מערכות לומדות תרגיל 2

עמית בסקין 312259013

1. צ.להוכיח ש־ $\ker\left(X^{t}\right)=\ker\left(XX^{t}\right)$. הוכחה:

כיוון ראשון: $\ker\left(X^{t}\right)\subseteq\ker\left(XX^{t}\right)$: יהא $v\in\mathbb{R}^{p}$ כך ש־ $X^{t}v=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n}}$, אז בפרט מתקיים ש־ $XX^{t}v=X\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n}}=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{p}}$.

כיוון שני: $\ker\left(X^{t}\right)\supseteq\ker\left(XX^{t}\right)$: יהא $v\in\mathbb{R}^{p}$ כך ש־ $XX^{t}v=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{p}}$. אז:

$$v^{t}XX^{t}v=0$$

$$\left(X^{t}v\right)^{t}\left(X^{t}v\right)=0$$

$$\left\langle X^{t}v,X^{t}v\right\rangle =0$$

קרי:

$$X^{t}v=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n}}$$

$$v\in\ker\left(X^{t}\right)$$

מש"ל.

2. צ.להוכיח עבור מטריצה ריבועית A ש־ $\mathrm{Im}\left(A^{t}\right)=\left(\ker\left(A\right)\right)^{\perp}$. הוכחה:

כיוון ראשון: $\mathrm{Im}\left(A^{t}\right)\subseteq\left(\ker\left(A\right)\right)^{\perp}$: יהא $v\in\mathrm{Im}\left(A^{t}\right)$. אז קיים u כך ש־ $A^{t}u=v$. יהא $x\in\ker\left(A\right)$ קרי $Ax=0$, ונראה ש־ $\langle v,x\rangle=0$. אכן:

$$A^{t}u=v$$

$$u^t A = v^t$$

$$u^t A x = v^t x$$

$$0 = v^t x$$

$$(v, x) = 0$$

כיוון שני: $\mathrm{Im}\left(A^t\right) \supseteq \left(\ker\left(A\right)\right)^{\perp}$: יהא $v \notin \left(\ker\left(A\right)\right)^{\perp}$ ונראה ש־ $v \notin \mathrm{Im}\left(A^t\right)$. אז קיים $x \in \ker\left(A\right)$ כך ש־ $\langle v, x\rangle \neq 0$. נניח בשלילה שיש u כך ש־ $A^t u = v$, קרי:

$$u^t A = v^t$$

$$u^t A x = v^t x$$

$$0 = v^t x$$

$$\langle v, x\rangle = 0$$

סתירה.

מש"ל.

3. יהא $y = X^t w$ מערכת לינארית אי־הומוגנית. נניח ש־ X^t ריבועית ולא הפיכה. צ.להראות שלמערכת יש אינסוף פתרונות אםם y מאונך ל־ $\ker\left(X\right)$. הוכחה:

כיוון ראשון: נניח שלמערכת יש אינסוף פתרונות. נניח בשלילה שיש $x \in \ker\left(X\right)$ כך ש־ $\langle y, x\rangle \neq 0$. אז:

$$y^t = w^t X$$

$$y^t x = w^t X x$$

$$y^t x = 0$$

$$\langle y, x \rangle = 0$$

סתירה.

כיוון שני: נניח ש־ y מאונך ל־ $\ker(X)$. אז מהסעיף הקודם מתקיים ש־ $y \in \mathrm{Im}(X^t)$, קרי יש w כך ש־ $X^t w = y$. נניח בשלילה שזה הפיתרון היחיד ונקבל ש־ X מדרגה מלאה ולכן הפיכה בסתירה לנתון.

מש"ל

4. נתבונן במערכת הנורמלית הלינארת $XX^t w = Xy$. צ.להוכיח שלמערכת הנורמלית יש פיתרון יחיד אם XX^t הפיכה ואינסוף פתרונות אחרת. הוכחה:

מצד אחד אם XX^t הפיכה אז w חייב לקיים:

$$w = \left(XX^t\right)^{-1} Xy$$

קרי יש פיתרון יחיד.

מצד שני נניח ש־ XX^t לא הפיכה. לפי סעיף 3 מספיק להראות ש־ Xy מאונך ל־ $\ker(XX^t)$ ונקבל שיש אינסוף פתרונות.

