

APPLIED MATHEMATICS - I

Time : 2:30 Hours]

[Maximum Marks : 50

NOTES:

- i) Attempt all questions.
- ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is an difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q1) Answer any ten parts of the following, from parts a to l select the correct choice.

[10×1=10]

- a) 10th term of the series $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ is
- i) $\frac{13}{2}$ ii) $\frac{15}{2}$ iii) $\frac{17}{2}$ iv) $\frac{19}{2}$
- b) How many terms are in the series $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots, 128$?
- i) 11 ii) 13 iii) 12 iv) 14
- c) 6th term in the expansion of $\left(\frac{3x}{4} - \frac{4}{3x}\right)^9$ is
- i) $-\frac{168}{x}$ ii) $-\frac{132}{x}$ iii) $\frac{120}{x}$ iv) $\frac{140}{x}$
- d) The value of Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ is
- i) -5 ii) 5 iii) 7 iv) 6
- e) Projection of the vector $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is
- i) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ii) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$ iii) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ iv) $\frac{5\sqrt{14}}{7}$
- f) If $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 7$ and $(\vec{a} \times \vec{b}) = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ then the angle between \vec{a} and \vec{b} is
- i) $\pi/4$ ii) $\pi/2$ iii) $\pi/3$ iv) $\pi/6$
- g) the volume of parallelo piped whose edges are $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, and $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ is
- i) 6 ii) 7 iii) 5 iv) 8
- h) The modulus of $(2 + 3i)^2$ is
- i) 12 ii) 13 iii) 11 iv) 10
- i) If in a triangle ABC, $a = 16, b = 24$ and $c = 20$ then the value of $\cos (B/2)$ is
- i) $\frac{3}{4}$ ii) $\frac{2}{3}$ iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\frac{3}{5}$
- j) If $\phi(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ then $\phi(\tan \theta)$ equals
- i) $\sin 2\theta$ ii) $\cos^2 \theta$ iii) $\cos 2\theta$ iv) $\sin \theta$

k) The value of $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ is

i) $\frac{1}{4}$

ii) $\frac{1}{3}$

iii) $-\frac{1}{4}$

iv) $-\frac{1}{3}$

l) The diff. coefficient of $\log_e x$ is

i) $\frac{1}{x} \log_e e$

ii) $\frac{1}{x} \log_e e$

iii) $\frac{1}{e} \log_e e$

iv) None

Q2) Answer any five parts of the following.

[5×2=10]

- Find differential coefficient of $\tan x$ from first principle.
- Find the coefficient of x^{15} in the expansion of $(x - x^2)^{10}$
- Express the complex number $(-1 - i\sqrt{3})$ in the polar form.
- In ΔABC if $\angle C = 90^\circ$, then prove that $\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}$.
- Evaluate $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$
- Differentiate the function $\sin [\cos(x^2)]$ w.r.t. x .
- Find the equation of the tangent to the curve $y = x^2 + 4x + 1$ at the point where x -coordinate is 3.

Q3) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- If $y = \log \left[x + \sqrt{(x^2 - a^2)} \right]$ then find $\frac{dy}{dx}$.
- Find the equation of the tangent of the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 14$ at the point $(0, 2)$.
- Solve the following equation using Cramer's rule.
 $2x - y + z = 3, x + 3y - 2z = 11, 3x - 2y + 4z = 1$

Q4) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- If α and β are two roots of the equation $x^2 - 2x + 4 = 0$,
 then prove that $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
- The distance traveled by a particle in t seconds is given by $s = (2t^2 + t + 1)^{1/2}$. Find the velocity after one second.
- Prove that $\frac{\cos A}{c \cos B + b \cos C} + \frac{\cos B}{a \cos C + c \cos A} + \frac{\cos C}{b \cos A + a \cos B} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

Q5) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- If $x = a \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$ and $y = a \sin t$, find $\frac{dy}{dx}$.
- If $\sin y = x \sin(a + y)$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three vectors that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, then prove that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

(हिन्दी अनुवाद)

नोट : i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

ii) परीक्षार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे प्रश्न-पत्र के दोनों अनुवादों में सांख्यिकीय आँकड़ों का विशेष रूप से मिलान कर लें। यदि हिन्दी अनुवाद के किसी प्रश्न में किसी प्रकार की भिन्नता है, तो परीक्षार्थी अंग्रेजी अनुवाद के अनुसार प्रश्न का उत्तर दें।

iii) परीक्षार्थियों द्वारा पेज़र और मोबाइल फोन का प्रयोग अनुमत्य नहीं है।

प्र. 1) निम्नलिखित में से कोई दस भाग हल कीजिए। भाग अ से न तक सही विकल्प चुनिये।

[10 × 1 = 10]

