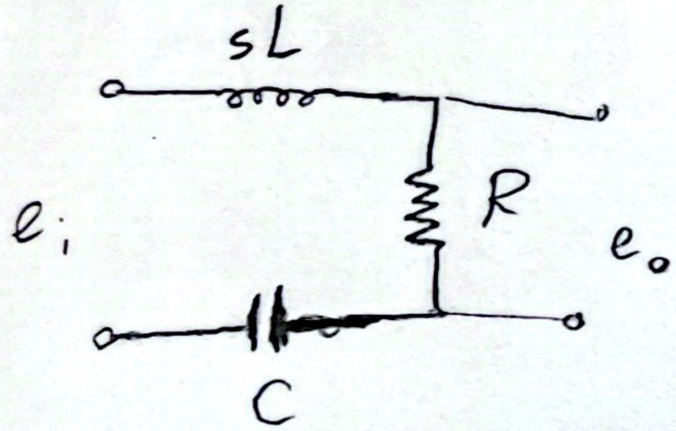
LCS_HW5 ۸۱۰۱۰۲۶۰۱ امیرمحمد میرحسینی به نام او

سوال ۱)



$$I(s) = \frac{E_I(s)}{Z_{eq}(s)} \Rightarrow Z_{eq}(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

سوال ساده‌ی مدار ۲:

$$E_I(s) = \mathcal{L}\{e_i(t)\} = \frac{E_i\,\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow I(j\omega) = \frac{E_I(j\omega)}{Z_{eq}(j\omega)}$$

$$Z_{eq}(j\omega) = R + jL\omega + \frac{1}{jwC}$$

$$|I(j\omega)| = \frac{|E_I(j\omega)|}{|Z_{eq}(j\omega)|} = \frac{E_i}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\measuredangle I(j\omega) = \measuredangle E_I(j\omega) - \measuredangle Z_{eq}(j\omega)$$

$$\measuredangle Z_{eq}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$i(t) = \frac{E_i}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right)$$

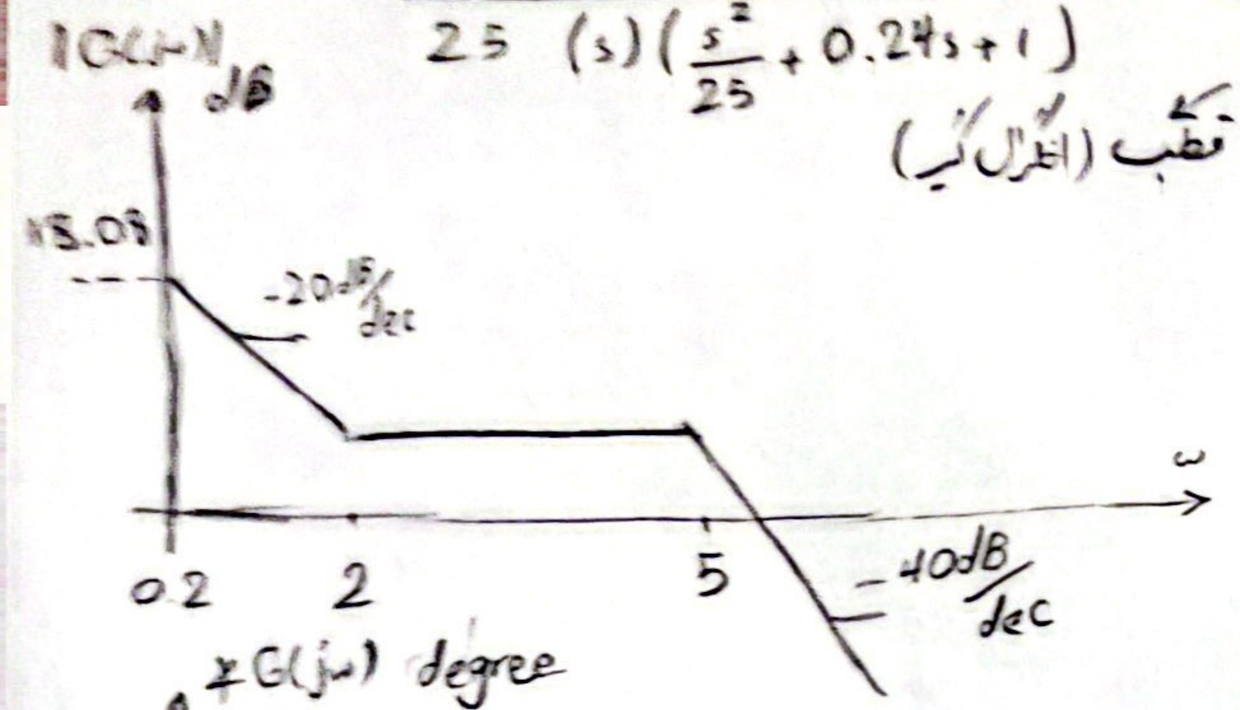
سوال ۲) الف)

$$G(s) = \frac{20(2)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{25\,(s)\left(\frac{s^2}{25}+0.24s+1\right)} = \frac{1.6\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{s\left(\frac{s^2}{25}+0.24s+1\right)} \rightarrow \omega = 2$$

قطب (انتگرال گیر)

