DECEMBER 2022

H.W 3
QUANTUM INFORMATION

AMIT LEVI 207422650
GILAD LEVI 326326493

QUESTION 1.A

DECEMBER 2022

CONTRADICTION

Perhaps in the negative assumption we able to produce, in total we created a candy couple in a scenario of ø+.
Because both of the candy in ø+ scenario they have the same taste and the same smell , both of them created under C condition in V scenario.
For both of the scenarios the color of the candy didn't define, if we will measure their color, we will find a random color for each of the candies, with dependency or correlation between them.
according to that, they cannot be both in the ø+ scenario

QUESTION 1.B

DECEMBER 2022

CONTRADICTION

The actions take a glance or tasting the candies do not produce the ability for recognizing the current Bell condition of candy couple, what recognize only under the Knowledge of equality or equality of taste in two candies.
Perhaps we know their taste, and we measure the taste before all of the following operations, now because we measure their taste the color condition between them collapses so we cannot know each completion they have before the collapsing.
In the same idea and different set of the event if we were to take a glance at what color we have in our two candies the taste condition was collapsing, so we cannot recognize the bell scenario of the candies couple.

DECEMBER 2022

QUESTION 1.C

PROVE

First note that in time we measure the color of one candy from the couple who under one of the bell scenarios we will get a random color same for the taste measuring, so if Bob measuring the taste of the candy is random and independent of Alice's candy.
Additionally the color is not dependent on the taste, they have only coloration dependency between them, so Alice's and Bob's measuring is random and independent.

<u>שאלה 1:</u>

סעיף 1.4:

תחילה, אליס תכין n סוכריות במצב ψ_- ותשלח אותן לבוב.
כעת בשלב החשיפה היא תחליט על איזה ביט רצתה לשלוח
(טעם או ריח) ותתחיל למדוד את הסוכריות. בכל מדידה היא תגיד לבוב
את הערך ההפוך ממה שקיבלה באמת וכך תוכל להבטיח שבכל
סוכרייה שניהם מקבלים את אותם הערכים.

סעיף 1.5:

בוב ימדוד את זוג הסוכריות לפי pseudo-bell measurement ואז יקבע את

ערכי הביטים לפי הטבלה הבאה:

measurement	b_1	b_0
ψ_-	0	0
ϕ_-	0	1
ψ_+	1	0
ϕ_+	1	1

כעת, מאחר ואלו אותם אליס הייתה מייצרת בהתאם לערכי הביטים,

נקבל כי בוב ידע לשחזר אותם בהתאם למדידה שעשה.

שאלה 2:

סעיף 2.1.1:

כיוון ראשון:

$$\psi = \frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle + |+\rangle|+\rangle}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1.5\\0.5\\0.5\\1.5\end{pmatrix}$$

המצב שזור $\alpha_0 * \alpha_3 = \frac{2.25}{\alpha^2}\ , \alpha_1 * \alpha_2 = \frac{0.25}{\alpha^2}, \alpha_0 * \alpha_3 \neq \alpha_1 * \alpha_2 \Longrightarrow$

סעיף 2.1.2:

המצב ניתן להצגה כוקטור ולכן הוא טהור.

סעיף 2.1.3:

מנרמול חייב להתקיים כי:

$$\frac{2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25}{\alpha^2} = 1 \Longrightarrow \alpha = \sqrt{5}$$

סעיף 2.2.1:

כיוון ראשון:

$$\rho = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

המצב ניתן להצגה כמכפלה טנזורית ולכן הוא פריק.

סעיף 2.2.2+2.2.3:

תחילה, ראינו שלכל מטריצת צפיפות מנורמלת מתקיים כי $tr(\rho) = 1$

לכן $\frac{4}{\alpha} = 1 \Longrightarrow \alpha = 4$ כעת מתקיים כי:

$$\rho^2 = \frac{4}{\alpha^2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix} = \rho$$

כלומר המצב טהור כי $\rho^2 = \rho$

<u>שאלה 3:</u>

סעיף 3.1.1:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{(|0\rangle_A - |1\rangle_A)}{\sqrt{2}}|0\rangle_B = |\phi\rangle_A|0\rangle_B$$

לכן יתקיים כי $\rho_A = |\phi\rangle_A\langle\phi|_A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

בפרט זו מטריצת הצפיפות של המצב $|\phi\rangle_A$ ולכן המצב טהור.

