پروژه درس مکانیک تحلیلی ۲

شبیه سازی حرکت فرفره متقارن با یک نقطه ثابت در پایتون

امیررضا وادیان

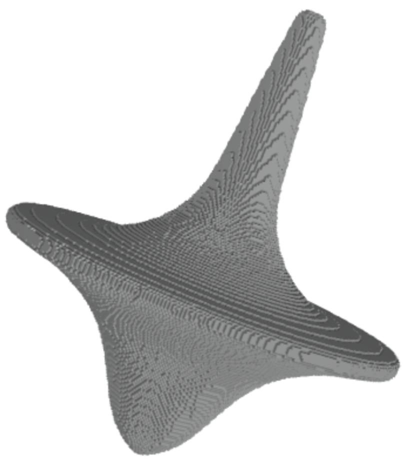
چکیده: در این پروژه ابتدا به وسیله پایتون برنامه ای می نویسیم که با آن می توان تانسور لختی دورانی را برای هر جسمی که قبلا مدل سازی شده محاسبه کرد. در ادامه معادلات لاگرانژ را برای فرفره متقارن با یک نقطه ثابت به صورت عددی حل کرده و حالت های مختلف حرکت را شبیه سازی می کنیم.

۱ محاسبه تانسور ماند

به لطف پیشرفت و استفاده روز افزون از پرینترهای ۳-بعدی ، نمونه های مختلف از اجسام گوناگون با شکل های مختلف با فرمتی که برای کامپیوتر قابل درک باشد در دسترس ما قرار گرفته اند . این نمونه ها که فایل هایی با فرمت stl هستند در اصل چیزی نیستند جز مختصات مجموعه ای از نقاط که میتوان با افزایش و یا کاهش تراکم، آن ها را به شکل پیوسته نزدیک تر و یا دورتر کرد.

در بخش اول پروژه ما این فایل ها را به فرمت قابل خواندن برای پایتون تبدیل می کنیم. به عنوان مثال فایل زیر را که نمونه ای از یک فرفره متقارن است در نظر بگیرید.

این فایل را می توانید از این آدرسدانلود نمایید. حال باید آن را به فرمت متن که کار با آن راحت تر است تبدیل کنیم برای این کار به این سایت مراجعه کرد و فایل را به فرمت txt در می آوریم.



شکل ۱: نمونه ای از فرفره متقارن

حال همه چیز برای محاسبه تانسور ماند آماده است.

۱-۱ روابط ریاضی

ما در اینجا با تعداد زیادی قطعه کوچک به شکل گسسته سر و کار داریم پس همان طور که در درس دیدیم برای محاسبه تانسور ماند مدل دلخواه از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$I_{ij} = \Sigma_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \Sigma_k x^2_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j})$$

و عناصر تانسور ماند ما به شکل زیر خواهد بود .

$$I_{11} = \Sigma_\alpha m_\alpha (x^2_{\alpha,2} + x^2_{\alpha,3})$$

$$I_{12} = I_{21} = -\Sigma_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,2}$$

$$I_{13} = I_{31} = -\Sigma_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,3}$$

$$I_{22} = \Sigma_\alpha m_\alpha (x^2_{\alpha,1} + x^2_{\alpha,3})$$

$$I_{23} = I_{32} = -\Sigma_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2} x_{\alpha,3}$$

$$I_{33} = \Sigma_\alpha m_\alpha (x^2_{\alpha,1} + x^2_{\alpha,2})$$

کار برای ما با کمیت های بدون بعد راحت تر است. به همین منظور مختصات پریم دار را تعریف کرده $x'_i = \frac{x_i}{R_0}$ که R_0 ثابتی با بعد طول است. رابطه را بر $M = \Sigma_\alpha m_\alpha$ تقسیم کرده تا گشتاور لختی نیز بی بعد شود. به این ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{I_{i,j}}{MR_0^2} = \frac{\Sigma_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \Sigma_k {x'}^2_{\alpha,k} - x'_{\alpha,i} x'_{\alpha,j})}{\Sigma_\alpha m_\alpha}$$

حال کافیست با استفاده از پایتون و فایل txt ای که داریم روابط بالا را برای مدل مربوطه محاسبه کنیم.

۱-۲ الگوریتم

در این برنامه از کتابخانه های numpy و sympy، pandas استفاده شده است. توجه کنید که حتما از sympy-version-1.6 استفاده

شود.

ابتدا مختصات نقاط را از فایل txt می خوانیم. در مرحله بعد مختصات را نرمالایز کرده و مبدا مختصات را به نوک فرفره منتقل می کنیم.