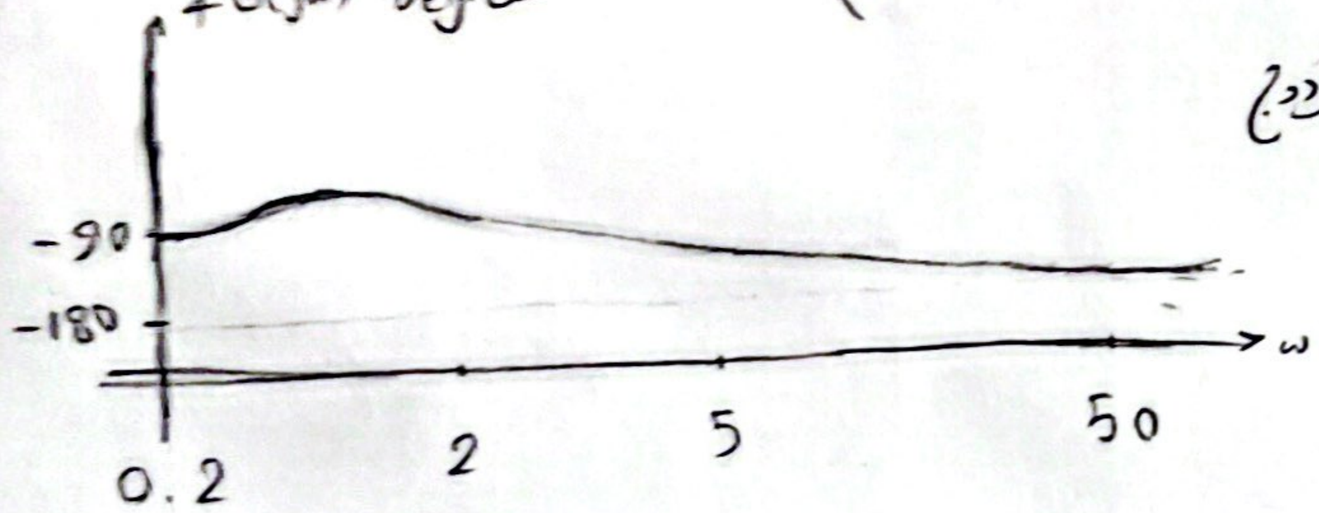
$\omega_n = 5$

$$20\log(|G(j\omega)|)\Big|_{\omega=0.2} = 18.08\ dB$$



شروع با ۰dB ← s قطب

مثبت شدن ← s+2 صفر



قطب مزدوج

$-(1+2-1)\,90 = -180^\circ$ ← زاویه فاز نهایی

مینیمم فاز است ✓

ب) صفر سمت راست محور موهومی

← مینیمم فاز نیست ✗

