חשבון אינפיניטסימלי 6

כרך א

מה אני עושה עם החיים שלי?

כל ההוכחות יצורפו בהמשך

נפתח את הקורס עם הגדרה.

הגדרה 1.1 פונקציה גדולה:

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית.

f תקרא **פונקציה גדולה** אם לכל $p(x) \in \mathbb{R}[x]$[1] קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $f(x) > p(x)$.

מכאן נוכל להגדיר את התכונה הבאה.

הגדרה 1.2 תכונת הגודל:

תהיינה $f(x), g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות ממשיות.

אם קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $f(x) > g(x)$, נאמר ש- $\boldsymbol{f}$ **גדולה על** $\boldsymbol{g}$.

מסקנה 1.1:

יחס הגודל של פונקציות ממשיות הוא יחס סדר חלקי.[2]
דהיינו, הוא יחס טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי ואנטי-רפלקסיבי.

הערה 1.1:

שימו לב שיחס הגודל של פונקציות אינו משווה! אם ניקח לדוגמה את הפונקציות $f(x) = \sin(x)$ ו- $g(x) = \cos(x)$, נקבל ש-f לא גדולה על g וגם g לא גדולה על f אך כמובן ש- $f \neq g$. לפיכך יחס הגודל אינו יחס סדר מלא.

---

[1] $\mathbb{R}[x]$ הוא מרחב הפולינומים מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$. ראו *אלגברה לינארית 1, כרך ב' 7.1 דוגמה ה' (האוני' הפתוחה)*. להזכירכם: פולינום p מעל שדה F הוא פונקציה מהצורה: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ($a_i \in F$ סקלר).

[2] ראו *מתמטיקה בדידה – תורת הקבוצות, פרק 2.3 "יחסי סדר" (האוני' הפתוחה).*

כעת, לשם הנוחות, נגדיר תכונה שימושית בדיון על פולינומים ממשיים.

הגדרה 1.3 פולינום חיובי:

יהי $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ פולינום ממשי.

אם המקדם המוביל (המקדם של האיבר בעל החזקה הגבוהה ביותר) חיובי,
נאמר ש- p **פולינום חיובי.**

דהיינו, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ‏($a_i \in \mathbb{R}$ סקלר) פולינום יקרא **פולינום חיובי** אם $a_n > 0$.

טענה 1.1:

כל פולינום **חיובי** p בעל מעלה n גדול על כל פולינום אחר ממעלה קטנה יותר.
כלומר, אם $p, q \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- p חיובי ו- $\deg(p) > \deg\,(q)$ אזי p גדול על q.

בנוסף, כל פולינום p אינו פונקציה גדולה (ההוכחה פשוטה ותצורף בהמשך).

הערה 1.2:

באופן שקול נוכל להגיד ש- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא פונקציה גדולה אם ורק אם f גדולה
על כל פולינום ממשי p.

מההערה הנ״ל יחד עם מסקנה 1.1 נקבל את החלק השני של טענה 1.1.
כל פולינום ממשי p אינו גדול על עצמו (תכונת האנטי-רפלקסיביות) ולפיכך, אינו פונקציה גדולה.

טענה 1.2:

כל פונקציה אקספוננציאלית היא פונקציה גדולה.

הוכחת טענה 1.2:

יהי $f(x) = a^x$ ‏$(a > 1)$ פונקציה אקספוננציאלית ויהי $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינום ממשי.

אם $a_n < 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} (p(x)) = -\infty$ ולפי ההגדרה, קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים
$p(x) < 0 < f(x)$ (שכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = a^x > 0$) ולכן f גדולה על p.

מעתה נניח כי $a_n > 0$, כלומר, p חיובי.

מציאת x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $f(x) > p(x)$ שקול להוכחת הטענה $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{p(x)}) > 1$.

f ו- p גזירות בסביבה ימנית של ∞. מכיוון ש-p פולינום ו- $a_n > 0$ אזי $\lim_{x\to\infty}(p(x)) = \infty$

וכמובן ש- $\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \infty$[3], מתקיימים כל תנאי כלל לופיטל (מהצורה "$^{\infty}/_{\infty}$").

נקבל מכלל זה ש-$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{p'(x)}\right)$.

$$p'(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\cdot(i+1)\cdot x^i \quad , \quad a_n > 0 \ \Rightarrow \text{חיובי } p'$$

$$f'(x) = (a^x)' = \ln(a)\cdot a^x \quad , \quad a > 1 \ \Rightarrow \ln(a) > 0$$

מתקיים שוב ש- f' ו- p' גזירות בסביבה ימנית של ∞. p' פולינום חיובי ולכן $\lim_{x\to\infty}(p'(x)) = \infty$

וכמובן ש- $\lim_{x\to\infty}(f'(x)) = \infty$[4]. נוכל להשתמש בכלל לופיטל (מהצורה "$^{\infty}/_{\infty}$") עבור f' ו- p'.

נשיב לב שכל תנאי לופיטל מתקיימים לכל n-1 גזירות של f ו- p ולאחר $\deg(p) = n$ גזירות נקבל:

$$\frac{d^n}{d^n x}p(x) = a_n\cdot n!$$

$$\frac{d^n}{d^n x}f(x) = \ln^n(a)\cdot a^x$$

כאמור, $\ln(a)$ מוגדר וחיובי ומכך $\ln^n(a) > 0$.

כמובן ש- $n! > 0$ ולפי ההנחה, $a_n > 0 \Rightarrow P = \frac{d^n}{d^n x}p(x) > 0$

ויחד נקבל $\frac{\ln^n(a)}{P} > 0$ (1)

עד כה מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{p'(x)}\right) = \cdots = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{d^n}{d^n x}f(x)}{\frac{d^n}{d^n x}p(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln^n(a)\cdot a^x}{P}\right)$$

ומאריתמטיקה של גבולות ו-(1) נקבל:

---

[3] ראו *חשבון אינפיניטסימלי 1, כרך ב' משפט 6.9 (האוני' הפתוחה).*

[4] משפט 6.9 הנזכר לעיל יחד עם $\ln(a) > 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln^n(a)\cdot a^x}{P}\right)=\frac{\ln^n(a)}{P}\cdot\lim_{x\to\infty}(a^x)=\text{"חיובי} \cdot \infty\text{"}=\infty$$

מכאן ש- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)=\infty$ ובפרט, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)>1 \Leftarrow$ f גדולה על p.

הראנו ש- f גדולה על כל פולינום ממשי p ומהערה 1.2 נסיק ש- f פונקציה גדולה כנדרש.

■

טענה 1.3:

$f(x)=x^x$ היא פונקציה גדולה.

ההוכחה טריוויאלית ותישאר כשאלה לקורא.[5]

---

[5] סתם אני לא מניאק כמו האוניברסיטה הפתוחה, עבדכם הנאמן יוכיח בהמשך.