סעיף 3.1.2:

$$\rho_B = \frac{1}{2}|0\rangle_B\langle 0|_B + \frac{1}{2}|0\rangle_B\langle 0|_B = |0\rangle_B\langle 0|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בפרט זו מטריצת הצפיפות של המצב $|0\rangle_B$ ולכן המצב טהור.

סעיף 3.1.3:

נשים לב כי המצב של בוב הוא המצב הטהור $|0\rangle$ שכידוע הוא ו"ע של

הע"ע 1 באופרטור σ_z ולכן במדידה ההסתברות לקבל אותו תהיה 1.

סעיף 3.1.4:

כפי שראינו בתרגול, המצב בו בוב יישאר הוא בדיוק המצב שמכפיל

במכפלה טנזורית את מצב 0 של אליס ולכן $|\psi\rangle_B = |0\rangle$.

סעיף 3.2.1:

$$tr_B(\rho_{AB}) = tr_B\left(\epsilon|\psi\rangle\langle\psi| + (1-\epsilon)\frac{I_4}{4}\right) = \epsilon tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) + (1-\epsilon)tr_B\left(\frac{I_4}{4}\right) =$$

$$\overset{result\ from\ previous\ section}{=} \frac{\epsilon}{2}|\phi\rangle_A\langle\phi|_A + (1-\epsilon)\frac{I_2}{2} = \frac{\epsilon}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + (1-\epsilon)\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\epsilon}{2}\\ -\frac{\epsilon}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

אם $\epsilon = 0$ נקבל את המצב המעורב לחלוטין שבפרט אינו טהור.

אם $0 < \epsilon < 1$ שהמטריצה מייצגת צבר של כמה מצבי בסיס ולכן נותר מעורב.

סעיף 3.2.2:

$$\rho_A = tr_A\left(\epsilon|\psi\rangle\langle\psi| + (1-\epsilon)\frac{I_4}{4}\right) = \epsilon|0\rangle_B\langle 0|_B + (1-\epsilon)\frac{I_2}{2} = \begin{pmatrix}\frac{\epsilon+1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\epsilon}{2}\end{pmatrix}$$

סעיף 3.2.3:

כעת ניתן לראות כי בהסתברות ϵ מצבו של בוב הוא $|0\rangle$ ולכן כאשר נמדוד עם σ_z נקבל את הערך 1 בהסתברות 1.

בהסתברות ϵ -1 המצב של בוב הוא $\frac{|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|}{\sqrt{2}} = \frac{I_2}{2}$

המצב $|1\rangle$ הוא גם ו"ע של σ_z והוא מתאים לע"ע 1-.

לכן בהסתברות 0.5 נקבל במדידה 1 ובהסתברות 0.5 לא נקבל 1.

כלומר סה"כ ההסתברות לקבל 1 היא $\epsilon * 1 + (1-\epsilon) * \frac{1}{2} = \frac{\epsilon+1}{2}$

QUESTION 4.A

DECEMBER 2022

Alice send to Bob $|\psi\rangle A = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. .
the transformation is:

$$|\psi\rangle_A|0\rangle_E = (\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A)|0\rangle_E = \alpha|0\rangle_A|0\rangle_E + \beta|1\rangle_A|0\rangle_E \rightarrow \alpha|0\rangle_A|0\rangle_E + \beta|+\rangle_A|1\rangle_E \checkmark$$

Bob gets the state of the tracing environment:

$$\rho_B = |\alpha|^2|0\rangle_B\langle 0|_B + |\beta|^2|+\rangle_B\langle +|_B$$

$$= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + 0.5|\beta|^2 & 0.5|\beta|^2 \\ 0.5|\beta|^2 & 0.5|\beta|^2 \end{bmatrix}$$

