دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پروژه پایانی درس نرم‌افزار ریاضی
رشته: ریاضیات و کاربردها

عنوان پروژه

پیاده‌سازی، تحلیل و مقایسه روش‌های عددی
در درون‌یابی، تحلیل داده‌ها و انتگرال‌گیری

نام دانشجو:
امیررضا محمدپور

شماره دانشجویی:
۴۰۳۱۲۰۴۱

استاد درس:
حسینقلی‌زاده

نیمسال دوم ۱۴۰۴–۱۴۰۵
خرداد ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱ مقدمه **۲**

۲ بخش اول: درونیابی (Interpolation) **۳**
۱.۲ ضوابط ریاضی استخراج‌شده ۳
۲.۲ تحلیل نمودار درون‌یابی ۳

۳ بخش دوم: تحلیل داده‌ها (Data Analysis) **۵**
۱.۳ نتایج و نمودارها ۵
۲.۳ تحلیل رفتار الگوریتم‌ها ۵

۴ بخش سوم: انتگرال‌گیری عددی (Numerical Integration) **۷**
۱.۴ مقایسه دقت روش‌ها و جدول خطاها ۷
۲.۴ تحلیل علمی نتایج انتگرال‌گیری ۷

۵ نتیجه‌گیری **۹**

۱ مقدمه

هدف از این پروژه، پیاده‌سازی، بهینه‌سازی و تحلیل سه‌گانه‌ی کلیدی در حوزه محاسبات عددی شامل درونیابی عددی (Numerical Interpolation)، تحلیل آماری و بررسی پیچیدگی زمانی الگوریتم‌ها (Algorithm Analysis)، و انتگرال‌گیری عددی توابع فاقد پادمشتق مقدماتی (Numerical Integration) است. کلیه بخش‌ها به کمک زبان برنامه‌نویسی پایتون و کتابخانه‌های قدرتمند علمی آن نظیر NumPy, SciPy, Matplotlib و SymPy پیاده‌سازی شده‌اند. در ادامه، جزئیات محاسباتی و تحلیل علمی نتایج ارائه شده است.

۲ بخش اول: درونیابی (Interpolation)

در این بخش، هدف یافتن تابعی پیوسته است که به دقت از نقاط تجربی زیر عبور کند:

$$\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,8),(5,5),(6,2)\}$$

این کار به دو روش چندجمله‌ای لاگرانژ (مرتبه بالا) و اسپلاین مکعبی طبیعی (Natural Cubic Spline) انجام شد.

۱.۲ ضوابط ریاضی استخراج‌شده

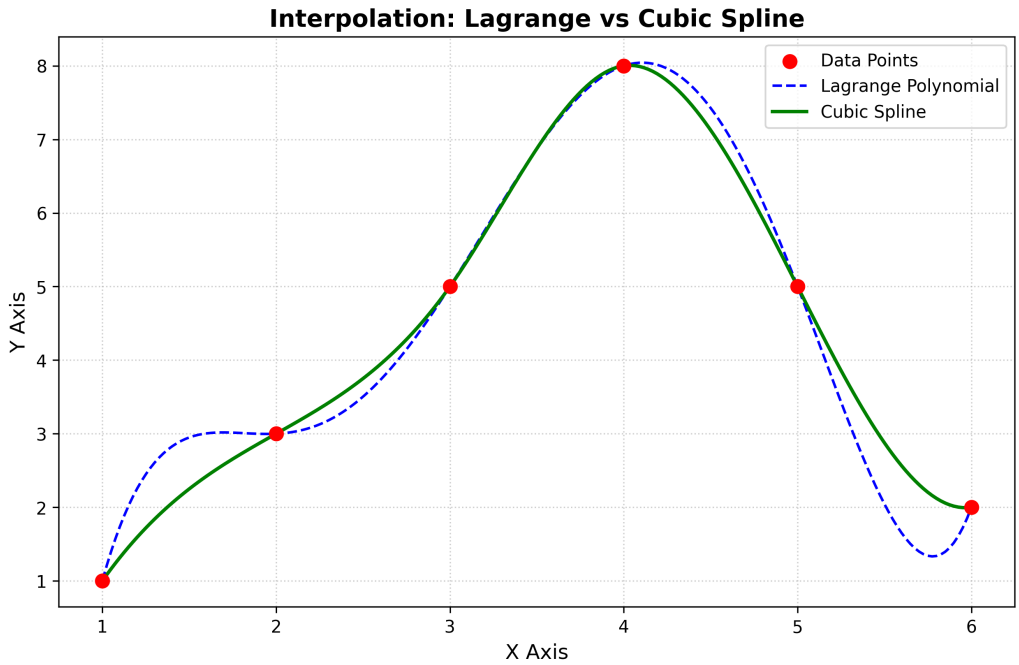
با استفاده از محاسبات نمادین (Symbolic Computation) در پایتون، ضابطه دقیق چندجمله‌ای لاگرانژ مرتبه ۵ به صورت زیر حاصل شد:

$$P(x) = 0.175x^5 - 2.9583x^4 + 18.375x^3 - 52.0417x^2 + 68.45x - 31.0 \tag{۱}$$

برای روش اسپلاین مکعبی، تابع به صورت تکه‌ای در ۵ بازه به فرم زیر تعریف می‌شود که محاسبات پایتون مقادیر دقیق ضریب هر قطعه را بدین شکل استخراج کرد:

$$S(x) = \begin{cases} 0.6667(x-1)^3 - 2.0000(x-1)^2 + 3.3333(x-1) + 1.0 & x \in [1,2] \\ 0.6667(x-2)^3 + 1.3333(x-2) + 3.0 & x \in [2,3] \\ -2.3333(x-3)^3 + 2.0000(x-3)^2 + 3.3333(x-3) + 5.0 & x \in [3,4] \\ 1.6667(x-4)^3 - 5.0000(x-4)^2 + 0.3333(x-4) + 8.0 & x \in [4,5] \\ 1.6667(x-5)^3 - 4.6667(x-5) + 5.0 & x \in [5,6] \end{cases} \tag{۲}$$

۲.۲ تحلیل نمودار درون‌یابی



شکل ۱: نمودار درونیابی نقاط به روش لاگرانژ و اسپلاین مکعبی

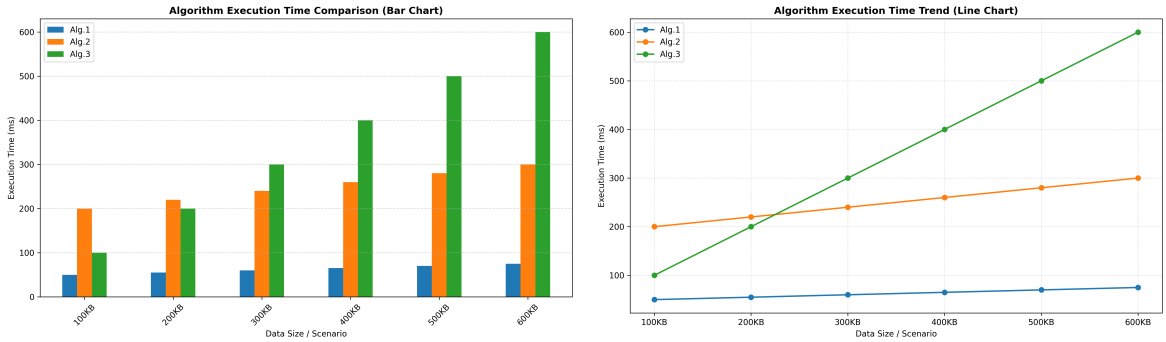
همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، چندجمله‌ای لاگرانژ (خط‌چین آبی) به دلیل درجه‌ی بالا، در نزدیکی مرزها (به خصوص بازه ۵ تا ۶) دچار نوسان نسبتاً شدیدی شده است که نمونه‌ای از پدیده رونگ (Runge's Phenomenon) است. در مقابل، اسپلاین مکعبی به دلیل تکه‌ای بودن و برقراری شرط پیوستگی مشتق اول و دوم در گره‌ها (C^2continuity)، مسیر بسیار نرم‌تر، هموارتر و واقعی‌تری را از بین نقاط طی کرده است.

