Quantitative Bewertung des Marktrisikos
Ein Vergleich von Value-at-Risk-Methoden

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die quantitative Bewertung von Marktrisiken mithilfe der Methode des Value-at-Risk (VaR) untersucht. Der Fokus liegt auf folgenden Ansätzen zur Schätzung des VaR: (i) Zeitreihenmodelle wie das GARCH-Modell zur Abbildung zeitabhängiger Volatilität, (ii) Copula-Modelle zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen Finanzinstrumenten sowie (iii) Monte-Carlo-Simulationen zur numerischen Approximation komplexer Verlustverteilungen. Ziel ist es, die Wirksamkeit dieser Methoden empirisch zu vergleichen und deren Eignung für die Praxis zu bewerten.

1 Einleitung

Das Management von Marktrisiken stellt eine zentrale Herausforderung im modernen Finanzwesen dar. Besonders im Kontext regulatorischer Anforderungen und portfoliobasierter Risikoabschätzungen hat sich der *Value-at-Risk* (VaR) als eines der meistgenutzten Risikomaße etabliert. Der VaR beschreibt den potenziellen Verlust eines Finanzinstruments oder Portfolios, der unter normalen Marktbedingungen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums nicht überschritten wird.

Definition des Value-at-Risk (VaR)

Der *Value-at-Risk* (VaR) ist ein weit verbreitetes Risikomaß, das den maximal erwarteten Verlust eines Portfolios innerhalb eines bestimmten Zeithorizonts bei gegebenem Konfidenzniveau beschreibt. Formal sei L die zufällige Verlustvariable eines Portfolios. Dann ist der VaR bei Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ definiert als das α-Quantil der Verlustverteilung:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) := \inf\{\ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \leq \ell) \geq \alpha\}$$

Der VaR entspricht somit einem Schwellenwert, der mit Wahrscheinlichkeit α nicht überschritten wird. Obwohl der VaR in der Praxis weit verbreitet ist (insbesondere im regulatorischen Umfeld), wurde er auch kritisiert, da er im Allgemeinen keine kohärente Risikomaß ist — insbesondere verletzt er die Subadditivitätseigenschaft
[2].

Traditionelle Verfahren zur Berechnung des VaR basieren häufig auf vereinfachenden Annahmen wie Normalverteilung der Renditen oder linearer Abhängigkeit zwischen den Risikofaktoren. Diese Annahmen werden von empirischen Beobachtungen realer Finanzmärkte jedoch nur unzureichend gestützt: Renditen zeigen oft Clusterung der Volatilität, asymmetrische Verteilungen sowie nichtlineare und insbesondere *tail-abhängige* Zusammenhänge.

Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Methoden zur Schätzung des Value-at-Risk zu analysieren und zu vergleichen, wobei ein besonderer Fokus auf Ansätze gelegt wird, die realistischere Modellierungen der Abhängigkeit zwischen Risikofaktoren ermöglichen. Dazu gehören unter anderem:

- Zeitreihenmodelle wie das GARCH-Modell zur Erfassung zeitlich variabler Volatilität,

- bayessche Verfahren, die Unsicherheit über Modellparameter explizit berücksichtigen,
- Copula-Modelle, welche eine flexible Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen Assets erlauben.

Die Monte-Carlo-Simulation dient in dieser Arbeit als numerisches Werkzeug zur Approximation komplexer Verlustverteilungen, wird jedoch nicht als eigenständiger methodischer Ansatz behandelt.

Ziel der empirischen Untersuchung ist es, die Unterschiede in den geschätzten VaR-Werten bei Anwendung der jeweiligen Methoden auf reale Finanzmarktdaten aufzuzeigen und zu bewerten.

2 Theoretische Grundlagen der Risikomessung

2.1 Value-at-Risk (VaR)

Der *Value-at-Risk (VaR)* ist eines der meistverwendeten Risikomaße im Finanzwesen. Es beschreibt den maximal zu erwartenden Verlust eines Finanzportfolios innerhalb eines festgelegten Zeithorizonts bei gegebenem Konfidenzniveau α.

Formal sei L die Zufallsvariable, welche den potenziellen Verlust eines Portfolios beschreibt. Dann ist der VaR_α definiert als das α-Quantil der Verlustverteilung:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\left\{\ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \leq \ell) \geq \alpha\right\}.$$

In der Praxis wird häufig $\alpha = 0{,}95$ oder $0{,}99$ verwendet, was einem Konfidenzniveau von 95% bzw. 99% entspricht.

