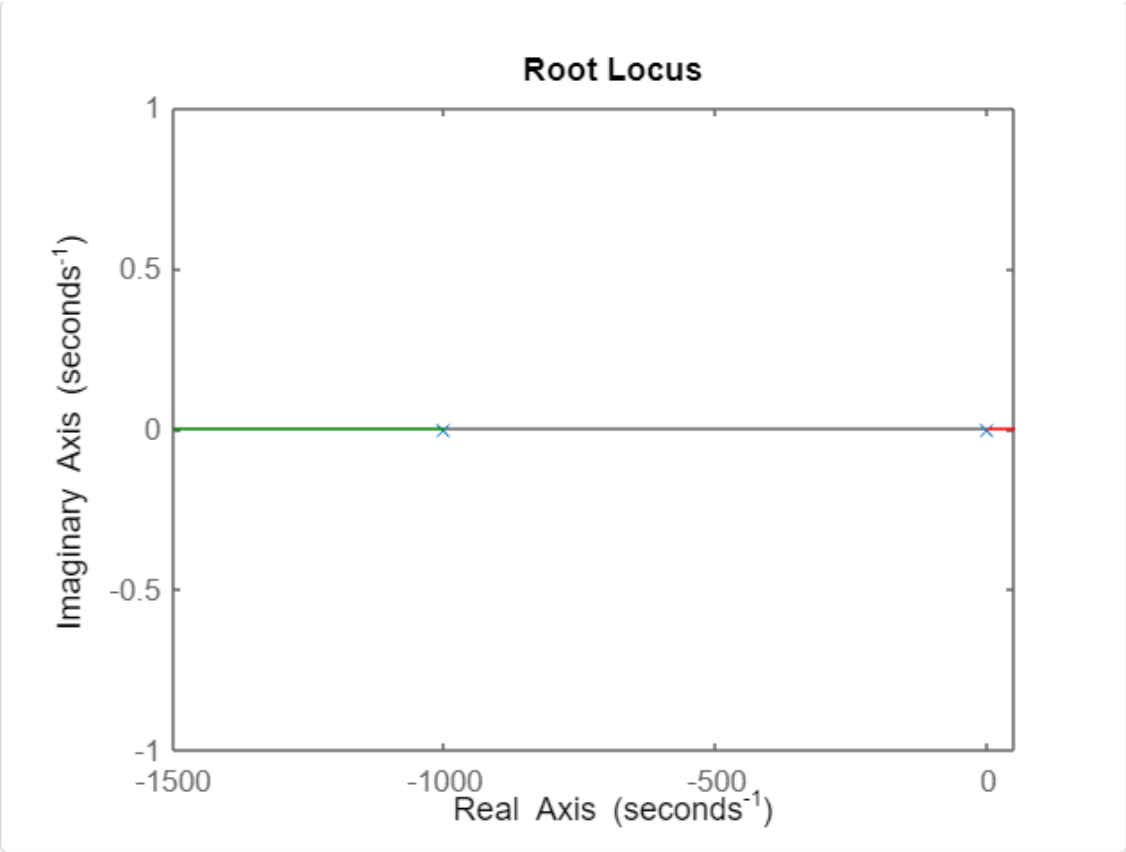




ب) باتوجه به پلاریته آپ امپ که منفی است برای مثبت شدن بهره‌ی کلی به مکان ریشه برای بهره منفی نیاز داریم. که یعنی اگر مجموع صفر و قطب سمت راست فرد بود آنجا **نباید** مکان ریشه باشد.



چون قطب های سمت راست دیده نمی‌شوند برای قطب منفی ۱۰۰۰ نمای دیگری از مکان ریشه را در نمودار زیر نشان می‌دهیم:



ج) هیچ صفری نداریم. بنابراین قطب ها به سمت مجانب‌ها که یعنی ۶۰ و ۰ و -۶۰ درجه هستند حرکت می‌کنند.

