1) $A)$

$$I\left(X;Y\right)=H\left(x\right)-H\left(X|Y\right)-\sum_{x}P\left(x\right)\log_2\left(P\left(x\right)\right)+\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\log\left(P\left(X|Y\right)\right)$$

According Shanon $\longrightarrow$ $H\left(x\right)=-\sum_{x}P\left(x\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)$

$$=-\sum_{x}P\left(x\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)+\sum_{x,y}\cdot\log_2\left(\frac{P\left(x,y\right)}{P\left(x\right)}\right)$$

According law of total Probability $\longrightarrow$ $P\left(A\right)=\sum_{n}P\left(A\cap B_n\right)$

$$=-\sum_{x}\left(\sum_{y}P\left(x,y\right)\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)+\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\cdot\log_2\left(\frac{P\left(x,y\right)}{P\left(y\right)}\right)$$

$$=-\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)+\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\log_2\left(\frac{P\left(x,y\right)}{p\left(y\right)}\right)$$

$$=-\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\cdot\left(\log_2\left(P\left(x\right)\right)-\log_2\left(\frac{P\left(x,y\right)}{P\left(y\right)}\right)\right)$$

$$=\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\cdot\log_2\left(\frac{P\left(x,y\right)}{P\left(x\right)}\right)$$

$$1)B)$$

If X and Y is independence $\longrightarrow$ $P\left(X\cap Y\right)=P\left(X\right)+P\left(Y\right)$

$$H\left(X|Y\right)=-\sum_{x,y}P\left(x,y\right)\cdot\log_2\left(P\left(x|y\right)\right)$$

$$=-\sum_{x,y}P\left(x\right)P\left(y\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)=\sum_{x}P\left(x\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)\cdot\left(\sum_{y}P\left(y\right)\right)$$

$$=\sum_{x}P\left(x\right)\cdot\log_2\left(P\left(x\right)\right)=H\left(x\right)$$

The intuition for the solution is perhaps we interesting to cancel the dependency of Y on X , we'll use the formula:
In this case X and Y independently , so Y not sharing any information with X and the entropy impact is the lost of the information, so the loss of the information in Y is information who are not independent with X , in different words the information we loss in Y we will not find in X , so the entropy of both independent to between each other

$1)C)$

When f is bijection there is an inverse function

define $\quad y = f^{-1}\left(x\right)$

$$p\left(Y = y\right) = P\left(f\left(\tilde{x}\right)\right) = f\left(X = \widetilde{x}\right)$$

$$\rightarrow H\left(X|Y\right) = -\sum_{x,y} P(X = x, Y = y) \cdot \log_2(P(X = x, Y = y))$$

$$= \sum_{x \neq \widetilde{x}} P(X = x, X = \widetilde{x}) \cdot \log_2(P(X = x, X = \widetilde{x})) \quad \downarrow$$

$$-\sum_{x} P(X = x, X = x) \cdot \log_2(P(X = x|X = x))$$

If $\quad x \neq \widetilde{x} \rightarrow P(X = x, X = \widetilde{x}) = 0$

$$= -\sum_{x} P(X = x, X = x) \cdot \log_2(P(X = x, X = x))$$

$$I\left(X;Y\right) = H\left(X\right) - 0 = H\left(X\right)$$

$2)A)$

Y is binomial random variable

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{Key on the pocket} \\ 1 & \text{Key not in the pocket} \end{cases}$$

$$X = \{0, 1, 2, 3 \ldots 100\} \longrightarrow \text{100 different places for key}$$

$2)B)$

$\underline{P\,(x)}$ $\quad P(X=0) = 0.99$	$P(X=x) = 0.0001$	$P\,(Y\|X)$	$x \rightarrow$ When ever
$\underline{P\,(y)}$ $\quad P(Y=0) = 0.99$	$P(Y=1) = 0.01$		$y \rightarrow$ Pocket

