Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

Лабораторная работа 6. Другие более сложные вопросы.

Дисциплина «**Вычислительная математика**»

Автор: Амири Зикрулло

Факультет: ПИиКТ

Группа: P32211

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург, 2023

Оглавление

Описание нахождения узлов полиномом Чебышева 3

Блок-схема 4

Листинг реализованного численного метода программы 5

Пример работы программы 5

Вывод 7

Описание нахождения узлов полиномом Чебышева

Мы можем выбирать точки для интерполяции, равномерно удаленные друг от друга, но можем и иначе, например, мы можем определить точки с помощью полинома Чебышева. При его использовании мы можем избежать проблем с осцилляцией функции на концах отрезка для полиномиальных интерполяций, ибо при повышении степени полинома с использованием метода Лагранжа в нашем случае функции могут осциллировать на концах отрезка, то есть может появляться феномен Рунге. Интерполяционный полином Лагранжа имеет свойство накопительной ошибки, особенно в концах интервала приближения, что приводит к неустойчивости приближения, расчет узлов интерполяции полиномом Чебышева помогает этого избежать. То есть точки равномерно распределены, то есть интерполяционные точки должны быть распределены так же, как точки на единичной окружности на отрезке от -1 до 1, эту единичную окружность можно масштабировать за счет линейной замены. Полиномы Чебышева являются ортогональными многочленами на интервале [-1, 1], но они также могут быть использованы на любом другом отрезке [a, b] с помощью линейной замены переменной. Например, если мы хотим найти узлы для интерполяции функции на интервале [a, b], мы можем сделать линейную замену переменной x = (b-a)y/2 + (a+b)/2, где y - новая независимая переменная, определенная на интервале [-1, 1]. Тогда точки интерполяции в новой системе координат будут определяться как узлы полинома Чебышева, а именно:

x_k = (b+a)/2 + (b-a)cos((2k+1) * pi / (2n+2)), где k = 0,1,2,…,n.

Здесь n - количество узлов, которое мы выбираем для интерполяции функций на новом интервале [a,b].

У нас есть множество ортогональных функций, определенных на промежутке от -1 до 1. Общий вид функции:

Tn(x)=1/2[(x+sqrt(x^2-1))^n+(x-sqrt(x^2-1))^2]

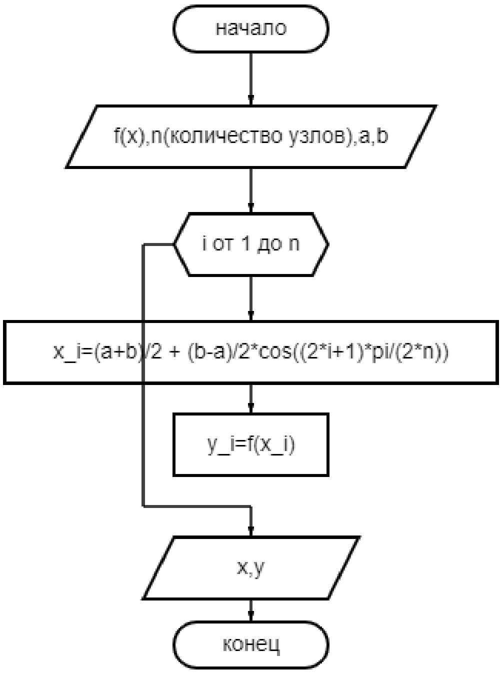
Tn+1(x)=2xTn(x)-Tn-1

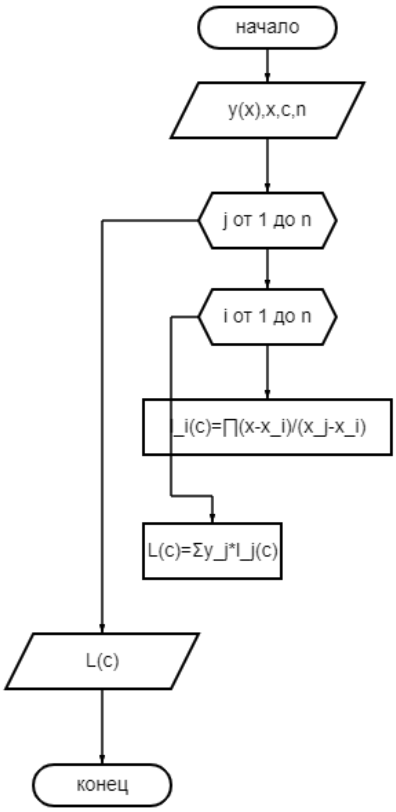
В качество узлов интерполяции мы берем корни многочлена Чебышева на интервале от -1 до 1. Использование таких узлов позволяет минимизировать эффект Рунге - увеличение погрешности интерполяции на краях отрезка. Вместо этого, узлы Чебышева располагаются в области максимального изменения функции, где интерполяционная погрешность минимальна.