כמו כן הראנו בסעיף 1 שלהיות מאונך ל־ $\ker(XX^t)$ זה שקול להיות מאונך ל־ $\ker(X^t)$, ולפי סעיף 2 זה שקול להיות ב־ $\mathrm{Im}(X)$, ואכן, $Xy \in \mathrm{Im}(X)$, כנדרש.

מש"ל

.5

א. צ.להוכיח ש־ P סימטרית. הוכחה: לכל i נסמן:

$$v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$$

ונקבל:

$$P = \sum_{i=1}^{k} v_i \otimes v_i^t =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} v_{i1}^2 & v_{i1}v_{i2} & \cdots & v_{i1}v_{ik} \\ v_{i2}v_{i1} & v_{i2}^2 & \cdots & v_{i2}v_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ik}v_{i1} & v_{ik}v_{i2} & \cdots & v_{ik}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k v_{i1}^2 & \sum_{i=1}^k v_{i1}v_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{i1}v_{ik} \\ \sum_{i=1}^k v_{i2}v_{i1} & \sum_{i=1}^k v_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{i2}v_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k v_{ik}v_{i1} & \sum_{i=1}^k v_{ik}v_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

ואכן עבור אינדקס j כלשהו, השורה ה־ j היא:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k v_{ij}v_{i1} \cdots & \sum_{i=1}^k v_{ij}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{ij}v_{ik} \end{pmatrix}$$

והעמודה ה־ j:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k v_{i1}v_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k v_{ij}^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k v_{ik}v_{ij} \end{pmatrix}$$

אז אם נסמן את וקטור העמודה ה־ j ב־ c_j ואת וקטור השורה ה־ j ב־ r_j, נקבל שמתקיים:

$$c_j = r_j^t$$

כלומר, P סימטרית.

מש"ל

ב. צ.להוכיח שהוקטורים העצמיים של P הם 0 או 1 וש־ $v_1, \ldots, v_k$ הם הוקטורים העצמיים המתאימים לערכך העצמי 1. הוכחה: נתבונן במטריצה הסימטרית האורתונורמלית:

$$Q = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix}$$

ונשים לב כי:

$$QIQ^t =$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k v_{i1}^2 & \sum_{i=1}^k v_{i1}v_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{i1}v_{ik} \\ \sum_{i=1}^k v_{i2}v_{i1} & \sum_{i=1}^k v_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{i2}v_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k v_{ik}v_{i1} & \sum_{i=1}^k v_{ik}v_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k v_{ik}^2 \end{bmatrix} = P$$

כלומר, מדובר בפירוק ספקטרלי של P ולכן האיברים באלכסון של I הם הערכים העצמיים, קרי הערך העצמי 1 וכן הוקטורים העצמיים הם העמודות של Q, קרי וקטורי הבסיס האורתונורמלי של המרחב V, כנדרש.

מש"ל

ג. ישירות מהסעיף הקודם מתקבל, לכל $v \in V$ מתקיים ש־ $Pv = v$, כי v הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי 1.

מש"ל

ד.

$$P^2 = QQ^tQQ^t$$

אבל:

$$Q^tQ =$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^tv_1 & v_1^tv_2 & \cdots & v_1^tv_k \\ v_2^tv_1 & v_2^tv_2 & \cdots & v_2^tv_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k^tv_1 & v_k^tv_2 & \cdots & v_k^tv_k \end{bmatrix}$$

ומכך שמדובר בוקטורים של בסיס אורתונורמלי:

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I$$

ולכן:

$$P^2=QQ^tQQ^t=P^2=QIQ^t=QQ^t=P$$

מש"ל.

ד. ישירות מהסעיף הקודם:

$$P^2-P=0$$

$$P\left(I-P\right)=0$$

מש"ל.

.6

א. יהא $X=U\Sigma V^t$ פירוק SVD של X. אז:

$$XX^t=U\Sigma V^tV\Sigma^tU^t$$

ומכך שההפכית של מטריצה אורתוגונלית היא השחלוף שלה:

$$=U\Sigma I\Sigma^tU^t=U\Sigma\Sigma^tU^t$$

ולפי הסימון בתרגיל:

$$=UDU^t$$

ומאחר שאנחנו מניחים ש־ XX^t הפיכה, אזי שגם כל אחת מ־ UDU^t הפיכה כי הדטרמיננטה של XX^t היא מכפלת הדטרמיננטות של המכפלה הנ"ל. מכאן שקיימת D^{-1}, ובפרט:

$$\left(UDU^t\right)^{-1}=\left(U^t\right)^{-1}D^{-1}U^{-1}$$

ושוב מאחר שההפכית של אורתונורמלית היא השחלוף:

$$=UD^{-1}U^t$$

מש"ל.