$\underline{P\,(x|y)}$

$$(P(X=0|Y=0)=1) \wedge (P(X=0, Y=1)=0)$$

$$(P(X=x|Y=0)=0) \wedge (P(X=x, Y=1)=0.01)$$

$\underline{p\,(y|x)}$

$$(P(Y=0.X=0)=1) \wedge (P(Y=0|X=x)=0)$$

$$(P(Y=1|X=0)=0) \wedge (P(Y=1|X=x))$$

$\underline{P\,(x,y)}$

$$P(X=0, Y=0) = 0.99$$

$$P(X=x, Y=0) = 0, x \in (100]$$

$$P(X=0, Y=1) = 0$$

$$P(X=X, Y=1) = 0.0001$$

$2)C)$

$$\underline{H(x)} = -\sum_{x} P(x) \cdot \log_2(P(x))$$

$$= -P(X=0) \cdot \log_2(P(X=0)) - \sum_{x=2}^{100} P(X=x) \cdot \log_2(P(X=x))$$

$$= -P(X=0) \cdot \log_2(P(X=0)) - (100) \cdot P(X=1) \cdot \log_2(P(X=1))$$

$$\simeq -(0.99)(-0.0145) - 100(0.0001)(-13.2877) \simeq 0.1472$$

$$\underline{H(Y)} = -\sum_{y} P(y) \cdot \log_2(P(y)) = -(0.99) \cdot \log_2(0.99) - (0.01) \cdot \log_2(0.01) \simeq 0.0808$$

$$\underline{H(X|Y)} = -\sum_{x} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2(PX=x|Y=1))$$

$$= -P(X=0, Y=1) \cdot \log_2(X=0|Y=1) - (100)\, P(X=1|Y=1) \cdot \log_2(P(X=1, Y=1))$$

$$\simeq -0.001 \cdot \log_2(0.01) \simeq 0.0664$$

H(X|Y=y) according clause 3 in question number 1 and the fact X and Y independent H(X|Y=y) = H(X) = 0.0808

$$\underline{H(Y|X)} = -\sum P(X=x, Y=0) log_2(P(Y=0, X=x)) \downarrow$$

$$-\sum P(X=x, Y=1) \cdot \log_2(Y=1|X=x)$$

$$= -P(X=0, Y=0) \log_2(P(Y=0, X=0) - \downarrow$$
$$(100) \cdot P(X=1, Y=0) \cdot P(Y=0|X=1)$$

$$= -0.99 \cdot \log_2(1) - (100) \cdot 0 = 0$$

$2)d)$

According the definition

$$I\left(X;Y\right) = H\left(X\right) - H\left(X|Y\right) = 0.1472 - 0.0664 \simeq 0.0808$$

$$I\left(Y;X\right) = H\left(Y\right) - H\left(Y|X\right) = 0.0808 - 0 = 0.0808$$

שאלה 3:

סעיף 3.1:

תהי $\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ מטריצת צפיפות כלשהי ויהי $\langle\phi|$ מצב.
לכן מתקיים כי:

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \left\langle\phi\left|\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)\right|\phi\right\rangle = \sum_i p_i\langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle =$$

$$= \sum_i p_i(\phi^*\psi_i)\cdot(\psi_i^*\phi) = \sum_i p_i(\phi^*\psi_i)\cdot(\phi^*\psi_i)^* = \sum_i p_i|\phi^*\psi_i|^2 \geq 0$$

כאשר השווין האחרון מאי שליליות של הסתברות וערך מוחלט.

סעיף 3.2:

$$tr(\rho) = tr\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \overset{linearity\ of\ trace}{=} \sum_i p_i tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \overset{trace\ is\ cyclic}{=}$$

$$= \sum_i p_i tr(\langle\psi_i|\psi_i\rangle) \overset{trace\ of\ scalar}{=} \sum_i p_i\langle\psi_i|\psi_i\rangle \overset{states\ are\ normalized}{=} \sum_i p_i = 1$$

השוויון האחרון נכון כי הסתברויות נסכמות ל-1.

סעיף 3.3:

תחילה, מטריצות מצבים הן הרמיטיות ולכן קיימת מטריצה U אוניטרית

כך ש: $U^\dagger\rho U = \sum_i \lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ כאשר λ_i הם ערכיה העצמיים של ρ ו-$|\phi_i\rangle$

הם איברי בסיס החישוב. אסמן $p' = U^\dagger\rho U$ לכן מתקיים כי:

$$tr(\rho^2) \overset{U\ is\ unitary}{=} tr(\rho UU^\dagger\rho UU^\dagger) \overset{trace\ is\ cyclic}{=} tr(U^\dagger\rho UU^\dagger\rho U) = tr\left(\rho'^2\right) =$$

$$= tr\left[\left(\sum_i \lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right)\left(\sum_j \lambda_j|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\right)\right] = \mathrm{tr}\left[\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\right] \overset{\phi_i\ are\ a\ base}{=}$$

$$= tr\left[\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j|\phi_i\rangle\delta_{i,j}\langle\phi_j|\right] = \mathrm{tr}\left[\sum_i \lambda_i^2|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right] \overset{linearity\ of\ trace}{=} \sum_i \lambda_i^2 tr(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|) =$$

$$\overset{trace\ is\ cyclic}{=} \sum_i \lambda_i^2 tr(\langle\phi_i|\phi_i\rangle) \overset{trace\ of\ scalar}{=} \sum_i \lambda_i^2\langle\phi_i|\phi_i\rangle \overset{states\ are\ normalized}{=} \sum_i \lambda_i^2$$

