Applied Physics - I

अनुप्रयुक्त भौतिकी - 1

Polytechnic 1st Semester

Hand Written Notes

अध्याय - 01 मात्रक एवं विमाएँ

[Units and Dimensions]

* भौतिक राशियाँ -

कोई भी मापी जा सकने वाली राशि भौतिक राशि कहलाती है।
जैसे - ताप, द्रव्यमान, दूरी, ऊर्जा, वेग, बल आदि।

* मूल राशियाँ -

वे भौतिक राशियाँ जिनकी सहायता से अन्य भौतिक राशियाँ व्यक्त की जाती हैं। मूल राशियाँ कहलाती हैं।
जैसे - लम्बाई, द्रव्यमान, समय ~~आदि~~।

* व्युत्पन्न राशियाँ

वे भौतिक राशियाँ जो मूल राशियों की सहायता से व्यक्त की जाती हैं। ~~मूल~~ व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।
जैसे - क्षेत्रफल, आयतन, वेग, घनत्व

* मूल राशियों के मात्रक

मूल राशियाँ	मात्रक
(i) लम्बाई	मी०
(ii) द्रव्यमान	किग्रा
(iii) समय	सेकण्ड
(iv) विद्युतधारा	एम्पियर
(v) ताप	केल्विन
(vi) ज्योति तीव्रता	कैण्डेला
(vii) पदार्थ की मात्रा	मोल

* भौतिक राशियों की विमाएँ एवं विमीय सूत्र

(Dimensions and Dimensional Formulae of physical Quantities)

किसी भौतिक राशी की विमाएँ वे राशियाँ होती हैं या वे घातें होती हैं जिन्हें उन भौतिक राशी को मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर लगाया जाता है।

* भौतिक राशियों के विमीय सूत्र –

(i) क्षेत्रफल – लं० × चौ०
$[L] \times [L] = [L^2]$

(ii) आयतन – लं० × चौ० × ऊँ०
$[L] \times [L] \times [L] = [L^3]$

(iii) घनत्व – $\dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = [M^1L^{-3}]$

(iv) दाब – $\dfrac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

(v) ऊर्जा – बल × दूरी $= [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$

(vi) वेग – $\dfrac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \dfrac{[LT]}{[T^{-2}]} = [LT^{-2}]$

(vii) बल – द्रव्यमान × त्वरण
$[M]\ [LT^{-2}] = [MLT^{-2}]$

(viii) गतिज ऊर्जा – $\frac{1}{2}mv^2$
$[M][LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

(ix) स्थितिज ऊर्जा - mgh

$[M][LT^{-2}][L]$ - $[ML^2T^{-2}]$

(x) शक्ति - $\frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$ = $[ML^2T^{-3}]$

$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[T]}$

(xi) कोणीय विस्थापन - $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ - विमाहीन

(xii) कोणीय वेग - $\frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$ $[T^{-1}]$

(xiii) कोणीय त्वरण $\frac{\text{कोणीय वेग}}{\text{समय}}$

$\frac{[T^{-1}]}{[T]}$ = $[T^{-2}]$

(xiv) जड़त्व आघूर्ण - द्रव्यमान × दूरी - $[ML^2]$

$[M] \times [L^2]$

(xv) बल आघूर्ण - बल × दूरी

$[MLT^{-2}] \times [L]$ - $[ML^2T^{-2}]$

(xvi) कोणीय संवेग -

$J = I\omega$ - $[ML^2T^{-1}]$

जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग

$[ML^2]$ $[T^{-1}]$ = $[ML^2T^{-1}]$

(xvii) स्प्रिंग नियतांक -

$$F = Kx, \quad K = \frac{f}{x} = \frac{\text{बल}}{\text{दूरी}} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L]}$$

$$= [MT^{-2}]$$

(xviii) आवर्तकाल (T) $= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = [T^1]$

$$\sqrt{l/g} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{T^{2}} = [T]$$

(xix) गुरुत्वाकर्षण नियतांक (G) - $\frac{Fr^2}{m_1 m_2}$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M^2]}$$

$$= [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

(xx) पृष्ठ तनाव $T = \frac{F}{l} - [MT^{-2}]$

$$T = \frac{[M\cancel{L}T^{-2}]}{[\cancel{L}]}$$

(xxi) प्रतिबल $= \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = [ML^{-1}T^{-2}]$

$$= \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}$$

(xxii) विकृति $= \frac{\text{आकार में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आकार}} =$ विमाहीन राशि

(xxiii) यंग प्रत्यास्थता गुणांक - $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

$$\frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{1} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

(xxiv) श्यानता गुणांक - $\eta = \frac{F}{A\frac{dv}{dx}}$

$$\eta = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]\frac{[LT^{-1}]}{[L]}}$$

$$\eta = [ML^{-1}T^{-1}]$$

(xxv) आवृत्ति $= \frac{1}{[T]} = [T^{-1}]$

(xxvi) विशिष्ट ऊष्मा $c = \frac{Q}{M\Delta t}$

$$c = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M\theta]}, \quad c = [L^2T^{-2}\theta^{-1}]$$

(xxvii) गुप्त ऊष्मा $L = \frac{Q}{M}$

$$L = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M]}$$

$$L = [L^2T^{-2}]$$

(xxviii) ऊष्मा चालकता गुणांक - $K = [MT^{-3}\theta^{-1}]$

(xxix) वेग प्रवणता - $\frac{\text{वेग}}{\text{दूरी}} = \frac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$

(xxx) प्लांक नियतांक $E = h\nu \Rightarrow h = \frac{E}{\nu} = \frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आवृत्ति}}$

$$= \frac{[ML^2T^{-2}]}{[T^{-1}]} = [ML^2T^{-1}]$$

(xxxi) संवेग = द्रव्यमान × वेग

$= [M] \times v$

$= [M][LT^{-1}]$

$= [MLT^{-1}]$

(xxxii) बल आघूर्ण - बल × दूरी

$= [MLT^{-2}][L]$

$= [ML^2T^{-2}]$

(xxxiii) कोणीय वेग - $\frac{\text{कोण}}{\text{समय}} = \frac{1}{T} = [T^{-1}]$

(xxxiv) कोणीय त्वरण $\frac{\text{कोणीय वेग}}{\text{समय}}$ $\frac{[T^{-1}]}{T}$

$= [T^{-2}]$

(xxxv) जड़त्व आघूर्ण = द्रव्यमान × दूरी^{2}

$[M] \quad [L^2]$

$= [ML^2]$

(xxxvi) आवेश = धारा × समय

$q = I \times T$

$q = [AT]$

(xxxvii) विद्युत क्षेत्र $E = \frac{F}{q}$

$= \frac{\text{बल}}{\text{आवेश}} = \frac{[MLT^{-2}]}{[AT]}$

$= [MLT^{-3}A^{-1}]$

(xxxviii) ~~वैद्युत~~ विभव - $V = \frac{W}{Q}$, $\frac{[ML^2T^{-2}]}{[AT]}$

$= [ML^2T^{-3}A^{-1}]$

(xxix) प्रतिरोध $R = \frac{V}{I}$

$R = \frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[A]}$

$R = [ML^2T^{-3}A^{-2}]$

~~xxx~~(xL) विशिष्ट प्रतिरोध - $R = \frac{\rho l}{A}$, $\rho = \frac{RA}{l}$

$L = \frac{[ML^2T^{-3}A^{-2}][L^2]}{[L]}$

$L = [ML^3T^{-3}A^{-2}]$

* विमीय समांगीयता का सिद्धान्त -

किसी भौतिक समी॰ में संतुलन के लिए यह आवश्यक है कि भौतिक राशियां दोनों ओर की बराबर होनी चाहिए यह सिद्धान्त विशिष्ट समांगीयता का सिद्धान्त कहलाती है।

जैसे - (i) $v^2 = u^2 + 2as$

$[LT^{-1}]^2 = [LT^{-1}]^2 + 2[LT^{-2}][L]$

$[LT^{-1}]^2 = 3[L^2T^{-2}]$

$[L^2T^{-2}] = L^2T^{-2}$

अतः यह समी॰ विद्युत समांगीयता का पालन करता है

(ii) $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$[L] = [L\cancel{T^{-1}}][\cancel{T}] + \frac{1}{2}[L\cancel{T^{-2}}][\cancel{T^2}]$

$[L] = [L]$

अतः यह समी॰ विमीय समांगीयता के सिद्धान्त का पालन करता है।

(iii) $x = a + bt^2 + ct^3 + dt^4$

$x = a$

$a = [L]$

$x = bt^2$

$b = \frac{x}{t^2} = \frac{L}{[T^2]} = [LT^{-2}]$

नोट:- यदि कोई भी पद एक दूसरे में जुड़ रहा हो / घट रहा हो तो वह एक दूसरे के बराबर होता है।

$x = ct^3$

$c = \frac{x}{t^3} = \frac{[L]}{[T^3]} = [LT^{-3}]$

$x = dt^4$

$d = \frac{x}{t^4} = \frac{[L]}{[T^4]} = [LT^{-4}]$

* विमीय समांगियता का उपयोग

विमीय समांगियता के मुख्य तीन प्रयोग हैं:-

(i) समी॰ के सत्यता की जाँच करना।

(ii) विभिन्न भौतिक राशियों में सम्बन्ध स्थापित करना।

(iii) एक प्रणाली से संख्यात्मक मान को दूसरे प्रणाली में बदलना।

* समी॰ के सत्यता की जाँच करना

प्रत्येक समी॰ के दोनों पक्षों की विमाएँ सदैव बराबर होनी चाहिए यदि समी॰ के दोनों तरफ की विमाएँ एक जैसी हैं तो वह समी॰ सत्यता की जाँच का पालन करता है।

(i) $T = 2\pi \frac{l}{g}$

$[T] = \frac{[L]}{[LT^{-2}]}$ $\quad T = [T^2]$

(ii) $v = u + at$

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-2}][T]$$

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-1}]$$

$$[LT^{-1}] = 2[LT^{-1}]$$

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}]$$

अतः यह समी० सत्यता की जाँच का पालन कर रहा है।

② **विभिन्न भौतिक राशियों में सम्बन्ध स्थापित करना -**

यदि कोई एक भौतिक राशि अन्य भौतिक राशियों पर निर्भर हो तो इन राशियों के मध्य वास्तविक गणितीय सम्बन्ध विमाओं की सहायता से ज्ञात किया जाता है।

③ **एक प्रणाली से संख्यात्मक मान को दूसरे प्रणाली में बदलना -**

$$n_2 = \frac{n_1 u_1}{u_2} \quad \text{Formula}$$

प्र०1- बल के मात्रक न्यूटन को डाइन में बदलो-

बल की विमा $= [MLT^{-2}]$ $\quad \because n_2 = \frac{n_1 u_1}{u_2}$

$$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$[MLT^{-2}] = 1\left[\frac{1 \text{ किग्रा}}{1 \text{ ग्राम}}\right]^1 \left[\frac{1 \text{ मी०}}{1 \text{ सेमी०}}\right]^1 \left[\frac{1 \text{ सेकण्ड}}{1 \text{ सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$n_2 = \left[\frac{1000}{1}\right]^1 \left[\frac{100}{1}\right]^1$$

$$n_2 = [10^3][10^2]$$

$$n_2 = 10^5$$

$$\boxed{1 \text{ न्यूटन} = 10^5 \text{ डाइन}}$$

प्र० 2- पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 m/ इसे Km/h^2 में बदलो -

→ गुरुत्वीय त्वरण (g) = $[LT^{-2}]$

$$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]\left[\frac{L_1}{L_2}\right]\left[\frac{T_1}{T_2}\right]$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{M_1}{M_2}\right]\left[\frac{1\ \text{मी०}}{1\ \text{किमी०}}\right]^1\left[\frac{1\ \text{सेकण्ड}}{1\ \text{घण्टा}}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{1}{1000}\right]^1\left[\frac{1}{3600}\right]^{-2}$$

$$n_2 = \frac{9.8 \times 36\cancel{00} \times 360\cancel{0}}{1\cancel{000}}$$

$$n_2 = 9.8 \times 36 \times 360$$

$$n_2 = 98 \times 36 \times 36$$

$$\boxed{n_2 = 127008\ Km/h^2}$$

* विमीय विश्लेषण विधि की सीमाऐं

(i) इस विधि से सूत्रों मे उपस्थित नियतांकों(k) का आंकिक मान नहीं ज्ञात किया जा सकता। इसे प्रयोग या अन्य विधि से किया जाता है