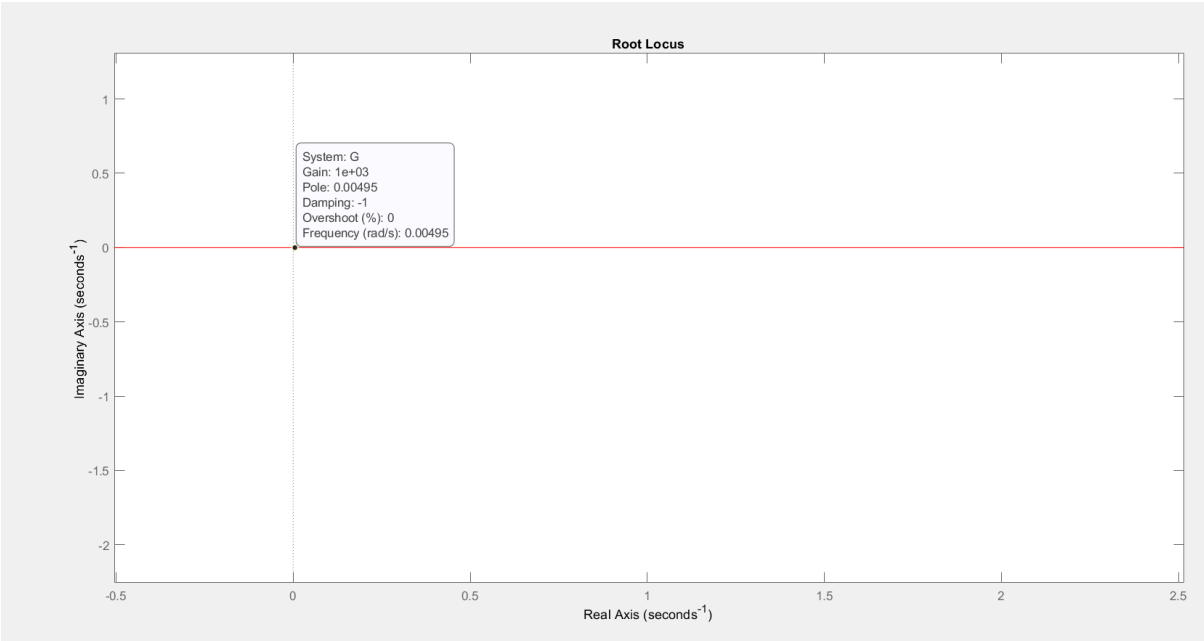
$$\theta = 2k \times \frac{180}{n-m} = -60°, 0°, 60°$$

با توجه به ریشه های مجاز مکان ریشه برای بهره منفی ، قطب سمت راست به سمت بی نهایت و دو قطب دیگر نیز به هم می‌رسند و در نقطه برهم شکست از هم جدا شده و به سمت مجانب های ۶۰ و -۶۰ درجه خود حرکت می‌کنند.

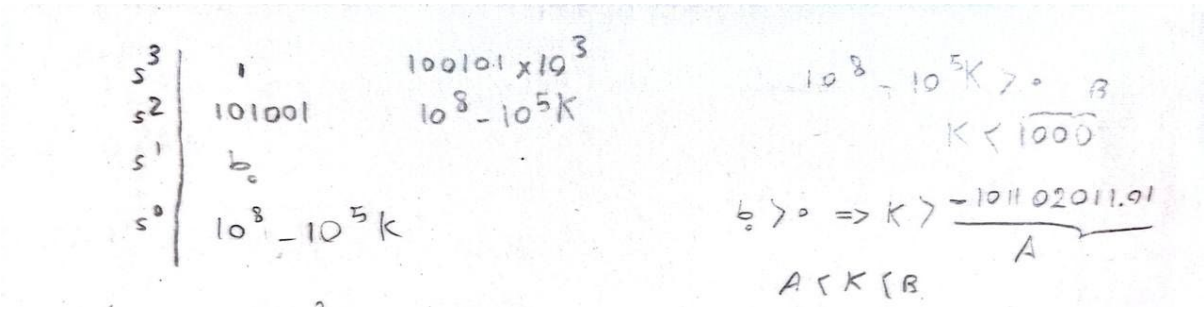
نقطه برهم شکست نیز پس از محاسبه بین دو قطب چپ قرار دارد که این شیوه حرکت قطب ها را تایید می‌کند.

