מבחר שאלות מתל אביב באינפי 1 ו 2

עמית בכר

2023

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\int_x^{2x} f(t)\,dt=0$. הוכח כי $f\equiv 0$.

<u>פיתרון</u>
נגדיר $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ (שמוגדרת היטב מכיוון שרציפות גוררת אינטרביליות). כעת הנתון הופך להיות $F(2x)-F(x)=0$ (מאדיטיביות האינטגרל) והיות והאינטגרנד רציף על הישר נקבל מהמשפט היסודי ש$F(x)$ גזירה על הישר ומתקיים $F'(x)=f(x)$. לכן אם נגזור את שני האגפים של השוויון לעיל נקבל $2f(2x)-f(x)=0$ כלומר $f(2x)=\frac{f(x)}{2}$ ובפרט באינדוקציה לכל $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$ יתקיים $f(\frac{x}{2^n})=2^nf(x)$. כעת נציב $x=0,n=1$ ונקבל $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$ ולכל $x\neq 0$ נקבל מרציפות $2^nf(x)=f(\frac{x}{2^n})\xrightarrow[n\to\infty]{}f(0)=0$ כלומר $2^nf(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ובפרט (רציפות ערך מוחלט) $|2^nf(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
כעת נבחין שמתקיים $0\leq|f(x)|\leq 2^n|f(x)|\to 0$ כלומר מסנדוויץ $|f(x)|=0$ ולכן $f\equiv 0$ כדרוש.