מבוא לעיבוד אינפורמציה קוונטית - תרגיל בית 1

חורף תשפ"ג

שאלה 1: לכסון מטריצות הרמיטיות 2×2 (17 נקודות)

1. (5 נקודות) הראו כי כל מטריצה הרמיטית $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ניתנת לביטוי כצירוף לינארי $A = n_0 I_2 + n_1\sigma_x + n_2\sigma_y + n_3\sigma_z$ של מטריצת היחידה ומטריצות פאולי:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כאשר n_i קבועים ממשיים.

<u>הדרכה:</u> התחילו ממטריצה $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ כללית, וצמצמו דרגות חופש.

2. (5 נקודות) עבור $A = n_0 I_2 + n_1\sigma_x + n_2\sigma_y + n_3\sigma_z$ הרמיטית, הראו כי הערכים העצמיים של A שווים ל:

$$\lambda_\pm = n_0 \pm \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

3. (5 נקודות) הראו כי הוקטורים הבאים הינם וקטורים עצמיים של A (עם הע"ע המתאימים):

$$v_+ = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -e^{i\varphi}\cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

כאשר $\hat{n} = \frac{(n_1,n_2,n_3)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} \equiv (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$.

<u>רמז:</u> לא חייבים לבצע את החישוב המלא לשני הוקטורים. הראו ישירות עבור אחד הוקטורים, והשתמשו בתכונות של מטריצות הרמיטיות כדי להסיק על הוקטור השני.

4. (2 נקודות) מצאו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ בהתאם לסעיפים הקודמים.

שאלה 2: תכונות של מטריצות הרמיטיות (18 נקודות)

הוכיחו את התכונות הבאות של מטריצות הרמיטיות ואופרטורים הרמיטיים: (מותר להיעזר בתכונות המטריצה הצמודה, שהוזכרו בתרגול 1)

1. (5 נקודות) צירוף לינארי ממשי, $\alpha A + \beta B$, של שתי מטריצות הרמיטיות A ו־B (כאשר α ו־β הם סקלרים ממשיים) הוא מטריצה הרמיטית.

2. (5 נקודות) אם $|u\rangle$ ו־$|v\rangle$ הם שני וקטורים עצמיים של אופרטור הרמיטי A, השייכים לשני ערכים עצמיים שונים λ ו־μ (בהתאמה), אז $|u\rangle$ ו־$|v\rangle$ אורתוגונליים.

   הדרכה: היעזרו בתכונה הבאה (שהוכחה בהרצאה 2): כל הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי הם ממשיים; וכן ברעיונות המופיעים בהוכחתה.

3. (משפט הפירוק הספקטרלי - 5 נקודות): הוכיחו כי אם A מטריצה הרמיטית בגודל $n \times n$, אז ניתן לכתוב אותה בצורה הבאה: $A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$, כאשר $v_{i_{i=1}}^n$ מהווים בסיס אורתונורמלי, ו־λ_i ממשיים.
   הנחיה: אתם יכולים להניח ־ למען פשטות ההוכחה ־ שכל הערכים העצמיים של המטריצה שונים. הנחה זו אינה הכרחית לצורך הוכחת המשפט והוא נכון גם בלעדיה, אך אינכם נדרשים להוכיח אותה במקרה זה.

4. (3 נקודות) רשמו את הפירוק הספקטרלי של המטריצה $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

שאלה 3: אקספוננט של מטריצה (15 נקודות)

תהא A מטריצה הרמיטית בעלת הפירוק הספקטרלי הבא: $A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$.

1. (10 נקודות) הראו באינדוקציה שלכל $n \geq 1$ מתקיים $A^n = \sum_i \lambda_i^n |v_i\rangle \langle v_i|$.

2. (5 נקודות) נוסחת האקספוננט כטור טיילור מוגדרת באופן הבא:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

   ניתן להפעיל את הנוסחה הזו גם עבור ערכי x שאינם סקלרים ־ למשל, עבור מטריצות ריבועיות, עבורן מוגדרת חזקה טבעית.
   הראו שעבור המטריצה A מתקיים: $e^A = \sum_i e^{\lambda_i} |v_i\rangle \langle v_i|$.
   הערה: ניתן ומוצלץ להשתמש בתוצאה מסעיף 1, גם אם לא פתרתם אותו.

הערה: בצורה דומהת ניתן להגדיר עבור כל פונקציה $f(x)$ שניתנת לפיתוח לטור חזקות פעולה על מטריצה.
בפרט, יתקיים: $f(A) = \sum_i f(\lambda_i) |v_i\rangle \langle v_i|$.
הגדרות אלו שימושיות כאשר פותרים את משוואת שרדינגר.

שאלה 4: מטריצות אוניטריות (20 נקודות)

שערים קוונטיים, בהם נעסוק בהמשך הקורס, ניתנים לייצוג באמצעות מטריצות אוניטריות. הוכיחו:

1. (5 נקודות) המטריצות $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, H$ הן אוניטריות.

2. (5 נקודות) שורותיה של מטריצה אוניטרית U מסדר $n \times n$ אורתונורמליות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.
   תזכורת: המכפלה הפנימית הסטנדרטית מוגדרת:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^{\star} v_i$$

3. (5 נקודות) אם שורותיה של מטריצה ריבועית U מסדר $n \times n$ אורתונורמליות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית, אז U אוניטרית. (זוהי התכונה ההפוכה לסעיף 2.)

