קטע סגור לא בן מנייה

עמית בכר

2024

הוכחה

נוכיח שהקטע $[0,1]$ לא בן מנייה. נניח בשלילה שהוא בן מנייה ותהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מנייה שלו, כעת נבנה מספר בקטע שבהכרח לא במנייה ונגיע לסתירה. נגדיר סדרת מספרים באופן הבא:

$$a_1 = 10^{-1} * ((\lfloor 10^1 * x_1 \rfloor + 1) \mod 10)$$
$$a_{n+1} = a_n + 10^{-(n+1)} * ((\lfloor 10^{n+1} * x_{n+1} \rfloor + 1) \mod 10)$$

קל להוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה, ובנוסף שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 * 10^{-k}$ אך נבחין שהטור המתקבל הנדסי ולכן $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 9 * 10^{-k} = 1$ כלומר הסדרה a_n חסומה ולכן (בשילוב עם המונוטוניות) מתכנסת. אך מתקיים $0 \leq a_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 * 10^{-k}$ לכל n (החיוביות ברורה) ולכן מתקיים $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 1$. נסמן את הגבול ב $a \in [0,1]$ ונוכיח שהוא לא במנייה. נבחין שהספרה הnית של a (אחרי האפס) שווה לספרה הnית של a_n ששונה מהספרה הnית של x_n (כך מראש בנינו את הסדרה) ולכן למעשה $a \neq x_n$ לכל n בסתירה לכך שa בקטע $[0,1]$ ולכן צריך היה להיות במנייה.