(ii) कोई भी राशि सदिश है / अदिश है विमीय विश्लेषण विधि से नहीं ज्ञात किया जा सकता

(iii) विमाहीन राशियों के लिए यह विधि प्रयोग नहीं की जाती है जिसमे log, Sinθ, cosθ आदि हो।

(iv) इस विधि द्वारा इस प्रकार के समी० नहीं प्राप्त किये जा सकते जिसमें किसी भी पक्ष में एक से ज्यादा पद हो

* मापन में त्रुटियाँ [Errors in Measurement]

(i) क्रमबद्ध त्रुटियाँ

(ii) अनियमित त्रुटियाँ

* क्रमबद्ध त्रुटियाँ -

मापन की एक भी त्रुटियाँ जो धनात्मक हो या ऋणात्मक हो क्रमबद्ध त्रुटियाँ कहलाती हैं।

जैसे - (i) यंत्र के कारण त्रुटियाँ

(ii) मापन प्रक्रिया में अपरिपक्वता

(iii) व्यक्तिगत

(iv) बाहरी कारणों से होने वाली त्रुटियाँ

* अनियमित त्रुटियाँ

ऐसी त्रुटियाँ जिनके बारे में पहले से कोई भविष्यवाणी न की गई हो तथा जो त्रुटियाँ अनियमित रूप से कभी भी आ सकती हैं। तथा इन त्रुटियों की परिमाण अथवा दिशा के बारे में कोई ~~जानकारी~~ /गणना नहीं की जा सकती

* मापन में त्रुटियों की गणना-

(i) राशियों के योग में त्रुटि -

$$x = a + b$$

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$$

$$= (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

$$x \pm \Delta x = x \pm (\Delta a + \Delta b)$$

$$\pm \Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$$

$$\boxed{\Delta x = \Delta a + \Delta b}$$

योग में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta x}{x} \times 100\% = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} \times 100\%$$

② अन्तर में त्रुटियों का संयोजन $(x = a-b)$

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$

$$x \pm \Delta x = (a - b) \pm (\Delta a \pm \Delta b)$$

$$x \pm \Delta x = x \pm (\Delta a \pm \Delta b)$$

$$\boxed{\pm \Delta x = (\Delta a \pm \Delta b)}$$

अन्तर में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta x}{x} \times 100\% = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b} \times 100\%$$

③ गुणन में त्रुटियों का संयोजन -

$$x = a \times b$$

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

$$= (ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a b)$$

$$= (ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a)$$

$$\Delta x = a\Delta b + b\Delta a$$

गुणन फल में अधिक भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta x}{x} \times 100\% = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{ab} \times 100\% \Rightarrow \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100\%$$

④ भाग में त्रुटियों का संयोजन -

$$x = \frac{a}{b}$$

$$x + \Delta x = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b}$$

$$x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)}{b\left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right)}$$

$\frac{\Delta a}{a}$ $\frac{\Delta b}{b}$ – Small

$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$$

$$1 \pm \frac{\Delta x}{x} = \left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$1 + \frac{\Delta x}{x} = 1 \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$$

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$$

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}$$

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{a\Delta b \pm b\Delta a}{ab}$$

$$\frac{\Delta x}{x} \times 100\% = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100$$

* राशियों की घातें होने पर त्रुटि

$$x = \frac{a^l b^m c^n}{e^p}$$

दोनों पक्षों में log लेने पर

$$\log x = \frac{\log a^l + \log b^m + \log c^n}{\log e^p}$$

$$\log x = \frac{l \log a + m \log b + n \log c}{p \log e}$$

अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{x} = \frac{l\Delta a}{a} + \frac{m\Delta b}{b} + \frac{n\Delta c}{c}$$

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{l\Delta a}{a} \pm \frac{m\Delta b}{b} + \frac{n\Delta c}{c} \cdot \frac{p\Delta e}{e}$$

Qus- एक ठोस घन की भुजा में लम्बाई 1% की द्रव्यमान में 4% तो घनत्व में त्रुटि ज्ञात कीजिए -

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$$

$$\rho = \frac{m}{l^3} = \frac{\Delta m}{m} \times 100 + 3\frac{\Delta l}{l} \times 100$$

$$= 4\% + 3 \times 3\%$$

$$= 13\%$$

Qus- चार भौतिक राशियाँ हैं a, b, c, d की त्रुटि क्रमशः 1%, 2%, 4%, 6% है तो

$$P = \frac{b^2 \sqrt{a}}{c d^{3/2}}$$

$$P = 2 \times \frac{\Delta b}{b} \times 100 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} \times 100 + \frac{\Delta c}{c} \times 100 + \frac{3}{2}\frac{\Delta d}{d} \times 100$$

$$P = 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 + 4 + 6$$

$$P = 2 + \frac{3}{2} + 4 + 6$$

$$P = \frac{8 + 3 + 8 + 12}{2}$$

$$P = \frac{35}{2} = 17.5\%$$

Qus- गोले की पृष्ठीय क्षेत्रफल P की प्रतिशत त्रुटि 4% है तो आयतन की त्रुटि ज्ञात कीजिए -

$$S = 4\pi r^2$$

$$\frac{\Delta S}{S} \times 100 = 2\frac{dr}{r} \times 100$$

$$4\% = \frac{2dr}{r} \times 100$$

$$\frac{dr}{r} = 2\%$$

$$\text{आयतन } (V) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{\Delta V}{V}\% = 3\times\frac{dr}{r}\times 100$$

$$\frac{\Delta V}{V}\% = 3\times 2$$

$$= 6\%$$

Qus- किसी सरल लोलक वाला g के मापन में लम्बाई को 2% की शुद्धता तक और दोलन काल को 1.5% की शुद्धता तक नापा जाता है तो g के मान में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए -

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{\Delta T}{T}\times 100 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\times 100$$

$$\frac{\Delta T}{T}\times 100 = \cancel{2\pi}\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{\Delta l}{l}\times 100 + \frac{\Delta g}{g}\times 100\right)$$

$$\frac{\Delta T}{T}\ \cancel{\times 100}$$

$$1.5\% = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{\Delta g}{g}\%\right)$$

$$3 = 2 + \frac{\Delta g}{g}\times 100$$

$$\frac{\Delta g}{g}\times 100 = 1\%$$

Qus- एक घन के द्रव्यमान के मापन में 3% की त्रुटि तथा प्रत्येक भुजा के मापन में 2% की त्रुटि घनत्व में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए -

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$$

$$\frac{\Delta d}{d} \times 100 = \frac{\frac{\Delta m}{m} \times 100}{3 \times \frac{\Delta l}{l} \times 100}$$

$$\frac{\Delta d}{d} \times 100 = \frac{3\%}{3 \times 2\%}$$

$$\frac{\Delta d}{d} \times 100 = 3 + 3 \times 2\%$$

$$= 3 + 6\%$$

$$= 9\%$$

Qus- $$y = \frac{a^3 \, b^{4.5}}{\sqrt{c}}$$, $a = 1\%$, $b = 2\%$, $c = 3\%$

$$\frac{dy}{y} \times 100 = \frac{3 \frac{\Delta a}{a} \times 100 + 4.5 \frac{\Delta b}{b} \times 100}{\left(\frac{\Delta c}{c} \times 100\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{y} \times 100 = 3 \times 1 + 4.5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3$$

$$\frac{dy}{y} \times 100 = 3 + 9 + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dy}{y} \times 100 = \frac{6 + 18 + 3}{2}$$

$$= \frac{27}{2} = 13.5\%$$

Qus- सार्वत्रिक गैस नियतांक (R) का मात्रक ज्ञात कीजिए-

गैस समीकरण के अनुसार

$$PV = nRT$$

$$R = \frac{PV}{nT}$$

R का मात्रक = $\frac{PV}{nT}$ का मात्रक

$$= \frac{P \text{ का मात्रक} \times V \text{ का मात्रक}}{n \text{ का मात्रक} \times T \text{ का मात्रक}}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन/मी}^2 \times \text{मी}^3}{K \text{ मोल}}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन - मी०}}{K \text{ मोल}}$$

$$= \frac{\text{जूल}}{K \text{ मोल}}$$

Qus- वान्डर वाल गैस समीकरण $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$ के नियतांक a तथा b की विमायें ज्ञात कीजिए-

दिये हुए समीकरण में P, V तथा T क्रमशः दाब, आयतन तथा ताप है, विमाओं की समांगता के सिद्धान्त के अनुसार, इस समी० में $\frac{a}{V^2}$ तथा P के विमीय सूत्र समान होंगे क्योंकि समान विमा वाली राशियों को ही आपस में जोड़ा अथवा घटाया जाता है।

$\frac{a}{V^2}$ का विमीय सूत्र = P का विमीय सूत्र

a का विमीय सूत्र = P का वि०सू० × V^2 का वि०सू०

$= [ML^{-1}T^{-2}] \times [L^3]^2$

$= [ML^{-1}T^{-2}] \times [L^6]$

अतः a का विमीय सूत्र $= [ML^5T^{-2}]$

इसी प्रकार b का विमीय सूत्र = V का विमीय सूत्र

b का विमीय सूत्र $= [L^3]$

अतः a तथा b की विमाऐं M, L तथा T में क्रमशः (1, 5, -2) तथा (0, 3, 0) हैं।

अध्याय - 02

बल एवं गति
[Force and Motion]

अदिश राशियाँ -

वे भौतिक राशियाँ जिनको व्यक्त करने के लिए केवल उनके परिमाण की आवश्यकता होती है दिशा की नहीं उन्हें अदिश राशियाँ कहते हैं।

उदा० - द्रव्यमान, तापमान, ऊष्मा, कार्य, ऊर्जा आवेश आदि।

सदिश राशियाँ -

वे भौतिक राशियाँ जिन्हें व्यक्त करने के लिए परिमाण के साथ-साथ दिशा की भी आवश्यकता होती है सदिश राशियाँ कहलाती हैं।

उदा० - विस्थापन, बल, कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, विद्युत क्षेत्र, चुम्बकीय क्षे० आदि।

सदिश राशि का निरूपण

किसी सदिश राशि को एक सीधी रेखा से प्रदर्शित करते हैं सीधी रेखा की दूरी सादिश का परिमाण बताता है और तीर का निशान उसकी दिशा बताता है।

पूँछ (tail) $\xrightarrow{\vec{A}}$ शीर्ष (head)

सदिशों के प्रकार एवं कुछ सम्बन्धित तथ्य-

① समान सदिश-

दो समान सदिश के परिमाण तथा दिशाएँ आपस में समान होती हैं तो उन्हें समान सदिश कहते हैं।

$\vec{A}$

$\vec{B}$

$$\vec{A} = \vec{B}$$

विपरीत सदिश-

जब सदिशों के परिमाण समान होते हैं परंतु दिशाएँ विपरीत होती हैं विपरीत सदिश कहलाते हैं।

$\vec{A}$

$\vec{B}$

$$\vec{B} = -\vec{A}$$

एकांक सदिश

जब किसी सदिश को उसके परिमाण से भाग दिया जाए तो हमें एकांक सदिश प्राप्त होता है।

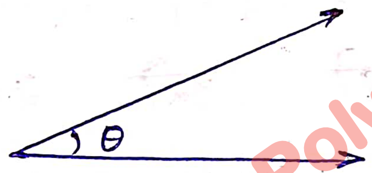
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

शून्य सदिश

जिस वेक्टर का परिमाण शून्य हो, शून्य वेक्टर कहलाता है। इसे $\vec{0}$ से लिखते हैं।

अदिश गुणन या डॉट गुणन

जब किन्हीं दो सदिश राशियों का गुणनफल एक अदिश राशि हो तो उसे अदिश गुणनफल कहते हैं इसे (·) गुणन भी कहते हैं।



$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

यहाँ AB सदिश AB के परिमाण हैं।

अदिश गुणन के गुण

(i) यह क्रम विनिमय नियम का पालन करता है, अर्थात $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} = AB\cos\theta$

(ii) यह वितरण नियम का पालन करता है।
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