ב. מצד אחד:

$$\left(XX^t\right)^{-1}X=UD^{-1}U^tU\Sigma V^t=$$

$$=UD^{-1}\Sigma V^t=U\left(\Sigma\Sigma^t\right)^{-1}\Sigma V^t$$

אבל $\Sigma\Sigma^t$ אלכסונית וסימטרית ולכן:

$$\left(\Sigma\Sigma^t\right)^{-1}=\left(\Sigma\Sigma^t\right)^{\dagger}=\Sigma^{t\dagger}\Sigma^{\dagger}$$

קרי:

$$U\left(\Sigma\Sigma^t\right)^{-1}\Sigma V^t=U\Sigma^{t\dagger}\Sigma^{\dagger}\Sigma V^t=$$

$$=U\Sigma^{t\dagger}IV^t=U\Sigma^{t\dagger}V^t$$

ומצד שני:

$$X^{t\dagger}=\left(V\Sigma^tU^t\right)^{\dagger}=U\Sigma^{t\dagger}V^t$$

מש"ל.

7. בשאלה 1 ראינו ש־ $\ker\left(X^t\right)=\ker\left(XX^t\right)$. עתה XX^t הפיכה אםם $\ker\left(XX^t\right)=\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}\}$ אםם $\ker\left(X^t\right)=\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}\}$. אבל $X:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^d$, אז לפי משפט המימדים השני, הנ"ל מתקיים אםם מימד מרחב העמודות שהוא מימד התמונה של X, שווה ל־ d, אבל מרחב העמודות הוא בדיוק $\operatorname{span}\{x_1,\dots x_m\}$, קרי הנ"ל קורה אםם $\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_m\}=\mathbb{R}^d$, כנדרש.

מש"ל

8. נסמן $\widehat{w}=X^{t\dagger}y$. צ.להראות שלכל פיתרון $\overline{w}$ של $XX^tw=Xy$, מתקיים ש־ $\|\widehat{w}\|_2\leq\|\overline{w}\|_2$.

הוכחה: יהא $X=U\Sigma V^t$ פירוק SVD של X. ניזכר כי:

$$XX^t=U\Sigma V^tV\Sigma^tU^t=U\Sigma\Sigma^tU^t$$

ונתבונן במשוואה שלנו:

$$XX^tw=Xy$$

כלומר:

$$U\Sigma\Sigma^t U^t w = U\Sigma V^t y$$

נסמן ב־ Σ_1 את הבלוק של Σ שאינו אפסים ונקבל:

$$U\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}U^t w = U\begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}V^t y$$

נכפיל ב־ U^t משמאל:

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}U^t w = \begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}V^t y$$

נחלק לבלוקים את $U^t w$ ו־ $V^t y$ בהתאם לחלוקה הקודמת:

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^t w\\ U_2^t w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^t y\\ V_1^t y\end{bmatrix}$$

נכפיל משמאל ב־ $\begin{bmatrix}\left(\Sigma_1^\dagger\right)^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}\left(\Sigma_1^\dagger\right)^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^t w\\ U_2^t w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(\Sigma_1^\dagger\right)^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^t y\\ V_1^t y_2\end{bmatrix}$$

ונקבל:

$$\begin{bmatrix}U_1^t w\\ O\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^t w\\ U_2^t w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma_1^\dagger & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^t y\\ V_2^t y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma_1^{-1}V_1^t y\\ \mathbf{0}_{d-r}\end{bmatrix}$$

ובה"כ קיבלנו:

$$U_1^t w = \Sigma_1^\dagger V_1^t y$$

קרי:

$$w_1 = U_1\Sigma_1^\dagger V_1^t y$$

ו־ $U_2^t w$ חופשי. אז נסמן:

$$U_2^t w = z$$

קרי:

$$w_2 = U_2 z$$

ובסה"כ:

$$w = \begin{bmatrix} U_1 \Sigma_1^{\dagger} V_1^t y \\ U_2 z \end{bmatrix}$$

וזאת עבור פיתרון כללי כאשר דרגת החופש היא ב־ z.

אז:

$$\|w\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} U_1 \Sigma_1^{\dagger} V_1^t y \\ U_2 z \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$= \left\| U_1 \Sigma_1^{\dagger} V_1^t y \right\|_2^2 + \|U_2 z\|_2^2$$

ונורמה מינימלית מתקבלת עבור $z = 0$, קרי:

$$\left\| U_1 \Sigma_1^{\dagger} V_1^t y \right\|_2^2 = \left\| U \Sigma^{\dagger} V^t y \right\|_2^2$$

אבל:

$$\widehat{w} = X^{t\dagger} y = U \Sigma^{t\dagger} V^t y$$

כלומר קיבלנו את הנורמה של $\widehat{w}$, כנדרש.

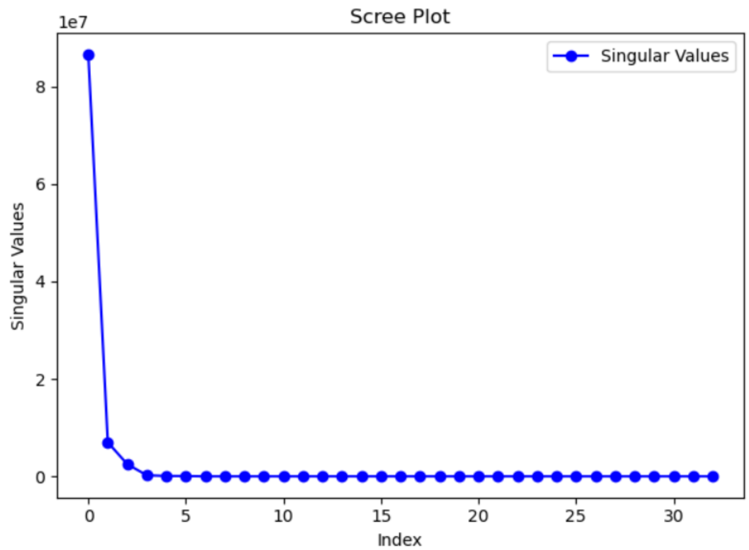
מש"ל

.13

- באשר לעמודה של התאריך: החלטתי לפצל לפי שנה וחודש, על מנת לקבל אינדיקציה על השפעה של החודש והשנה שבהם בית נמכר, וזאת בניגוד לתאריכים ספיציפיים מדי, לפי ימים, ללא משמעות כמותית שאותה ניתן לכלול ברגרסיה הלינארית.
- כמו כן, החלטתי להתבונן במחיר הממוצע פר מיקוד במקום על המיקוד עצמו, על מנת לתת איפיון נוסף לטיב המיקום של הבית, שכן, המיקוד לבדו לא חושף מידע רלוונטי עבור הרגרסיה הלינארית שהרי אין לו משמעות כמותית בפני עצמו.
- את העמודה של תעודת הזהות מצאתי כלא רלוונטית ללמידה שנפעיל על המידע ולכן הסרתי את העמודה.

- באשר לעמודות שמכילות טווח ערכים מצומצם שאיננו מנורמל, טווח שנקודות הקצה שלו קשורים במשמעות של המידע, כמו קו רוחב, קו גובה, שנת בנייה, שנת שיפוץ, את כל אלה החלטתי לנרמל, שהרי המידע החשוב הוא מיקום הערך ביחס לקצוות של הטווח, וכך ניתן לראות את המידע בצורה ברורה יותר ביחס למה שמעניין אותנו לגביו, וכן המספרים יותר נוחים לעיבוד.

.15



- המטריצה X היא בקירוב מסדר $20,000 \times 30$, קרי יש לנו כ־ $20,000$ דגימות עם כ־ 30 תכונות לכל דגימה. אז X לא ולכן לא הפיכה, ובפרט מימד הגרעין של X הינו גדול מאפס.

- נתבונן ב־ X כהעתקה מ־ $\mathbb{R}^{20,000}$ ל־ $\mathbb{R}^{30}$. לפי משפט המימדים השני, מתקיים כי:

$$\dim\left(\operatorname{Im}\left(X\right)\right)+\dim\left(\ker\left(X\right)\right)=\dim\left(\mathbb{R}^{20,000}\right)$$

ובכן, הדרגה של המטריצה היא לכל היותר המינימום שבין מימד מרחב העמודות למימד מרחב השורות, קרי 30.