د)

اگر یادمان باشد ما *critical k* را در روث با صفر کردن یکی از سطر ها و بدست اوردن *k* بدست می‌آوردیم و سپس فرکانس نوسانات که همان نقطه برخورد با محور موهومی با مکان ریشه بود را بدست می‌آوردیم. اینجا نیز بهره‌ی نقطه‌ی برخورد مکان ریشه با محور موهومی همان *critical k* می‌باشد.



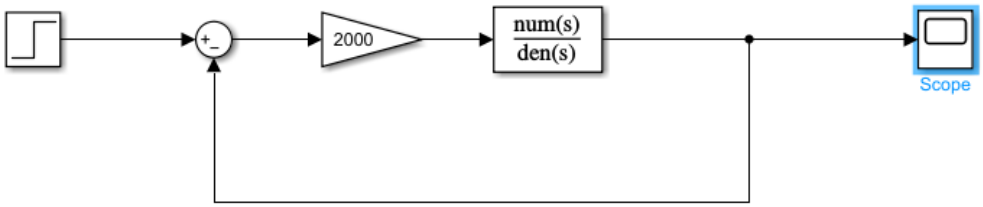
که ۱۰۰۰ می‌باشد. (محاسبات دستی نیز تایید می‌کند)



$$K = \frac{1}{R_f} \rightarrow R_f = 0.001\ \Omega$$

به ازای R_f کوچکتر از ۰.۰۰۱ اهم یا بهره بزرگتر از ۱۰۰۰ ناپایدار خواهد شد

برای بهره ۲۰۰۰ که ناپایدار است داریم :