۳ بخش دوم: تحلیل داده‌ها (Data Analysis)

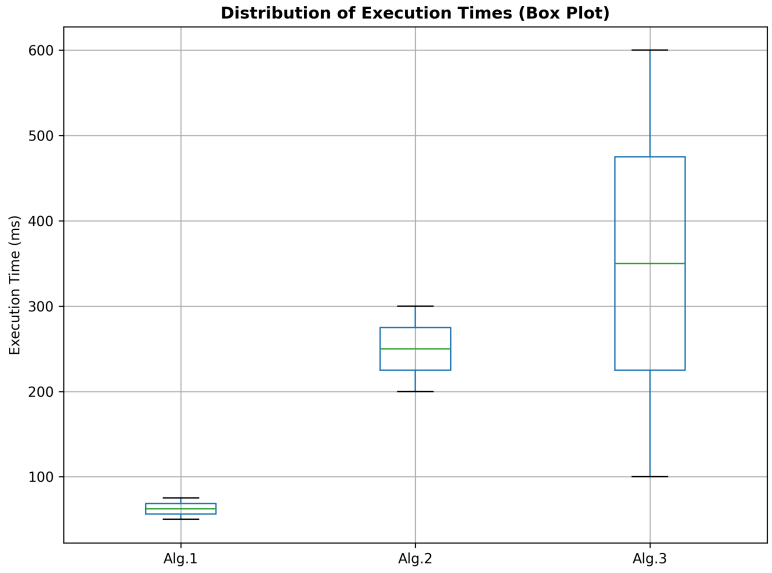
در این بخش، زمان اجرای سه الگوریتم محاسباتی تحت سناریوهای مختلف حجمی داده‌ها (از ۱۰۰ کیلوبایت تا ۶۰۰ کیلوبایت) مورد ارزیابی قرار گرفت.

۱.۳ نتایج و نمودارها

میانگین زمان اجرای حاصل شده برای الگوریتم دوم (Alg.2) برابر با **۰۰.۲۵۰ میلی‌ثانیه** محاسبه شد که نشان‌دهنده پایداری متوسط این الگوریتم است.



شکل ۲: سمت راست: نمودار میله‌ای مقایسه‌ای | سمت چپ: روند رشد زمان اجرای الگوریتم‌ها



شکل ۳: نمودار جعبه‌ای (Box Plot) توزیع زمان اجرای الگوریتم‌ها

۲.۳ تحلیل رفتار الگوریتم‌ها

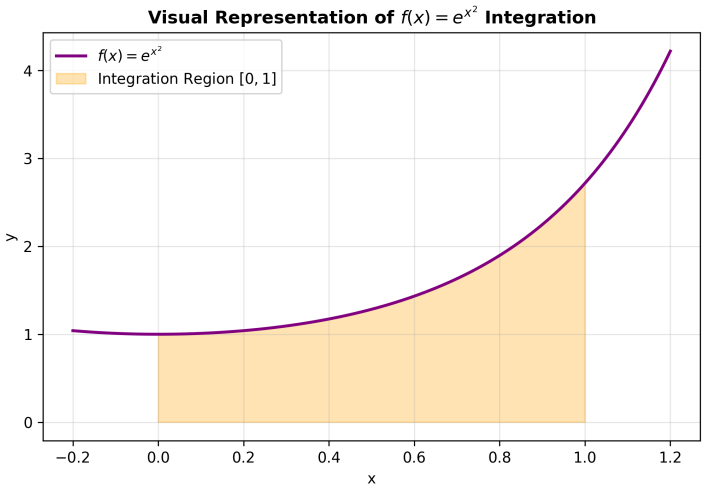
بر اساس شکل ۲ و شکل ۳ می‌توان رفتار الگوریتم‌ها را تحلیل کرد:

- **الگوریتم ۱ :(Alg.۱)** دارای زمان اجرای بسیار پایین و تقریباً ثابت است که نشان‌دهنده پیچیدگی زمانی از مرتبه $\mathcal{O}(1)$ یا $\mathcal{O}(\log n)$ است. نوسان بسیار ناچیز در نمودار جعبه‌ای، پایداری فوق‌العاده این الگوریتم را در داده‌های بزرگ تأیید می‌کند.