$$G(s) = \frac{40\,(1-0.5s)}{s(1+s)(1+0.1s)}$$

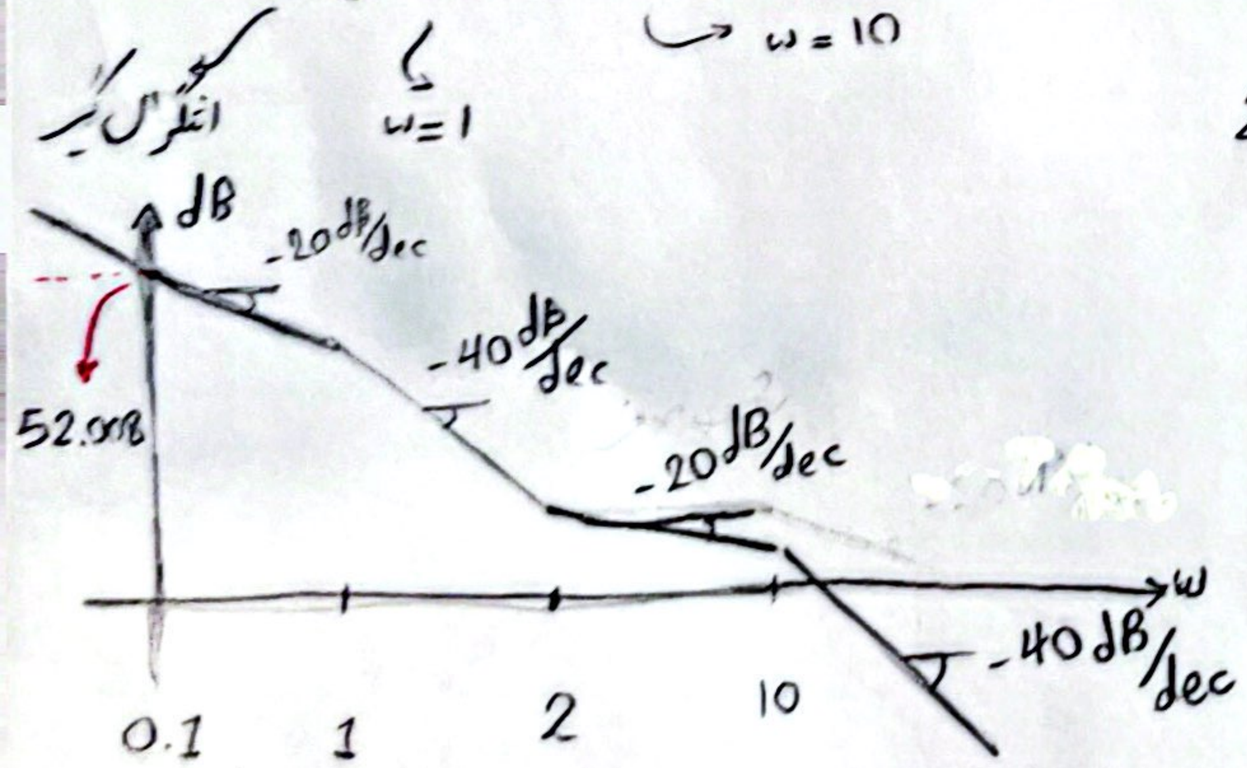
$\omega = 2$

$\omega = 10$

$\omega = 1$

انتگرال گیر

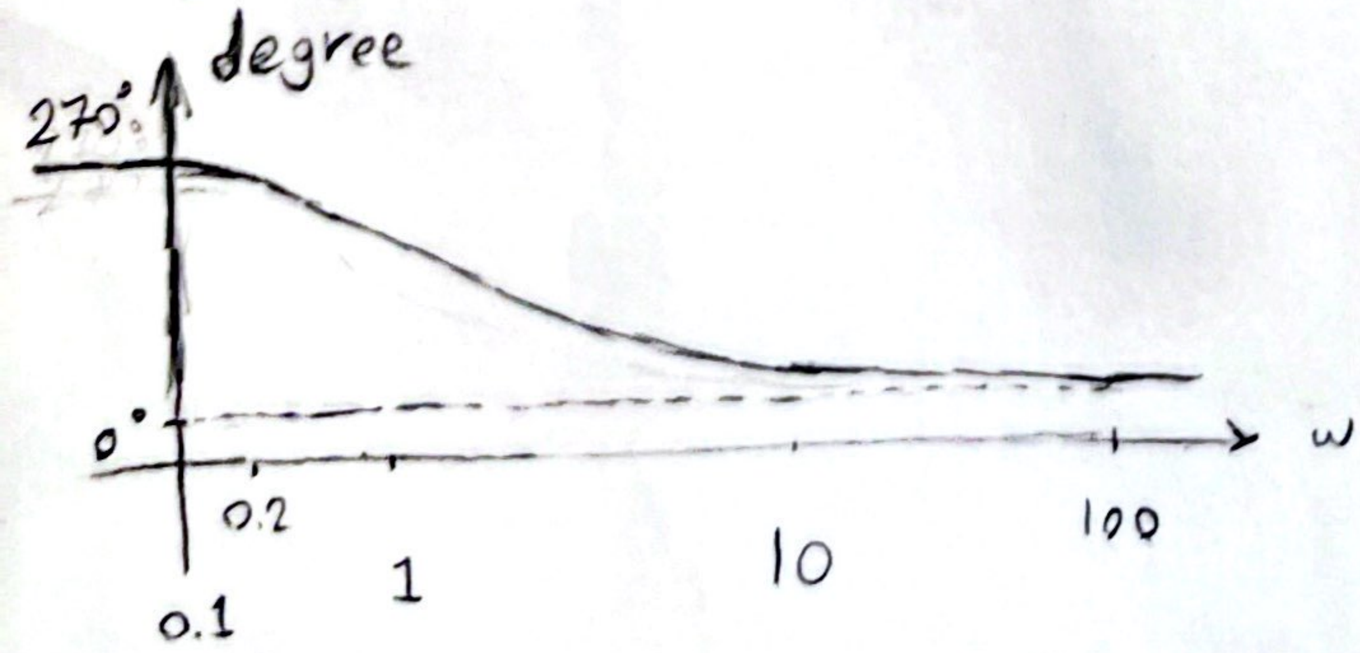
$$20\log(|G(j\omega)|)\Big|_{\omega=0.1} = 52.008$$



قطب s ← شروع با -90° ← 270° معادل

صفر غیر مینیمم فاز ← -90° (!)