Trotz seiner weiten Verbreitung wurde der VaR auch vielfach kritisiert, insbesondere wegen seiner theoretischen Schwächen im Bereich der kohärenten Risikomessung [7].

2.2 Kohärente Risikomaße

Ein Risikomaß $\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ (mit $\mathcal{L}$ als Raum der Verluste) wird als *kohärent* bezeichnet, wenn es folgende vier Axiome erfüllt [7]:

1. **Monotonie:** Wenn $L_1 \leq L_2$, dann gilt $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.
2. **Subadditivität:** $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ (Diversifikation wird belohnt).
3. **Positive Homogenität:** Für $\lambda > 0$: $\rho(\lambda L) = \lambda\rho(L)$.
4. **Translative Invarianz:** Für $a \in \mathbb{R}$: $\rho(L + a) = \rho(L) + a$.

Der klassische VaR_α erfüllt die Axiome 1, 3 und 4, verletzt jedoch im Allgemeinen die Subadditivität, was bedeutet, dass Portfoliodiversifikation unter Umständen zu einem *höheren* Risiko führen kann – ein theoretisch problematischer Umstand [2].

2.3 Expected Shortfall (ES)

Als kohärente Alternative zum VaR gilt der *Expected Shortfall* (auch Conditional Value-at-Risk). Dieser misst den durchschnittlichen Verlust unter der Bedingung, dass der Verlust den VaR_α überschreitet:

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)].$$

Der Expected Shortfall berücksichtigt die gesamte Verteilung im "TailBereich und wird daher insbesondere in regulatorischen Rahmenwerken wie Basel III zunehmend bevorzugt.

Diese theoretischen Grundlagen bilden die Basis für die im weiteren Verlauf untersuchten Ansätze zur Risikobewertung.

3 Methodik

In diesem Abschnitt werden verschiedene Ansätze zur Schätzung des Value-at-Risk (VaR) vorgestellt und mathematisch beschrieben. Dabei liegt der Fokus auf drei wesentlichen Methoden: Zeitreihenmodelle, Bayessche Verfahren und Copula-Modelle.

3.1 Zeitreihenmodell: GARCH

Das GARCH-Modell (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) wurde erstmals eingeführt [8]. Es ist eines der am häufigsten verwendeten Modelle zur Erfassung zeitlich variierender Volatilität auf Finanzmärkten. Eine vertiefte Darstellung findet sich bei [2] in Kapitel 4.

Ziel dieses Modells ist es, die empirisch beobachtete *Volatilitäts-Clusterung* in Finanzzeitreihen mathematisch zu erfassen — das heißt, die Tendenz hoher Volatilität dazu, sich über bestimmte Zeiträume hinweg zu konzentrieren. Dazu war package (*Rugarch*) verwendet

Mathematische Formulierung

Das GARCH(1,1)-Modell ist gegeben durch folgende Struktur:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{2}$$

Dabei ist:

- r_t: logarithmierte Rendite am Tag t,
- μ: bedingter Mittelwert der Rendite,
- ε_t: Innovationsprozess,
- σ_t^2: bedingte Varianz,
- z_t: i.i.d. standardnormalverteilte Störgröße.

Die Modellparameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ werden mittels Maximum-Likelihood-Verfahren auf Basis historischer Renditen geschätzt.

Value-at-Risk mit GARCH

Nach der Schätzung des Modells kann die bedingte Volatilität σ_{t+1} für den nächsten Zeitschritt prognostiziert werden. Der Value-at-Risk ergibt sich daraufhin aus:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \mu + \sigma_{t+1} \cdot z_\alpha \tag{3}$$

wobei z_α das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung ist. Zum Beispiel ergibt sich bei einem Konfidenzniveau von 95%: $z_{0,05} = -1{,}645$.

Vorteile des GARCH-Modells

- Modelliert realistische dynamische Volatilitätsmuster.
- Liefert präzisere Risikoschätzungen bei kurzfristigen Zeitreihen.
- Kompatibel mit Copula- oder Monte-Carlo-Methoden.

3.2 Parametrischer Ansatz

Der parametrische Value-at-Risk basiert auf der Annahme, dass Renditen normalverteilt sind. Der VaR ergibt sich wie folgt:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \cdot z_\alpha$$

wobei μ und σ der Mittelwert und die Standardabweichung der Renditen sind und z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung. Diese Methode ist einfach, unterschätzt jedoch häufig das Risiko bei extremen Marktbedingungen.