(iii) यदि $\vec{A}, \vec{B}$ दोनों समान है तो,
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$$

(iv) दो विपरीत सदिश का अदिश गुणनफल ऋणात्मक होता है। $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}\cos 180^\circ = -AB$

(v) दो लम्बवत् सदिश का अदिश गुणनफल उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

(vi) किसी सदिश का स्वयं से गुणनफल उनके परिमाण के वर्ग के बराबर होता है।

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = AA\cos 0^\circ$$
$$= A^2$$

* सदिश गुणन या क्रॉस गुणन -

दो सदिश राशियों का ~~सदिश~~ गुणनफलरूपक सदिश हो, तो उसे सदिश गुणनफल कहते हैं। इसे (cross product) भी कहा जाता है।

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$

सदिश गुणन के गुण -

(i) यह क्रम विनिमय नहीं होता है

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

(ii) सदिश गुणन वितरित नहीं होता है।

$$\vec{A}\,(\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

(iii) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{C} + \vec{D})$

$$\vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{A} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{D}$$

(iv) दो समान्तर सदिश का सदिश गुणनफल 0 होता है।

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= 0$$

(v) दो लम्बवत् सदिश की सदिश गुणनफल उसके परिमाण के गुणनफल के बराबर होता है।

(vi) दो विपरीत सदिश के सदिश गुणनफल 0 होता है।

(vii) किसी सदिश का स्वयं से सदिश गुणनफल 0 होता है।

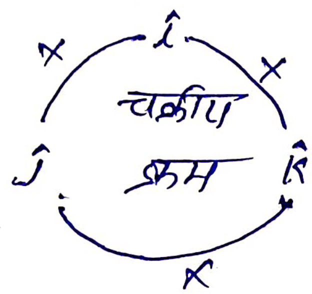
~~(viii)~~ $$\vec{A} \times \vec{A} = A \cdot A \sin 0^\circ\,\hat{n}$$
$$= 0$$

(viii) समान लम्बकोणिक एकांक सदिश का सदिश गुणनफल 0 होता है।

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{i} \times \hat{i} \sin 0^\circ\,\hat{n}$$
$$= 0$$

असमान लम्बकोणीय एकांक सदिश का सदिश गुणनफल –

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$



$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_yB_z - B_yA_z) - \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - B_xA_y)$$

Qus $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1-4) - \hat{j}(-2+2) + \hat{k}(4-1)$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = -3\hat{i} + 3\hat{k}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{-2-2-2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(1)^2}}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

$\cos\theta = -0.65$

Qus- बल $\vec{F} = 4\hat{i} + 2\hat{i}$ द्रव्यमान पर कार्य करके दूरी $\vec{s} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ तो कार्य = ?

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$= (4\hat{i} + 2\hat{j}) \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j})$

$= (12 - 4)$

$W = 8$ जूल

रेखीय संवेग

किसी पिण्ड के द्रव्यमान तथा रेखीय वेग के गुणनफल को रेखीय संवेग कहते हैं।

$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ (किग्रा मी०/से०)

विमा $= M[LT^{-1}]$

$= [MLT^{-1}]$

रेखीय संवेग संरक्षण का नियम

यदि किसी पिण्ड पर कोई बाहरी बल कार्य नहीं कर रहा है तो रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

$m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots\ldots m_n$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \ldots\ldots\ldots \vec{V_n}$

$\vec{p} = m_1\vec{v_1}, m_2\vec{v_2}, m_3\vec{v_3} \ldots\ldots m_n\vec{v_n}$

$\vec{p} = \vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3} \ldots\ldots \vec{P_n}$

न्यूटन के द्वितीय नियम से F का मान संवेग परिवर्तन की दर को बताता है।

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$0 = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$\Delta P = 0$, $P =$ (नियतांक)

$\vec{P_1} + \vec{P_2} + \ldots\ldots$ नियतांक

$P = mV$

$P_1 = m_1 V_1$

$P_2 = m_2 V_2$

$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n$

$P_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 \ldots\ldots m_n V_n$

आवेग -

किसी वस्तु पर बल के कार्य करने में समय का गुणनफल आवेग कहलाता है।

आवेग = बल × समय

बल -

वह कारक जो किसी वस्तु को विरामावस्था से चला सके अथवा उसकी दिशा में परिवर्तन कर सके बल कहलाता है। बल का मात्रक न्यूटन होता है।

विमा $= [MLT^{-2}]$

न्यूटन के नियम

(i) जड़त्व का नियम

यदि कोई पिण्ड विरामावस्था में है तो वह विराम विराम में ही रहेगा, जब तक कोई पिण्ड गतिमान है तो वह गतिमान ही रहेगा जब तक उस पर कोई बाहरी बल न लगाया जाए।

(ii) संवेग परिवर्तन का नियम

किसी पिण्ड के रेखीय संवेग परिवर्तन के दर पिण्ड पर लगे बाहरी बल के बराबर होता है यदि द्रव्यमान m, प्रारम्भिक वेग u, अन्तिम वेग v तथा समय t हो

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv - mu}{\Delta t} = \frac{m(v-u)}{\Delta t}$$

(iii) क्रिया-प्रतिक्रिया का नियम

इसमें प्रत्येक क्रिया बल के समान उतनी ही क्रिया विपरीत दिशा में लगाती है पिण्ड का भार mg नीचे की ओर और प्रतिक्रिया बल ऊपर की ओर लग रहा है।

सरल रेखीय गति के समी॰

यदि किसी गतिमान पिण्ड की त्वरण की दिशा सदैव उसके प्रारम्भिक वेग की दिशा की तरफ बनी रहे तो इस प्रकार की गति को सरल रेखीय गति या ऋजु रेखीय गति कहते हैं।

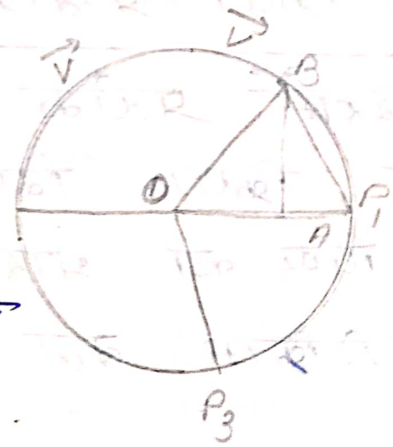
$$v = u + at \quad \text{———} \quad (i)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{———} \quad (ii)$$

$$v^2 = u^2 + 2as \quad \text{———} \quad (iii)$$

u = प्रारम्भिक वेग
v = अन्तिम वेग
a = त्वरण
t = समय
s = विस्थापन

एकसमान वृत्तीय गति :-



जब कोई पिण्ड किसी बिन्दु को केन्द्र मानकर उसके चारों ओर घूमता है और स्थिर चाल से गति करता है तो उसे एकसमान वृत्तीय गति कहते हैं।

कोण के द्वारा चली गई दूरी को (Angular Diplacement) कहते हैं।

वृत्तीय पथ पर पिण्ड बिन्दु A से B तक Δs दूरी तय करता है।

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{t}$$

यह विमाहीन राशि है।

किसी पिण्ड के वृत्तीय गति करते समय कोणीय विस्थापन की दर को कोणीय वेग कहते हैं।

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi n}$$

आवर्तकाल –

वृत्तीय गति करते हुए किसी पिण्ड को एक चक्कर पूर्ण करने में लगा समय आवर्तकाल कहलाता है। इसे T से प्रदर्शित करते हैं। $T = \frac{2\pi}{\omega}$ सेकण्ड

आवृत्ति –

किसी पिण्ड द्वारा एक सेकण्ड में लगाए गए चक्करों की कुल संख्या को आवृत्ति कहते हैं। आवृत्ति $n = \frac{1}{T}$

कोणीय त्वरण –

कोणीय वेग परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं।

$$\alpha = \frac{\text{कोणीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}}$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{रेडियन/सेकण्ड}^2$$

कोणीय त्वरण तथा रेखीय त्वरण में सम्बन्ध

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right)$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\alpha = = \frac{1}{r} \cdot a$$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

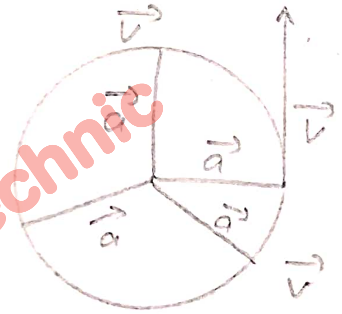
$$a = r \cdot \alpha$$

केन्द्रीय या अभिकेन्द्र त्वरण

जब कोई पिण्ड एकसमान वृत्तीय गति करता है तो कण की चाल स्थिर होते हुए भी वेग की दिशा लगातार बदलने के कारण उसका वेग भी बदलता रहता है जिसके कारण वेग के अधीन त्वरण पर उसकी दिशा वेग के साथ-2

बदलती रहती है त्वरण की दिशा रेखीय गति की दिशा के लम्बवत होती है और त्रिज्या के अनुदिश होती है यह त्वरण केन्द्र की ओर लगता है इसलिए इसे अभिकेन्द्र त्वरण कहते हैं।

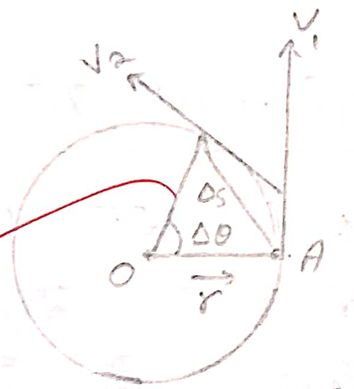
m द्रव्यमान का पिण्ड जिसकी त्रिज्या r और केन्द्र बिन्दु O है ये Δt समय में A से



$$\frac{AB}{AO} = \frac{QR}{QP}$$

$$\frac{\Delta S}{r} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V}{r}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$



$$a = \frac{V}{r} \times V$$

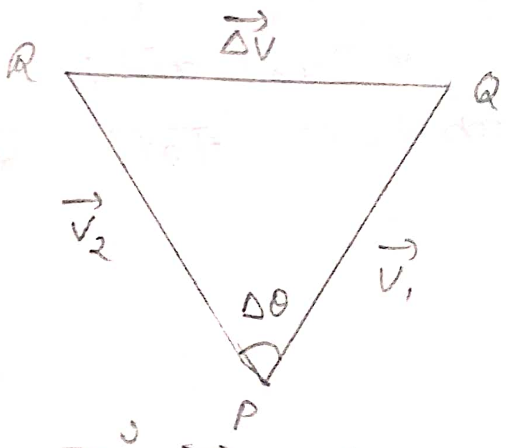
$$a = \frac{V^2}{r}$$

$$a = \frac{r^2\omega^2}{r}$$

$$a = \omega^2 r$$

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r$$

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

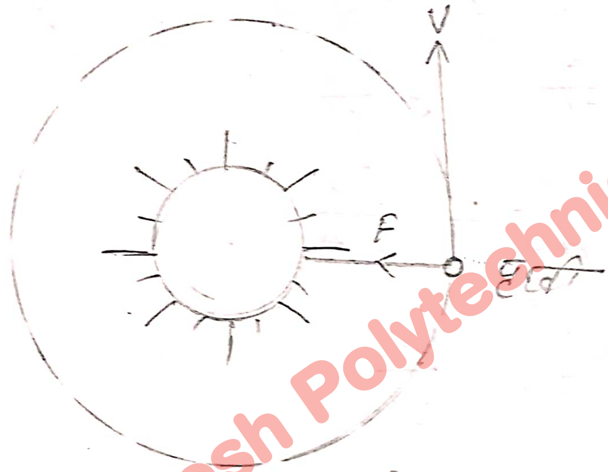


यहाँ $\vec{V_1} = \vec{V_2} = V$

अभिकेन्द्र बल के उदाहरण। –

(i) अभिकेन्द्र बल गुरुत्वीय बल के रूप में –

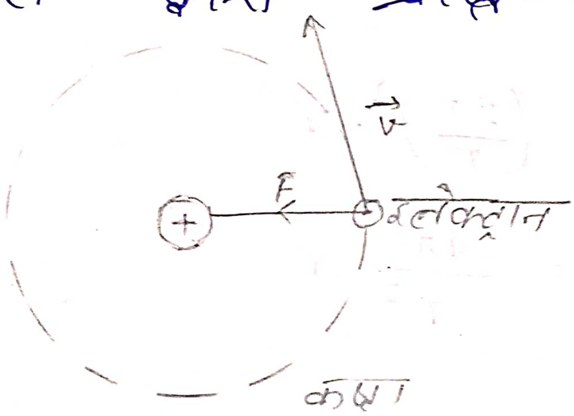
सूर्य को केन्द्र मानकर इसके चारो ओर ग्रह घूमते हैं ग्रहो को घूमने के लिए अभिकेन्द्र बल की आवश्कता होती है जो गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।