زاویه نهایی فاز $-90(3+1) = -360^\circ$ ← 0° معادل

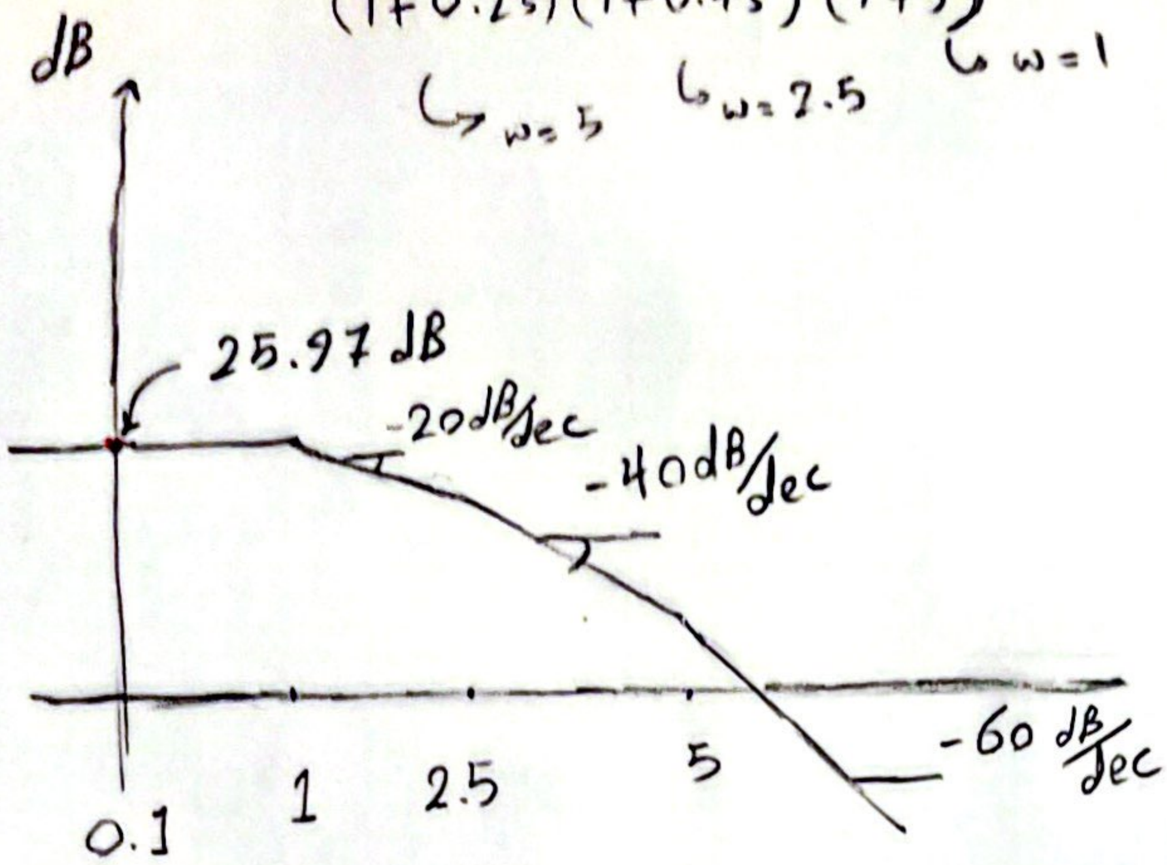


ج) مینیمم فاز است ✓

$$G(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.4s)(1+s)}$$

$\hookrightarrow \omega=5$ $\quad \hookrightarrow \omega=2.5$ $\quad \hookrightarrow \omega=1$

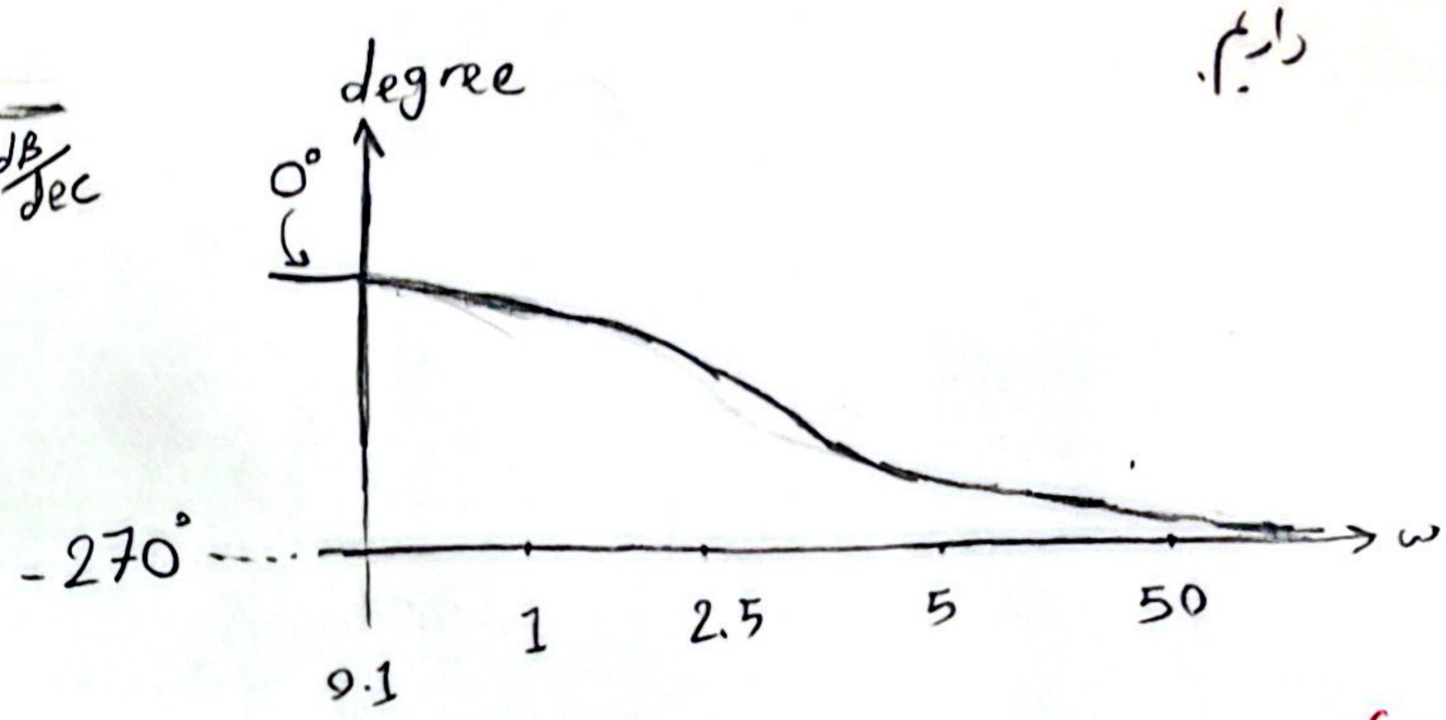
$$20\log(|G(j\omega)|)\Big|_{\omega=0.1} = 25.97\ dB$$



چون انتگرال گیر نداریم و قطب ساده داریم

زاویه از صفر درجه شروع می‌شود

و در فاز نهایی زاویه $-(3)90^\circ = -270^\circ$ داریم.



