הסבר (חצי פורמלי)

נוכיח שהמינימום הוא 2.

ניקח שלוש סדרות אינדקסים $(n^1)_k, (n^2)_k, (n^3)_k$ שההרכבה שלהם על b_n מתכנסת לכל אחד משלוש הגבולות החלקיים של b_n. עכשיו ניקח תתי סדרות מתכנסות של הסדרות $a_{(n^1)_k}, a_{(n^2)_k}, a_{(n^3)_k}$ (אפשר כי הן עדיין חסומות כתתי סדרות של הסדרה החסומה a_n) ונקבל $a_{(n^1)_{k^1 l}}, a_{(n^2)_{k^2 l}}, a_{(n^3)_{k^3 l}}$ שמתכנסות לa_1, a_2, a_3 בהתאמה. מאריתמטיקה נקבל (כי $b_{(n^1)_{k^1 l}}, b_{(n^2)_{k^2 l}}, b_{(n^3)_{k^3 l}}$ עדיין מתכנסות לשלוש הגבולות החלקיים כתת סדרות מתאימות...) שמתקיים:

$$a_{(n^1)_{k^1 l}} + b_{(n^1)_{k^1 l}} \to a_1 + b_1$$

$$a_{(n^2)_{k^2 l}} + b_{(n^2)_{k^2 l}} \to a_2 + b_2$$

$$a_{(n^3)_{k^3 l}} + b_{(n^3)_{k^3 l}} \to a_3 + b_3$$

נשים לב כי הb_iים שונים זה מזה אבל הa_iים לא בהכרח, אנו רק יודעים שהם מקבלים אחד משני ערכים. אך זה אומר שערך אחד מופיע לפחות פעמיים באחד משלוש הגבולות למעלה ולכן בהכרח יש שני גבולות חלקיים שונים (כי אם הוספנו אותו ערך לשני מספרים שונים קיבלנו עדיין שני מספרים שונים). בזאת הראנו שבכל מקרה יש לפחות 2 גבולות חלקיים שונים. עכשיו נראה דוגמה שיש בה **בדיוק** 2 גבולות חלקיים שונים:

$$a_n = [(n-1)mod3]mod2$$

$$b_n = (n-1)mod3$$

הסדרות נראות כך (בהתאמה):

$0,1,0,0,1,0,0,1,0 \ldots$

$0,1,2,0,1,2,0,1,2 \ldots$

סדרת החיבור היא:

$0,2,2,0,2,2,0,2,2 \ldots$

ואכן קל לראות ש$a_{3n-2} + b_{3n-2} \to 0, a_{3n-1} + b_{3n-1}, a_{3n} + b_{3n} \to 2$ ותת סדרות אלו מכסות את כל הטבעיים ולכן ממשפט ידוע קבוצת הגבולות החלקיים תהיה $\{0,2\}$.