पृथ्वी की वृत्तीय कक्षा

(ii) इलेक्ट्रान की कक्षीय गति –

किसी भी परमाणु में नाभिक +ve होता है तथा इलेक्ट्रान –ev होता है नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रान को घूमने के लिए अभिकेन्द्र बल की आवश्यकता होती है जो वैद्युत आकर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है।

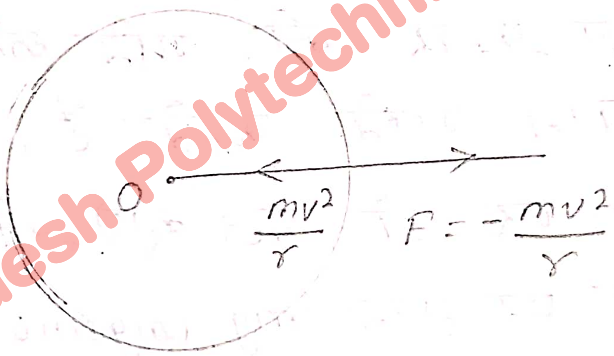


अपकेन्द्र बल -

यह एक प्रकार का आभासी बल होता है जो पिण्ड से बाहर की ओर लगता है तथा पिण्ड को वृत्त में बनाए रखने की क्षमता रखता है। इसका परिमाण अभिकेन्द्र बल के बराबर होता है तथा दिशा विपरीत होती है

$$F = -m\omega^2 r$$

परिमाण बराबर
दिशा विपरीत



अपकेन्द्रित बल -

यह एक ऐसा यंत्र है जिसकी सहायता से किसी पिण्ड में द्रव में उपस्थित विभिन्न कणों को अलग किया जाता है इसमें हल्के कण केन्द्र के पास तथा भारी कण केन्द्र से दूर होते हैं।

अपकेन्द्रित का सिद्धान्त -

भारी $M \longrightarrow R$

हल्के $m \longrightarrow r$

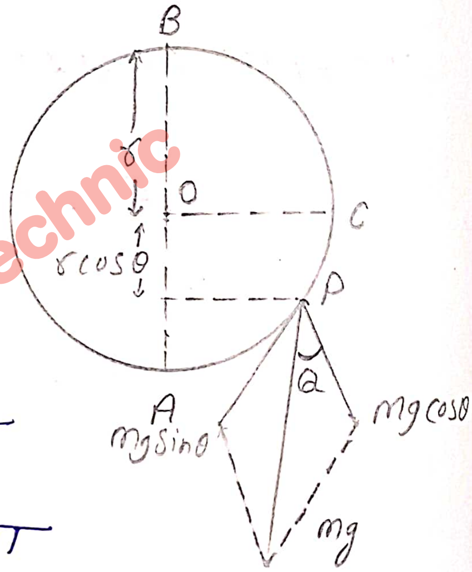
$$\frac{MV^2}{R} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{R}{r}$$

घनत्व - D

$$\frac{D}{d} = \frac{R}{r}$$

ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति -



यदि किसी डोरी को बाँधकर ऊर्ध्वाधर घुमाया जाता है तो इस प्रकार की गति को एकसमान गति कहते हैं,

बिन्दु P पर दो बल कार्य करेंगे

(i) कण पर भार mg ($mg\sin\theta$ तथा $mg\cos\theta$)

(ii) डोरी में तनाव बल T जो केन्द्र की ओर लगता है,

(iii) केन्द्र पर लगने वाला बल

नेट बल = $T - mg\cos\theta$

(iv) जो बल केन्द्र की ओर लग रहा है वही अभिकेन्द्र बल है, $T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$

$$T = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2 + mg(2r) = \frac{1}{2}mv^2 + mg(r - r\cos\theta)$$

$$gr + 2gr = \frac{v^2}{2} + gr - gr\cos\theta$$

समी० में डोरी के तनाव को न्यूनतम करने के लिए cosθ 180 रखना होगा।

$$T_{min} = \frac{V^2 m}{r} + mg\cos 180^\circ$$

$$T_{min} = \frac{mv^2}{r} - mg$$

$$0 = \frac{mV_B^2}{r} - mg$$

$$\frac{mV_B^2}{r} = mg$$

$$V_B^2 = rg$$

$$V_B = \sqrt{rg}$$

यदि पिण्ड का ~~वेगउत्~~ उच्चतम बिन्दु B पर $\sqrt{gr}$ से भी कम हो जाए तो डोरी ढीली पड़ जाएगी ~~तो~~ और वृत्तीय गति सम्भव नहीं होगी इसलिए बिन्दु B पर minimum वेग $\sqrt{gr}$ होना चाहिए।

बिन्दु B पर पिण्ड की गतिज व स्थितिज ऊर्जा का योग = ~~बिन्दु B पर~~

$$K_B + U_B + K_P + U_P$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mV_{P}^2 + mgh_P$$

$$\frac{1}{2} m(\sqrt{gr})^2 + mg(2r) = \frac{1}{2} m v^2 + mg(r - r\cos\theta)$$

$$\frac{gr}{2} + 2gr = \frac{v^2}{2} + gr - gr\cos\theta$$

$$v = \sqrt{gr(3+2\cos\theta)}$$

अध्याय - 03 कार्य, शक्ति एवं ऊर्जा

कार्य -

जब कोई बल किसी वस्तु में विस्थापन उत्पन्न करता है तो उसे कार्य कहते हैं।

कार्य का मापन -

जब किसी पिण्ड पर F बल लगाते हैं तो वह S दूरी चलता है और दोनों के डॉट प्रोडक्ट के बराबर होता है। कार्य एक अदिश राशि है।

कार्य के प्रकार

(i) +ve कार्य

(ii) −ve कार्य

(iii) 0 कार्य

(i) $W = FS\cos 0^\circ$

$W = FS$

(ii) $W = FS\cos 180^\circ$

$= -FS$

(iii) $W = FS\cos 90^\circ$

$= 0$

कार्य का मात्रक

$W = F \times S = N \times M = \text{joule}$

CGS = डाइन × सेमी

= अर्ग

त्रिविमीय बल द्वारा किया गया कार्य -

$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$

$\vec{S} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{F} \cdot \vec{S} = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$

$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$

संरक्षी तथा असंरक्षी बल

- वह बल जो प्रारम्भिक बिंदु तथा अंतिम बिंदु पर निर्भर करते हैं उसे संरक्षी बल कहते हैं।

उदा० - गुरुत्वाकर्षण बल
वैद्युत क्षेत्र

- वह बल जिसके द्वारा किया गया कार्य पिण्ड के मार्ग पर निर्भर करता है।

उदा० - घर्षण बल
श्यान बल

घर्षण बल

जो बल आरोपित बल के विपरीत में लगता है उसे घर्षण बल कहते हैं। यह गति के दिशा का हमेशा विरोध करेगा।

घर्षण के कारण

प्रत्येक सतह चाहे जितनी चिकनी हो उसमें कुछ-न-कुछ खुरदुरापन जरूर होता है यदि इस प्रकार की दो सतहें एक दूसरे पर रखी जाएँ तो एक सतह का शिखर दूसरे सतह के गर्त में फँस जाता है इस प्रकार पिण्ड सरक नहीं पाता है यदि सतह A पर दायीं ओर बल लगाते हैं तो सतह B पर बायीं ओर प्रतिक्रिया बल लगता है। यही प्रतिक्रिया बल घर्षण बल कहलाती है।

(i) स्थैतिक
(ii) गतिज
(iii) सीमान्त घर्षण

स्थैतिक घर्षण बल

किसी सतह पर m द्रव्यमान का पिण्ड रखा है mg गुरुत्व बल नीचे की ओर लगेगा और प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर लगता है।
संतुलन की स्थिति में $R = mg$
जब पिण्ड पर बाहरी बल F लगाते हैं घर्षण बल, बाहरी बल का विरोध करता है।
जब पिण्ड विराम में होता है तो उस पर लगने वाले घर्षण बल को स्थैतिक घर्षण कहते हैं

$$F = f_s$$

यह स्वयं सामंजस्य स्थापित करने वाला बल है अगर बाहरी बल का मान शून्य है तो स्थैतिक घर्षण भी शून्य है इसका अर्थ यह है कि जैसे-जैसे बाहरी बल बढ़ाते या घटाते जाएँगे उसी प्रकार घर्षण बल बढ़ता और घटता जाएगा।

सीमांत घर्षण बल

बाहरी बल का मान बढ़ाते जाएँ और ऐसी स्थिति आए कि पिण्ड चलने वाला हो तो उसे सीमांत घर्षण कहते हैं। इसे f_l से प्रदर्शित करते हैं।

गतिक घर्षण बल

हम बाहरी बल का मान और बढ़ाएँ जिससे पिण्ड गति करने लगे तो उसे गतिक घर्षण बल कहते हैं। (f_k)

घर्षण के नियम -

(i) घर्षण बल का प्रतिक्रिया बल R के समानुपाती होता है।

(ii) घर्षण बल की दिशा गति की दिशा की विपरीत होती है।

(iii) घर्षण बल सतह के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करेगा यह क्षेत्रफल ~~स्~~ से मुक्त होता है।

(iv) घर्षण बल सतह के रूक्षता पर निर्भर करता है।

(v) घर्षण बल का मान पदार्थ पर भी निर्भर करता है।

घर्षण गुणांक -

घर्षण के प्रथम नियम से घर्षण बल

$$f \propto R$$

$$f = \mu R$$

$$\mu = \frac{f}{R}$$

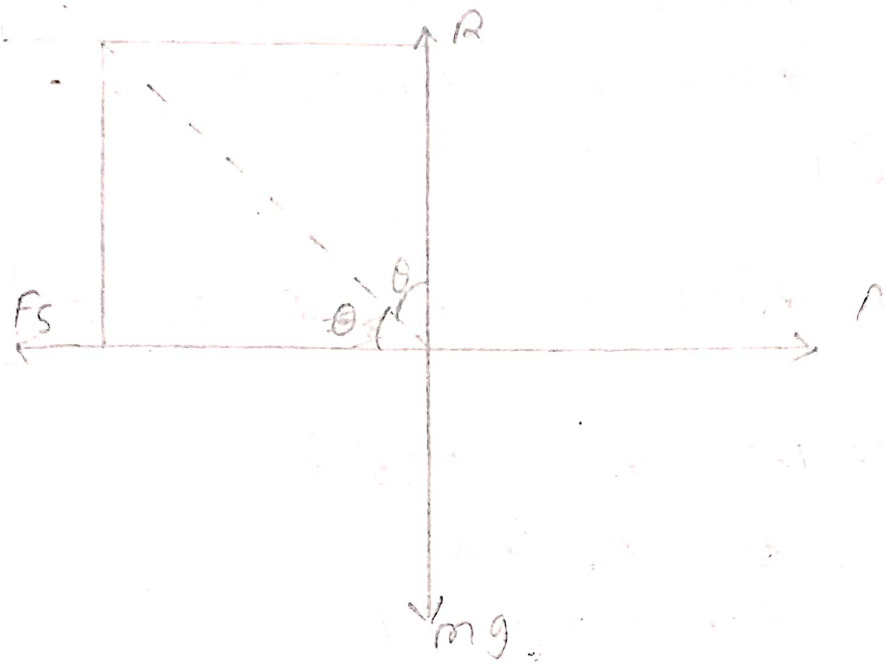
अत: घर्षण गुणांक का मान घर्षण बल तथा प्रतिक्रिया बल के अनुपात के बराबर होती है। यह विमाहीन राशि होती है।

स्थैतिक घर्षण गुणांक

(I) यदि पिण्ड पर लगने वाला बाहरी बल सीमांत घर्षण या उससे कम हो तो पिण्ड विराम मे रहता है। $\boxed{f_s = \mu_s R}$, $f_s > f_k$