(د

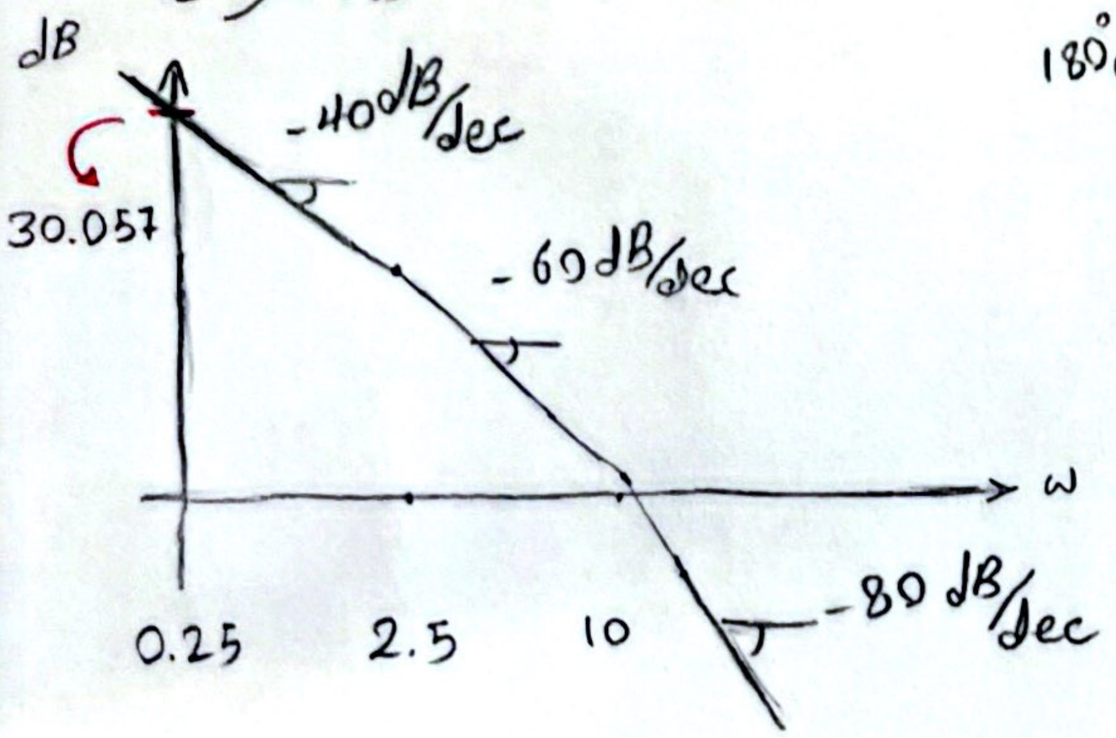
$$G(s) = \frac{2}{s^2(1+0.1s)(1+0.4s)}$$

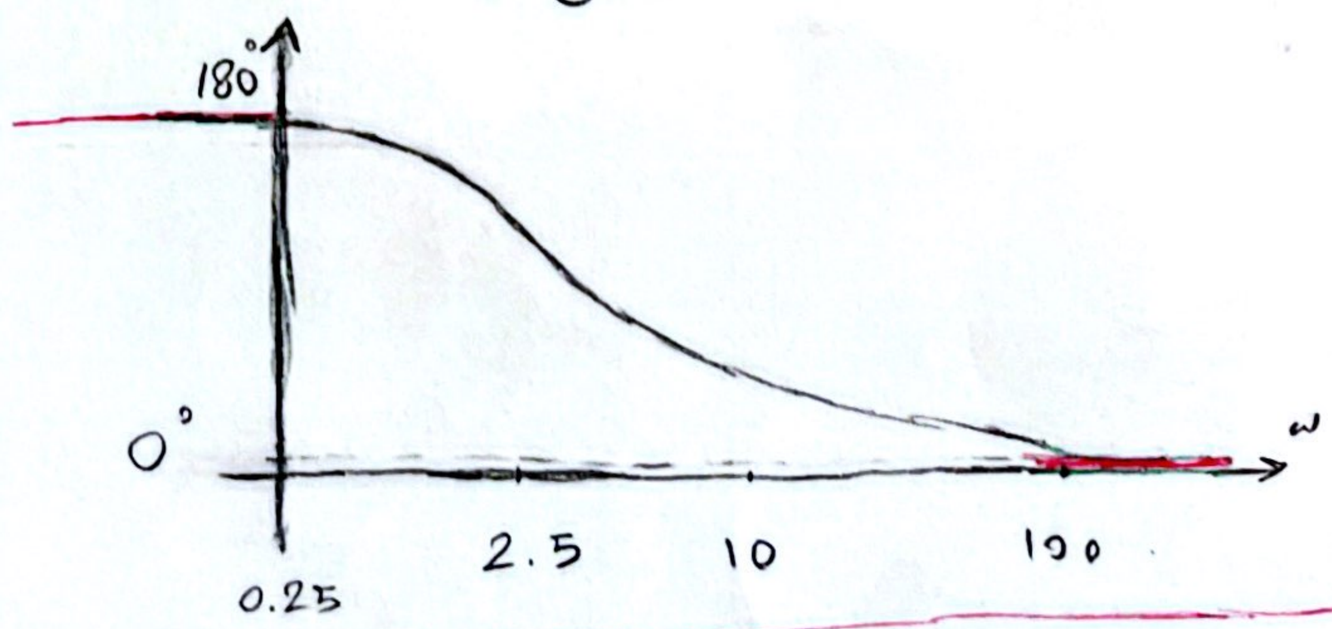
دو تا انتگرال گیر $\quad \omega=10 \quad \omega=2.5$

$$20\log(|G(j\omega)|)\Big|_{\omega=0.25} = 30.057$$

دو تا انتگرال گیر ← شروع از $-180^\circ = 2(-90)$ ← معادل 180°

زاویه فاز نهایی $-90(4) = -360^\circ$ ← معادل 0°





سوال ۳) با توجه به نمودار اندازه Bode داریم:

صفرها: $s=2$, $s=4$

قطب ها: $s=0$ (انتگرال گیر) , $s=8$, $s=24$, $s=36$ ← با توجه به این

$$\left(1+\frac{s}{4}\right) = (1+as)$$

$$\left(1+\frac{s}{24}\right) = (1+bs)$$

$$a = \frac{1}{4} \qquad b = \frac{1}{24}$$

ادامه ۳)

داریم: $\dfrac{20\log|G(j\omega_1)| - 20\log|G(j\omega_2)|}{\log\omega_1 - \log\omega_2} = \text{شیب}\ \dfrac{dB}{dec}$ $\qquad 6\dfrac{dB}{oct} = 20\dfrac{dB}{dec}$

$\Rightarrow \omega_1 = 2,\ \omega_2 = 8 \Rightarrow 20\log|G(j2)| = b \Rightarrow \dfrac{b-0}{\log 2 - \log 8} = -20 \Rightarrow b = 33.22$

$$20\log(|G(j\omega)|)\Big|_{\omega=2} = 33.22 \qquad |G(j2)| = \frac{|k|\sqrt{1+((0.5)2)^2}\ \sqrt{1+(\frac{1}{4}\times 2)^2}}{2^2\left(\sqrt{1+(\frac{1}{4})^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{2}{36})^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{2}{24})^2}\right)}$$

$$= 45.8 \Rightarrow k \simeq 120$$

سوال ۶) الف) قطب در $\omega = 5$ ← اما در زاویه افزایش زاویه دارد. ← قطب غیرمینیمم فاز ← $(1 - \frac{s}{5})$

↳ $-20\ dB/dec$

قطب در $\omega = 100$ ← زاویه کم می‌شود ← قطب مینیمم فاز $(1 + \frac{s}{100})$ ← در نمودار زاویه هم مشخص است

↳ $-40\ dB/dec$

$\frac{100}{10} = 10$

$100(10) = 1000$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{k}{(1-\frac{s}{5})(1+\frac{s}{100})}$$

ب) دقیقاً مثل الف اما همه قطب‌ها می‌نیمم فاز هستند ← $(1+\frac{s}{5})$ و $(1+\frac{s}{100})$

چون دقیقاً نمودار بهره‌ی الف را داشت.

$$G(s) = \frac{k}{(1+\frac{s}{5})(1+\frac{s}{100})}$$

ج) چون نمودار زاویه از -90° شروع شده، یعنی $\frac{1}{s}$ داریم. چون زاویه نهایی و بهره به ترتیب -180° و $-40\ dB/dec$ است یعنی درجه نسبی ۲ است (مرتبه قطب‌ها ۲ تا از صفرها بیشتر است). چون نمودار زاویه ابتدا نزولی سپس صعودی و بعد از آن نزولی شده یعنی اگر $c < a < b$ ← می‌باشد.

$$G(s) = \frac{k(1+\frac{s}{a})}{(1+\frac{s}{b})(1+\frac{s}{c})}$$

با توجه به نقطه چین‌ها در نمودار بهره که اشاره به ۳ دسی بل پایین (برای قطب) و ۳ دسی بل بالا (برای صفر) داریم:

$c = 1 \qquad a = 10 \qquad b = 200$

می‌نیمم فاز هم نیست چون نمودار بهره با زاویه تناسب دارد.

$$\Rightarrow G(s) = \frac{k(1+\frac{s}{10})}{(1+s)(1+\frac{s}{200})}$$

سوال ۴)

$P=3$ (نوع ۳ هست)