QUESTION 4.B

For the scenario $|+\rangle A$, $|-\rangle A$ Bob getting the same output.
according the fact both of the scenarios sharing
$||\alpha|2 = 0.5$, $|\beta|2 = 0.5$.
Bob will get:

$$\rho_B = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + 0.5|\beta|^2 & 0.5|\beta|^2 \\ 0.5|\beta|^2 & 0.5|\beta|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5^2 & 0.5^2 \\ 0.5^2 & 0.5^2 \end{bmatrix}$$

QUESTION 4.C

DECEMBER 2022

Clause c

If Alice sends $|0\rangle$ or $|1\rangle$, Bob will get $|0\rangle$ or $|+\rangle$ with equal probability.

In case Bob measuring the basis $B1 = \{|\phi 0\rangle, |\phi 1\rangle\}$ and $|\phi 0\rangle$ is between $|0\rangle$ or $|+\rangle$ on Bloch sphere,

Bob cant learn anything from mixed state of $|0\rangle$, $|+\rangle$ in equal probability.

$|\phi 0\rangle$ is between $|0\rangle$ or $|+\rangle$:

$$\varphi_1 = \varphi_{|+\rangle} = \frac{\pi}{2}$$

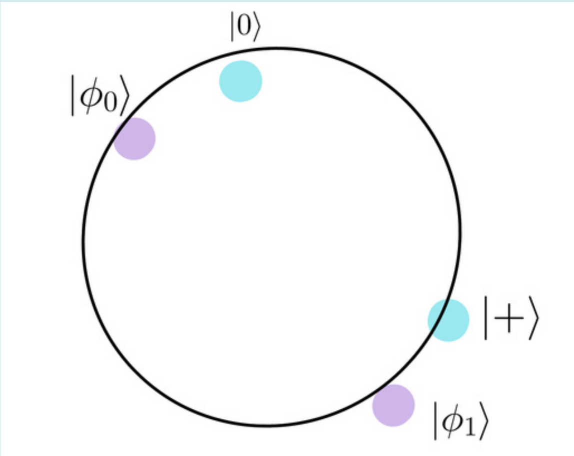
and :

$$\theta_1 = \frac{\theta_{|0\rangle} + \theta_{|+\rangle}}{2} = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

QUESTION 4.D

The distance i.e. $d(|\phi 0\rangle, |0\rangle) = d(|\phi 1\rangle, |+\rangle)$ should be minimal.
$B2 = \{|\phi 0\rangle, |\phi 1\rangle\}$ two points on Bloch.
$|\phi 1\rangle$ closer to $|+\rangle$ and $|\phi 0\rangle$ closer to $|0\rangle$.

We will note the points in the Sphere:



We gets the points with ø2 = 3/π and f = π /2

QUESTION 4.E

$$I(A,B) = H(A) - H(A|B)$$

$$H(A|B) = -\sum_{a,b} P(a,b) \cdot \log_2 (P(a,b))$$

$$H(A) = -0.5 \cdot \log_2(0.5) - 0.5 \cdot \log_2(0.5) \; = 1$$

we will to find p(a,b) for a ∈ A, b ∈ B with using $p(a, b)$ = p(a)•p(b|a) to calculate H(A|B)
p(a) = p(A = |1⟩) = p(A = |0⟩) = 0.5
p(b|a) is the squared size of the overlap between the output of the Transformation for the input a and b,

$$\bullet \underline{P(a) = P(A = |0\rangle)} = P(A = |1\rangle) = 0.5$$

$$P(B = |\phi_0\rangle | A = |0\rangle) = \; |\langle \phi \,|\, |0\rangle|^2 \; = \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$\bullet \underline{P(B = |\phi\rangle | A = |0\rangle)} = |\langle \phi \,|\, |0\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi_2} \cdot sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \cos(\theta_2)\, sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + i \cdot sin(\varphi_2) \cdot \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi_2) \cdot sin(\theta_2))$$