3.3 Historische Simulation

Die historische Simulation ist ein nicht-parametrisches Verfahren zur Schätzung des Value-at-Risk. Dabei wird angenommen, dass vergangene Renditeverteilungen auch in Zukunft repräsentativ sind. Der VaR ergibt sich direkt als empirisches Quantil der beobachteten Verluste:

$$VaR_\alpha = \text{Quantil}_\alpha(-r_1, -r_2, \ldots, -r_n)$$

Diese Methode erfordert keine Annahmen über die Verteilungsform und ist leicht implementierbar, reagiert jedoch sensibel auf Ausreißer und reflektiert ausschließlich vergangene Marktbedingungen.

3.4 Bayesscher Ansatz

Motivation und Hintergrund

Im Gegensatz zu klassischen VaR-Ansätzen, bei denen die Parameter der Verteilung als bekannt angenommen werden, modelliert der bayessche Ansatz diese Parameter selbst als Zufallsvariablen. Dies ermöglicht es, Unsicherheiten explizit zu berücksichtigen — besonders wertvoll bei kleinen Stichproben oder bei stark schwankenden Daten.

Theoretisch basiert diese Methode auf der Verwendung einer Posteriorverteilung, die aus einer Kombination von A-priori-Verteilung und beobachteten Daten gewonnen wird. Sie erlaubt probabilistische Aussagen über zukünftige Verluste.

Eine fundierte Darstellung findet sich bei [2], insbesondere in Kapitel 3. Numerische Verfahren zur Umsetzung der Simulationen, inklusive Sampling aus Posteriorverteilungen, sind bei [4] beschrieben.

Mathematische Struktur

Es wird angenommen, dass die täglichen Renditen r_t normalverteilt sind:

$$r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Da sowohl μ als auch σ^2 unbekannt sind, werden sie mit folgenden A-priori-Verteilungen modelliert:

$$\mu \mid \sigma^2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{1}{\tau_0 \sigma^2}\right), \quad \sigma^2 \sim \text{InvGamma}(\alpha_0, \beta_0)$$

Mit einer Stichprobe von n beobachteten Renditen ergibt sich eine geschlossene Form der Posteriorverteilung über μ und σ^2, mit aktualisierten Parametern $\mu_n, \tau_n, \alpha_n, \beta_n$. Diese Posteriorverteilungen werden anschließend zur Simulation zukünftiger Verluste verwendet.

Simulationsbasierte Berechnung des VaR

In der praktischen Umsetzung wird folgender Ablauf verwendet:

1. Simulation von vielen Paaren $(\mu^{(i)}, \sigma^{2(i)})$ aus der Posteriorverteilung.
2. Für jedes Paar wird eine potenzielle zukünftige Rendite gezogen: $r^{(i)} \sim \mathcal{N}(\mu^{(i)}, \sigma^{2(i)})$.
3. Der Value-at-Risk ergibt sich als empirisches Quantil der simulierten Verluste:

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{Bayes}} = \mathrm{Quantil}_\alpha(r^{(1)}, \ldots, r^{(N)})$$

Die gesamte Berechnung erfolgt mittels Monte-Carlo-Verfahren mit 10 000 Wiederholungen.

Vorteile und Relevanz

- Explizite Modellierung von Parameterunsicherheiten.
- Robuste Schätzungen auch bei kleinen oder verrauschten Datensätzen.
- Flexibel kombinierbar mit anderen Risikomodellen (z. B. GARCH oder Copula).
- Ermöglicht vollständige probabilistische Quantifizierung des Risikos.

Implementierung

Der beschriebene Algorithmus wurde in R implementiert. Es wird ausschließlich Base-R verwendet, mit Funktionen wie `rgamma()` und `rnorm()`. Die konkrete Berechnung der Posteriorparameter erfolgt nach Formeln aus [2], Abschnitt 3.3. Die Generierung simulierten VaR basiert auf dem Verfahren aus [4], Kapitel 8.

3.5 Copula-Modelle

Motivation und Bedeutung für die Risikomessung

Ein wesentliches Problem bei der quantitativen Bewertung von Marktrisiken ist die realistische Modellierung der Abhängigkeiten zwischen Finanzinstrumenten. Klassische Modelle, die auf Korrelationen basieren, erfassen nur lineare Beziehungen und unterschätzen oft das gemeinsame Verhalten in Extremsituationen. Copula-Modelle hingegen ermöglichen eine separate Modellierung der Randverteilungen und der Abhängigkeitsstruktur.