(II) यदि पिण्ड चलने लगे तो गतिक में होता है।

$\boxed{f_K = \mu_K R}$ $f_s > \mu_k$



चित्र में m द्रव्यमान का पिंड है, mg नीचे की ओर, प्रतिक्रिया बल R, बाहरी बल F दायीं ओर स्थैतिक घर्षण बल बायीं ओर जब बाहरी बल का मान सीमांत घर्षण के बराबर हो जाए और OC, F_s तथा R का परिणामी हो तो OC और R के मध्य बने कोण को घर्षण कोण कहते हैं।

$$BC = OA = f_s$$

$$\tan\theta = \frac{P}{B} = \frac{BC}{OB}$$

$$\tan\theta = \frac{f_s}{R}$$

$$f_s = \mu_s R$$

$$\tan\theta = \frac{\mu_s R}{R}$$

$$\boxed{\mu_s = \tan\theta}$$

स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान घर्षण कोण के tangent के बराबर होता है।

विश्राम कोण या झुकाव कोण

m द्रव्यमान का पिण्ड है

$$f_s = mg\sin\phi$$

$$\mu_s R = mg\sin\phi$$

$$\mu_s mg\cos\phi = mg\sin\phi$$

$$\boxed{\tan\phi = \mu_s}$$

विश्राम कोण के tangent का मान घर्षण गुणांक के मान के बराबर होता है।

नत सतह पर गति

① नीचे की ओर

गति की दिशा में लगने वाला बलों का योग – गति की विपरीत दिशा में लगने वाले बलों का योग

$$mg\sin\theta - f = ma \quad \text{——— (i)}$$

$$f = \mu R \quad \text{——— (ii)}$$

$$R = mg\cos\theta$$

R का मान समी० (ii) में रखने पर

$$f = \mu mg\cos\theta$$

f का मान समी० (1) में रखने पर

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

$$a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$$

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

ऊपर की ओर गति

अगर पिण्ड ऊपर की ओर जा रहा हो तो $a = 0$ होगा

$$F - (mg\sin\theta + f) = ma$$

$$f = \mu R$$

$$R = mg\cos\theta$$

$$a = 0$$

$$F - (mg\sin\theta + f) = 0$$

$$F = mg\sin\theta + f$$

$$F = mg\sin\theta + \mu R$$

$$F = mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$

$$F = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

क्षैतिज तल में गति -

किसी सतह पर द्रव्यमान m रखा है mg नीचे की ओर लग रहा है और प्रतिक्रिया R ऊपर की ओर लग रहा है गति की दिशा दायीं ओर है और घर्षण बल की दिशा बायीं ओर है।

$$F - f = ma$$

figure

$$F - \mu R = ma$$

$$R = mg$$

$$F - \mu mg = ma$$

$$a = \frac{F - \mu mg}{m}$$

रूक्ष सतह पर किया गया कार्य -

(1) यदि बल तल के समान्तर हो।

(i) यदि पिण्ड एकसमान गति करता है -

figure

$$F - f = m \times 0$$

$$F = f$$

$$F = \mu R$$

$$F = \mu mg$$

$$W = F \times S$$

$$\boxed{W = \mu mgs}$$

(ii) यदि पिण्ड में त्वरण a हो -

$$F - f = ma$$

$$F - \mu R = ma$$

$$R = mg$$

$$F - \mu mg = ma$$

$$a = \frac{F - \mu mg}{m}$$

गति के तीसरे समी० से

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$u = 0$$

$$v^2 = 2as$$

$$v^2 = 2\left(\frac{F - \mu mg}{m}\right)s \quad \text{---(i)} \quad [a \text{ का मान रखने पर}]$$

कार्य ऊर्जा प्रमेय से

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{---(ii)}$$

$$W = (F - \mu mg)s \quad \text{((i) तथा (ii) से)}$$

~~क्षैतिज~~

(ii) क्षैतिज से नीचे की ओर कोण -

m द्रव्यमान का पिण्ड क्षैतिज से निचे की ओर θ कोण बनाते हुए बल लगा रहा है तो

$$R = mg + F\sin\theta$$

$$f_s = \mu_s R$$

$$f_s = \mu_s(mg + F\sin\theta) \quad \text{--- (1)}$$

पिण्ड स्थिर वेग से गति कर रहा है विस्थापन s है

$$F\cos\theta - f_s = m \times a$$

$$F\cos\theta - f_s = 0$$

समी० (1) से f_s का मान रखने पर

$$F\cos\theta - \mu_s(mg + F\sin\theta) = 0$$

$$F\cos\theta = \mu_s(mg + F\sin\theta)$$

$$F\cos\theta = \mu_s mg + \mu_s F\sin\theta$$

$$F\cos\theta - \mu_s F\sin\theta = \mu_s mg$$

$$F\cos\theta\left(1 - \frac{\mu_s F\sin\theta}{F\cos\theta}\right) = \mu_s mg$$

$$F\cos\theta(1 - \mu_s\tan\theta) = \mu_s mg$$

$$F\cos\theta = \frac{\mu_s mg}{1 - \mu_s\tan\theta}$$

$$\omega = P_s \cos\theta$$

$$\omega = \frac{\mu_s\, mgs}{1 - \mu_s \tan\theta}$$

अध्याय - 04 घूर्णन गति

रेखीय गति - द्रव्यमान के सारे कण जब एक ही दिशा में गति करते हैं तो उसे रेखीय गति कहते हैं।

घूर्णन गति - एक गोलीय पिण्ड है जो कोणीय वेग ω से घूम रहा है रेखीय वेग की दिशा समय के साथ बदलती रहती है और हर बिंदु पर अलग-2 है जब कोई पिण्ड किसी बिंदु को अक्ष मानकर उसके चारों ओर गति करता है तो उसे घूर्णन गति कहते हैं।

बल आघूर्ण - जब कोई पिण्ड बिन्दु O के सापेक्ष घूमने के लिए स्वतंत्र है तो इसी r पर बिन्दु P पर बल F लगाते हैं यही बल पिण्ड को O के चारों ओर घुमाता है।

F तथा r के गुणनफल को बल आघूर्ण कहते हैं।

$$\tau = F \times r \quad \text{न्यूटन-मी०}$$

विमा $= [ML^2T^{-2}]$

कोणीय त्वरण - घूर्णन गति करते हुए किसी पिण्ड का कोणीय वेग में परिवर्तन कोणीय त्वरण कहलाता है

कोणीय त्वरण =

$$t_1 = \omega_1$$

$$t_2 = \omega_2$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad [M^0L^0T^{-2}]$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{रेडियन/से}^2$$

α तथा a में सम्बन्ध -

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v = \omega r$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

$$\boxed{a = \alpha r}$$

जड़त्व आघूर्ण -

न्यूटन के पहले नियम से-
जब तक कोई पिण्ड विराम में है तो विराम में रहेगा अथवा गति में है तो गति में रहेगा जब तक कि उसपर कोई बाह्य बल न लगाया जाए. जड़त्व अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है। इसी प्रकार घूर्णन गति में बल आघूर्ण घूर्णन अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है।

जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान तथा दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है

$m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots\ldots m_7$

$r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_7$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \ldots\ldots\ldots m_7 r_7^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{7} m_i r_i^2$$ किग्रा-मी^{2}

$[ML^2]$

बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध

m द्रव्यमान का पिण्ड किसी अक्ष से लम्बवत् दूरी r पर है कोणीय वेग ω से घूम रहा है

$$v = \omega r$$

$$F = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$$v = \omega r$$

$$F = \frac{m\, d(\omega r)}{dt}$$

$$\boxed{F = mr\alpha}$$

$$\tau = F \times R$$

$$\tau = mr\alpha \times r$$

$$\tau = mr^2\alpha$$

$$I = mr^2$$

$$\tau = I\alpha$$

बल आघूर्ण, जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण के गुणनफल के बराबर होता है।

बल आघूर्ण तथा कार्य में सम्बन्ध

बाहरी बल F लगाकर कोई पिण्ड r त्रिज्या के गोले में नियत दूरी चलता है।

$$dw = F\,dl$$

$$dw = F\,r\,d\theta$$

$$\boxed{dw = \tau\, d\theta}$$

कार्य बल आघूर्ण तथा कोणीय विस्थापन के बराबर होता है।

बल आघूर्ण तथा शक्ति में सम्बन्ध –

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\tau\, d\theta}{dt}$$

$$P = \tau\omega$$

शक्ति = बल आघूर्ण × कोणीय वेग

घूर्णन ~~कोणीय~~ त्रिज्या –

m द्रव्यमान का पिण्ड है और त्रिज्या R है द्रव्यमान इसमें वितरित है और जड़त्व आघूर्ण $I = MR^2$ होगा। जब यही द्रव्यमान एक जगह आकर इकट्ठा हो जाए और उसकी अक्ष से दूरी K हो जाये तो

जड़त्व आघूर्ण $I = mK^2$

$$K^2 = \frac{I}{M}$$

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

यदि दूरी K के वर्ग तथा m का गुणनफल पहले जड़त्व आघूर्ण के बराबर हो तो यही ~~जड़त्व~~ घूर्णन त्रिज्या कहलाता है।

Q- 3 Kg का एक पिण्ड है जिसकी त्रिज्या 80 cm है परिभ्रमण त्रिज्या का मान निकालो -

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{MR^2}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 80 \times 80}{3}}$$

घूर्णीय गतिज ऊर्जा

M द्रव्यमान का कोई पिण्ड छोटे कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2 \ldots m_n$ हैं इसके अक्ष से दूरी $r_1, r_2 \ldots r_n$ तक है यह पिण्ड Z अक्ष के चारों ओर घूम रहा है। पिण्ड के किसी कण का द्रव्यमान m कोणीय गतिज ऊर्जा K_1 वेग V_1 है

रेखीय गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$

कोणीय गतिज ऊर्जा $V_1 = \omega r_1$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2$$

$$K = K_1 + K_2 + \ldots K_n$$

$$K = \frac{1}{2} m r_1^2 \omega^2 \ldots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega_n^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

कोणीय संवेग संरक्षण

किसी पिण्ड का रेखीय संवेग उसके द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल के बराबर होता है।

इसी प्रकार घूर्णन गति करते हुए किसी पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परितः रेखीय संवेग का आघूर्ण कोणीय संवेग कहलाता है। इसे L से प्रदर्शित करते हैं।

माना ~~कोणीय~~ कोई पिण्ड जो ω कोणीय वेग से घूम रहा है का द्रव्यमान m_1 तथा वेग v_1 है

रेखीय वेग $v_1 = r_1\omega$

रेखीय संवेग $P = m_1 v_1$

$P_1 = m_1 r_1 \omega$

इस संवेग का आघूर्ण $L_1 = P_1 \times r_1$

$$L_1 = m_1 r_1 \omega \times r_1$$

$$L_1 = m_1 r_1^2 \omega$$

$$L_2 = m_2 r_2^2 \omega$$

$$\boxed{L_n = m_n r_n^2 \omega}$$

$$L = L_1 + L_2 + \dots L_n$$

$$L = m_1 r_1^2 \omega + \dots\dots m_n r_n^2 \omega$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega$$

$$\boxed{L = I\omega}$$

किसी पिण्ड का कोणीय संवेग पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है।

मात्रक = किग्रा मी०^2 रेडियन/सेकण्ड

विमा = ML^2T^{-1}

• कोणीय संवेग तथा बल आघूर्ण में सम्बन्ध—

बल आघूर्ण तथा कोणीय वेग के सम्बन्ध से

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} \quad \text{—— (i)}$$

$$L = I\omega$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{I\,d\omega}{dt} \quad \text{—— (ii)}$$

$$\boxed{\tau = \frac{dL}{dt}}$$

बल आघूर्ण कोणीय संवेग परिवर्तन के बराबर होती है

यदि किसी पिण्ड पर कोई बाहरी बल न कार्य कर रहा हो तो कोणीय संवेग संरक्षित रहता है $L = I\omega = constant$

$$L_1 = L_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = constant$$

I का मान बढ़ाएंगे तो ω का मान घटेगा और I का मान घटाने पर ω का मान बढ़ेगा।

बाहरी बल आघूर्ण $\tau = 0$

$$0 = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = 0$$

$$L = constant$$

Q1- 200 g द्रव्यमान का एक पिण्ड है की त्रिज्या 10 सेमी है परिभ्रमण त्रिज्या ज्ञात कीजिए -

$$K = \sqrt{\frac{MR^2}{M}} = \sqrt{200}$$

$$K = R$$

$$K = 10\ cm = 0.1\ मी॰$$

Q2- एक पिण्ड किसी अक्ष के चारो ओर घूमते हुए 30 चक्कर /मिनट लगाता है यदि गतिज ऊर्जा 8 जूल है तो I ज्ञात कीजिए-

हल = $n = 30$ चक्कर / मिनट

$= \frac{30}{60}$ चक्कर / सेकण्ड

गतिज ऊर्जा = 8 जूल

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \frac{2K}{\omega^2}$$

$$I = \frac{2 \times 8}{4\pi^2 \left(\frac{30}{60}\right)^2} = \frac{16}{\cancel{4} \times 9.85 \times \frac{1}{\cancel{4}}}$$

$$I = \frac{16}{\cancel{36} \times 9.85} = \frac{160}{98} = 1.6 \text{ Kg-m}$$

लम्बवत् अक्षों का प्रमेय -

इस प्रमेय के अनुसार किसी समतल का सतह के लम्बवत् OZ के परित: जड़त्व आघूर्ण का मान बिन्दु O से गुजरने वाली दो परस्पर अक्ष, OX तथा OY के योग के बराबर होता है।

I_z = OZ के परित: I

I_x = OX के परित: I

I_y = OY के परित: I

$I_z = I_x + I_y$

$I_x = \Sigma m y^2$

$I_y = \Sigma' m x^2$

$I_z = \Sigma' m r^2$

$= \Sigma' m (x^2 + y^2)$

$= \Sigma' m x^2 + \Sigma' m y^2$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

समान्तर अक्ष की प्रमेय -

इस प्रमेय के अनुसार किसी पिण्ड का EF के परितः जड़त्व आघूर्ण का मान उस पिण्ड के गुरुत्व आघूर्ण C से होकर गुजरने वाले समान्तर अक्ष AB के परितः जड़त्व आघूर्ण तथा पिण्ड के द्रव्यमान का दोनों अक्षों के मध्य लम्बवत् दूरी के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

$I = \Sigma m (r + h)^2$

$I = \Sigma m [r^2 + h^2 + 2rh]$

$I = [\Sigma' m r^2 + \Sigma m h^2 + \Sigma' 2mrh]$

$\Sigma' m r^2 = I_C + Mh^2$

$\Sigma' m r = 0$

कुछ नियमित आकृतियों की वस्तुओं का जड़त्व आघूर्ण

रिंग

$$I_{AB} = MR^2$$

$$I_{CD} = I_C + Md^2$$
$$= MR^2 + M(R)^2$$
$$= 2MR^2$$

डिस्क

$$I_{AB} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{CD} = I_{AB} + MR^2$$
$$= \frac{MR^2}{2} + MR^2$$
$$= \frac{3MR^2}{2}$$

एक समान काट की पतली छड़

$$I_{AB} = \frac{Ml^2}{12}$$

$$I_{CD} = I_{AB} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}$$
$$= \frac{Ml^2}{3}$$

आयताकार प्लेट

$$I = m\left(\frac{l^2+b^2}{12}\right)$$

· झुकी हुई सतह पर गोले का लुढ़कना -

m द्रव्यमान का गोला है तथा त्रिज्या R है क्षैतिज से θ° कोण पर झुके हुए तल पर लुढ़क रहा है गोले तथा तल के मध्य घर्षण गुणांक μ है गोले का भार mg नीचे की ओर कार्य कर रहा है तथा mg sinθ तल के समान्तर कार्य करता है और mg cosθ तल के लम्बवत् कार्य करता है।

$$mg\sin\theta - f = Ma \quad \text{—— (I)}$$

$$N = Mg\cos\theta \quad \text{—— (II)}$$

गोला तल पर लुढ़क रहा है इसलिए घूर्णन गति करने के लिए बल आघूर्ण और कोणीय संवेग में सम्बन्ध

$$\tau = fR \quad \text{—— (III)}$$

$$\tau = I\alpha \quad \text{—— (IV)}$$

$$fR = I\alpha$$

$$f = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I}{R}\frac{a}{R}$$

$$f = \frac{Ia}{R^2}$$

$$mg\sin\theta - \frac{Ia}{R^2} = Ma$$

$$mg\sin\theta = ma + \frac{Ia}{R^2}$$

$$mg\sin\theta = Ma\left[1 + \frac{I}{MR^2}\right]$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

a का मान रखने पर

$$f = \frac{I}{R^2}\,\frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

घर्षण बल $\quad f = \mu \times$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}\right)\frac{\cancel{mg\sin\theta}}{mg\sin\theta}$$

$$\mu = \frac{I}{MR^2}\,\frac{\tan\theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

अध्याय - 4 ग्रहों तथा उपग्रहों की गति

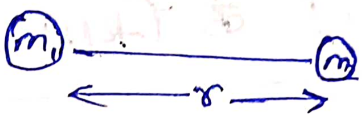
• गुरुत्वाकर्षण -

किन्हीं दो पिण्डों के मध्य गुरुत्व के कारण लगने वाले आकर्षण बल को गुरुत्वाकर्षण कहते हैं।

• न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम -

किन्हीं दो पिण्डों के मध्य लगने वाला आकर्षण बल पिण्डों के द्रव्यमान के गुणनफल के समानुपाती होता है तथा दोनों पिण्डों के दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

चित्र में दो पिण्ड m_1 व m_2 हैं जिनके बीच की दूरी r है



$$F \propto m_1 m_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\boxed{F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}}$$

जहाँ G = गुरुत्वाकर्षण नियतांक

$$\boxed{G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}} \quad \frac{\text{न्यूटन-मी}^2}{\text{किग्रा}^2}$$

विमा = $[M^{-1} L^3 T^{-2}]$

ग्रह -

सूर्य ब्रम्हाण्ड में केन्द्र मे होता है और इसके चारो ओर चक्कर लगाने वाले विशालकाय पिण्डों को ग्रह कहते हैं

सौरमण्डल मे 8 ग्रह हैं -

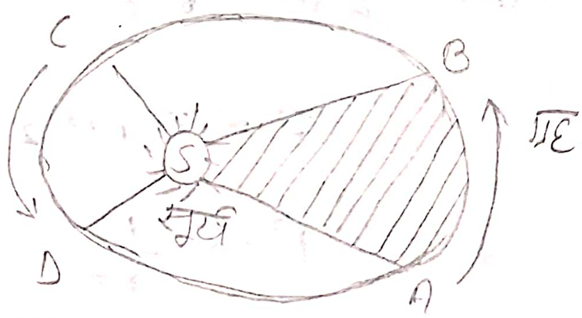
→ बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगल, बृहस्पति, शनि, अरुण, वरुण

उपग्रह -

कुछ ऐसे पिण्ड भी है जो ग्रहो के चक्कर लगाते हैं जिन्हें उपग्रह कहते हैं पृथ्वी का उपग्रह चन्द्रमा है।

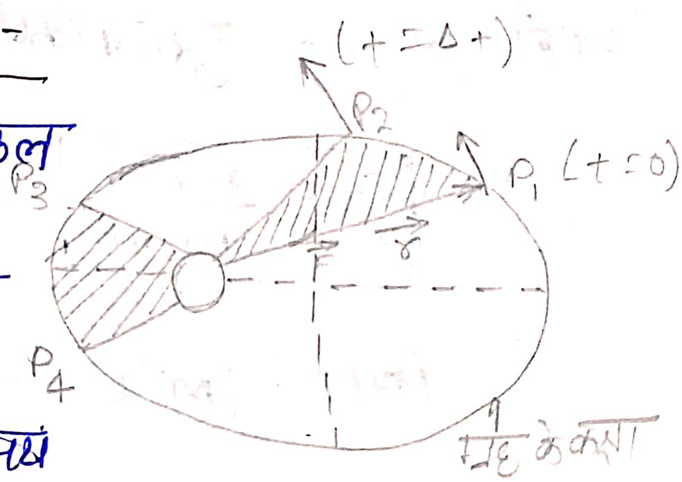
केप्लर के कक्षाओं का नियम -

(i) कक्षाओं के नियम -



सूर्य केन्द्र मे होता है और प्रत्येक ग्रह सूर्य के चारो ओर दीर्घ वृत्ताकार पथ में घूमते हैं तथा सूर्य दीर्घवृत्ताकार कक्षा के केन्द्र में होता है।

(ii) क्षेत्रफल का नियम -



इस नियम को क्षेत्रफल का नियम कहते हैं नियमानुसार किसी ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा समान समय

में समान क्षे० तय करती है।
क्षेत्रकलीय चाल नियत रहती है।

$$ASB = ACD$$

ग्रह सूर्य से दूर होता है तो चाल कम तथा पास होता है तो चाल अधिक

$$\Delta t \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2$$

बिन्दु P_1 पर वेग v है तथा Δt समय में P_2 तक पहुँच जाता है

$$\Delta t \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2$$

$$\text{क्षे०} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊ०}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{r} \times (v)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \, (\vec{v} \times \Delta t)$$

$$\frac{\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$\vec{v}$ का मान रखने पर

$$\frac{\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\frac{\vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{2m}$$

$$\frac{\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{P}$$

$\frac{A}{\Delta t}$ क्षेत्रकलीय चाल L है ग्रह का कोणीय संवेग तथा m ग्रह का द्रव्यमान है।

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{F} \times \vec{r} = \frac{dL}{dt}$$

$$P r \sin 180^\circ = \frac{dL}{dt}$$

$$\sin 180 = 0$$

$$0 = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = 0$$

$$L = \text{नियतांक}$$

दाँए पक्ष के पद नियतांक है इसलिए $\frac{A}{dt}$ भी नियतांक होगा और क्षेत्रकलीय चाल नियत होगा।

परिक्रमण काल का नियम -

इस नियम को परिक्रमण काल का नियम कहते हैं इसके अनुसार किसी ग्रह का सूर्य के चारो ओर T^2 का वर्ग ग्रह की सूर्य से दूरी R^3 की तीसरी घात के समानुपाती होती है।

m = ग्रह का द्रव्यमान $T^2 \propto r^3$

M = सूर्य का द्रव्यमान

ω = कोणीय वेग

T = परिक्रमण काल

r = ग्रह की सूर्य से दूरी

यदि किसी ग्रह को सूर्य के चारों ओर घूमने के लिए अभिकेन्द्र बल चाहिए होता है ग्रह और सूर्य के बीच गुरुत्वाकर्षण बल ही अभिकेन्द्र बल के बराबर होता है।

गुरुत्वाकर्षण बल = अभिकेन्द्र बल

$$\frac{G M_1 m_2}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\frac{G M \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{G M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$G M T^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM}\right] r^3$$

$$\frac{4\pi^2}{GM} = \text{नियतांक}$$

$$T^2 \propto r^3$$

- **गुरुत्व –**

दो पिण्डों के मध्य लगने वाले बल को गुरुत्वाकर्षण बल कहते हैं यदि इसी में से कोई पिण्ड पृथ्वी हो तो गुरुत्वाकर्षण बल को गुरुत्व कहते हैं।

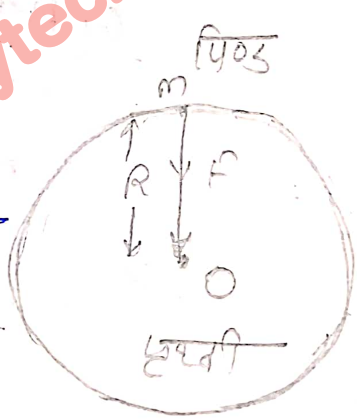
गुरुत्वीय त्वरण -

जब कोई पिण्ड पर गिरता है तो उसके वेग में लगातार समय के साथ वृद्धि होती है वेग में हुई वृद्धि को त्वरण कहते हैं और यह त्वरण गुरुत्व के कारण हो रहा है इसलिए इसे गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं।

$$g = 9.8 \text{ मी०/से०}^2$$

$$\text{विमा} = [LT^{-2}]$$

G तथा g में सम्बन्ध -



किसी पिण्ड और पृथ्वी की सतह पर पिण्ड रखा है पिण्ड का द्रव्यमान m है गुरुत्वाकर्षण के नियम से

$$F = \frac{GMm}{R^2} \quad \text{—— (i)}$$

पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण g है तो गुरुत्व बल $F = mg$ —— (ii)

समी० (i) तथा (ii) से

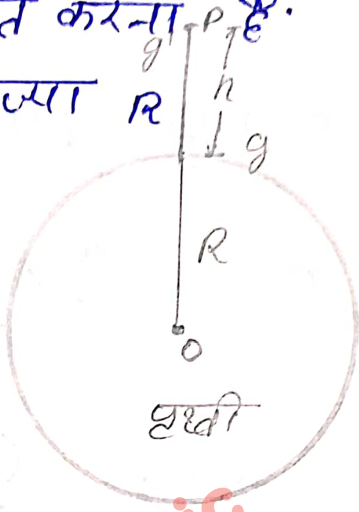
$$\frac{GM\cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}g$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

गुरुत्वीय त्वरण के मान में परिवर्तन -

(i) पृथ्वी तल के ऊपर जाने पर -

पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर बिन्दु P पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करना है।
पृथ्वी का द्रव्यमान M और त्रिज्या R



$$g = \frac{GM}{R^2}$$

बिन्दु P पर $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$

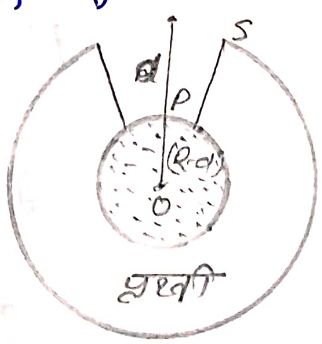
$$= \frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

पृथ्वी तल के ऊपर जाने पर g का मान घटता है।

(ii) पृथ्वी तल के नीचे जाने पर -

पृथ्वी की सतह से गहराई d पर g का मान ज्ञात करना है पृथ्वी की सतह S से d गहराई पर बिन्दु P पर गुरुत्वीय त्वरण का मान g' है तथा घनत्व ρ है।



पृथ्वी के (R-d) त्रिज्या वाले भाग की त्रिज्या

$$M' = \text{आ०} \times \text{घनत्व}$$

$$M' = \frac{4}{3}\pi (R-d)^3 \times \rho \quad \text{——} \quad (i)$$

पूरी पृथ्वी का घनत्व ~~$\rho = \frac{4}{3}\pi(R-d)^3 x$~~

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi (R)^3}$$

ρ का मान समी० ① में रखने पर

$$m' = \frac{4}{3}\pi(R-d)^3 \times \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R)^3}$$

$$m' = \frac{(R-d)^3 \times M}{R^3}$$

g तथा G में सम्बन्ध

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$g' = \frac{GM'}{(R-d)^2}$$

$$g' = \frac{G}{\cancel{(R-d)^2}} \times \frac{(R-d)^3}{R^3} M$$

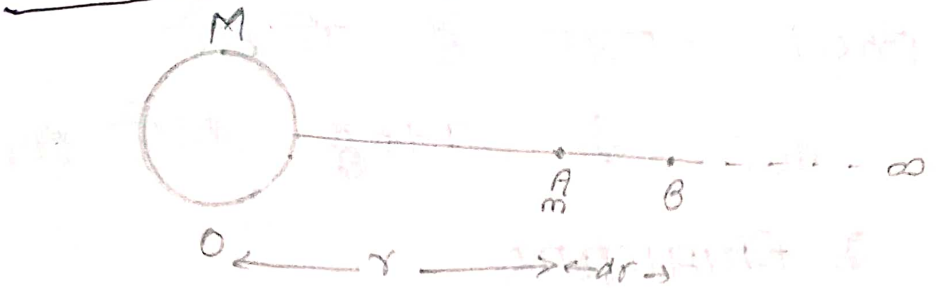
$$g' = \frac{G(R-d)M}{R^3}$$

$$g' = \frac{GM(R-d)}{R^3}$$

$$g' = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$\boxed{g' = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)}$$

गुरुत्वीय विभव -



यदि किसी वस्तु को गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर ले जाते हैं तो गुरुत्वाकर्षण के विरुद्ध कार्य करते हैं इसी प्रकार यदि कोई वस्तु बाहर से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाते हैं तो गुरुत्वाकर्षण बल वस्तु पर कार्य करता है।

m द्रव्यमान को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाये तो द्रव्यमान m पर कार्य होता है गुरुत्वीय विभव कहते हैं।

$$V = \frac{W}{m} \quad \text{जूल/किग्रा}$$

किसी पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाते हैं तो किया गया कार्य गुरुत्वीय विभव है,

चित्र में बिन्दु O पर M द्रव्यमान रखा है और बिन्दु A पर m द्रव्यमान रखा है M तथा m में दूरी r है m को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर लाना है

m को A से B तक dr दूरी विस्थापित किया जाता है जिसमें गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कार्य होता है

न्यूटन के नियमानुसार

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

$$dw = F\,dr$$

$$dw = \frac{GMm\,dr}{r^2}$$

अनन्त से पिण्ड m को गुरुत्वीय क्षेत्र में लाने पर

$$w = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm\,dr}{r^2}$$

$$= GMm\left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= GMm\left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= -\left[\frac{GMm}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

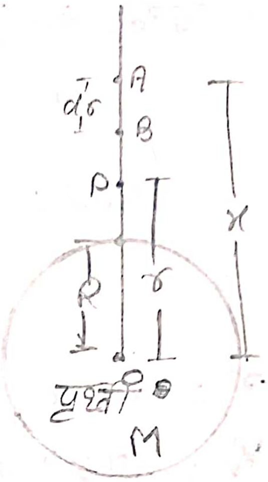
$$w = \frac{-GMm}{r}$$

w का मान रखने पर

$$V = \frac{\frac{-GMm}{r}}{m} = \frac{-GM}{r}$$

$$\boxed{V = \frac{-GM}{r}}$$

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा -



जब दो पिण्ड एक-दूसरे के पास होते हैं तो वह एक-दूसरे पर गुरुत्वाकर्षण बल लगाते हैं इस बल के कारण। पिण्ड में स्थितिज ऊर्जा संचित हो जाती है।

जब पिण्ड को अनन्त से लाते हैं तो दूसरे पिण्ड के पास गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर उस पर किया गया कार्य गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहलाता है।

$$OA = x, \quad AB = dx, \quad OP = r$$

$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

$$dw = F\,dx$$

$$dw = \frac{GMm}{x^2}\,dx$$

$$w = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{x^2}\,dx$$

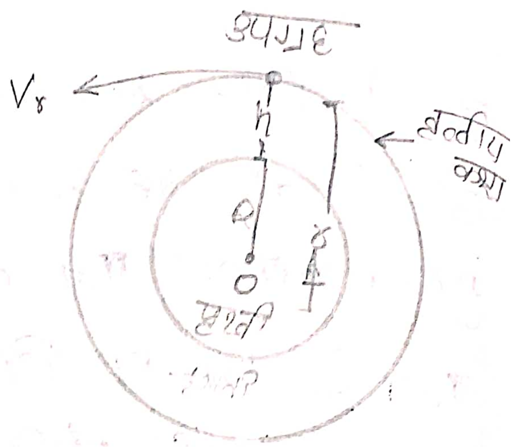
$$w = GMm\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\infty}^{r}$$

$$w = GMm\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{\infty}^{r}$$

$$w = GMm\left[\frac{-1}{x}\right]_{\infty}^{r}$$

$$\boxed{w = \frac{-GMm}{r}} \qquad \boxed{U = \frac{-GMm}{R}}$$

उपग्रह का कक्षीय वेग –



M = पृथ्वी का द्रव्यमान

R = " " त्रिज्या

m = उपग्रह का द्रव्यमान

h = " " ऊँचाई

$r = R + h$

V_r = उपग्रह का कक्षीय वेग

वह वेग जिससे किसी उपग्रह को इसकी वृत्तीय कक्षा में स्थापित किया जाए उसे उपग्रह का कक्षीय वेग कहते हैं।

उपग्रह को चक्कर लगाने के लिए अभिकेन्द्र बल की आवश्यकता होती है और यह गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है

$F = G$ ~~ρ φ~~

$$\frac{mV_r^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$V_r^2 = \frac{GM}{r}$$

$$V_r = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$V_r = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

$$GM = gR^2$$

$$V_r = \sqrt{\frac{gR^2}{r+h}}$$

$$V_r = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

उपग्रह पृथ्वी के अत्यंत समीप है

$$h <<< R$$

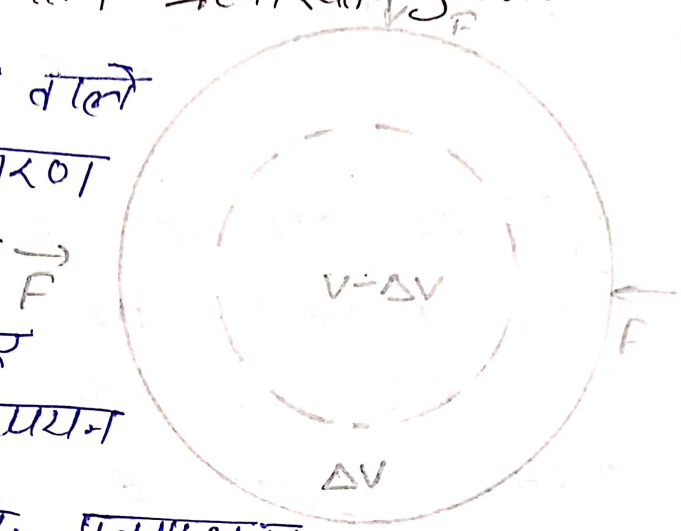
$$V_R = R\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$V_R = \sqrt{gR}$$

$$V_R = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$V_R = 8 \text{ km/sec}$$

• बल्क गुणांक या आयतन प्रत्यास्थता गुणांक



किसी ठोस पर लगने वाले दाब तथा उसके कारण उत्पन्न आयतन विकृति के अध्ययन के लिए बल्क गुणांक का अध्ययन किया जाता है अतः प्रत्यास्थता सीमा में किसी वस्तु पर लगे दाब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को बल्क गुणांक या आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।

$$\text{आयतन प्रत्यास्थता गुणांक} = \frac{\text{दाब प्रतिबल}}{\text{आ० विकृति}}$$

$$B = \frac{P = \frac{F}{A}}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$B = -\frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

-ve चिन्ह यह दर्शाता है कि आ० में कमी आती है।

संपीड्यता -

यह बल्क गुणांक का प्रतिलोम होता है

$$K = \frac{1}{B}$$

दृढ़ता गुणांक -

$$\text{नीता}(\eta) = \frac{\text{स्पर्श रेखीय प्रतिबल}}{\text{स्पर्श रेखीय विकृति}} = \frac{F/A}{\phi} = \frac{F}{A\phi}$$

खिंचे हुए तार की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा -

जब हम किसी तार को खींचते हैं तो हमें तार के बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा में इकट्ठा हो जाता है।

किसी तार की लम्बाई L तथा क्षे० A है यदि तार को F बल लगाकर खींचा जाता है जिसके कारण तार में ΔL लम्बाई वृद्धि हो तो

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A}$$

$$\text{विकृति} = \frac{\Delta L}{L}$$

∴ तार का यंग गुणांक $Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{FL}{A\Delta L}$

अतः तार में l लम्बाई वृद्धि करने के लिए आवश्यक बल $\cancel{F=}$ $\frac{\cancel{Y}\Delta L}{\frac{\cancel{L}}{\cancel{A}}} = \frac{\cancel{YA\Delta L}}{\cancel{AL}}$

$$F = \frac{YA\Delta L}{L}$$

यदि तार की लम्बाई में अत्यंत सूक्ष्म वृद्धि dl करने के लिए dw कार्य की आवश्यकता होती है·