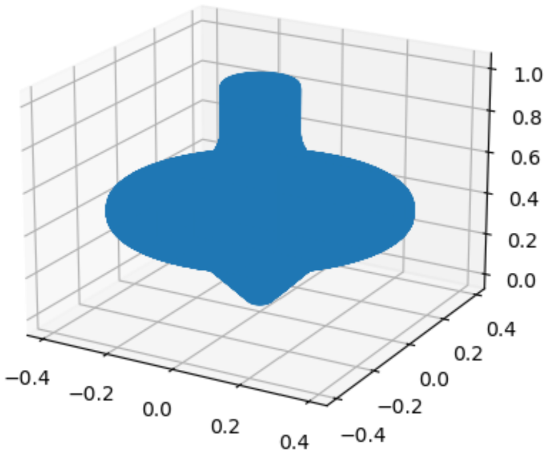
الگوریتم ۱ الگوریتم تبدیل فایل مورد نظر به مجموعه مختصات دکارتی.

Input: The text file that we obtained from our stl model.

Output: An array of our model small pieces coordinates.

loop
    Read coordinates of every point from our text file that is like [x,y,z] and add it to an array.
end loop
Compute the maximum of point coordinates to normalize them.
Compute the mean value of x,y,z (The top of spin) and transfer our model to the origin of coordinate.
return An array of our normalized and transferred to origin points.

در انتهای الگوریتم، مدل ما به فرم زیر در خواهد آمد که همان طور که مشاهده می کنید مبدا مختصات روی نوک فرفره قرار داشته ، محور تقارن نیز محور z بوده و نقاط نرمالایز نیز هستند . اکنون برای محاسبه تانسور ماند آماده ایم.



شکل ۲: مدل نرمالایز شده

در این مرحله گشتاور لختی را طبق روابط بخش قبل محاسبه می کنیم. به عنوان مثال با در نظر گرفتن چگالی یکنواخت برای مدلمان خروجی برنامه به فرم زیر است. همان طور که مشاهده می کنیم عناصر غیر قطری صفر هستند و مولفه اول و دوم نیز برابر هستند که از تقارن فرفره

الگوریتم ۲ الگوریتم محاسبه عناصر تانسور ماند

Input: Set of points and their mass.

Output: Inertia tensor.

$I_x x = \Sigma_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$
loop
    For every point in array add above equation to I
end loop
Do it for all elements of inertia tensor.
return Inertia tensor.

این مسئله را می دانستیم .

```
array([[0.30205116, 0.        , 0.        ],
       [0.        , 0.30205366, 0.        ],
       [0.        , 0.        , 0.07279514]])
```

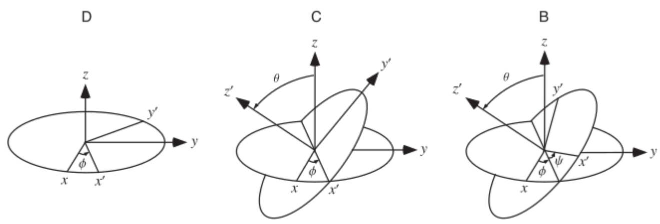
شکل ۳: تانسور ماند برای مدل فرفره متقارن

۲ معادلات لاگرانژ

در این بخش ابتدا مروری بر روابط مورد نیاز کرده و بعد به حل عددی معادله لاگرانژ می پردازیم.

۲-۱ روابط ریاضی

می دانیم که برای توصیف معادلات لاگرانژ که مشخصا به بردار سرعت زاویه ای مرتبط است ابتدا باید زوایای اویلر را مشخص کرده و روابط مورد نیاز را برای توصیف سرعت زاویه ای بر حسب زوایای اویلر بیابیم.



شکل ۴: زوایای اویلر

ماتریس دورانی که ما را به مختصات پریم دار می رساند حاصل سه دوران متوالی به شکل زیر است .

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بردار سرعت زاویه ای نیز بر حسب مشتقات زوایای اویلر برابر خواهد بود با :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \dot\phi \cos\theta + \dot\psi \end{pmatrix}$$

حال برای محاسبه لاگرانژ کافیست انرژی جنبشی را محاسبه کنیم. داریم :

$$T = \frac{1}{2}\omega^T I \omega$$

و لاگرانژی به شکل زیر محاسبه می شود:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\omega^T I\omega - mgh\cos\theta$$

همانطور که در بخش قبل دیدیم کار با کمیت های بدون بعد برای ما راحت تر است بنابر این تعریف می کنیم.

$$L' = \frac{L}{ML^2}, \quad I' = \frac{I}{ML^2}, \quad g' = \frac{g}{L}, \quad h' = \frac{h}{L}$$

که L طول فرفره است. و خواهیم داشت :

$$L' = \frac{1}{2}\omega^T I'\omega - mg'h'\cos\theta$$

و درنهایت معادله ای که باید به حل آن بپردازیم به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

که q_i های ما در اینجا سه زاویه اویلر θ, ϕ, ψ خواهند بود.