Узлы Чебышева максимально равномерно распределены на заданном интервале и позволяют достичь минимальной ошибки аппроксимации при наименьшем количестве узлов. Это связано с тем, что полином Чебышева наилучшим образом приближает функцию на интервале [-1, 1], а для преобразования этого интервала в другой произвольный интервал используются линейные преобразования.

Полином Лагранжа представляем из себя сумму произведений значения функции из каждого интерполяционного узла на базовый полином, который вычисляется для значения функции из каждого узла отдельно.

Блок-схема


начало
f(x),n(количество узлов),a,b
i от 1 до n
x_i=(a+b)/2 + (b-a)/2*cos((2*i+1)*pi/(2*n))
y_i=f(x_i)
x,y
конец


начало
y(x),x,c,n
j от 1 до n
i от 1 до n
l_i(c)=∏(x-x_i)/(x_j-x_i)
L(c)=Σy_j*l_j(c)
L(c)
конец

Листинг реализованного численного метода программы

```
def Chebyshev_nodes(f,N,a,b):
    x = []
    for i in range(N):
        x.append((a+b)/2 + (b-a)/2*np.cos((2*i+1)*np.pi/(2*N)))
    fvals = []
    for i in range(N):
        fvals.append(f(x[i]))
    return x,fvals

def lagrange(x, fvals, xint):
    n = len(x)
    L = 0.
    for j in range(n):
        basic_polynomial= 1.
        for i in range(n):
            if i != j:
                basic_polynomial *= (xint - x[i])/(x[j] - x[i])
        L += fvals[j]*basic_polynomial
    return L
```

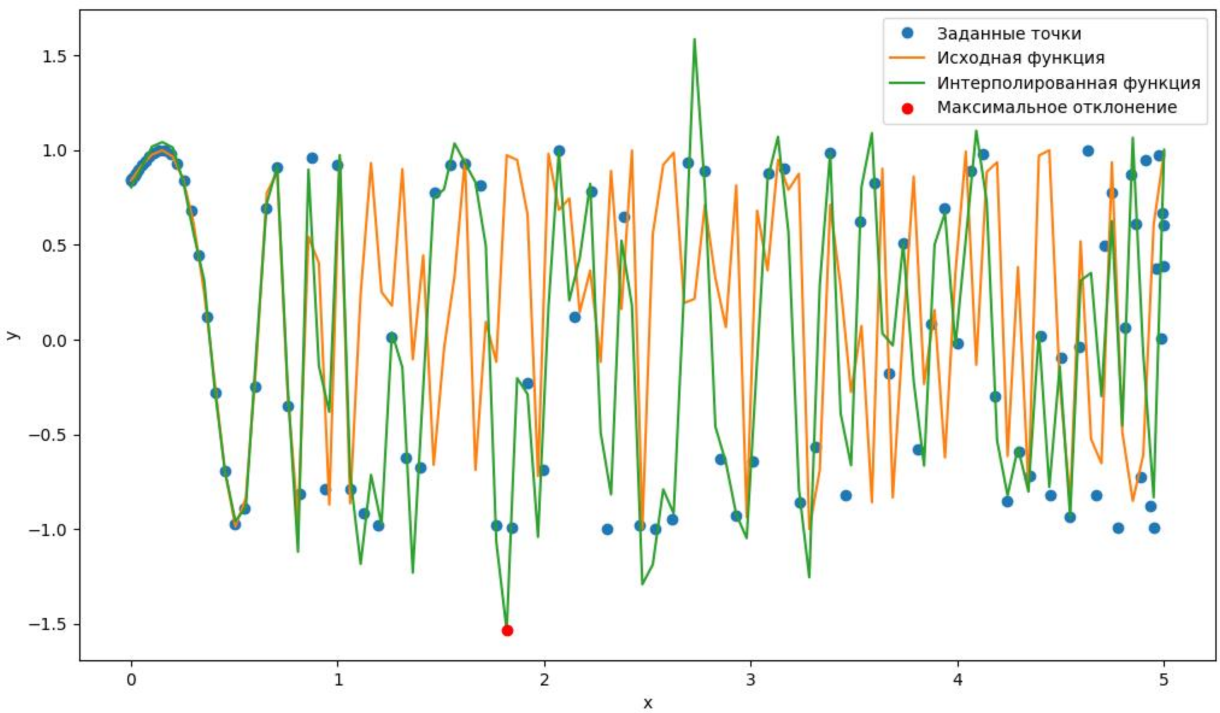
Пример работы программы

1) sin(e^(3*x))