Im Kontext des Value-at-Risk (VaR) sind Copulas besonders wertvoll, da sie sogenannte *Tail-Dependence* erfassen können — also die Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger extremer Verluste in mehreren Assets. Eine systematische Einführung in Copulas und deren Anwendung im Risk Management findet sich bei [3, 5, 2].

Theoretische Grundlage: Satz von Sklar

Der zentrale mathematische Ausgangspunkt ist der *Satz von Sklar*, der besagt, dass jede multivariate Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ mit stetigen Randverteilungen F_X und F_Y eindeutig durch eine Copula C dargestellt werden kann:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

Die Funktion $C : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ ist dabei die sogenannte Copula, welche die gesamte Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen X und Y enthält. Die wesentliche Idee ist somit, komplexe Zusammenhänge zwischen Assets zu modellieren, ohne dabei von einer bestimmten gemeinsamen Verteilung ausgehen zu müssen.

Mathematische Schritte zur VaR-Schätzung mit Copulas

Zur Ermittlung des VaR eines Portfolios auf Basis von Copula-Modellen wird folgender mehrstufiger Algorithmus verwendet:

1. **Randverteilungen schätzen:** Für jede Einzelrendite X, Y wird die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_X, \hat{F}_Y$ bestimmt.
2. **Transformation in Uniformverteilung:** Die Rohdaten werden durch die Probability Integral Transformation (PIT) auf das Einheitsintervall abgebildet:
$$u_i = \hat{F}_X(x_i), \quad v_i = \hat{F}_Y(y_i)$$
3. **Schätzung der Copula:** Die transformierten Daten (u_i, v_i) werden verwendet, um eine geeignete parametrische Copula C_θ zu schätzen, z. B. durch Maximum-Likelihood oder Inversionsverfahren.
4. **Simulation aus der Copula:** Aus dem geschätzten Modell C_θ werden neue Paare (u_i^*, v_i^*) simuliert, typischerweise mit Monte-Carlo-Verfahren.
5. **Rücktransformation:** Die simulierten Werte werden durch Inversion der geschätzten Randverteilungen rücktransformiert:
$$x_i^* = \hat{F}_X^{-1}(u_i^*), \quad y_i^* = \hat{F}_Y^{-1}(v_i^*)$$
6. **Portfolioverlust berechnen:** Für ein gegebenes Gewichtungsvektor $w = (w_1, w_2)$ wird der simulierte Portfolioverlust L_i berechnet:
$$L_i = w_1 x_i^* + w_2 y_i^*$$
7. **VaR bestimmen:** Der empirische α-Quantilswert der simulierten Verluste liefert den Value-at-Risk:
$$\mathrm{VaR}_\alpha = \mathrm{Quantil}_\alpha(L_1, L_2, \ldots, L_N)$$

Typen von Copulas und ihre Eigenschaften

- **Gaussian Copula:**
$$C_\rho^{\text{Gauss}}(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$
Erfasst lineare Abhängigkeit, jedoch keine Tail-Dependence. Eignet sich für normale Marktbedingungen.
- **t-Copula:**
$$C_{\rho,\nu}^t(u, v) = t_{\rho,\nu}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v))$$
Modelliert sowohl obere als auch untere Tail-Dependence und ist robuster gegenüber Extremereignissen.
- **Clayton Copula:**
$$C_\theta^{\text{Clayton}}(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0$$
Erfasst starke untere Tail-Dependence — geeignet für gleichzeitige Verluste.

- **Gumbel Copula:**

$$C_\theta^{\text{Gumbel}}(u,v) = \exp\left(-\left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right]^{1/\theta}\right), \quad \theta \geq 1$$

  Modelliert obere Tail-Dependence — nützlich zur Erfassung gemeinsamer Gewinne.

- **Frank Copula:**

$$C_\theta^{\text{Frank}}(u,v) = -\frac{1}{\theta}\log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

  Symmetrisch, ohne explizite Tail-Dependence, geeignet bei mittlerer Korrelation.

Vorteile des Copula-Ansatzes

- Flexible Modellierung nichtlinearer Abhängigkeitsstrukturen.
- Separate Behandlung von Randverteilungen und Abhängigkeiten.
- Möglichkeit zur realistischen Abbildung von Extremrisiken durch Tail-Dependence.
- Einsatzfähig in multidimensionalen Portfolios.