$$P(B = |\phi\rangle | A = |0\rangle) = |\langle \phi \,|\, |0\rangle|^2 \; = \sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$\bullet \underline{P(B = |\phi\rangle | A = |1\rangle)} = |\langle \phi \,|\, |+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi_2} \cdot sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \cos(\theta_2)\, sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - i \cdot sin(\varphi_2) \cdot \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos(\varphi_2) \cdot sin(\theta_2)) \; = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot cos(\varphi_2) \cdot sin(\theta_2)$$

$$H(A|B) = -(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot cos(\varphi_2)\, sin(\theta_2) \cdot \log_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot cos(\varphi_2) \cdot \sin(\theta_2)\right) - \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) a \log_2\left(\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)$$

$$-(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot cos(\varphi_2)\, sin(\theta_2) \cdot \log_2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot cos(\varphi_2) \cdot \sin(\theta_2)\right) - \frac{1}{2} sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) a \log_2\left(\frac{1}{2} sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)$$

$$\rightarrow I(A,B) = 1 - H(A|B)$$

QUESTION 5.A

DECEMBER 2022

1)
Let $|\psi\rangle$ be a pure state, and $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ it's density matrix:
p has a single non-zero eigenvalue $\lambda 0$, and $\lambda 1, \dots \lambda n{-}1 = 0$
because the rank of ρ is 1 .
ρ is normalized, therefore $\lambda 0 = 1$.
We get:

$$S\,|p| = -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \log_2(\lambda_i) = -1 \cdot \log_2(1) - (n-1) \cdot 0 \cdot \log_2(0) = 0$$

2)
- mixed state $\rho = 1\ In$.
- eigenvalues of ρ are $\lambda 0, \dots \lambda n{-}1 = 1.\ nn$

Therefore:

$$S\,|p| = -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \log_2(\lambda_i) = -\log_2\left(\frac{1}{n}\right) = \log_2(n)$$

s(p) not s|p| the keyboard translation from draw to printed changed that

DECEMBER 2022

QUESTION 5.B

1)

We need to calculate the right side we will start to calculate S(p) as the completely mixed state for n = 2 (according to the first clause)

S(p) = log2 2 = 1.

Now for the pure state of S(|0⟩⟨0|) and S(|1⟩⟨1|), we will get that S(|0⟩⟨0|), S(|1⟩⟨1|) = 0.

Therefore, the right side is :

S(p)-(1/2)•S(|0><0|) - (1/2)•S(|1><1|) = 1 + 0 =1

The left side is:

$$H(x) = -\sum_{x} P(x) \cdot \log_2 (P(x)) = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) (\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Therefore we prove the equation:

H(x) = S(p)-(1/2)•S(|0><0|) - (1/2)•S(|1><1|)

2)

0 ⩽ H(X|Y)

-> H(X) − H(X|Y) ⩽ H(X) entropy is non-negative.

-> I(X; Y) = H(X) − H(X|Y)

->I(X;Y) ⩽ S(p) − (1/2) S(|0⟩⟨0|) − (1/2) S(|1⟩⟨1|)

QUESTION 5.C

DECEMBER 2022

1)

$$\left(\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\0.25 & 0..25\end{bmatrix}$$

2)

We will start in calculate the left side:

$$S\,|p| = -\sum_{i=0}^{1}\lambda_i \log_2(\lambda_i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\iota \log_2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\cdot\log_{\frac{}{}}2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$$

= 0.6

In the other case of S(|0⟩⟨0|) and S(|+⟩⟨+|) is the pure states:

S(|0⟩⟨0|), S(|+⟩⟨+|) = 0.

Therefore, we found :

I(X;Y) ~= 0.6

c)

X has the same distribution, H(X) = 1 so we know H(X|Y)= H(X) −I(X;Y) same as before,

Therefore the lower bound is 1- 0.6008 = 0.399

Bob will never know with certainty what is Alice's state.

For example if he will measure Y, there is always going to be uncertainty about Alice choice X.