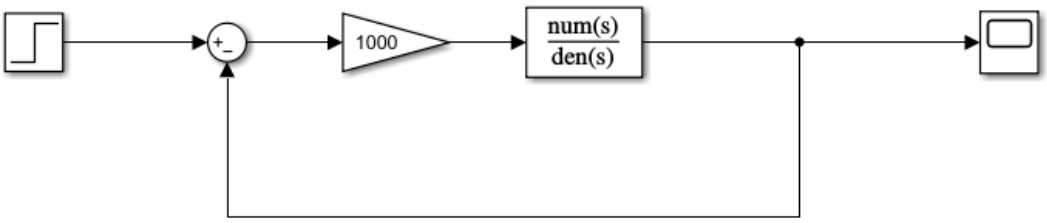


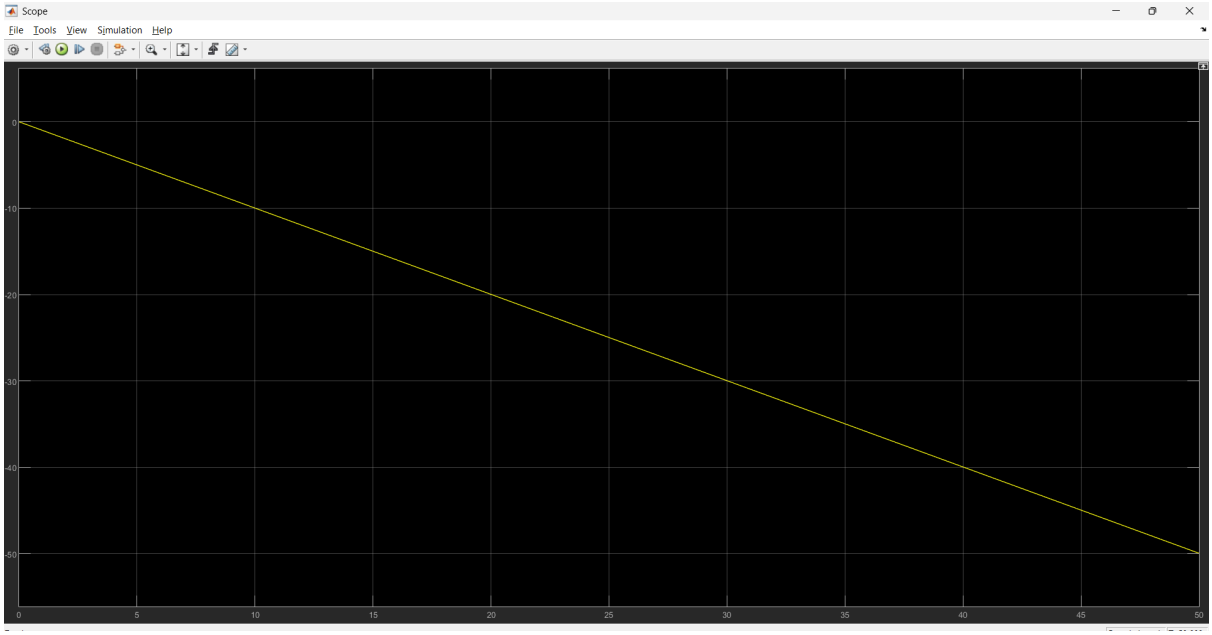
که واضحا ناپایدار است.

۵)

برای ناپایدار که در بخش قبلی رسم کردیم.

برای پایدار بحرانی:





که چرا این رفتار را دارد؟ چون با *k=1000* یا کمی کوچکتر از آن مثل ۹۹۹.۹۹

قطب های تابع تبدیل کلی به فرم زیر هستند:

$$(s+1)(s+1000)(s+100000)-10^8=0$$

Solution

$$s=0,\ s=\frac{-101001+\sqrt{101001^2-400404000}}{2},\ s=\frac{-101001-\sqrt{101001^2-400404000}}{2}$$

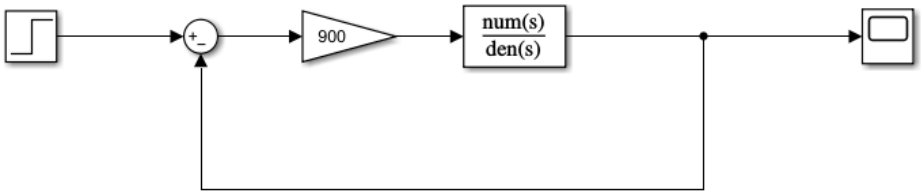
Decimal

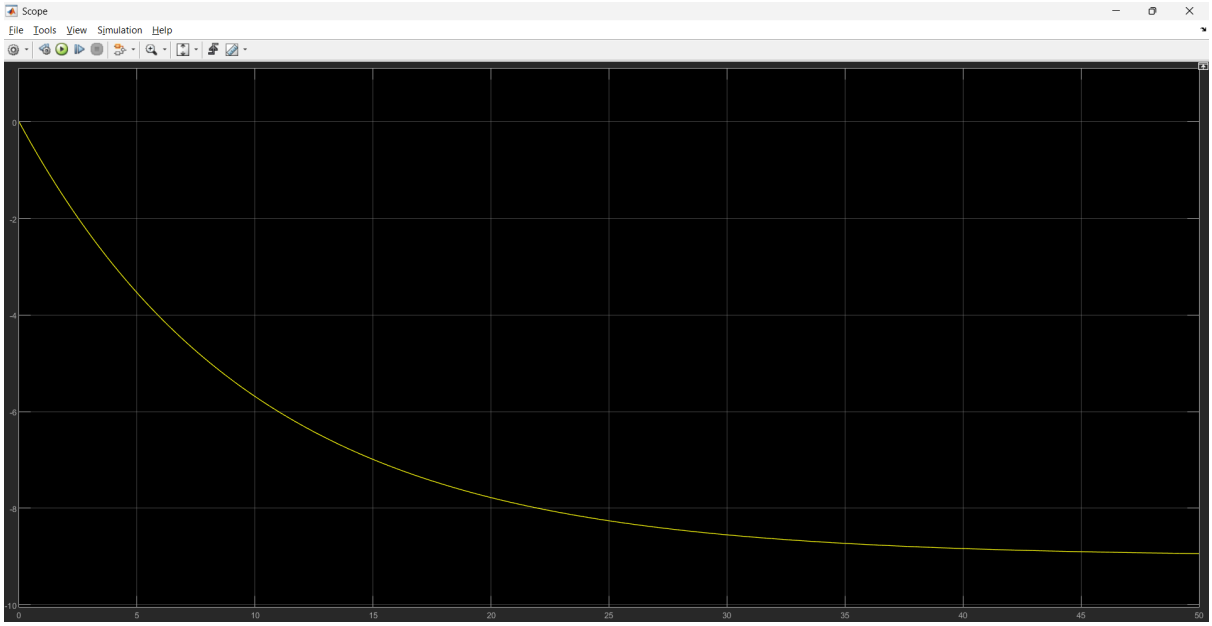
$$s=0,\ s=\ -1001.01010\ldots,\ s=\ -99999.98989\ldots$$

دو قطب دور خیلی خیلی سریع اثر گذرایشان می‌گذرد به‌طوری که اصلا مشخص نیست. و قطب نزدیک به *s=0* (اینجا چون دقیقا ۱۰۰۰ گذاشتیم خود صفر رو به عنوان قطب داد) رفتاری مثل انتگرال گیر دارد. اگر ۹۹۹.۹۹ را بهره می‌دادیم خیلی دیر همگرا می‌شد و برای مدت طولانی رفتاری مثل انتگرال گیر برای پاسخ پله که شکلی شبیه رمپ دارد(اینجا چون صورت منفی بود شیبش هم منفی شد) داشت.

برای پایدار:

K=900





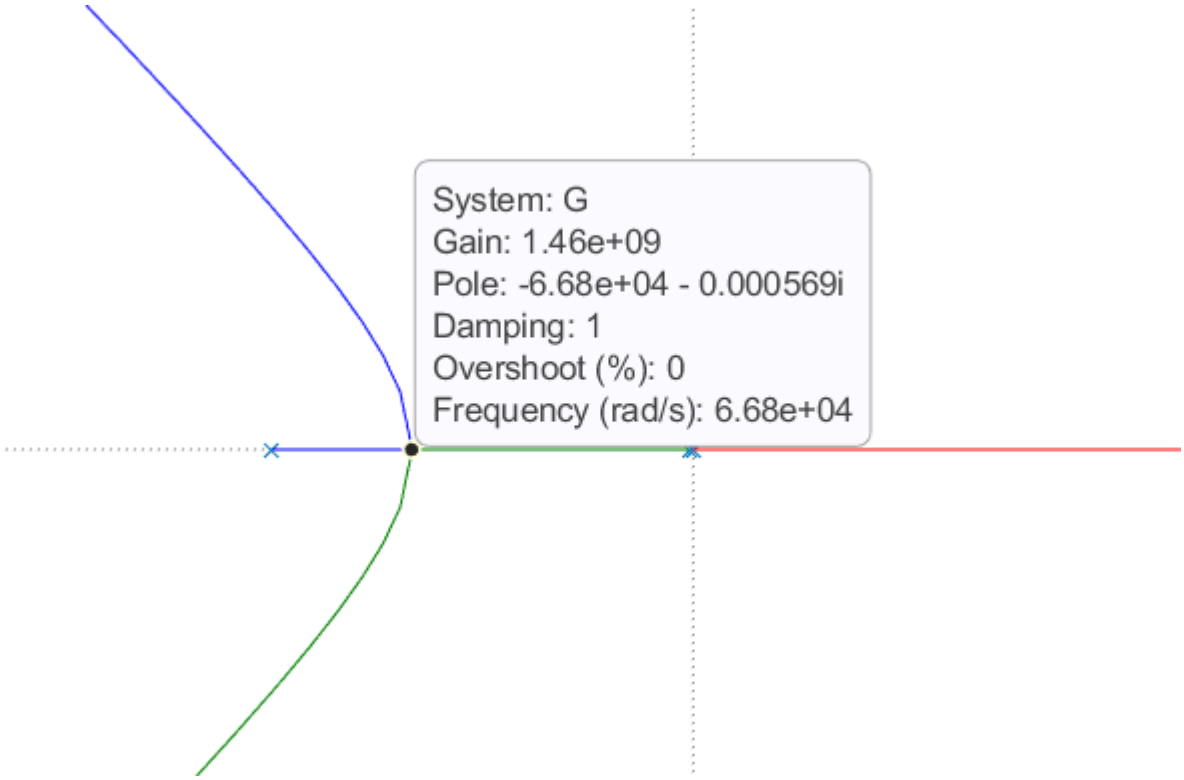
و)

