הישר המבוקש עובר דרך הנקודה $(3, 1, -2)$. נסמן את נק' החיתוך בין הישרים ב-

$$\vec{r}(t_0) = (-1 + t_0, -2 + t_0, -1 + t_0)$$

כי הוא נמצא על 2 הישרים.

אז הוקטור:

$$(3, 1, -2) - (-1 + t_0, -2 + t_0, -1 + t_0) =$$
$$= (4 - t_0, 3 - t_0, -1 - t_0)$$

הוא וקטור הכיוון הישר שאנחנו מחפשים.

וקטור הכיוון הזה צריך להיות מאונך לוקטור $(1, 1, 1)$

לכן: $(4 - t_0, 3 - t_0, -1 - t_0) \cdot (1, 1, 1) = 0$

$$4 - t_0 + 3 - t_0 - 1 - t_0 = 0$$
$$6 = 3t_0 \Rightarrow t_0 = 2$$

כעת, וקטור הכיוון של הישר המבוקש הוא:

$$(4 - 2, 3 - 2, -1 - 2) = (2, 1, -3)$$

אז כאשר הנקודה $(3, 1, -2)$ שדרכה הישר עובר וכאשר וקטור הכיוון של הישר $(2, 1, -3)$, ההצגה הפרמטרית שלו תהיה:

$$\vec{l}(t) = (3 + 2t, 1 + t, -2 - 3t)$$

תרגיל 2

הישר $r(t) = (1+2t, -1+3t, 4+t)$

מוכל במישור המבוקש. לכן גם הנקודה:

$$A = r(0) = (1, -1, 4)$$

שעל הישר מוכלת במישור.

נסמן את הנק' $B = (1, -5, 1)$. זוהי נקודה על

המישור. אז הוקטור:

$$\vec{AB} = (1-1, -5-(-1), 1-4) = (0, -4, -3)$$

הוא וקטור כיוון של ישר המוכל במישור.

הנורמל למישור יהיה בכיוון: $\vec{N} = \vec{AB} \times \overrightarrow{(2,3,1)}$

$$\vec{N} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4+9) - \hat{j}(0+6) + \hat{k}(0+8) = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}.$$

אז משוואת הישר שעובר בנק' $(1, -5, 1)$

והנורמל לישר הוא $\vec{N} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$

הוא: $5(x-1) - 6(y+5) + 8(z-1) = 0$

נפתח סוגריים ונקבל: $5x - 6y + 8z = 43$

נסמן:

$\ell_1 : 3x-4y+5z=9$

$\ell_2 : 3x-4y+5z=4$

נמצא נק' על המישור ℓ_1: אם ניקח $y=z=0$

אז נקבל: $3x-4\cdot 0+5\cdot 0=9$

כלומר הנק' $A=(3,0,0)$ נמצאת על המישור ℓ_1.

נשים לב כי המישורים ℓ_1 ו- ℓ_2 מקבילים.

לכן אם נסמן ב- B את הנק' על המישור ℓ_2 הקרובה ביותר ל- A, נקבל כי הוקטור $\vec{AB}$ מקביל

לנורמל של ℓ_1 ו- ℓ_2: $\vec{N}=(3,-4,5)$

כלומר $\vec{AB}=t\vec{N}=(3t,-4t,5t)$

$\vec{AB}=B-A \Rightarrow B=(3+3t,-4t,5t)$

נק' B על המישור ℓ_2 ולכן:

$$3(3+3t)-4(-4t)+5(5t)=4$$

$$\Rightarrow t=-0.1$$

$$\vec{AB}=(-0.3,\ 0.4,\ -0.5)$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(-0.3)^2+0.4^2+(-0.5)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

כלומר, המרחק בין המישורים הוא $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

א. נסמן: $C(x,y,0)$ כי במישור xy.

$$\overrightarrow{AC} = (x-0,\ y-0,\ 0-0) = (x,y,0)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (x-2,\ y-0,\ 0-0) = (x-2,y,0)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

נקבל:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2-4x+4+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

$$x^2+y^2=4 \underset{(x=1)}{\Rightarrow} y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

אז נקבל: $C = (1, \sqrt{3}, 0)$

ב. נסמן $D=(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AD} = (x,y,z) \Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\overrightarrow{BD} = (x-2,\ y,\ z) \Rightarrow |\overrightarrow{BD}|^2 = (x-2)^2+y^2+z^2$$

$$\overrightarrow{CD} = (x-1,\ y-\sqrt{3},\ z) \Rightarrow |\overrightarrow{CD}|^2 = (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2$$

מכאן:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 & (1) \\ x^2-4x+4+y^2+z^2 = 4 & (2) \\ x^2-2x+1+y^2-2\sqrt{3}y+3+z^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

מחסירים 1 ו- 2 נקבל: $4x = 4 \Rightarrow x = 1$

נציב $x=1$ ומחסירים 1 ו- 3 ונקבל:

$$4 - 2\cdot 1 + 1 - 2\sqrt{3}y + 3 = 4$$

$$2\sqrt{3}y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z^2 = 4 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$$

נקבל: $D = \left(1, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

תרגיל 4 סעיף ג

לגרף המתקבל יש 4 פאות כאשר כל פאה הוא/ משולש שווה צלעות.