۲-۲ الگوریتم

برای حل معادلات لاگرانژ به روش عددی ابتدا توسط کتابخانه sympy معادلات را به فرم نوشتاری پیاده سازی کرده و در مرحله بعدی آن را به فرم روابط عددی تبدیل کرده و معادلات را حل می کنیم.
ابتدا تمام متغیر ها را به شکل سمبلیک تعریف می کنیم.

الگوریتم ۳ الگوریتم پیاده سازی معادلات به فرم نوشتاری.

Output:Equations of Lagrange in symbolic way.

1: Define Euler angles, their derivatives, the rotation matrix, angular velocity vector, inertia tensor elements, kinetic energy, potential energy and Lagrangian in symbolic mode using sympy library

---

در انتهای این مرحله برنامه معادلات را به فرم نوشتاری در اختیار دارد . معادلاتی به شدت حجیم که طبعا نوشتن و حل آنها توسط انسان طاقت فرسا و ناممکن خواهد بود ولی تبدیل آنها به فرم عددی برای کامپیوتر امری آسان است. معادلات حجیم قسمت قبل به طور کلی به فرم زیر خواهد بود :

$$\ddot\theta = f_1(\theta, \phi, \psi, \dot\theta, \dot\phi, \dot\psi)$$

$$\ddot\phi = f_2(\theta, \phi, \psi, \dot\theta, \dot\phi, \dot\psi)$$

$$\ddot\psi = f_3(\theta, \phi, \psi, \dot\theta, \dot\phi, \dot\psi)$$

کتابخانه ای که با آن کار می کنیم امکان حل عددی معادله مرتبه ۲ را ندارد به همین دلیل از تغییر متغیر به فرم زیر استفاده می کنیم تا به ۶ معادله مرتبه ۱ برسیم.

$$z_1 = \dot\theta, \quad z_2 = \dot\phi, \quad z_3 = \dot\psi$$

در مرحله بعدی معادلات را به فرم عددی در خواهیم آورد.

الگوریتم ۴ تبدیل معادلات از فرم نوشتاری به فرم عددی.

Input:Symbolic equations.
Output:Numerical equations.

1: Use lambdify method in sympy library to convert equations from symbolic mode to numerical mode.

نهایتا معادلات را با شرایط اولیه های متفاوت به صورت عددی حل می کنیم.

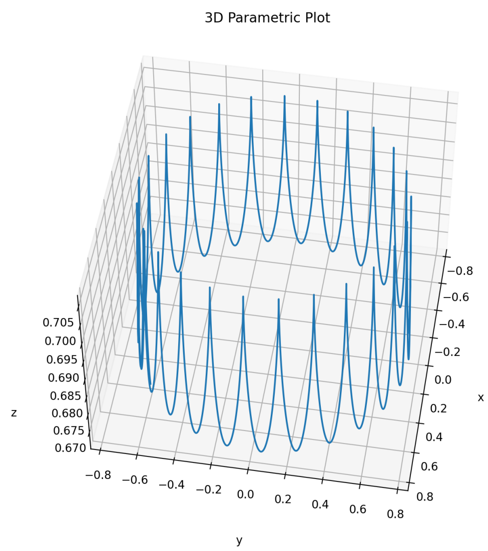
الگوریتم ۵ حل معادلات عددی با شرایط اولیه های متفاوت.

Input:Numerical equations.
Output:Euler angles in every time t.

1: Solve equations of motion and find $\theta(t), \phi(t), \psi(t)$ and calculate $x(t), y(t), z(t)$
2: Plot results.
3: Do it for different first conditions.

