ננסה להבין איך סדרה a_n שמקיימת $a_n a_{n+1} \to 1$ מתנהגת (החל ממקום מסוים כמובן, כי הנתון על הסדרה הוא גבולי ולכן למספר סופי של איברים היא יכולה להתנהג איך שהיא רוצה וזה לא משנה). ברור אינטואיטיבית שלחים גדולים ("החל ממקום מסוים") מתקיים $a_{n+1} \approx \frac{1}{a_n}$. לכן בדרך כלל אנחנו חושבים רק על סדרות טריוויאליות בהם יש **שוויון** ($a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$), כלומר סדרה כלשהי מהצורה $a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}\ldots$ עבור $0 \neq a \in \mathbb{R}$. אבל במקרה טריוויאלי זה באמת יש רק 2 או פחות גבולות חלקיים והם a ו$\frac{1}{a}$ (אם $a = \pm 1$ אז יש אחד כמובן כי $a = \frac{1}{a}$ והסדרה המדוברת היא קבועה). אך היות ולא בהכרח מתקיים שוויון אז לa_n יש הצגה כללית יותר. כדי להגיע אליה נעשה כמה הבחנות.

<u>הבחנה 1</u>

תהי (a_n) סדרה כלשהי כך שהחל ממקום מסוים $a_n \neq 0$. אז החל ממקום מסוים אפשר לרשום אותה כ$\ldots, p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \ldots$ עבור סדרה אחרת כלשהי (p_n) שמקיימת $p_n \neq 0$ לכל n.

<u>הוכחה 1</u>

זו פשוט הסדרה $\ldots, a_1, \frac{1}{a_2}, a_3, \frac{1}{a_4}, \ldots$ (מתחילה החל מהמקום בו הסדרה אף פעם לא מתאפסת...), לדוגמה אם הסדרה מתחילה כ$\ldots 1, 17, \frac{1}{7}, \pi$ אז (p_n) תתחיל כ $1, \frac{1}{17}, \frac{1}{7}, \frac{1}{\pi}$.

<u>הבחנה 2</u>

תהי הפעם סדרה (a_n) כמו שאנחנו רוצים לחקור כלומר $a_n a_{n+1} \to 1$. אז החל ממקום מסוים $a_n \neq 0$ ולכן מהבחנה קודמת $\ldots, p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \ldots$ עבור (p_n) כלשהי. יתר על כן ה(p_n) מקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ (ולכן גם $\frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ...)

<u>הוכחה 2</u>

אם נניח בשלילה שיש אינסוף nים עבורם $a_n = 0$ אז אפשר לבנות תת סדרה של a_n שהיא הסדרה הקבועה 0. כלומר יש סדרה עולה של מספרים טבעיים n_k עבורה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = 0$. אבל אז $a_{n_k} a_{n_k+1}$ היא הסדרה הקבועה 0 כלומר ל$a_n a_{n+1}$ יש תת סדרה ששואפת ל0 בסתירה לכך שהיא שואפת ל1 (ולכן כל תת סדרה שלה אמורה גם להתכנס ל1). בזאת הראנו שהחל ממקום מסוים הסדרה היא לא אפס ולכן אפשר לרשום אותה כמו בהבחנה 1. העובדה ש$\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ נובעת מכך שניתן לרשום את $a_n a_{n+1}$ כ$\ldots \frac{p_1}{p_2}, \frac{p_3}{p_2}, \frac{p_3}{p_4}, \frac{p_5}{p_4}, \ldots$ וסדרה זו שואפת ל1 – לכן גם התת סדרה שבמקומות הזוגיים שואפת ל1 וזו בדיוק $\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}$, וגם התת סדרה שבמקומות האי זוגיים שואפת ל1 וזו $\frac{p_{2n-1}}{p_{2n}}$ כלומר ההופכית שלה שואפת ל1 והיא $\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}$ ושני התת סדרות $\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}, \frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}$ מכסות את כל $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ (הסדרה במקום הזוגי ואי זוגי בהתאמה) ושואפות ל1 לכן לפי משפט ידוע (ואינטואיטיבית זה הגיוני) יתקיים $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ כדרוש.

אחרי כל העבודה השחורה הראנו שלסדרה מהסוג שאנו חוקרים יש את הצורה $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ עבור p_n שמקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ושונה מ0 (ושוב, כל זה החל ממקום מסוים. מכאן והלאה אפסיק לציין זאת כי זה מיותר). בפרט אם ניקח p_n סדרה קבועה (שונה מ0) אז היא מקיימת $\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$ ולמעשה נקבל סדרה מהצורה $a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a} \dots$ כמו שדיברנו בהתחלה. למעשה כתלות בבחירה של הסדרה p_n נקבל כמה גבולות חלקיים שנרצה (אפילו אינסוף), רק צריך לוודא שאכן הסדרה לא מתאפסת ו$\frac{p_{n+1}}{p_n}, \frac{p_n}{p_{n+1}} \to 1$. נסיים בדוגמאות -

<u>גבול חלקי אחד</u>

נבחר לדוגמה $p_n = \pm 1$ (סדרה קבועה)

<u>שני גבולות חלקיים</u>

ניקח $p_n = c$ עבור c ממשי שהוא לא 0 או ± 1

<u>k גבולות חלקיים עבור k סופי כלשהו</u>

ניקח את p_n להיות הסדרה שמתחילה במספר 1 ואז הולכת קדימה עד 2 ואז 3 עד k ואז חוזרת חזרה ל1 וחוזר חלילה (כלומר שוב הולכת בכיוון k) – כל זה בצעדים קבועים שהולכים ושואפים ל0 (כל מחזור שעובר הגודל צעד הולך וקטן) לדוגמה במחזור הk נבחר גודל צעד של $\frac{1}{k}$. נבחין שיתקיים (הסימן משתנה בהתאם לכיוון ההליכה) $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p_n \pm \frac{1}{k}}{p_n} = 1 \pm \frac{1}{kp_n}$ אבל $1 \le p_n$ ולכן $1 - \frac{1}{k} \le 1 \pm \frac{1}{kp_n} \le 1 + \frac{1}{k}$ ומסנדוויץ' אכן יתקיים $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ כפי שדרוש. יהי $1 \le i \le k$ שלם כלשהו. יש תת סדרה של p_n ששואפת אליו (כי אנחנו מבקרים בכל שלם בקטע $[1, k]$ אינסוף פעמים ובפרט בi אז אפשר לבנות כזו). נסמנה p_{n_k} , היות ובהכרח יש לה אינסוף אינדקסים זוגיים או אי זוגיים נפריד למקרים. אם יש אינסוף אי זוגיים אז סיימנו כי אפשר לקחת את התת סדרה רק שלהם וזו תהיה תת סדרה של תת סדרה של הסדרה המקורית שלנו (זו שסימנתי): $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$ אם יש אינסוף זוגיים אז ניקח רק אותם ואז הסדרה ההופכית תשאף ל$\frac{1}{i}$ ותהיה תת סדרה של המשלים $p_1, \frac{1}{p_2}, p_3, \frac{1}{p_4}, \dots p_n, \frac{1}{p_{n+1}}$. בזאת הראנו בכל מקרה שi או $\frac{1}{i}$ גבול חלקי של הסדרה שלנו וזה לכל $1 \le i \le k$ לכן יש k כאלו.

<u>אינסוף גבולות חלקיים</u>

החרא הזה הופך לארוך. אפשר לבחור לדוגמה $p_n = \sin(\sqrt{n})$ וניתן להוכיח ש$\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 1$ ושיש לp_n אינסוף גבולות חלקיים ואז לעשות אותו טריק עם ההפרדה לאינדקסים זוגיים ואי זוגיים.