לכן הגרף המתקבל הוא טטרהדר

תרגיל 5

א. נתון: $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{v} = 5\hat{k}$$

$$\circledast \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= |5y\hat{i} - 5x\hat{j}| = 5\sqrt{x^2+y^2}$$

אם הוקטור $\vec{u}$ נמצא ברביע הראשון של מישור XY אז נוכל לכתוב את $\vec{u}$ כך: $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2} = 3$$

ולכן מ- $\circledast$ נקבל: $|\bar{u} \times \bar{v}| = 5 \cdot 3 = 15$

ב. $\bar{u} \times \bar{v} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times 5\hat{k} =$

$= 5y\hat{i} - 5x\hat{j}$

$\bar{u}$ ברביע הראשון של XY ולכן $x>0, y>0$.

רכיב x של $\bar{u} \times \bar{v}$ הוא $5y$ ולכן חיובי.

ג. ראינו כי $\bar{u} \times \bar{v} = 5y\hat{i} - 5x\hat{j}$. רכיב y של $\bar{u} \times \bar{v}$ הוא $-5x$ ולכן שלילי.

ד. ראינו כי $\bar{u} \times \bar{v} = 5y\hat{i} - 5x\hat{j}$ ולכן רכיב z של $\bar{u} \times \bar{v}$ הוא אפס.

שאלה 6

נסמן ב- α את הזוית בין $\bar{u}$ ל $|\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v}$,

נסמן ב- β את הזוית בין $|\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v}$ ל- $\bar{v}$.

$$\bar{u}\times(|\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v})=|\bar{u}|(\bar{u}\times\bar{v})+\bar{v}\,\overbrace{\bar{u}\times\bar{u}}^{0}=\bar{u}(\bar{u}\times\bar{v}).$$

$$\left||\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v}\right|=\sqrt{|\bar{v}|^2|\bar{u}|^2+|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2}=|\bar{u}||\bar{v}|\sqrt{2}.$$

$$\sin\alpha=\frac{|\bar{u}|(\bar{u}\times\bar{v})}{\sqrt{2}\,|\bar{u}||\bar{v}|\cdot|\bar{u}|}=\frac{(\bar{u}\times\bar{v})}{\sqrt{2}\,|\bar{v}|\cdot|\bar{u}|}$$

$$(|\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v})\times\bar{v}=|\bar{v}|(\bar{u}\times\bar{v})+|\bar{u}|\cdot\overbrace{(\bar{v}\times\bar{v})}^{0}=|\bar{v}|(\bar{u}\times\bar{v}).$$

$$\sin\beta=\frac{|\bar{v}|(\bar{u}\times\bar{v})}{\sqrt{2}\,|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot|\bar{v}|}=\frac{(\bar{u}\times\bar{v})}{\sqrt{2}\,|\bar{u}||\bar{v}|}$$

$\sin\alpha=\sin\beta \Longrightarrow \alpha=\beta$ ולכן הוקטור

$|\bar{v}|\bar{u}+|\bar{u}|\bar{v}$ הוא חוצה הזוית בין $\bar{v}$ ו- $\bar{u}$

שאלה 7

הנורמל למישור ר הוא: $\vec{N}_1 = (1, 2, 3)$

נורמל של מישור xy: (נסמן ב- $\vec{N}_2$ את הנורמל למישור xy)

$$\vec{P} = \bar{N}_1 - \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|N_2|^2} \cdot \bar{N}_2 = (1,2,3) - \frac{(1,2,3)\cdot(0,0,1)}{1} \cdot (0,0,1) =$$

$$= (1, 2, 0)$$

הכדור יתגלגל על פני המישור בכיוון $1\hat{x}$ ו- $2\hat{y}$.

נציב במשוואת המישור כדי למצוא את z

$$1 + 2 \cdot 2 + 3z = 0$$

$$z = \frac{-5}{3}$$

$$\bar{V} = \left(1, 2, \frac{-5}{3}\right)$$

$\bar{V}$ מנורמל $= \left(\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{-5}{\sqrt{70}}\right)$