Количество узлов: 100

a: 0

b: 5

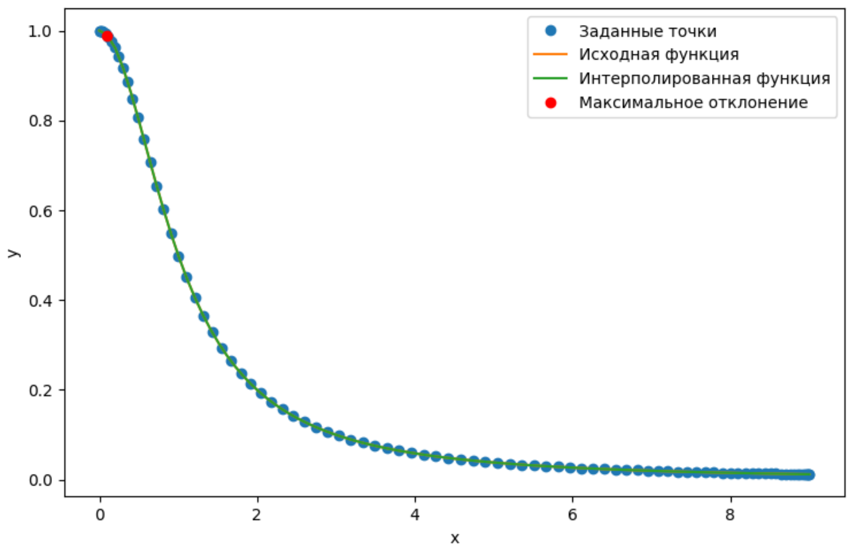


2) 1/(1+x^2)

Количество узлов: 90

a: 0

b: 9

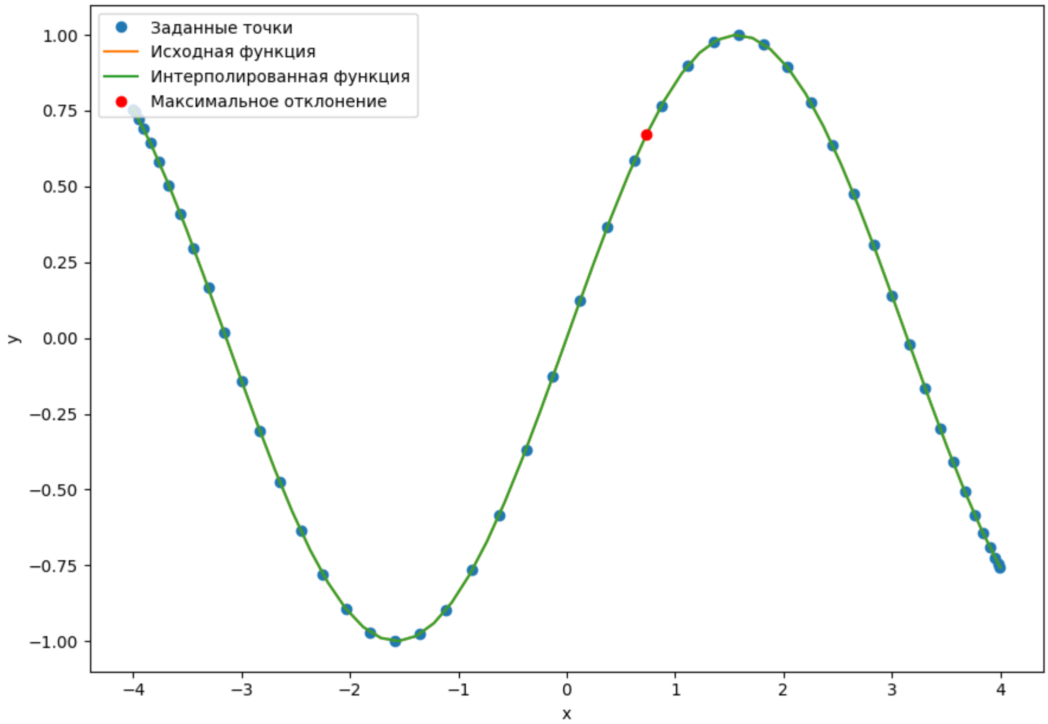


3)sin(x)

Количество узлов: 50

a: -4

b: 4



Вывод

Полином Чебышева - это математическая функция, которая используется для различных приложений в численных вычислениях, физике, инженерии и других областях. Он определен на интервале [-1, 1] и может быть записан в виде T_n(x), где n - это порядковый номер полинома, а x - значение в указанном интервале.

Полиномы Чебышева используются, например, в задачах численного анализа, приближении функций, решении дифференциальных уравнений и задачах аппроксимации данных. Они предоставляют мощный инструмент для работы с функциями на интервале [-1, 1] и имеют различные важные свойства, которые делают их полезными в различных математических задачах.