ולכן מתקיים כי

$$tr(\rho^2) = 1 \Leftrightarrow tr\left(\rho'^2\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_i \lambda_i^2 = 1$$

כעת, מסעיף 2 מתקיים כי $tr(\rho) = 1$ ולכן מהגדרת ע"ע $\sum_i \lambda_i = 1$

בנוסף מסעיף 1, $\rho \succcurlyeq 0$ ולכן $\lambda_i \geq 0$ כעת, מהעובדה בהדרכה חייב

להתקיים שיש בדיוק i אחד כך ש $\lambda_i \neq 0$ כלומר $U^\dagger \rho U = \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$

לכן מתקיים כי $\rho = \lambda_i U|\phi_i\rangle\langle\phi_i|U^\dagger = \lambda_i U|\phi_i\rangle U^\dagger U\langle\phi_i|U^\dagger$

כלומר אם נסמן מצב חדש $|\phi\rangle = U|\phi_i\rangle U^\dagger$ נקבל כי $\rho = U|\phi\rangle\langle\phi|$

כלומר קיבלנו כי ρ מצב טהור.

שאלה 4:

סעיף 4.1:

כיוון ראשון:

$$\rho_\psi\rho_\phi = \begin{pmatrix} cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) & e^{-i(\varphi+\varphi')}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \\ e^{i(\varphi+\varphi')}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) & sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \end{pmatrix}$$

לכן אם $\rho_\psi\rho_\phi = 0$ אז בפרט $cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 0$ ולכן בה"כ $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$

כלומר $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ בפרט במקרה זה $sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ ולכן $sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 0$

כלומר קיבלנו כי $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ וכעת קל לראות כי הם

אורתוגונליים וכן מכיוון שבכל זווית אחד מפונקציות הטריג' מתאפסת השנייה חייבת להיות 1 בערכה המוחלט כלומר הם אורתונורמליים.

כיוון שני: אניח כי הם אורתונורמליים. במקרה זה:

$$\rho_\psi\rho_\phi = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi| \overset{\langle\psi|\phi\rangle=0}{=} 0$$

סעיף 4.2:

כיוון ראשון: נניח כי הם אורתונורמליים.

ראינו כי במקרה זה ניתן להניח בה"כ כי $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 0$ ולכן מהגדרת sin,cos

מתקיים כי $\cos(\theta) = -1, \sin(\theta) = 0\ , sin(\theta') = 0, \cos(\theta') = 1$

הסימנים נכונים בגלל תכונות של מעבר מחצי זווית לזווית מלאה ובפרט אין פה בחירה מבין כמה אפשרויות.

כעת מתקיים כי $\overrightarrow{r_\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{r_\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ והטענה מתקיימת.

כיוון שני:

תחילה אראה כי מטריצות פאולי מתחלפות בכפל:

$$\sigma_x * \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_y * \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y * \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z * \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x * \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z * \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת אניח כי $\overrightarrow{r_\psi} = -\overrightarrow{r_\phi}$ לכן מתקיים כי

$$4 * \rho_\psi \rho_\phi = \left(I + \overrightarrow{r_\psi} * \vec{\sigma}\right)\left(I - \overrightarrow{r_\psi} * \vec{\sigma}\right) = I - \left(\overrightarrow{r_\psi} * \vec{\sigma}\right)\left(\overrightarrow{r_\psi} * \vec{\sigma}\right) =$$

$$= I - \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j\right) = I - \sum\nolimits_{i=1}^{3} \left(r_\psi^{(i)}\right)^2 \sigma_i^2 - \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j<i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j -$$

$$-\sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j>i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j \overset{simplifying\ pauli\ matrices}{=} I - I * \sum\nolimits_{i=1}^{3} \left(r_\psi^{(i)}\right)^2 -$$

$$-\sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j<i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j + \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j>i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_j \sigma_i = I - I * \sum\nolimits_{i=1}^{3} \left(r_\psi^{(i)}\right)^2 -$$

$$-\sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j<i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j + \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j<i} r_\psi^{(i)} r_\psi^{(j)} \sigma_i \sigma_j = I * \left(1 - \sum\nolimits_{i=1}^{3} \left(r_\psi^{(i)}\right)^2\right) =$$

$$= I * (1 - \sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \cos^2(\theta)) =$$

$$I * (1 - \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) = 0$$

לכן מסעיף א המצבים אורתונורמליים.