- **الگوریتم ۲ :(Alg.۲)** روند رشد زمان اجرای آن کاملاً خطی و با شیب ثابت ملایم است که پیچیدگی زمانی $\mathcal{O}(n)$ را تداعی می‌کند. این الگوریتم تعادلی منطقی بین کارایی و پایداری برقرار ساخته است.
- **الگوریتم ۳ :(Alg.۳)** رفتاری به شدت نوسانی و صعودی دارد. زمان اجرای آن در داده‌های کوچک معقول است اما با افزایش حجم داده به صورت چندجمله‌ای با درجه بالا یا نمایی رشد کرده و در داده‌ی ۶۰۰ کیلوبایت به زمان ۶۰۰ میلی‌ثانیه می‌رسد که نشان‌دهنده پیچیدگی ناپایدار زمانی (نظیر $\mathcal{O}(n^2)$) است.

۴ بخش سوم: انتگرال‌گیری عددی (Numerical Integration)

محاسبه انتگرال معین تابع غیرمقدماتی $f(x) = e^{x^2}$ در بازه $[0, 1]$ به دلیل عدم وجود پادمشتق تحلیلی، یکی از چالش‌های محاسباتی است که به کمک روش‌های عددی حل شد. شکل ۴ محدوده انتگرال‌گیری زیر منحنی را نشان می‌دهد.



شکل ۴: نمایش بصری تابع $f(x) = e^{x^2}$ و ناحیه زیر انتگرال در بازه $[0, 1]$

۱.۴ مقایسه دقت روش‌ها و جدول خطاها

مقادیر عددی محاسبه‌شده توسط پایتون به همراه خطای مطلق واقعی نسبت به مقدار مرجع بسیار دقیق محاسباتی در جدول ۱ مقایسه شده‌اند.

جدول ۱: مقایسه عملکرد و خطای مطلق روش‌های مختلف انتگرال‌گیری عددی

روش انتگرال‌گیری	مقدار محاسبه‌شده	خطای مطلق
ذوزنقه‌ای (n=۱۰۰)	۴۶۲۶۹۷۰۴۹۸.۱	4.5304×10^{-5}
سیمپسون ۱/۳ (n=۱۰۰)	۴۶۲۶۵۱۷۴۸۹.۱	3.0198×10^{-9}
ترکیب گوسی (n=۵)	۴۶۲۶۵۱۶۶۸۰.۱	7.7888×10^{-8}
مقدار دقیق (مرجع)	**۴۶۲۶۵۱۷۴۵۹.۱**	**۰۰۰۰.۰**

۲.۴ تحلیل علمی نتایج انتگرال‌گیری

با تحلیل جدول ۱ مشخص است که:

۱. **روش سیمپسون ۱/۳** با ۱۰۰ بخش‌بندی، دارای کمترین خطا (3.01×10^{-9}) بوده و بیشترین همگرایی با مقدار دقیق را دارد. علت آن درجه صلبیت و دقت بالاتر این روش نسبت به ذوزنقه‌ای در تقریب تابع صعودی نمایی به وسیله سهمی‌ها است.

۲. **روش ترکیب گوسی (Gauss-Legendre)** تنها با **۵ نقطه ارزیابی** توانسته است به خطای خیره‌کننده 7.78×10^{-8} برسد. این نشان‌دهنده کارایی فوق‌العاده این روش است

که بدون نیاز به تقسیم‌بندی‌های ریز و با کمترین حجم محاسبات، پاسخی بسیار دقیق ارائه می‌دهد.

۳. **روش ذوزنقه‌ای** ضعیف‌ترین عملکرد را دارد؛ زیرا این روش رفتار نمایی و منحنی تابع را در هر زیربازه به صورت خط راست فرض می‌کند که منجر به خطای برش بیشتری می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

در این گزارش، مباحث اساسی محاسبات عددی با موفقیت شبیه‌سازی و به صورت علمی تحلیل شدند. نتایج حاصل تایید می‌کنند که انتخاب روش عددی مناسب باید با توجه به ماهیت داده‌ها و هزینه‌ی محاسباتی انجام گیرد. برای درونیابی نقاط محدود، اسپلاین مکعبی کارایی هموارتری دارد؛ در تحلیل داده‌ها، شناخت شیب تغییرات به بهینه‌سازی الگوریتم‌ها کمک می‌کند؛ و در انتگرال‌گیری عددی توابع غیرخطی شدید، روش‌های ترکیب گوسی و سیمپسون با تفاوت چشمگیری نسبت به روش ذوزنقه‌ای برتری دارند. کدهای پایتون پیاده‌سازی شده در این پروژه ساختاریافته، کاملاً مستند و قابل توسعه برای داده‌های با ابعاد بزرگتر می‌باشند.