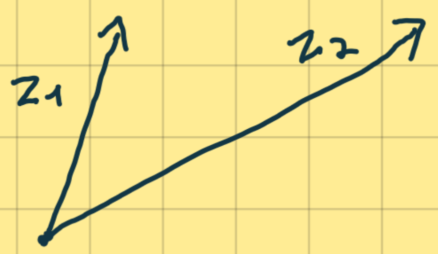
משמעות פיזיקלית לכפל מספרים מרוכבים

בהינתן שני מספרים מרוכבים Z_1 ו Z_2, ניתן לחשוב עליהם כוקטורים במישור הדו מימדי:



כעת נכפיל את אותם שני מספרים בהצגה קוטבית:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$r_1 r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\left[\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right]\right)$$

$$= \left[\text{זהות טריגו ידועות}\right] = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) =$$

$$r_1 r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + i\left[r_1 r_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

כעת נשים לב שאילו היינו מחליפים את Z_2 ב $\overline{Z}_2$ (הצמוד המרוכב) היינו מקבלים -

$$Z_1\cdot\overline{Z}_2 = r_1 r_2\cos(\theta_1-\theta_2) + i\left[r_1 r_2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

ואם נשים לב החלק הממשי הוא בדיוק העבודה ש"הוקטור" z_1 מבצע על הדרך z_2 והחלק המדומה הוא בדיוק השטף. בעצם קיבלנו פרשנות פיזיקלית לכפל מרוכבים:

$$z_1\cdot z_2 = z_1\bar{\bar{z}}_2 = \left(\text{העבודה ש } z_1 \text{ מבצע על } \bar{z}_2\right) + i\left(\text{השטף ש } z_1 \text{ מפעיל על } \bar{z}_2\right)$$

מכאן גם אפשר להסיק פרשנות פיזיקלית לאינטגרלים מרוכבים, אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת ניתן לחשוב עליה כשדה וקטורי במישור (לכל נק' במישור z, משייכים "וקטור" $(f(z))$). כעת אנו יודעים שאם נחלק את המסילה שעליה מבצעים אינטגרציה לחלקים מאוד קטנים (משיקים למסילה) אז f מחושב על הנק' ממנה יוצא המשיק הוא בקירוב הכוח ואף שפועל באותו אזור, ולכן שסוכמים את מכפלות כל המשיקים בf בנק' ההשקה ולוקחים לגבול נקבל -

$$\oint_\gamma f(z)dz = \left(\text{העבודה ש } \bar{f} \text{ מבצע על } \gamma\right) + i\left(\text{השטף ש } \bar{f} \text{ מפעיל על } \gamma\right)$$