סעיפים 4.3+4.4:

תחילה כפי שלמדנו מצב מעורב בין שני מצבים טהורים נמצא על המיתר ביניהם בכדור פואנקרה. לכן בהינתן נקודה בתוך הכדור, לכל בחירה של מצב טהור על השפה נוכל להעביר מיתר דרך הנקודה והקצה השני של המיתר יהיה המצב הטהור השני. כלומר קיימים אינסוף צברים שונים של זוגות של מצבים טהורים שייתנו לנו את הנקודה.

כעת אם הנקודה אינה בראשית הצירים: אז כדי ששני המצבים יהיו אורתונורמליים חייב שהם יהיו בקצוות שונים של הכדור, כלומר המיתר שעובר ביניהם יהיה קוטר במעגל. בפרט קו זה צריך לעבור בנקודה

ובראשית הצירים ובגלל שהנקודה אינה ראשית הצירים יהיה בדיוק קו אחד כזה כלומר קיים בדיוק צבר אחד שבו המצבים אורתונורמליים.

אם הנקודה בראשית הצירים: אז בדיוק מאותו שיקול, כל קוטר יעבור גם בנקודה וגם בראשית הצירים כלומר מכל 2 מצבים טהורים אורתונורמליים יהיה ניתן לייצר צבר שעובר בראשית הצירים. בפרט יהיו קיימים אינסוף צברים כאלו.

$5)A)$

$$f\left(\overline{x}\right)=0 \longrightarrow \begin{array}{l} \to \left(\overline{x},0\right) \to \left(x,0\oplus 0\right)=\left(\overline{x},0\right) \\ \to \left(\overline{x},1\right) \to \left(x,1\oplus 0\right)=\left(\overline{x},1\right) \end{array}$$

$5)B)$

$$f\left(x\right)=1 \to \begin{array}{l} \left(\bar{x},0\right) \to \left(\overline{x},0\oplus 1\right)=\left(\bar{x},1\right) \\ \left(\bar{x},1\right) \to \left(\overline{x},1\oplus 1\right)=\left(\overline{x},0\right) \end{array} .$$

$$5)c)$$

U is could be the zero function according $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, now c kat is equal to -kat according the linearity of the tensor multiplication and the noted law from the current cause, we will prove the $|x\rangle \otimes |c\rangle$ is eign scenario of U

$$U_f(|\bar{x}\rangle \otimes |c\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_f(|\bar{x}\rangle \otimes |0\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}} U_f(|\bar{x}\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |0 \oplus f(\bar{x})) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |1 \oplus f(\bar{x})\rangle) =$$

According the mentioned law for:

$\underline{f(\bar{x}) = 1}$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |0 \oplus 1\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |1 \oplus 1\rangle) = -|\bar{x}\rangle \otimes |-\rangle$$

$\underline{f(\bar{x}) = 0}$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |0 \oplus 0\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{x}\rangle \otimes |1 \oplus 0\rangle) = |\bar{x}\rangle \otimes |-\rangle$$

There for we got the scenario $= |x\rangle \otimes |-\rangle$ Is eign scenario for U

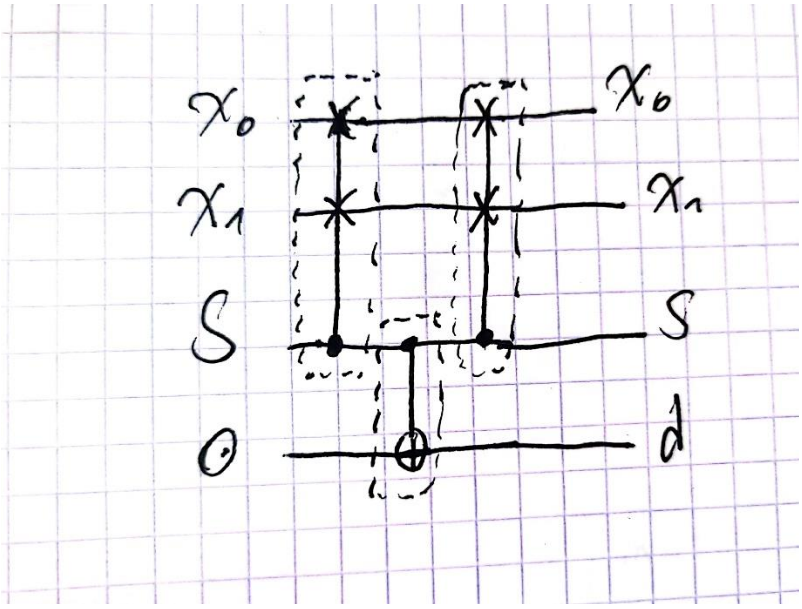
The eignvalue are implemented in the following formula:

$$U_f(|\bar{x}\rangle \otimes |-\rangle) = (-1)^{f(\bar{x})} |\bar{x}\rangle \otimes |-\rangle$$

For this scenario the eignvalue is: $(-1)^{F(x)} = (-1)^0 = 1$

שאלה 5:

סעיף 5.4:



סעיף 5.5: פרידקין:

$$w\big(Friedkin(x)\big) = w\big(Friedkin(c, t_1, t_2)\big) = \begin{cases} w(t_1, t_2)\,, c = 0 \\ 1 + w(t_1, t_2)\,, c = 1 \end{cases} = w(c) + w(t_1, t_2) =$$

$$= w(c, t_1, t_2) = w(x)$$

טופולי: $w(1,1,1) = 3\,, w\big(toffoli(1,1,1)\big) = 2$

סעיף 5.6:

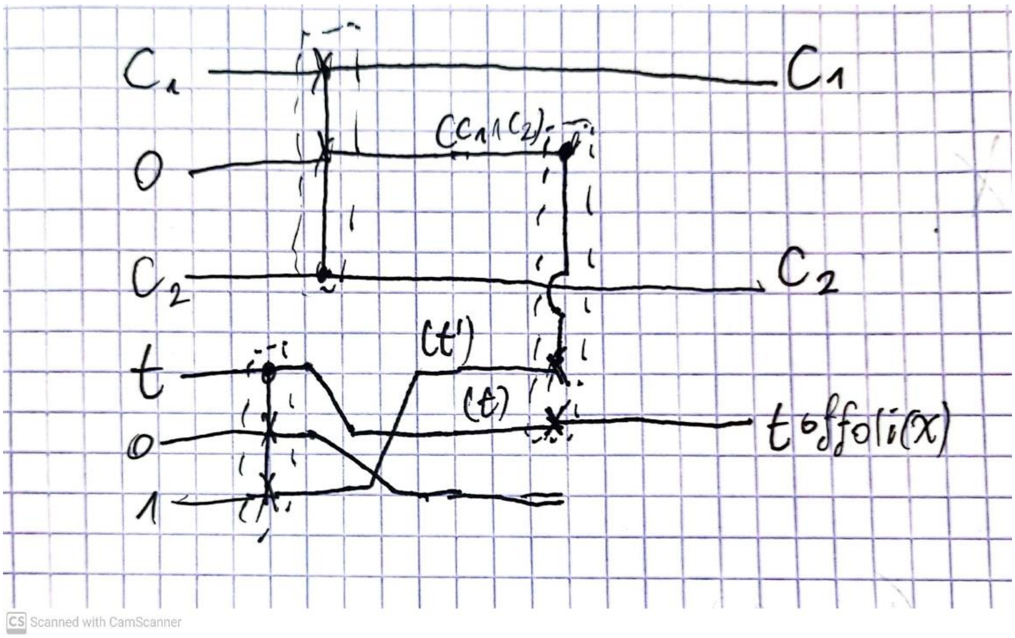
אוכיח עבור שרשור של 2 שערים ושרשור בגודל שרירותי יתקבל באינדוקציה. יהיו f,g משמרי משקל.

$$w(f\big(g(x)\big) \overset{f\ \ preserves\ weight}{=} w(g(x)) \overset{g\ preserves\ weight}{=} w(x)$$

סעיף 5.7:

אף על פי שנראה שעקב שימור משקל לא ניתן לממש שער טופולי באמצעות שערי פרידקין, מכך שמותר להשתמש בביטי עזר נקבל שניתן לקיים את שימור המשקל בכך שנשנה את ערכי סיבי העזר.

בפרט זהו מימוש של השער באמצעות 3 שערים אך עם סיבי עזר מלוכלכים:



סעיף 5.8:

מימוש של השער באמצעות 3 שערי toffoli: