1. א. (13 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל סדרה $\{a_n\}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = 1$ יש לכל היותר שני גבולות חלקיים.

<u>פתרון</u>

זו תהיה הפרכה. ננסה להבין איך סדרה a_n שמקיימת $a_n a_{n+1} \to 1$ מתנהגת (החל ממקום מסוים כמובן, כי הנתון על הסדרה הוא גבולי ולכן למספר סופי של איברים היא יכולה להתנהג איך שהיא רוצה וזה לא משנה). ברור אינטואיטיבית שלחים גדולים ("החל ממקום מסוים") מתקיים $a_{n+1} \approx \frac{1}{a_n}$. לכן בדרך כלל אנחנו חושבים רק על סדרות טריוויאליות בהם יש **שוויון** ($a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$), כלומר סדרה כלשהי מהצורה ... $a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}$ עבור $0 \neq a \in \mathbb{R}$. אבל במקרה טריוויאלי זה באמת יש רק 2 או פחות גבולות חלקיים והם $\frac{1}{a}$ ו a (אם $a = \pm 1$ אז יש אחד כמובן כי $a = \frac{1}{a}$ והסדרה המדוברת היא קבועה). אך היות ולא בהכרח מתקיים שוויון אז לa_n יש הצגה כללית יותר. כדי להגיע אליה נעשה כמה הבחנות.

<u>הבחנה 1</u>

תהי (a_n) סדרה כלשהי כך שהחל ממקום מסוים $a_n \neq 0$. אז החל ממקום מסוים אפשר לרשום אותה כ... $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \ldots$ עבור סדרה אחרת כלשהי (p_n) שמקיימת $p_n \neq 0$ לכל n.

<u>הוכחה 1</u>

זו פשוט הסדרה ... $a_1, \frac{1}{a_2}, a_3, \frac{1}{a_4}, \ldots$ (מתחילה החל מהמקום בו הסדרה אף פעם לא מתאפסת...), לדוגמה אם הסדרה מתחילה כ... $1, 17, \frac{1}{7}, \pi$ אז (p_n) תתחיל כ $1, \frac{1}{17}, \frac{1}{7}, \frac{1}{\pi}$.

<u>הבחנה 2</u>

תהי הפעם סדרה (a_n) כמו שאנחנו רוצים לחקור כלומר $a_n a_{n+1} \to 1$. אז החל ממקום מסוים $a_n \neq 0$ ולכן מהבחנה קודמת אפשר לרשום אותה כ ... $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \ldots$ עבור (p_n) כלשהי ששונה מ0. יתר על כן ה(p_n) מקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ (ולכן גם $\frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ...), בכיוון השני אם סדרה ניתנת להצגה מהצורה ... $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \ldots$ אשר מקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ (שוב אברי p_n שונים מ0) אז גבול מכפלת שני איברים עוקבים הוא 1.

<u>הוכחה 2</u>

בכיוון אחד נניח בשלילה שיש אינסוף nים עבורם $a_n = 0$ אז אפשר לבנות תת סדרה של a_n שהיא הסדרה הקבועה 0. כלומר יש סדרה עולה של מספרים טבעיים n_k עבורה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = 0$. אבל אז $a_{n_k} a_{n_k+1}$ היא הסדרה הקבועה 0 כלומר ל$a_n a_{n+1}$ יש תת סדרה ששואפת ל0 בסתירה לכך שהיא שואפת ל1 (ולכן כל תת סדרה שלה אמורה גם להתכנס ל1). בזאת הראנו שהחל ממקום מסוים הסדרה היא לא אפס ולכן אפשר לרשום אותה כמו בהבחנה 1. העובדה ש$\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ נובעת מכך שניתן לרשום את $a_n a_{n+1}$ כ... $\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_3}{p_2}, \frac{p_3}{p_4}, \frac{p_5}{p_4}, \ldots$ וסדרה זו שואפת ל1 – לכן גם התת סדרה שבמקומות הזוגיים שואפת

לו 1 וזו בדיוק $\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}$, וגם התת סדרה שבמקומות האי זוגיים שואפת ל1 וזו $\frac{p_{2n-1}}{p_{2n}}$ כלומר ההופכית שלה שואפת ל1 והיא $\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}$ ושני התת סדרות $\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}, \frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}$ מכסות את כל $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ (הסדרה במקום הזוגי ואי זוגי בהתאמה) ושואפות ל1 לכן לפי משפט ידוע (ואינטואיטיבית זה הגיוני) יתקיים $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ כדרוש. הכיוון השני טריוויאלי שכן $a_n a_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \backslash \frac{p_n}{p_{n+1}}$ ובכל מקרה שניהם ישאפו ל1.

אחרי כל העבודה השחורה הראנו שלסדרה מהסוג שאנו חוקרים בהכרח יש את הצורה (החל ממקום מסוים) $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ עבור p_n שמקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ושונה מ0. בפרט אם ניקח p_n סדרה קבועה (שונה מ0) אז היא מקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ולמעשה נקבל סדרה מהצורה $\dots a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a} a, \frac{1}{a}$ כמו שדיברנו בהתחלה. עכשיו כתלות בבחירה של הסדרה p_n נקבל מס' שונה של גבולות חלקיים, רק צריך לוודא שאכן הסדרה לא מתאפסת ו$\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$. נסיים בדוגמאות -

<u>גבול חלקי אחד</u>

נבחר לדוגמה $p_n = \pm 1$ (סדרה קבועה)

<u>שני גבולות חלקיים</u>

ניקח $p_n = c$ עבור c ממשי שהוא לא 0 או ± 1

<u>אינסוף גבולות חלקיים</u>

ניקח את p_n להיות הסדרה שמתחילה במספר 1 ואז הולכת קדימה עד 2 ואז 3 עד k ואז חוזרת חזרה ל1 וחוזר חלילה (כלומר שוב הולכת בכיוון k) – כל זה בצעדים קבועים שהולכים ושואפים ל0 (כל פעם שחוזרים ל1 הצעד קטן) לדוגמה במחזור הm נבחר גודל צעד של $\frac{1}{m}$. ננסה לחסום מלעיל ומלרע באיזה מספר מחזור אנחנו אם הלכנו n צעדים, כלומר להעריך את הביטויים:

$$\min\{N \in \mathbb{N}: \sum_{m=1}^{N} 2m(k-1) \geq n\}, \max\{N \in \mathbb{N}: \sum_{m=1}^{N} 2m(k-1) \leq n\}$$

מתקיים $\sum_{m=1}^{N} 2m(k-1) = 2(k-1)\sum_{m=1}^{N} m = 2(k-1)\frac{N(N+1)}{2} = N(N+1)(k-1)$ ולכן נקבל בפרט ש$\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k-1}} - 1\right\rfloor \leq N \leq n$ (נניח ש$k > 1$ שכן אם $k = 1$ אז $p_n = 1$ וזה המקרה הראשון שדברנו עליו) כלומר אחרי n צעדים אנחנו לכל היותר במחזור הn ולכן גודל הצעד הוא לכל הפחות $\frac{1}{n}$ ולכל הפחות במחזור ה $\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k-1}} - 1\right\rfloor$ ולכן גודל הצעד הוא לכל היותר $\frac{1}{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k-1}}-1\right\rfloor}$ כלומר מתקיים

$$\frac{p_n + \frac{1}{n}}{p_n} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_n + \frac{1}{\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k-1}} - 1\right\rfloor}}{p_n}$$

ולכן מסנדוויץ' $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ והסדרה $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ תקיים שמכפלת עוקבים שואפת ל1.