Hinweis zur praktischen Umsetzung

Die Simulationen basieren auf Monte-Carlo-Verfahren mit mindestens 10 000 Durchläufen. In R werden dafür typischerweise die Pakete `copula` oder `VineCopula` eingesetzt. Die geschätzten Copula-Modelle können mit der Funktion `fitCopula()` kalibriert und mit `rCopula()` simuliert werden.

Eine ausführliche Implementierungsanleitung findet sich bei [2], Kapitel 5 sowie in [3].

Monte-Carlo-Simulation zur VaR-Schätzung

Die Copula-Modelle selbst liefern lediglich eine Abhängigkeitsstruktur. Um daraus konkrete Verlustverteilungen und VaR-Werte zu schätzen, wird eine Monte-Carlo-Simulation verwendet. Das Verfahren läuft wie folgt ab:

1. Ziehe N Stichproben $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}) \sim C$ aus der Copula
2. Rücktransformation in reale Renditen: $x_1^{(i)} = F_1^{-1}(u_1^{(i)}),\ x_2^{(i)} = F_2^{-1}(u_2^{(i)})$
3. Berechne den Portfolioverlust $L^{(i)} = w_1 x_1^{(i)} + w_2 x_2^{(i)}$
4. Der Value-at-Risk ergibt sich als empirisches Quantil:

$$\text{VaR}_\alpha = \text{Quantil}_\alpha(L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(N)})$$

Dieser numerische Ansatz erlaubt es, auch komplexe, nichtlineare und nicht-normalverteilte Risikoquellen realistisch zu modellieren.

3.6 Violation Rate

Die **Violation Rate** beschreibt den Anteil der Fälle, in denen der tatsächliche Verlust eines Portfolios den vorhergesagten Value-at-Risk (VaR) überschreitet. Sie dient als direkte Kennzahl zur Beurteilung der Genauigkeit von VaR-Modellen im Hinblick auf Extremereignisse.

$$\text{ViolationRate} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I} \{ r_t < \text{VaR}_t \} \tag{4}$$

Hierbei ist r_t die tatsächliche Rendite zum Zeitpunkt t, VaR_t der geschätzte VaR, und $\mathbb{I}\{\cdot\}$ eine Indikatorfunktion, die den Wert 1 annimmt, wenn die Bedingung erfüllt ist.

3.7 Quantile Loss

Der **Quantile Loss** misst die durchschnittliche quadrierte Abweichung zwischen tatsächlichen Verlusten und der VaR-Schwelle, falls der Verlust diese überschreitet. Dadurch wird das Ausmaß der Unterschätzung des Risikos bewertet.

$$\text{QuantileLoss} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I} \{ r_t < \text{VaR}_t \} \cdot (r_t - \text{VaR}_t)^2 \tag{5}$$

Die Metrik bestraft größere Verletzungen stärker und ist somit sensitiv gegenüber extremen Verlusten.

3.8 Mean Absolute Error Upper

Der **Mean Absolute Error Upper ($\mathbf{MAE_{upper}}$)** quantifiziert die durchschnittliche Überschreitung der beobachteten Renditen über den geschätzten VaR. Diese Metrik gibt Hinweise darauf, wie stark das Modell das Aufwärtspotenzial unterschätzt.

$$\text{MAE}_{\text{upper}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \max (r_t - \text{VaR}_t,\ 0) \tag{6}$$

Ein niedriger Wert deutet darauf hin, dass die Modellprognose konservativ ist und selten durch tatsächliche Gewinne übertroffen wird.

4 Datensatzbeschreibung

In dieser Arbeit verwenden wir tägliche logarithmierte Renditen von zwei Aktien: Apple Inc. (AAPL) und Microsoft Corp. (MSFT), im Zeitraum vom 01.01.2020 bis zum 31.12.2024. Die Renditen basieren auf den Schlusskursen und werden wie folgt berechnet:

$$r_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Dabei ist P_t der Schlusskurs am Tag t. Zur Vereinfachung der Analyse wird ein gleichgewichtetetes Portfolio aus beiden Aktien gebildet, dessen tägliche Renditen wir als Mittelwert der Einzelrenditen berechnen:

$$R_t = \frac{1}{2}(r_t^{AAPL} + r_t^{MSFT})$$

Trainings- und Testdaten

Der gesamte Datensatz umfasst $n = 1257$ Beobachtungen. Wir teilen ihn in zwei Teile:

- **Trainingsdaten:** Die ersten 80% der Beobachtungen ($n_{\text{train}} = 1005$) werden zur Schätzung der Modelle verwendet.
- **Testdaten:** Die letzten 20% ($n_{\text{test}} = 252$) dienen zur Evaluierung der Modellgüte.