$dw = F \times dl$

$dw = \frac{YA\Delta L}{L} \cdot dl$

अतः तार की लम्बाई में 0 से l तक वृद्धि करने के लिए किया गया कार्य

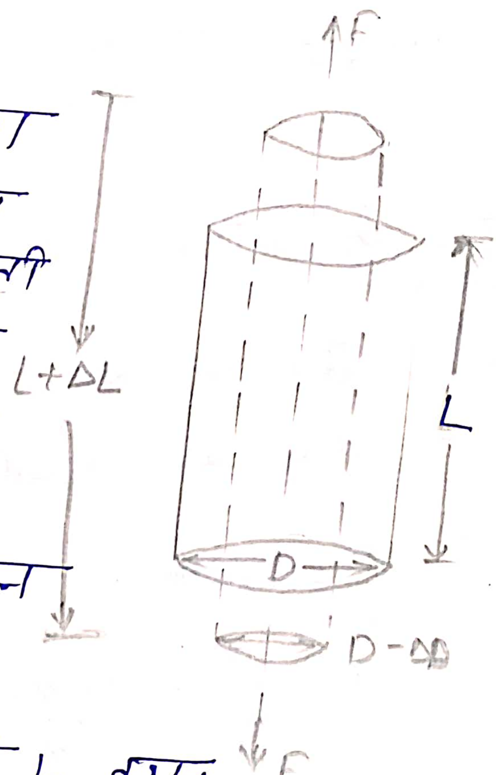
$$\int_0^w dW = \frac{YA}{L}\int_0^{\Delta L} l\,dl$$

$$= \frac{YA}{L}\left[\frac{\Delta L^2}{2}\right]_0^{\Delta L}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{Y\Delta L}{L}\right)\left(\frac{\Delta L}{L}\right)(AL)$$

$= \frac{1}{2} \times$ प्रतिबल $\times$ विकृति $\times$ आयतन

पायसन का अनुपात –



जब किसी तार को विरूपक बल लगाकर खींचा जाता है तो लम्बाई में वृद्धि होती है तथा व्यास में कमी आती है इसीलिए तार में अनुदैर्ध्य विकृति के साथ अनुप्रस्थ विकृति भी उत्पन्न होती है,

चित्र में आरम्भिक लम्बाई L तथा व्यास D है F बल लगाने पर लम्बाई में वृद्धि ΔL और व्यास में ΔD

अनुदैर्ध्य विकृति $= \frac{\Delta L}{L}$

अनुप्रस्थ विकृति $= \frac{\Delta D}{D}$

पायसन अनुपात $= \dfrac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$

$$\sigma = \frac{\Delta D / D}{\Delta L / L}$$

$$\sigma = \frac{\Delta D L}{\Delta L D}$$

दाब -

किसी सतह के A क्षे० पर सम्पूर्ण दाब P है

$$P = \frac{F}{A} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

मात्रक $= \dfrac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^{\circ 2}}$ N/m^2 या पास्कल

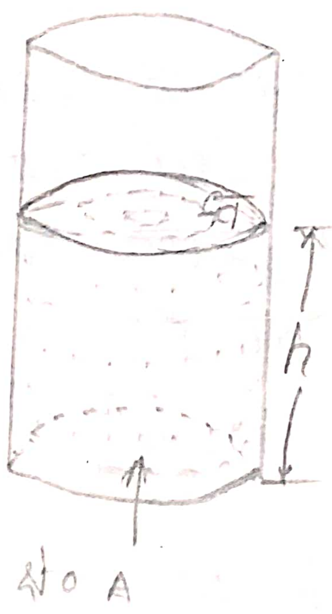
द्रव के भीतर दाब तथा गहराई में सम्बन्ध-

F = द्रव का सम्पूर्ण भार

= द्रव का आ० × द्रव का घनत्व × g

$$F = Ahdg$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Ahdg}{A} = hdg$$



वायुमण्डलीय दाब

पृथ्वी के चारो ओर वायु के द्वारा लगाया गया दाब वायुमण्डलीय दाब कहलाता है।

आण्विक बल -

जब किसी पदार्थ के अणुओं पर आकर्षण बल लगता है उसे आण्विक बल कहते हैं।

(i) आसंजक बल
(ii) सांसजक बल

(1) आसंजक बल

दो विभिन्न पदार्थों के मध्य लगने वाले आकर्षण बल को आसंजक बल कहते हैं

उदा०-ग्लास और पानी
पानी ग्लास को अधिक भिगोता है क्योंकी इनके बीच आसंजक बल सासंजक बल से अधिक होता है।

(ii) सासंजक बल-

एक ही पदार्थ के अणुओं के बीच लगने वाले आकर्षण बल को सासंजक बल कहते हैं।

उदा० ~~ग्लास~~ पारा कॉंच को अधिक इसलिए नही भिगोता है क्योंकी सासंजक बल का मान आसंजक बल से अधिक होता है

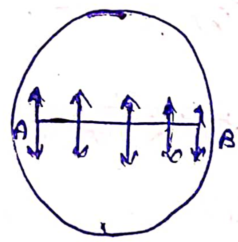
आण्विक सीमा *

वह अधिकतम दूरी जहाँ तक कोई अणु दूसरे अणु पर आकर्षण बल लगाते हैं उसे आण्विक सीमा कहते हैं इसका मान 10^{-9} मी० होता है।

पृष्ठ तनाव *

जब कोई जल की बूंद ग्लास पर डालते हैं तो वह हमेशा गोले का आकार लेता है क्योंकि न्यूनतम क्षेत्रफल का होता है
अतः द्रव का वह गुण जिससे वह न्यूनतम क्षेत्रफल ग्रहण करने का प्रयास करे वह पृष्ठ तनाव कहलाता है।
पृष्ठ पर काल्पनिक रेखा A B खींची जाती है और इसके लम्बवत बल F लगता है

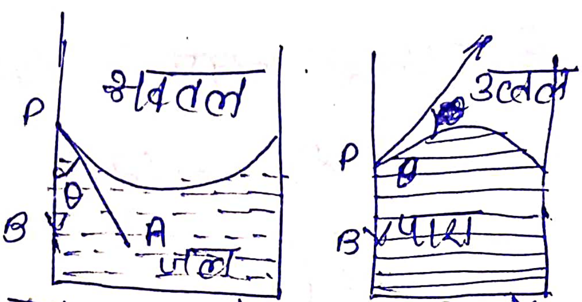
पृष्ठ तनाव $= \frac{F}{l}$ $\frac{N}{m}$



विमा $= [MT^{-2}]$

स्पर्श कोण *

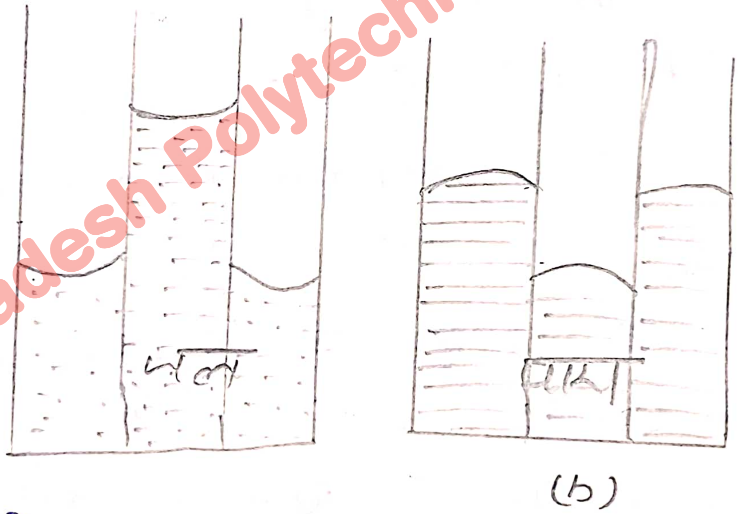
~~एक~~ खुली कांच की नली में जल भरा जाता है दूसरे में पारा जिसमें जल होगा वह सतह अवतल हो जाती है तथा जिसमें पारा होगा वह सतह उत्तल हो जाती है।



द्रव की सतह से स्पर्श रेखा PA खींची जाती है और नली से PB, PA तथा PB के मध्य θ कोण बनता है जल का स्पर्श कोण छोटा होता है क्योंकी आसंजक बल का मान संसंजक से अधिक होता है। और पारा में स्पर्श कोण का मान अधिक होता है क्योंकी संसंजक बल का मान आसंजक बल से अधिक होता है।

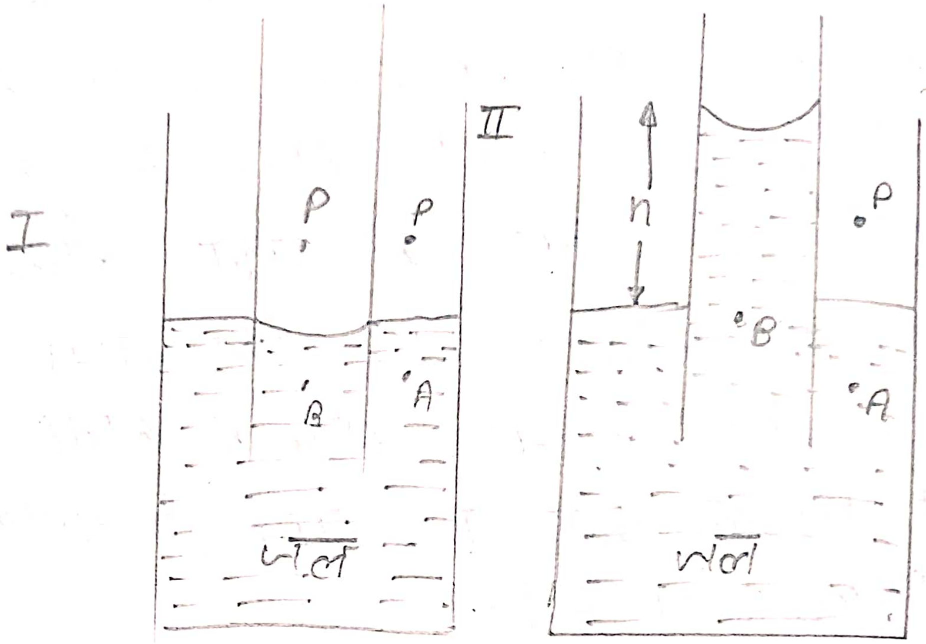
<u>केशकत्व</u>

ऐसी नली जो दोनो ओर से खुली हो जिसका आन्तरिक व्यास बहुत कम हो

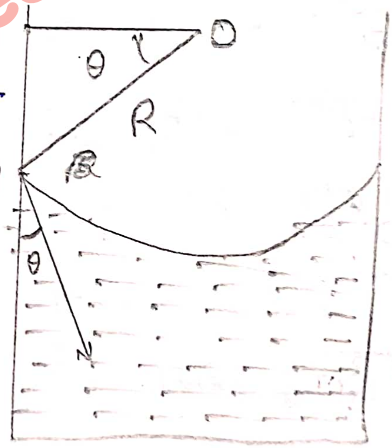


उसे केश नली कहते हैं यदि केशनली को जल में डुबोते हैं तो जल ऊपर चढ़ता है यदि पारा में डुबोते हैं तो पारा नीचे उतरता है अतः केशनली को किसी द्रव में डुबोने पर द्रव का ऊपर जाना तथा नीचे उतरना केशकत्व कहलाता है।

केशनली द्वारा पृष्ठ तनाव ज्ञात करना *



इसमें केशनली जल में डुबोयी हुई है और जल की सतह अवतल है अवतल सतह पर दाब सदैव अधिक होता है और उत्तल सतह पर दाब कम होगा जोकि बिन्दु B पर है बिन्दु B और P पर दाब समान करने के लिए जल ऊपर चढ़ जाता है तो



जल की अवतल सतह

बिन्दु B पर दाब $= \left(P - \frac{2T}{R}\right)$

$$\text{कुल दाब} = \left(P - \frac{2T}{R}\right) + h\rho g = P$$

$$B + \text{वायु} = P$$

$$\frac{2T}{R} = h\rho g$$

चित्र में केशनली की त्रिज्या r और द्रव सतह की त्रिज्या R, स्पर्श कोण θ है

$$\cos\theta = \frac{r}{R}$$

$$R = \frac{r}{\cos\theta}$$

$$\frac{2T}{R} = h\rho g$$

$$h = \frac{2T}{R\rho g}$$

$$\boxed{h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}}$$