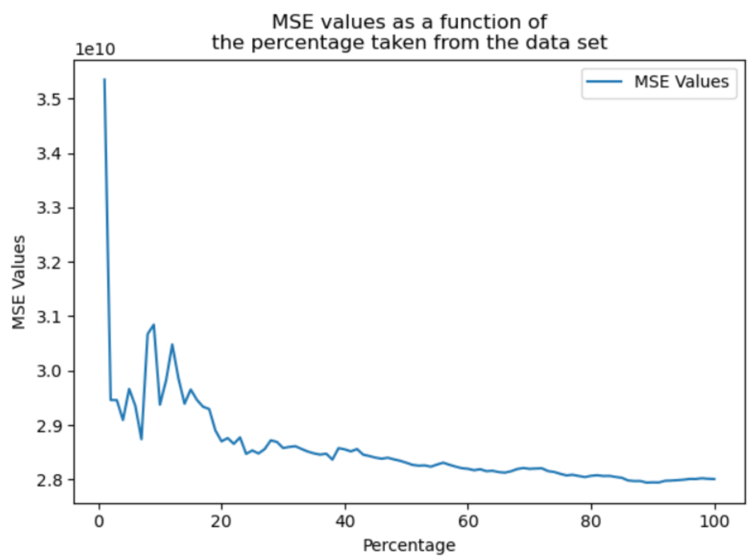
- אבל מימד התמונה הוא מימד מרחב העמודות. לכן: $\dim\left(\operatorname{Im}\left(X\right)\right)\leq 30$, ומכאן ש־ $\dim\left(\ker\left(X\right)\right)\geq 19,970$.

- נתבונן בפירוק SVD של X, קרי $X=U\Sigma V^t$. הערכים על האלכסון של Σ הם הערכים הסינגולריים של X שמקיימים $Xv=\sigma u$ עבור u,v וקטורי העמודות של U,V בהתאמה. אז לכל v עם ערך סינגולרי $\sigma=0$, מתקיים ש־ $v\in\ker\left(X\right)$. ונשים לב שכל שורה של X היא שורה של פיצ'ר. אז אם $\sigma=0$, זאת אומרת שלכל שורה x_i ב־ X מתקיים ש־ $x_iv=0$, קרי יש תלות לינארית בין הדגימות ביחס לפיצ'ר ה־ i, וזאת לכל i. אז

ככל שיש לנו יותר ערכים סינגולריים אפסיים כך התלות בין עמודות המטריצה גדולה יותר (מה שצפוי שיקרה מאחר שיש לנו סדר גודל של 30 משתנים לעומת כ- $20,00$ משוואות).

- אם כן, הנ"ל מסתדר עם הגרף המוצג: העובדה שרוב הערכים הסינגולריים הם אפס או מאוד קרובים לאפס, עולה בקנה אחד עם העובדה שמימד הגרעין של X גדול.
- בשאלה 1 ראינו ש- $\ker(X) = \ker(XX^t)$. מכאן שגם XX^t לא הפיכה, שהרי לכל מטריצה מתקיים שהיא הפיכה אסם מימד הגרעין שלה הוא אפס.
- כמו כן, בשאלה 4 ראינו שלמשוואה הנורמלית יש פיתרון יחיד אסם XX^t הפיכה, ואינסוף פתרונות אחרת.
- ואכן, יש לנו הרבה מאוד דגימות ביחס למספר המשתנים, ולאור הניתוח הנ"ל, ניתן להיווכח בתרומה של מספר גדול של דגימות, למציאת פתרון לבעיית הרגרסיה הלינארית שהמטריצה X היא מטריצת העיצוב שלה.
- אז לסיכום, ניתן לומר שגרף הערכים הסינגולריים מאשרר את הסינגולריות של X, ואכן, כאמור בניתוח הנ"ל, X רחוקה מאוד מלהיות הפיכה.