יהי $1 \le i \le k$ שלם כלשהו. יש תת סדרה של p_n ששואפת אליו (כי אנחנו מבקרים בכל שלם בקטע $[1, k]$ אינסוף פעמים ובפרט בi אז אפשר לבנות כזו). נסמנה p_{n_k} , היות ובהכרח יש לה אינסוף אינדקסים זוגיים או אי זוגיים נפריד למקרים. אם יש אינסוף אי זוגיים אז סיימנו כי אפשר לקחת את התת סדרה רק שלהם וזו תהיה תת סדרה של תת סדרה של הסדרה המקורית שלנו (זו שסימנתי): $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ אם יש אינסוף זוגיים אז ניקח רק אותם ואז הסדרה ההופכית תשאף ל$\frac{1}{i}$ ותהיה תת סדרה של המשלים $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$. בזאת הראנו בכל מקרה שi או $\frac{1}{i}$ גבול חלקי של הסדרה שלנו וזה לכל $1 \le i \le k$ לכן יש k כאלו. אפשר להמשיך ולהראות שכל רציונלי (ולכן גם כל ממשי – מצפיפות הרציונליים) בקטע $[1, k]$ הוא גבול חלקי של של p_n ולכן ל$p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ יש אינסוף גבולות חלקיים.

יש דוגמאות יותר נוחות להצגה לדוגמה $p_n = 2 + \sin(\sqrt{n})$ (הקבוע 2 לא מיוחד פשוט צריך שהסדרה לא תתאפס), בחרנו בסדרה זו כי sin מתנדנדת (ואנחנו רוצים p_n עם אינסוף גבולות חלקיים) ובשורש בפנים כי הנגזרת של שורש שואפת ל0 וזה אומר שהמרחק בין קצוות של p_n (1 ו3) הולך וגדל ולכן המנה $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ תשאף ל1 אבל כל זה אינטואיציה.

<u>הוכחה שאלו כל המקרים</u>

אם לp_n גבול חלקי אחד כלומר היא מתכנסת יש לסדרה הכללית אחד או שני גבולות חלקיים כפי שראינו מקודם, אם יש לה אינסוף אז כפי שראינו מקודם אפשר לבנות לסדרה $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ אינסוף גבולות חלקיים. נראה שלp_n לא יכול להיות מספר סופי שגדול מ2 של גבולות חלקיים. נניח בשלילה שיש p_n המקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ ויש לה גבולות חלקיים שונים $l_1 < l_2 < \dots < l_d$ (עבור $2 \le d$). בפרט אפשר לבחור ε כך שהסביבות אפסילון מסביב לגבולות החלקיים עדיין זרות, למשל אפשר להגדיר כך: $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|l_i - l_j| : 1 \le i, j \le d\}$ ואז היות ויש רק מספר סופי של איברים מחוץ לסביבות הללו (כי אלו הגבולות החלקיים היחידים) אפשר לבנות תת"ס $\frac{p_{n_k+1}}{p_{n_k}}$ כך ש$\frac{p_{n_k+1}}{p_{n_k}} \ge 1 + d$ בסתירה לכך שאמור להתקיים $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ (נבחר כל פעם אינדקס גדול מספיק כך שאנחנו בסביבת אפסילון של הגבול החלקי הקטן ביותר l_1 והאיבר הבא לא – בהכרח יש אחרת החל ממקום מסוים כל האיברים בסביבה זו בסתירה לשאר הגבולות החלקיים. אך זה בהכרח אומר שהוא באחת מסביבות האפסילון האחרות כי המ"מ הסדרה נמצאת רק באחת מסביבות אלה) ונשים לב שהמנה הזו חסומה מלרע ע"י קבוע גדול מ1 (אפשר לבטא אותו באמצעות הl_iים והאפסילון שבחרנו). אם במקרה $l_1 = -\infty$ או $l_d = \infty$ ההוכחה עדיין עובדת פשוט נעבוד עם סביבות מהצורה $(-\infty, M], [K, \infty)$ ורעיון ההוכחה נשאר זהה.

לכן לסיכום לa_n שכזו יש בהכרח $1/2/\infty$ גבולות חלקיים וכל דוגמה שבה יש אינסוף מהווה סתירה.