4. (5 נקודות) כל ערכיה העצמיים של מטריצה אוניטרית U הם מהצורה $e^{i\theta}$, כלומר, מספר מרוכב עם ערך מוחלט 1.

<u>הדרכה:</u> היעזרו בתכונה שהוכחה בהרצאה 2: מטריצה אוניטרית U שומרת על המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כלומר, $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle$. מה פירוש הדבר לגבי וקטור עצמי של U?

שאלה 5: מכפלות טנזוריות (30 נקודות)

בשאלה זו נוכיח תכונות שונות של מכפלות טנזוריות. היעזרו במכפלת קרונקר (לווקטורים ולמטריצות) שהוצגה בתרגול 1.

1. בהינתן שני מרחבים וקטוריים U ו־V שמימדיהם $\dim(U) = k$ ו־$\dim(V) = n$, הוכיחו את כללי החשבון הבאים עבור מרחב המכפלה הטנזורית $U \otimes V$:

(א) (2 נקודות) <u>כפל בסקלר:</u> בהינתן וקטורים $U \ni \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ ו־$V \ni \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, וסקלר $c \in F$ (כאשר F השדה), מתקיים: $\vec{a} \otimes \left(c \cdot \vec{b}\right) = (c \cdot \vec{a}) \otimes \vec{b} = c \cdot \left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right)$.

(ב) (2 נקודות) <u>חוק הפילוג:</u> בהינתן וקטורים $U \ni \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ ו־$V \ni \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, מתקיים:

$(\vec{a} + \vec{c}) \otimes \vec{b} = \left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \otimes \vec{b}\right)$.

(ג) (2 נקודות) <u>חוק הפילוג:</u> בהינתן וקטורים $U \ni \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ ו־$V \ni \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, מתקיים:

$\vec{a} \otimes \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right) + (\vec{a} \otimes \vec{c})$.

(ד) (5 נקודות) <u>מכפלה פנימית:</u> בהינתן וקטורים $U \ni \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ ו־$V \ni \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, מתקיים: $\left\langle \vec{a} \otimes \vec{b}, \vec{c} \otimes \vec{d}\right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{d}\right\rangle$ עבור <u>המכפלה הפנימית הסטנדרטית</u>.
<u>יש להוכיח תכונה זו עבור המקרה $U = V = \mathbb{C}^2$ בלבד</u> (אך היא נכונה גם לכל שני מרחבים אחרים).

2. (5 נקודות) בהינתן שלושה מרחבים וקטוריים U, V ו־W שמימדיהם $\dim(U) = k$, $\dim(V) = n$ ו־$\dim(W) = m$, ובהינתן וקטורים $U \ni \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$, $V \ni \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ו־$W \ni \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$, הוכיחו: $\left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right) \otimes \vec{c} = \vec{a} \otimes \left(\vec{b} \otimes \vec{c}\right)$ (אסוציאטיביות).

<u>יש להוכיח תכונה זו עבור המקרה $U = V = W = \mathbb{C}^2$ בלבד</u> (אך היא נכונה גם לכל שלושה מרחבים אחרים).

3. (4 נקודות) הראו שאם A, B מטריצות ריבועית (כאשר A מסדר $m \times m$ ו־B מסדר $n \times n$), אז $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.

<u>יש להוכיח תכונה זו עבור המקרה $m = n = 2$ בלבד</u> (אך היא נכונה גם לכל בחירה אחרת של מימדים).

4. (5 נקודות) הראו שאם A, B מטריצות אוניטריות (כאשר A מסדר $m \times m$ ו־B מסדר $n \times n$), אז גם $A \otimes B$ אוניטרית.

<u>יש להוכיח תכונה זו עבור המקרה $m = n = 2$ בלבד</u> (אך היא נכונה גם לכל בחירה אחרת של מימדים).

<u>הדרכה:</u> היעזרו בתכונה: מטריצה ריבועית U היא מטריצה אוניטרית אם ורק אם עמודותיה הן אורתונורמליות זו לזו (לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית). מהן העמודות של $A \otimes B$ לפי מכפלת קרונקר? כיצד נחשב את המכפלות הפנימיות (הסטנדרטיות) שלהן זו עם זו?

5. (5 נקודות) הראו שאם A, B מטריצות ריבועית (כאשר A מסדר $m \times m$ ו־B מסדר $n \times n$) ו־$\vec{u} \in F^m, \vec{v} \in F^n$ וקטורים, אז $(A \otimes B)(\vec{u} \otimes \vec{v}) = (A\vec{u}) \otimes (B\vec{v})$.

יש להוכיח תכונה זו עבור המקרה $m = n = 2$ בלבד (אך היא נכונה גם לכל בחירה אחרת של מימדים).

(המשמעות האינטואיטיבית של תכונה זו: הפעלת מטריצת המכפלה הטנזורית $A \otimes B$ על וקטור המכפלה הטנזורית $\vec{u} \otimes \vec{v}$, שקולה להפעלת A ו־B על הווקטורים $\vec{u}$ ו־$\vec{v}$ בנפרד (ובהתאמה).)