



هوش مصنوعی

پاییز ۱۴۰۲

اساتید: محمدحسین رهبان، مهدیه سلیمانی باغشاه

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: یاسمن زلفی، امیرحسین عابدی، مهیار افشین مهر، پریا حاجی پور

مهلت ارسال: ۲۵ آذر

شبکه‌های بیزی و زنجیره‌های مارکوف

تمرین چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمرین تا سقف ۳ روز و در مجموع ۵ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۲۴ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد. جزئیات نحوه اعمال تاخیرها را می‌توانید در سایت درس مشاهده کنید.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده هر کس حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ + ۱۰ نمره)

۱. (۱۰ + ۱۰ نمره)

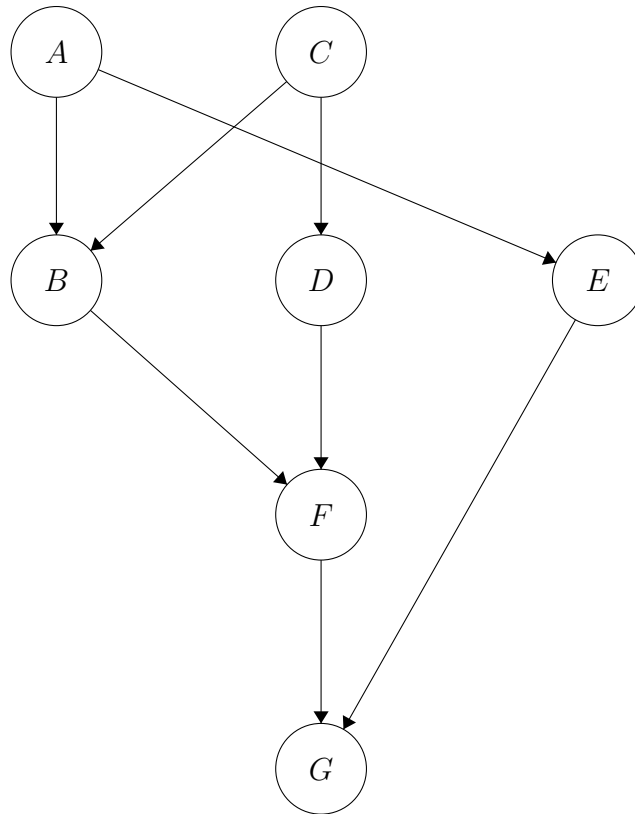
(آ) یک شبکه‌ی بیزی طراحی کنید که رابطه‌های استقلال زیر را داشته باشد.

- B از C به شرط A مستقل باشد
- A از C به شرط E مستقل نباشد
- A از D به شرط B مستقل باشد

(ب) (امتیازی) حال با فرض باینری بودن متغیرها مقادیر مجهول را بدست آورید. (راهنمایی: از بخش الف کمک بگیرید.)

A	B	C	Prob
۰	۰	۰	۰.۱
۰	۰	۱	۰.۱
۰	۱	۰	x
۰	۱	۱	y
۱	۰	۰	۰.۱
۱	۰	۱	۰.۳
۱	۱	۰	۰.۰۵
۱	۱	۱	z

۲. (۲۰ نمره) با توجه به گراف زیر به بخش‌های آ و ب پاسخ دهید.



(آ) فرض کنید که متغیرهای A، D، F، و G دودویی بوده، برای متغیرهای C و E سه مقدار ممکن وجود داشته و متغیر B چهار مقدار متفاوت می‌تواند به خود بگیرد. مشخص کنید که جدول مربوط به هر یک از متغیرها چند سطر خواهد داشت.

(ب) مشخص کنید که کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً برقرار می‌باشد. (برای پاسخ خود استدلال بیاورید.)

- $A \perp\!\!\!\perp C$ •
- $A \perp\!\!\!\perp C|B$ •
- $E \perp\!\!\!\perp C|G, F$ •
- $B \perp\!\!\!\perp D$ •
- $B \perp\!\!\!\perp D|C$ •
- $B \perp\!\!\!\perp D|F$ •
- $B \perp\!\!\!\perp D|C, F$ •
- $A \perp\!\!\!\perp F|B$ •

۳. (۲۵ نمره) می‌خواهیم ارتباط میان تصادف و عوامل مختلف را بررسی کنیم. در این شبکه، معنای هر یک از متغیرها به صورت زیر است:

- R: متغیر دودویی است که نشان می‌دهد هوا بارانی است یا خیر.
- S: متغیر دودویی است که نشان می‌دهد آیا آبپاش خاموش است یا روشن.
- WG: متغیر دودویی است که نشان می‌دهد زمین خشک است یا تر.
- SR: متغیر دودویی است که نشان می‌دهد آیا جاده لغزنده است یا خیر.
- A: متغیر دودویی است که نشان می‌دهد آیا تصادف اتفاق می‌افتد یا خیر.

می‌دانیم علل اصلی تصادف، خیس بودن زمین و لغزندگی جاده است که خیس بودن زمین روی لغزندگی هم تاثیر می‌گذارد. همچنین بارانی بودن هوا و روشن بودن آبیاش باعث خیش شدن زمین شده و بارانی بودن هوا روی روشن بودن آبیاش تاثیر می‌گذارد.

(آ) برای این شرایط یک شبکه‌ی بیزی طراحی کنید.

(ب) اگر امروز هوا بارانی باشد، احتمال تصادف را براساس احتمال‌های شرطی بنویسید.
با توجه به جداول زیر به بخش‌های بعدی پاسخ دهید.

R	$P(R)$
F	0.95
T	0.05

R	S	$P(S R)$
F	F	0.8
T	F	0.92
F	T	0.2
T	T	0.08

WG	SR	$P(SR WG)$
F	F	0.9
T	F	0.12
F	T	0.1
T	T	0.88

WG	SR	A	$P(A WG, SR)$
F	F	F	0.998
T	F	F	0.995
F	T	F	0.993
T	T	F	0.991
F	F	T	0.002
T	F	T	0.005
F	T	T	0.007
T	T	T	0.009

S	R	WG	$P(WG R, S)$
F	F	F	0.99
T	F	F	0.9
F	T	F	0.15
T	T	F	0.02
F	F	T	0.01
T	F	T	0.1
F	T	T	0.85
T	T	T	0.98

(ج) به کمک rejection sampling می‌خواهیم $P(A|SR = T, S = F)$ را به دست آوریم. ابتدا مشخص کنید که از بین نمونه‌های زیر کدام یک رد می‌شوند و سپس به کمک نمونه‌های باقی‌مانده مقدار $P(A = T|SR = T, S = F)$ تخمین بزنید. نمونه‌ها به صورت چندتایی (R, S, WG, SR, A) می‌باشند.

(T, F, T, T, F)
 (T, T, T, T, T)
 (F, F, T, T, T)
 (F, F, T, T, F)
 (T, F, T, T, F)
 (T, F, F, F, F)
 (F, F, T, T, T)
 (F, T, F, F, T)

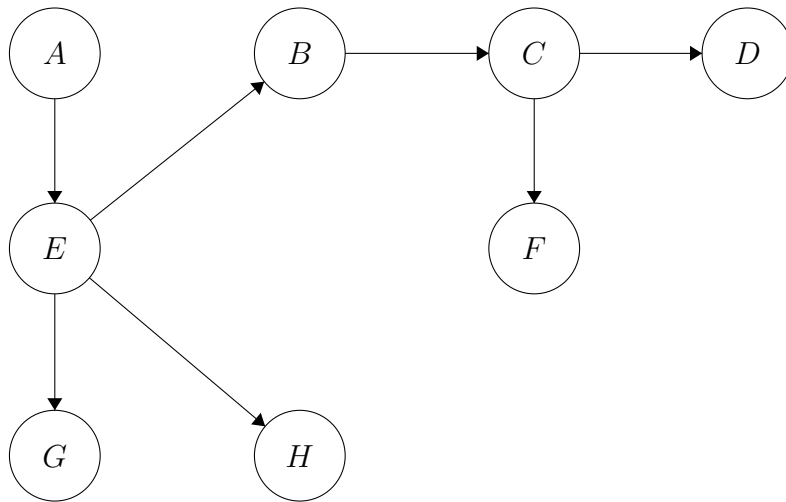
(د) به کمک روش likelihood weighting می‌خواهیم $P(A|R = F, SR = F)$ را به دست آوریم. نمونه‌ها به صورت زیر داده شده‌اند. ابتدا وزن هر نمونه را محاسبه کنید و سپس مقدار $P(A|R = F, SR = F)$ را تخمین بزنید. نمونه‌ها به صورت چندتایی (R, S, WG, SR, A) می‌باشند.

(F, F, T, F, F)
 (F, T, T, F, T)
 (F, F, T, F, T)
 (F, F, T, F, F)
 (F, F, T, F, F)
 (F, F, F, F, F)
 (F, F, T, F, T)
 (F, T, F, F, T)

(ه) به کمک روش gibbs sampling می‌خواهیم $P(A|S = T, SR = T)$ را تخمین بزنیم. این کار را در ۱۰ مرحله تکرار کنید. مقدار اولیه متغیرها را به صورت (T, T, T, T, F) در نظر بگیرید. پیمایش خود را با توجه به ترتیب از چپ به راست مطابق (R, S, WG, SR, A) انجام دهید. اعداد تصادفی تولید شده از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ به صورت زیر می‌باشند:

۰/۵۱۵, ۰/۸۵۶, ۰/۰۲۶, ۰/۰۸۱۳, ۰/۷۱۱, ۰/۳۰۶, ۰/۰۵۱۹, ۰/۴۱۲, ۰/۲۱۳, ۰/۹۵۹

۴. (۲۰ نمره) با توجه به شبکه بیزین زیر به سوالات پاسخ دهید. (متغیرها همگی دودویی هستند).



(آ) می‌خواهیم توزیع $P(B, E, A, F)$ را به دست آوریم، در صورتی که ترتیب حذف متغیرها (از چپ به راست) به صورت G, C, H, D باشد، مراحل حذف متغیرها (variable elimination) را بنویسید. (به عبارت دیگر بیان کنید که در هر مرحله کدام یک از جداول با یکدیگر ادغام شده و متغیر گفته شده با عملیات marginalization از چه جدولی حذف می‌شود.)

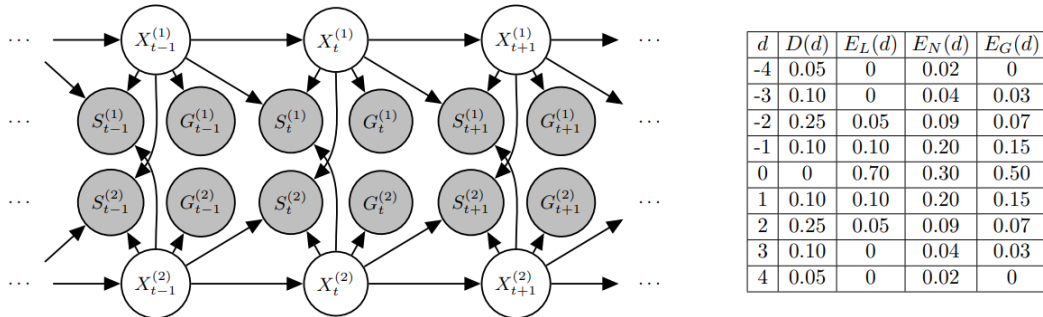
(ب) ترتیب بهینه حذف متغیرها، برای یافتن احتمال $P(E|+c, -h)$ را معرفی کنید. (منظور از ترتیب بهینه ترتیبی است که مقدار حافظه مورد نیاز برای ذخیره جداول تولید شده در هنگام حذف متغیرها کمینه باشد.)

(ج) یک ترتیب دلخواه حذف متغیرها برای محاسبه عبارت بخش قبل در نظر بگیرید. سپس بیان کنید که حذف متغیرها با استفاده از ترتیب دلخواه چه تفاوتی با استفاده از ترتیب بهینه ارائه شده در بخش قبل دارد؟

(د) میزان حافظه برای ذخیره جداول مربوط به این شبکه بیزین را محاسبه کنید.

۵. (۲۵ نمره) در این سوال می‌خواهیم موقعیت مکانی دو ماشین در یک شهر را به صورت همزمان با استفاده از HMM ها مدل کنیم. هر ماشین با یک اندیس i نشان داده می‌شود که $i \in \{1, 2\}$ می‌باشد. HMM مورد نظر را به شکل زیر در نظر بگیرید:

- $X^{(i)}$: موقعیت مکانی ماشین i ام
- $S^{(i)}$: موقعیت مکانی ماشین i ام که به صورت نویز دار و توسط برج تلفن همراه مجاور مشاهده شده است.
- $G^{(i)}$: موقعیت مکانی ماشین i ام که توسط GPS گزارش می‌شود (قطعا مقدار گزارش شده دارای نویز خواهد بود)



موقعیت مکانی یک ماشین که توسط برج تلفن همراه گزارش می‌شود، در حضور ماشین دیگر در همان نقطه، خطای بیشتری خواهد داشت. به همین دلیل $S_t^{(i)}$ به موقعیت مکانی ماشین دیگر یعنی $X_t^{(j)}$ نیز وابستگی خواهد داشت. ($j \neq i$)

تابع Transition در HMM بالا توسط تابع D مدل می‌شود. همچنین توزیع موقعیت‌های نویز دار $G_t^{(i)}$ و $S_t^{(i)}$ به ترتیب توسط توابع خطای E_G و E_L مدل می‌شوند. جداول مربوط به این توابع در تصویر بالا آمده است. مدل سازی توابع احتمالاتی این HMM به شکل زیر است:

$$P(X_t^{(i)} | X_{t-1}^{(i)}) = D(X_t^{(i)} - X_{t-1}^{(i)})$$

$$P(S_t^{(i)} | X_{t-1}^{(i)}, X_t^{(i)}, X_t^{(j)}) = \begin{cases} E_N(X_t^{(i)} - S_t^{(i)}) & \text{if } |X_t^{(i)} - X_{t-1}^{(i)}| \geq 2 \text{ or } X_t^{(i)} = X_t^{(j)} \\ E_L(X_t^{(i)} - S_t^{(i)}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P(G_t^{(i)} | X_t^{(i)}) = E_G(X_t^{(i)} - G_t^{(i)})$$

در تمام این سوال فرض کنید از روش Particle Filtering استفاده می‌کنیم.

(آ) فرض کنید در زمان $t = 3$ تنها ذره‌ی $(X_3^{(1)} = -1, X_3^{(2)} = 2)$ را داشته باشیم.

- احتمال اینکه ذره‌ی بعدی به صورت $(X_4^{(1)} = -3, X_4^{(2)} = 3)$ باشد، چقدر است؟
 - فرض کنید در زمان $t = 4$ هیچ مشاهده‌ای از سیگنال‌های گفته شده (برج تلفن همراه و GPS) نداریم. احتمال توأم اینکه ذره اصلی اولیه (از زمان $t = 3$) ابتدا به $(X_4^{(1)} = -3, X_4^{(2)} = 3)$ و سپس به $(X_5^{(1)} = -4, X_5^{(2)} = 4)$ تبدیل شود چقدر است؟
- در ادامه‌ی مسئله دو ذره را در هر بازه‌ی زمانی بررسی می‌کنیم.

(ب) در زمان $t = 6$ دو ذره‌ی $(X_6^{(1)} = 3, X_6^{(2)} = 0), (X_6^{(1)} = 3, X_6^{(2)} = 5)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید پس از مراحل weighting ، resampling و transitioning از زمان $t = 6$ به $t = 7$ ، دو ذره به حالت $((X_7^{(1)} = 2, X_7^{(2)} = 2), (X_7^{(1)} = 4, X_7^{(2)} = 1))$ می‌روند.

• اگر در زمان $t = 7$ مشاهدات زیر را داشته باشیم، وزن هر ذره چقدر خواهد بود؟

$$S_7^{(1)} = 2, G_7^{(1)} = 2, S_7^{(2)} = 2, G_7^{(2)} = 2$$

• فرض کنید تلفن همراه موجود در هر دو ماشین خاموش می‌شود و بنابراین سیگنالی از برج‌های تلفن همراه دریافت نمی‌شود. اگر مشاهدات GPS دقیقاً مانند مورد قبل باشند، وزن هر ذره چقدر خواهد بود؟

(ج) فرض کنید وزن‌های مشاهده شده برای دو ذره به شکل زیر باشد:

Particle	Weight
$(X_7^{(1)} = 2, X_7^{(2)} = 2)$	0.09
$(X_7^{(1)} = 4, X_7^{(2)} = 1)$	0.01

در این صورت باور ما از موقعیت مکانی دو ماشین در $t = 7$ چیست؟ (احتمال حضور هر ماشین در هر مکان مدنظر است)

سوالات عملی (۶۰ + ۴۰ نمره)

۱. (۶۰ نمره) در این سوال قصد داریم الگوریتم d -separation را پیاده سازی کنیم. در ابتدا n تعداد راس‌ها به شما داده می‌شود. در خط بعد m به شما داده می‌شود که تعداد یال‌ها است. در m خط بعد از آن یال‌های گراف بیزین به صورت $u -> v$ به شما داده می‌شود که داریم

$$u, v \geq 0$$

سپس مقدار T به شما داده می‌شود که تعداد تست‌های سوال است. در ادامه هر تست ۳ خط خواهد بود که خط اول و دوم هر کدام یک راس هستند و خط سوم مجموعه‌ای از راس‌ها هستند که با فاصله از هم جدا شده‌اند. به ازای هر تست اگر راس اول و دوم با دیدن راس‌های خط سوم مستقل باشند عبارت True و در غیر این صورت اگر نمی‌توانیم به طور قطع در مورد استقلال آن‌ها حرفی بزنیم False چاپ کنید. به عنوان مثال در ادامه ۲ تست کیس قرار داده شده‌است.

ورودی نمونه ۱

```

1 9
2 9
3 1->2
4 2->4
5 2->6
6 2->7
7 4->6
8 3->6
9 3->8
10 5->6
11 5->7

```

```
12 1
13 3
14 7
15 4 6 8 2
```

خروجی نمونه ۱

```
1 False
```

ورودی نمونه ۲

```
1 10
2 8
3 0->7
4 1->2
5 1->4
6 1->6
7 1->9
8 4->8
9 6->9
10 3->9
11 1
12 2
13 6
14 9 7 1 4 3 0
```

خروجی نمونه ۲

```
1 True
```

۲. (۴۰ نمره امتیازی) برای پاسخ به این سوال به پوشه سوالات عملی بخش Q2 مراجعه کنید.