مرتبه‌ی $3-2=1$ هست

$-3\times 90=-270^\circ$, $-90(3-2)=-90^\circ$

$$GH(s)=\frac{(s+1)(s+10)}{s^3}$$

ω	اندازه	فاز
0^+	∞	-270°
$+\infty$	0	-90°

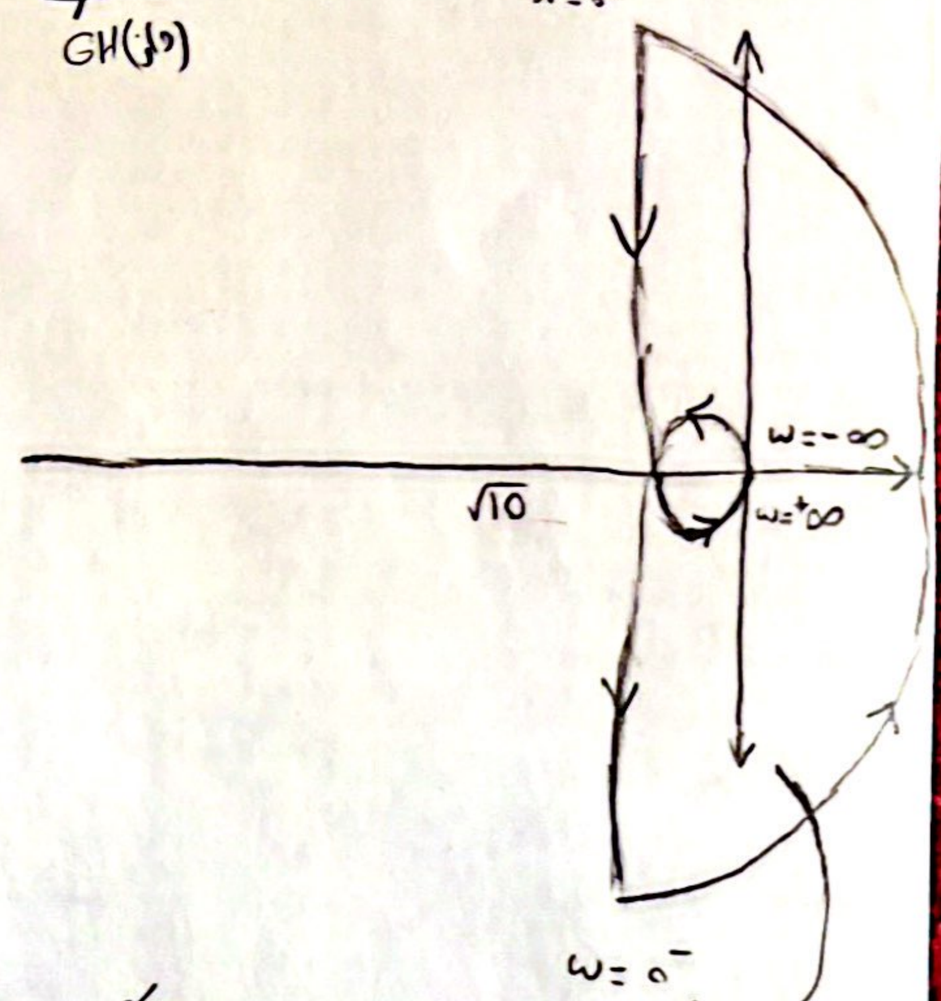
$Im\{GH(j\omega)\}=0$ ★

$$GH(j\omega)=\frac{-11\omega+j(10-\omega^2)}{\omega^3}$$

$\Rightarrow$ ★: $10-\omega^2=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{10} \Rightarrow |GH(j\sqrt{10})|=1.1$

$\measuredangle_{GH(j0)}=-180+\tan^{-1}(0)_{\omega=0^+}=-180^\circ$

$\lim_{\omega\to 0} Re\{G(j\omega)\}=-\infty$ مجانب ندارد چون



اسکیل محور موهومی خیلی خیلی بزرگتر از محور حقیقی است

$$GH(s)=\frac{5(s+1)}{s^2(s^2+s+3)}$$

$P=2$ (نوع ۲ هست)

مرتبه‌ی: $4-1=3$

$-2\times 90=-180$

$(4-1)(-90)=-270$

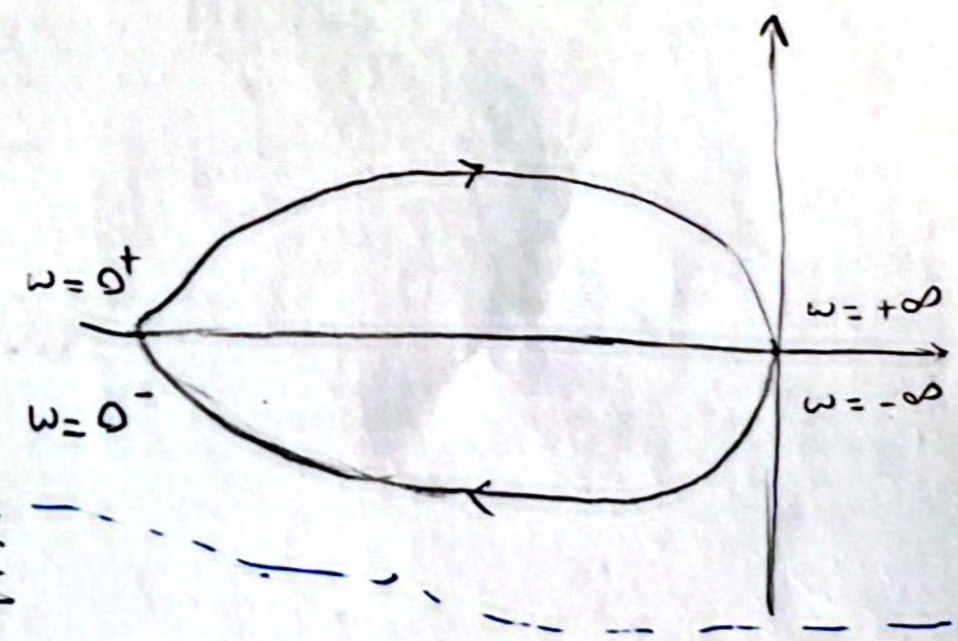
ω	اندازه	فاز
0^+	∞	-180°
$+\infty$	0	-270°

$$GH(j\omega)=\frac{-5(1-j\omega^3)}{\omega^2(\omega^4-\omega^2+1)}$$

$Im\{G(j\omega)\}=0 \to \omega=\infty$

$Re\{G(j\omega)\}=0 \to \omega=0$

با محورها تقاطع ندارد



$$GH(s)=\frac{e^{-s}}{s} \to GH(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega-j\frac{\pi}{2}}}{\omega}$$

$|GH(j\omega)|=\frac{1}{\omega}$ $\quad \measuredangle GH(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-\omega$ rad $\quad Re\{G(j\omega)\}=0$

$\Rightarrow$ تقریب پاده $\to e^{-s}=\frac{1-s/2}{1+s/2}$

$\cos(\omega+\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow \omega+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\omega=k\pi$

$Im\{G(j\omega)\}=0 \Rightarrow \sin(\omega+\frac{\pi}{2})=0$

$\Rightarrow \omega+\frac{\pi}{2}=k\pi \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{2}(2k+1)$

هر $\frac{\pi}{2}$ با یک محور برخورد می‌کند.

ω	اندازه	فاز
0^+	∞	-90°
$+\infty$	0	?

$$GH(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1-s/2}{1+s/2}\right)$$

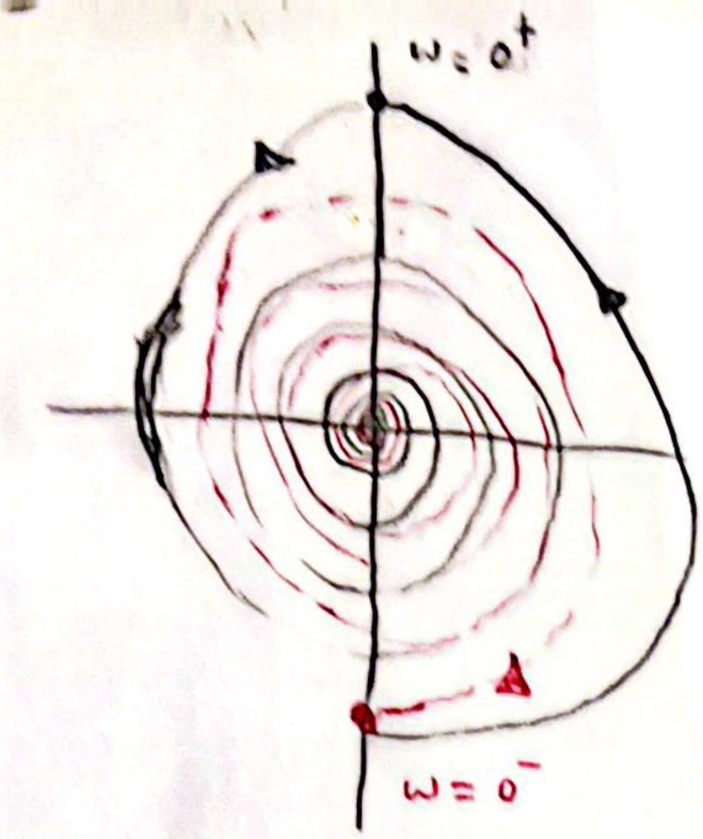
به فرم استفاده از آن درست نیست

$$\to GH(j\omega)=\frac{1-\omega^2/4-j\omega}{\omega(1+\omega^2/4)}$$

$$\measuredangle GH(j\omega)=-90+\tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)=-270^\circ$$

(ادامه ۴)

بازسازی نظر.



سوال ۵) مخرج: $s((s+2)^2+9)=0 \Rightarrow \underbrace{s}_{s}\,\underbrace{(s^2+4s+13)}_{s-2\pm j3} \longrightarrow$ LHP همه هستند.

$\hookrightarrow N_p=0 \Rightarrow N=N_p-N_z \Rightarrow N=0$ برای پایداری می‌خواهیم $\Leftarrow N_z=0$ بنابراین

یعنی نایکوئیست حلقه باز ۱- را دور نزند. چون رسم نایکوئیست فرم نمایی کمک است با فاز مسئله را حل می‌کنیم.

$1+G(s)=0 \Rightarrow G(s)=-1 \Rightarrow |G(j\omega)|=1$ و $\measuredangle G(j\omega)=-180^\circ$

اینجا فرکانسی که $\omega_c \rightarrow$ $\measuredangle G(j\omega)=-\omega_c T-90-\tan^{-1}\left(\frac{4\omega_c}{13-\omega_c^2}\right)=-180$

$|G(j\omega_c)|=1$ باشد $\leftarrow$ $|G(j\omega_c)|=1=\frac{2}{\omega\sqrt{(13-\omega^2)^2+(4\omega)^2}} \Rightarrow \omega_c=0.153$

با حل معادلات بالا $T_{max}=9.96\,s$

تقریب پاده. $G(s)=\frac{2\left(1-\frac{T}{2}s\right)}{s(s^2+4s+13)(1+\frac{T}{2}s)}$

مسلماً تأخیر مثبت است $T>0$

همه قطب‌ها RHP هستند. $\Leftarrow$ $N_p=0$ برای پایداری $(N_z=0) \Leftarrow N=0$

$$|G(j\omega)|=2\,\frac{\cancel{\sqrt{1+\frac{T^2}{4}\omega^2}}}{\cancel{\sqrt{1+\frac{T^2}{4}\omega^2}}}\,\frac{1}{|\omega|\sqrt{(\omega^2-13)^2+16\omega^2}}=1 \Rightarrow \omega_c=0.153$$

$$\measuredangle G(j\omega)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)\underbrace{-\tan^{-1}\left(\frac{4\omega_c}{13-\omega_c^2}\right)-90}_{-92.7}=-180$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)=87.3^\circ$$

همانطور که از تقریب پاده انتظار داشتیم

$T_{max}=12.47\,s$

اجازه میده بهمون تأخیر طولانی‌تری قبل از ناپایداری سیستم وجود داشته باشه چون در فرکانس‌های بالاتر تأخیر فاز را کمتر از واقعیت نشان میده.