अ) श्रेणी $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ का दसवाँ पद होगा :

i) $\frac{13}{2}$

ii) $\frac{15}{2}$

iii) $\frac{17}{2}$

iv) $\frac{19}{2}$

ब) श्रेणी $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ 128 में कितने पद होंगे?

i) 11

ii) 13

iii) 12

iv) 14

स) $\left(\frac{3x-4}{4-3x}\right)^9$ में छठवाँ पद होगा :

i) $-\frac{168}{x}$

ii) $-\frac{132}{x}$

iii) $\frac{120}{x}$

iv) $\frac{140}{x}$

द) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ का मान होगा :

i) -5

ii) 5

iii) 7

iv) 6

ब) सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ पर प्रक्षेप है :

i) $\frac{\sqrt{14}}{7}$

ii) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

iii) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$

iv) $\frac{5\sqrt{14}}{7}$

र) यदि $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 7$ और $(\vec{a} \times \vec{b}) = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ तो \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण होगा :

i) $\frac{\pi}{4}$

ii) $\frac{\pi}{2}$

iii) $\frac{\pi}{3}$

iv) $\frac{\pi}{6}$

ल) उस समान्तर षट्फलक का आयतन, जिसकी कोरे सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं, होगा

i) 6

ii) 7

iii) 5

iv) 8

ख) $(2 + 3i)^2$ का मापांक होगा

i) 12

ii) 13

iii) 11

iv) 10

ग) यदि त्रिभुज ABC में $a = 16, b = 24$ और $c = 20$ तो $\cos(B/2)$ का मान होगा

i) $\frac{3}{4}$

ii) $\frac{2}{3}$

iii) $\frac{1}{3}$

iv) $\frac{3}{5}$

घ) यदि $\phi(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ तो $\phi(\tan \theta)$ का मान होगा

i) $\sin 2\theta$

ii) $\cos^2 \theta$

iii) $\cos 2\theta$

iv) $\sin^2 \theta$

घ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ का मान है :

i) $\frac{1}{4}$

ii) $\frac{1}{3}$

iii) $-\frac{1}{4}$

iv) $-\frac{1}{3}$

न) $\log_e x$ का अवकल गुणांक होगा :

i) $\frac{1}{x} \log_e e$

ii) $\frac{1}{x} \log_e e$

iii) $\frac{1}{e} \log_e e$

iv) कोई नहीं

प्र.2) निम्नलिखित में से कोई पांच भाग हल कीजिए :

[5 × 2 = 10]

अ) $\tan x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करो।

ब) $(x - x^2)^{10}$ के प्रसार में x^{15} का गुणांक ज्ञात करें।

स) सम्मिश्र संख्या $(-1 - i\sqrt{3})$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त करो।

र) यदि ΔABC में $\angle C = 90^\circ$, तो सिद्ध करें कि $\tan \frac{A+B}{2} = \frac{a-b}{a+b}$.

घ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 + 9} - 5}$ का मान ज्ञात करें।

ङ) $\sin [\cos(x^2)]$ को x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करें।

च) वक्र $y = x^2 + 4x + 1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण उस बिन्दु पर ज्ञात करें जिसके x - निर्देशांक का मान 3 है।

प्र.3) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2 × 5 = 10]

अ) यदि $y = \log \left[x + \sqrt{(x^2 - a^2)} \right]$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

ब) दीर्घ वृत्त $2x^2 + 3y^2 = 14$ के बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

प्र) क्रैमर के नियम से निम्न समीकरणों को हल करें।

$$2x - y + z = 3, \quad x + 3y - 2z = 11, \quad 3x - 2y + 4z = 1$$

प्र.4) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2 × 5 = 10]

अ) यदि α और β समीकरण $x^2 - 2x + 4 = 0$ दो मूल हैं तो सिद्ध करें कि $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

ब) किसी कण (particle) द्वारा t सेकण्ड में तय की गई दूरी $s = (2t^2 + t + 1)^{1/2}$ द्वारा दर्शित है। एक सेकण्ड बाद उसका वेग ज्ञात करें।

स) सिद्ध करें कि $\frac{\cos A}{c \cos B + b \cos C} + \frac{\cos B}{a \cos C + c \cos A} + \frac{\cos C}{b \cos A + a \cos B} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.

प्र.5) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2 × 5 = 10]

अ) यदि $x = a \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$ और $y = a \sin t$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

ब) यदि $\sin y = x \sin(a + y)$ तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$.

स) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.