.16



הסבר:

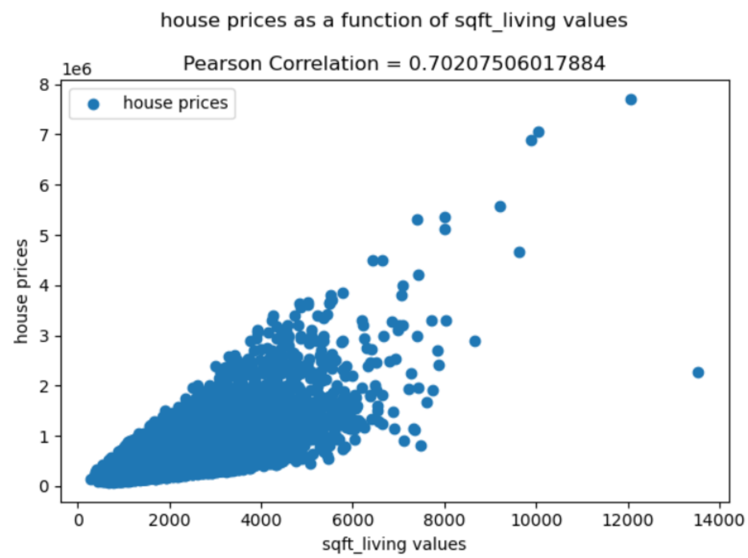
w הוא וקטור המקדמים שמתאר את הקשר הלינארי בין התכונות של כל דגימה ובין המחיר של אותו בית שעליו נעשתה הדגימה.

$\hat{y}$ הוא וקטור המחירים שאנו מנחשים באמצעות w ו- y הוא וקטורים המחירים האמיתי.

ככל שלוקחים יותר דגימות, כך w נעשה מדוייק יותר, ולכן, כלומר $\hat{y}$ קרוב יותר ל- y, ולכן ממוצע סכום ההפרשים ביניהם דועך ככל שמספר הדגימות גדל.

.17

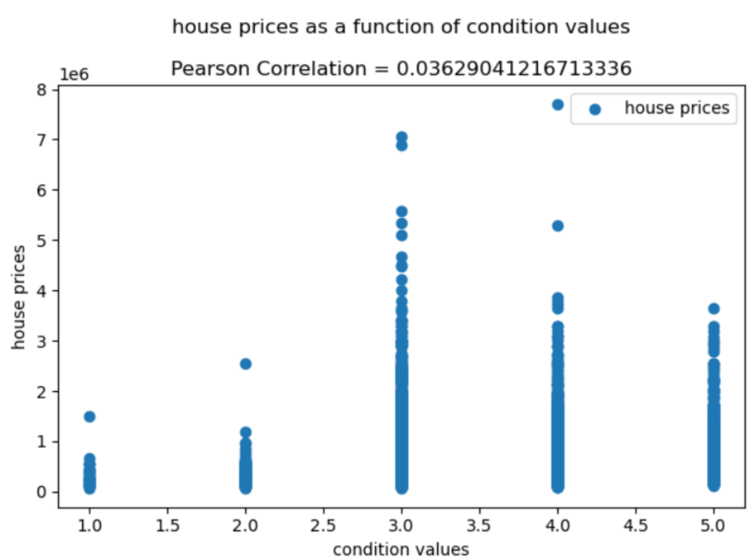
- תכונה שתורמת למודל: **שטח הבית**



אכן, ניתן לראות בגרף שיש קשר בין השטח של הבית ובין המחיר שבו הוא נמכר: ככל שהשטח גדול יותר כך מחיר הבית נוטה להיות גבוה יותר, ואכן הקורולציה המחושבת היא הגבוהה ביותר מבין הקורולציות המחושבות.

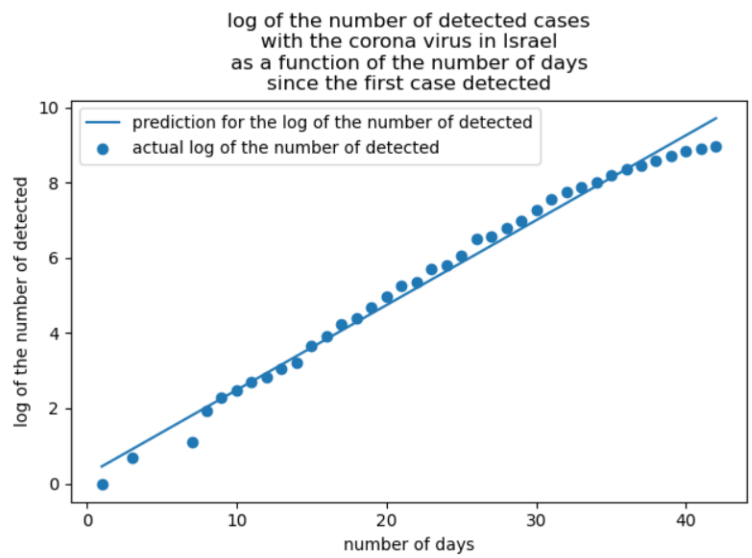
מכאן שזוהי תכונה שעוזרת למודל להתאים בין התכונות של הבית ובין המחיר שלו, ולכן היא תורמת.

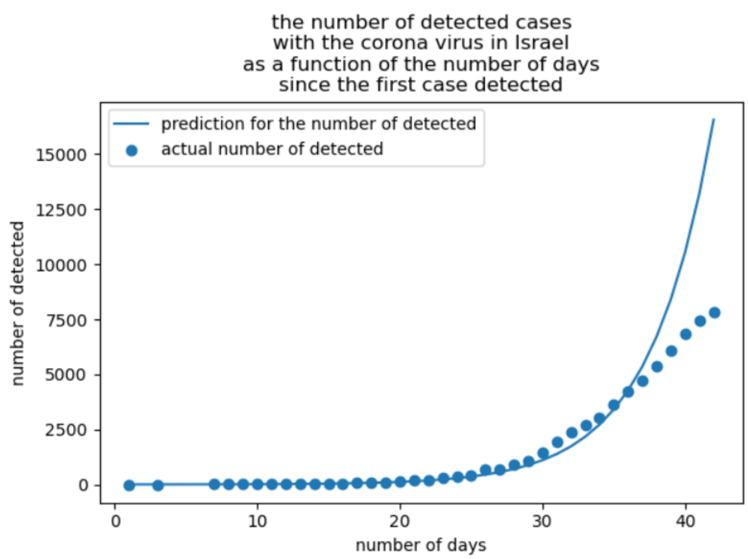
- תכונה שאינה תורמת למודל: **מצב הבית**



ניתן לראות שדווקא כאשר מצב הבית הינו באמצע בין הגרוע ביותר לטוב ביותר, יש כמות גבוהה יותר של מחירים גבוהים. כמו כן, בכל אחד מהדירוגים יש בתים במחירים נמוכים. אמנם המחירים מטפסים קצת יותר כאשר מצב הבית טוב יותר, אבל עצם זה שהרוב מרוכז באמצע, מותיר עמימות בפני המודל, שכן זה לא נותן אינדיקציה לינארית לגבי הקשר בין מצב הבית למחיר. אכן, מדד הקורולציה הוא גם הנמוך ביותר. מכאן שתכונה זו לא תורמת למודל.

.21





אופן החישוב של הגרף האקספוננציאלי:

נסמן את המשתנה של prediction_detected ב־ $\hat{y}$ ואת המשתנה של day_num ב־ x. נניח שוקטור

המקדמים שמצאנו הוא (β_0, β_1) כאשר β_1 הוא המקדם של x ו־ β_0 הוא הגורם החופשי. אז:

$$\log \hat{y} = \beta_1 x + \beta_0$$

$$e^{\log \hat{y}} = e^{\beta_1 x + \beta_0}$$

$$\hat{y} = e^{\beta_1 x} e^{\beta_0}$$

22. בהתבסס על הנימוק שסיפקתי בשאלה הקודמת, במקרה האקספוננציאלי, עבור $\mathrm{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ו־ $\mathrm{w} = (w_0, w_1, \ldots w_n)$, כאשר $x_0 = 1$, פונקציית ההפסד צריכה להיות:

$$\left(y - \prod_{i=1}^{n} e^{w_i x_i}\right)^2 = \left(y - e^{\mathrm{x}^t \mathrm{w}}\right)^2$$

ואז כדי למצוא את w, הפיתרון ל־ ERM, נפעל בדומה להרצאה: נרצה למזער את:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(y_i - e^{\mathrm{x}_i^t \mathrm{w}}\right)^2$$

אז נגזור לפי w ונשווה לאפס. נפתור את המשוואה שמתקבלת ונקבל את w.