Deskriptive Statistiken

Rendite	Mittelwert	Std.-Abw.	Min.	Max.
AAPL	0,00052	0,0205	-0,128	0,120
MSFT	0,00048	0,0189	-0,095	0,084
Portfolio	0,00050	0,0187	-0,099	0,092

Tabelle 1: Deskriptive Statistik der logarithmierten Tagesrenditen

Die beobachteten Renditen weisen deutliche Ausreißer und Cluster von Volatilität auf, was die Anwendung fortgeschrittener Risikomodelle wie GARCH und Copula rechtfertigt.

5 Vergleich der VaR-Modelle

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit der verschiedenen Value-at-Risk-Modelle wurden sowohl die quantitativen Ergebnisse der Schätzungen als auch die methodischen Eigenschaften verglichen.

Methode	Violation Rate	Quantile Loss	MAE Upper
Parametrisch	0.012	6.0e-05	0.032306
Historisch	0.012	8.1e-05	0.030885
Bayessch	0.008	2.1e-05	0.037092
GARCH	0.0208	2.2e-04	0.044822
Gaussian Copula	0.0279	8.0e-05	0.026489
t Copula	0.0208	4.5e-05	0.033496
Clayton Copula	0.008	2.8e-05	0.036412
Gumbel Copula	0.006	9.6e-05	0.027381
Frank Copula	0.0279	8.5e-05	0.026123

Tabelle 2: Vergleich der Value-at-Risk Modelle anhand von Violation Rate, Quantile Loss und MAE Upper

6 Diskussion der Ergebnisse

Die Auswertung der Value-at-Risk-Modelle anhand der drei Bewertungsmetriken – Violation Rate, Quantile Loss und MAE Upper – liefert wichtige Erkenntnisse über die Eignung der Methoden unter realistischen Marktbedingungen.

Die **t-Copula** und **Gumbel-Copula** zeigen insgesamt die besten Resultate. Beide erfassen Tail-Dependence und erlauben eine flexible Modellierung extremer Abhängigkeiten. Während die Gumbel-Copula die niedrigste Verletzungsrate aufweist, überzeugt die t-Copula durch ein gutes Gleichgewicht zwischen Genauigkeit und konservativer Risikoeinschätzung.

Das **GARCH-Modell** spiegelt zeitliche Volatilitätscluster gut wider, tendiert jedoch zu übervorsichtigen Risikoschätzungen, was sich in höheren Werten von Quantile Loss und MAE Upper zeigt. Dennoch bleibt es nützlich in Märkten mit stark zeitvariierender Volatilität.

Der **bayessche Ansatz** liefert stabile und robuste Resultate mit besonders niedrigem Quantile Loss. Seine Stärke liegt in der expliziten Modellierung der Unsicherheit, was ihn besonders bei kleinen oder verrauschten Datensätzen vorteilhaft macht.

Die **historische Simulation** und der **parametrische Ansatz** zeigen erwartungsgemäß Schwächen: sie unterschätzen häufig Extremereignisse, da sie entweder keine dynamische Struktur abbilden oder auf unrealistische Verteilungsannahmen beruhen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Modelle mit expliziter Tail-Abbildung (t-Copula, Gumbel) und adaptiver Unsicherheitsmodellierung (Bayes) eine höhere Prognosegüte liefern und in der Praxis bevorzugt eingesetzt werden sollten.

Reproduzierbarer Code

Der vollständige Quellcode zur Datenverarbeitung, Modellierung und Simulation ist öffentlich verfügbar unter:

`https://github.com/amirzh01/Seminar`

Dieses Repository enthält sämtliche R-Skripte, Datentransformationen sowie die LaTeX-Dateien zur Replikation der Ergebnisse und Grafiken.

Literatur

[1] Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3rd ed.). McGraw-Hill.

[2] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton University Press.

[3] Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. J. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. *Technical Report*, ETH Zurich.

[4] Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

[5] Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (1999). Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond.* Cambridge University Press.

[6] Ghalanos, A. (2015). *rugarch: Univariate GARCH models.* R package. URL: `https://cran.r-project.org/package=rugarch`

[7] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.

[8] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.