بیشترین سرعت و نداشتن فراجهش زمانی اتفاق می‌افتد که ضریب میرایی یک باشد که در نقطه برهم شکست رخ می‌دهد.

```
syms s

D_s = -(s+1)*(s+1000)*(s+100000);

dds = diff(D_s, s);

break_points = solve(dds == 0, s);

double(break_points)
```

```
Real Axis (seconds⁻¹)

ans = 2×1
10^4 ×
    -6.6835
    -0.0499
```

که دومی جزو مکان ریشه مجاز نیست و صرفا $s = -66835$ جزو مکان ریشه مجاز هست و نقطه برهم شکست هست.

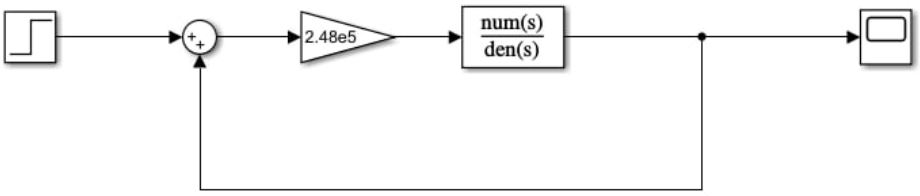


البته که این بهره پایدار نیست اما این بخش از سوال دنبال پایداری نبوده است. پس جواب با بیشترین سرعت اما بدون فراجهش بدست آورده شد.

که قابل رسم در *Simulink* نیست. چون پایدار نیست.

```
12:45 AM: Simulation   1   0   0
An error occurred while running the simulation and the simulation was terminated
Caused by: Derivative of state '1' in block 'q3/Transfer Fcn' at time 0.021100351934229229 is not finite. The simulation will be stopped. There may be a singularity in the solution.  If not, try reducing the step size
(either by reducing the fixed step size or by tightening the error tolerances)
Component: Simulink | Category: Block error
```

در این قسمت از دستیار آموزشی از این بابت پرسیده شد و گفتند که نمودار مکان ریشه برای بهره مثبت رو رسم کنم و بهره نقطه برهم شکست اونجا رو رسم کنم و جهت فیدبک رو عوض کنم.



که فراجهش ندارد و به سرعت به ۱- همگرا می‌شود .

نکته: پاسخ به این سوال برای قبل از اعمال تغییرات (عوض کردن سر مثبت و منفی آپ امپ) می‌باشد که دستیار آموزشی گفتند که نیازی به تغییر و حل مجدد سوال اصلاح شده نیست.