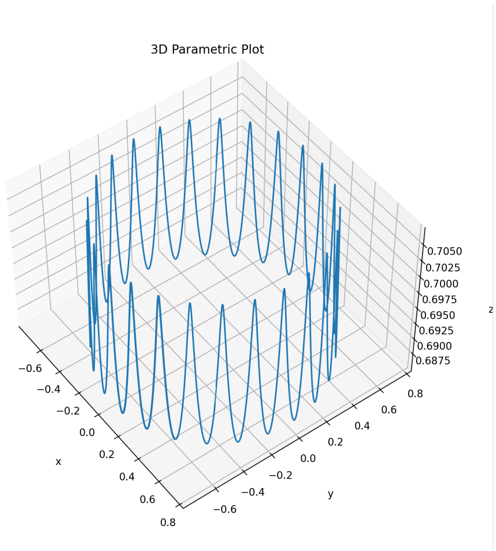
۳ نتایج

با در نظر گرفتن شرایط اولیه نمودار ها را رسم می کنیم . در ابتدا برای حالتی که $\dot{\theta_0} = 0, \dot{\phi_0} = 0, \dot{\psi_0} = 120\pi, \theta = \pi/4$ شرایط اولیه باشند یعنی حالتی که فرفره در ابتدا ۴۵ درجه با محور عمود زاویه دارد و دقیقا سرعت زاویه ای حول محور تقارن فرفره وجود دارد نتایج را بررسی می کنیم.



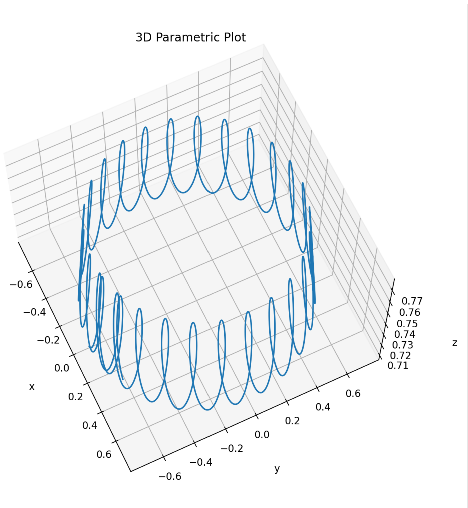
شکل ۵: نتیجه شبیه سازی اول - حرکت نیزه مانند

مشاهده می کنیم نتایج حاصل از شبیه سازی با نتیجه ای که در کلاس و کتاب به دست آوردیم مطابقت دارد و در حالت معمولی چرخاندن فرفره حرکت نیزه مانندی را مشاهده می کنیم.
شرایط اولیه بعدی را طوری تعیین کردیم که علامت $\dot{\phi}$ تغییری نکند($\dot{\phi}$ را کوچک در نظر گرفته ایم). نتایج حاصل به شکل زیر خواهند بود.



شکل ۶: نتیجه شبیه سازی دوم - پدیده رقص محوری

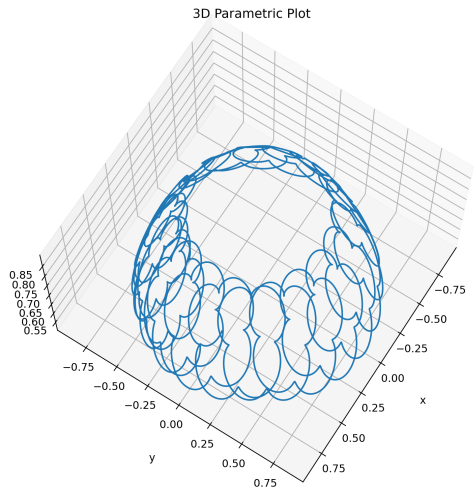
همان طور که انتظار داشتیم پدیده رقص محوری در این حرکت مشهود است.
۲ شکل زیر نیز نتایج را برای وقتی که $\dot{\phi}$ بین مقادیر حدی θ تغییر علامت می دهد نشان می دهند که در این حالت ها حرکت تقدیمی-رقص محوری یک حرکت حلقوی برای محور تقارن به وجود آورده است . شکل اول مربوط به جسمی با چگالی ثابت و شکل دوم مربوط به جسمی است که یک طرف سنگین تر از طرف دیگر باشد.



شکل ۷: نتیجه شبیه سازی سوم - چگالی ثابت

در حالت سوم که چگالی به صورت نمایی با x افزایش می یابد نیز

داریم :



شکل ۸: نتیجه شبیه سازی سوم - چگالی متغیر

۴ سخن پایانی

در این پروژه توانستیم ابتدا به کمک مدل های ۳-بعدی، تانسور ماند را برای این مدل ها بدست آوریم و بعد معادلات لاگرانژ را با شرایط اولیه مختلف به صورت عددی حل کرده تا شهود بهتری نسبت به مسئله پیدا کنیم. در انتها نیز نتیج شبیه سازی را با نتایج به دست آمده از کتاب مقایسه کردیم. قابل ذکر است که کدهای پایتون برنامه را می توانید در این آدرس پیدا کنید.