רשתות תקשורת מחשבים

פתרון תרגיל 2

1. שאלה 1 – CDMA

1.1. שידור של שתי תחנות

נסמן ב T_1 את תוחלת הזמן עד אשר שתי התחנות ישדרו בהצלחה.

בטבלה הבאה מסוכמות האפשרויות השונות להגרלות של שתי התחנות.

תחנה 1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
תחנה 2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

בתאים הצבועים התרחשה התנגשות בין שתי התחנות. לכן

$$T_1 = \frac{1}{9}\cdot\left[(1+T_1)+2+3+2+(2+T_1)+3+3+3+(3+T_1)\right] = \frac{22}{9}+\frac{1}{3}T_1$$

נעביר אגפים ונקבל $T_1 = 3\frac{2}{3}$

1.2. שידור של שלוש תחנות

אנו מניחים שאם תחנות s_1 ו s_2 הגרילו i , ותחנה s_3 הגרילה $i<j$ אז תחנה s_3 תחכה עד <u>ששתי</u> התחנות האחרות יסיימו את שידורן ורק לאחר מכן היא תשדר.

נסמן ב T_2 את תוחלת הזמן עד אשר שתי התחנות ישדרו בהצלחה.

בטבלאות להלן מסוכמות האפשרויות השונות להגרלות של שלוש התחנות.

תחנה 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
תחנה 2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
תחנה 3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

תחנה 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
תחנה 2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
תחנה 3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

תחנה 1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
תחנה 2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
תחנה 3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

בתאים הצבועים באדום התרחשה התנגשות בין שלושת התחנות.

בתאים הצבועים בצהוב התרחשה התנגשות בין שתי תחנות, והתחנה השלישית חיכתה עד לשידורן.

בתאים הצבועים בירוק התרחשה התנגשות בין שתי תחנות, אך התחנה השלישית שידרה לפני ההתנגשות.

אין התנגשות
$$T_2 = \frac{6}{27}\cdot 3$$

תאים אדומים
$$+\frac{1}{27}\cdot(T_2+1)+\frac{1}{27}\cdot(T_2+2)+\frac{1}{27}\cdot(T_2+3)$$

תאים צהובים
$$+\frac{6}{27}\cdot(T_1+2)+\frac{3}{27}\cdot(T_1+3)$$

תאים ירוקים
$$+\frac{3}{27}\cdot(T_1+2)+\frac{6}{27}\cdot(T_1+3)$$

$$T_2 = \frac{23}{9}+\frac{1}{9}T_2+\frac{2}{3}T_1$$

נציב את T_1 שקיבלנו בסעיף הקודם ונקבל: $T_2 = 5.625$.

2. שאלה 2 – תופעת הלכידה באתרנט

2.1.

ראשית, ניתן הערכה גסה. בסיכוי ½ תחנה ב׳ תבחר 2T או 3T ואז תחנה א׳ תשדר קודם בהסתברות 1, ובסיכוי ½ תחנה ב׳ תבחר 0 או T, ואז סיכויה לשדר קודם קטנים מ 1/2 (אם אין התנגשות המצב סימטרי, ואם יש התנגשות לתחנה א׳ סיכוי טוב יותר לנצח בפעם הבאה). לכן א׳ תנצח בהסתברות לפחות ¾.

ועתה לניתוח הדוק. נוח מייד להכליל למקרה בו תחנה א׳ מגרילה בטווח [0,(a-1)T], ותחנה ב׳ בוחרת בטווח [0,(b-1)T], ו b>a. תחנה א׳ תנצח שוב באחד מהמקרים הבאים: (1) תחנה ב׳ הגרילה aT או יותר, (2) תחנה ב׳ הגרילה פחות מ aT, לא היתה התנגשות, ותחנה א׳ הגרילה פחות מתחנה ב׳, או (3) היתה התנגשות ותחנה א׳ נצחה אח״כ. (1) חל בהסתברות (b-a)/b, (2) בהסתברות (a/b)(1-1/a)(1/2)=(a-1)/(2b), ו (3) בהסתברות 1/b. אם נסמן ההסתברות המבוקשת ע״י $T_{a,b}$, קיבלנו את נוסחת הנסיגה הבאה.

$$
\begin{aligned}
T_{a,b} &= \frac{b-a}{b} + \frac{a-1}{2b} + \frac{1}{b}T_{2a,2b} \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + \frac{1}{b}\left(1-\frac{2a+1}{4b} + \frac{1}{2b}\left(1-\frac{4a+1}{8b} + \frac{1}{4b}(\cdots)\right)\right) \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + \frac{1}{b}\left(1-\frac{2a+1}{4b}\right) + \frac{1}{2b^2}\left(1-\frac{4a+1}{8b}\right) + \cdots \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i} b^{-i}\left(1-\frac{2^i a-1}{2^{i+1} b}\right) \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + 2\left(\sum_{i=1}^{\infty}(2b)^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty}(2b)^{-i}\frac{2^i a}{2^{i+1} b} + \sum_{i=1}^{\infty}(2b)^{-i}\frac{1}{2^{i+1} b}\right) \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + 2\left(\left(1-\frac{a}{2b}\right)\sum_{i=1}^{\infty}(2b)^{-i} + \frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{\infty}(4b)^{-i}\right) \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + 2\left(\left(1-\frac{a}{2b}\right)\frac{1/(2b)}{1-1/(2b)} + \frac{1}{2b}\cdot\frac{1/(4b)}{1-1/(4b)}\right) \\
&= 1-\frac{a+1}{2b} + \frac{2b-a}{b(2b-1)} + \frac{1}{b(4b-1)}
\end{aligned}
$$

לחישוב מקורב, נשתמש רק במקרה שלא חלה התנגשות. נקבל $T'_{a,b} = \left(\frac{b-a}{b} + \frac{a-1}{2b}\right)$. כיוון שהסתברות התנגשות היא $1/b$, נסכם כי $T'_{a,b} \le T_{a,b} \le T'_{a,b} + 1/b$. ניתן לחסום התשובה מלמטה ע״י הנחה שבמקרה של התנגשות, הסיכוי תחנה א׳ תנצח הוא לפחות חצי, ואז הסיכוי שתנצח בכלל הוא לפחות $T'' = \frac{b-a/2}{b} = 1-\frac{a}{2b}$. כאשר נציב a=2 ו b=4 נקבל בחישוב המדויק 719/840≈0.856, ובקרוב החסום את האינטרוול [0.75, 0.875], ובקרוב השני נקבל חסם תחתון של 0.75.

.2.2

נחשב רק את הסיכוי המקורב. כדי שתחנה ב׳ לא תצליח לשדר כלל, עליה להיכשל בניסיון הראשון, השני, השלישי וכן הלאה. נחסום מלמעלה את הסיכוי שתצליח בניסיון כלשהוא ע״י סכום ההסתברויות להצליח בניסיונות (זהו **חסם האיחוד**, union bound) . נחסום את הסיכוי להצליח ע״י ’’1-T. בניסיון הראשון נציב a=2 ו b=4, ונקבל 1-T’’’=1/4. בניסיון השני נציב b=8, אך נשים לב שעדיין a=2, ולכן נקבל הסתברות 1/8. באופן כללי, הסיכוי להצלחה בניסיון ה i הוא לכל היותר $1/2^{i+1}$. לכן הסיכוי שתחנה ב׳ תצליח לשדר כל עוד תחנה א׳ משדרת הוא לכל היותר $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i} = \frac{1}{2}$. (חישוב הטור עם הערך המדויק של $T_{a,b}$ מסעיף קודם נותן תוצאה נמוכה בהרבה, כ- 0.27, גם כאשר נשתמש בחסם האיחוד.)

.2.3

1. כעת תחנה א׳ מגרילה מתוך {0, T} ותחנה ב׳ מתוך {0, T, … 7T}. נציב a=2 ו b=8 בפתרון שקיבלנו בסעיף 2.1 ונקבל 0.933.

2. עתה הסיכוי של תחנה ב' לנצח בניסיון הראשון הוא לכל היותר 1/8, בשני 1/16, ובניסיון ה i $1/2^{i+2}$. אלה מסתכמים ב ¼ (חסם הדוק יותר: 0.13).

3. שאלה 3 – זמן התייצבות בטבעת אסימונים

הוכחת הנכונות מהשיעור מיתרגמת ישירות לחסם על מספר הפעולות: לפי למה 1 יש לכל היותר 2^n פעולות בין שתי תזוזות של המנהיג, לפי למה 2 אחרי $n2^n$ פעולות לכל היותר למנהיג יש ערך יחודי, ולפי למה 3 אחרי 2^n פעולות נוספות לכל היותר, לכל המעבדים אותו ערך והמצב חוקי עפ"י למה 4 --- סה"כ לא יותר מ $(n+1)2^n$ פעולות עד התייצבות.

אך ניתן לתת ניתוח עדין יותר. עפ"י למות 2, 3 ו-4, כאשר המנהיג משנה ערכו בפעם ה $(n+2)$, המצב במערכת חוקי. לכן מספיק לחסום מספר הצעדים הכולל עד אשר המנהיג יזוז בפעם ה $(n+2)$.

לריצה נתונה כלשהיא, נגדיר גרף מכוון שבו בכל שורה $n+1$ צמתים (המייצגים את המעבדים), ומספר השורות הוא מספר הצעדים עד להתייצבות. בכל צומת (i, t) המייצג את מעבד i בזמן t נסמן את ערך המשתנה המתאים. קשתות מכוונות יסמנו את "מקור" הערך: אם הערך במעבד i בזמן t לא השתנה, אז יש קשת $(i, t-1)\to(i, t)$, ואם הערך השתנה אז יש קשת $(i-1, t-1)\to(i, t)$. למנהיג, מקור השינוים הוא מעבד n. עפ"י ההגדרה ברור כי מספר הצעדים בריצה שווה למספר הקשתות ה"אלכסוניות", כלומר קשתות מהסוג $(i-1, t-1)\to(i, t)$.

נתבונן במסלול מכוון כלשהוא בגרף. מספר הקשתות האלכסוניות בכל קטע מסלול בין צעדי מנהיג הוא לכל היותר n, כי בכל קשת אלכסונית אינדקס המעבד גדל באחד. מכאן שבכל מסלול עם t קשתות אלכסוניות יש לפחות $\lfloor t/n \rfloor$ צעדי מנהיג (*). בנוסף, נשים לב שמספר המסלולים השונים לכל היותר n. עתה אנו טוענים לאחר $2n(n+1)=O(n^2)$ צעדים במערכת, המנהיג עשה לפחות $(n+2)$ צעדים: נסמן ב k_i מספר הצעדים בשרשרת i. מהנחה, $\sum k_i = 2n(n+1)$. ולבסוף, לפי (*), מספר צעדי המנהיג לפחות

$$\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{k_i}{n}\right\rfloor > \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i-n}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{n} - n = \frac{2n(n+1)}{n} - n = 2n+2-n = n+2$$

, כנדרש.

4. שאלה 4 – בחירת מנהיג בטבעת חד-סטרית

4.1. סידור מזהים לבחירת מנהיג לאחר 48 הודעות

כיוון העברת ההודעות הינו משמאל לימין. ירוק מסמן את התחנות ש"ניצחו" בכל איטרציה.

מזהה		5	4	6	2	7	3	8	1
איטרציה	הודעה 1	4	6	2	7	3	8	1	5
	הודעה 2	6	2	7	3	8	1	5	4
איטרציה	הודעה 1		2		3		1		4
	הודעה 2		3		1		4		2
איטרציה	הודעה 1				1				2
	הודעה 2				2				1

לאחר 3 איטרציות תחנה מס׳ 1 תנצח וכן תקבל שוב את המזהה של עצמה. מאחר ובכל איטרציה תועברנה 2 הודעות בין כל התחנות, מספר ההודעות בכל איטרציה יהיה 16 ובכל 3 האיטרציות מספר ההודעות יהיה 48.

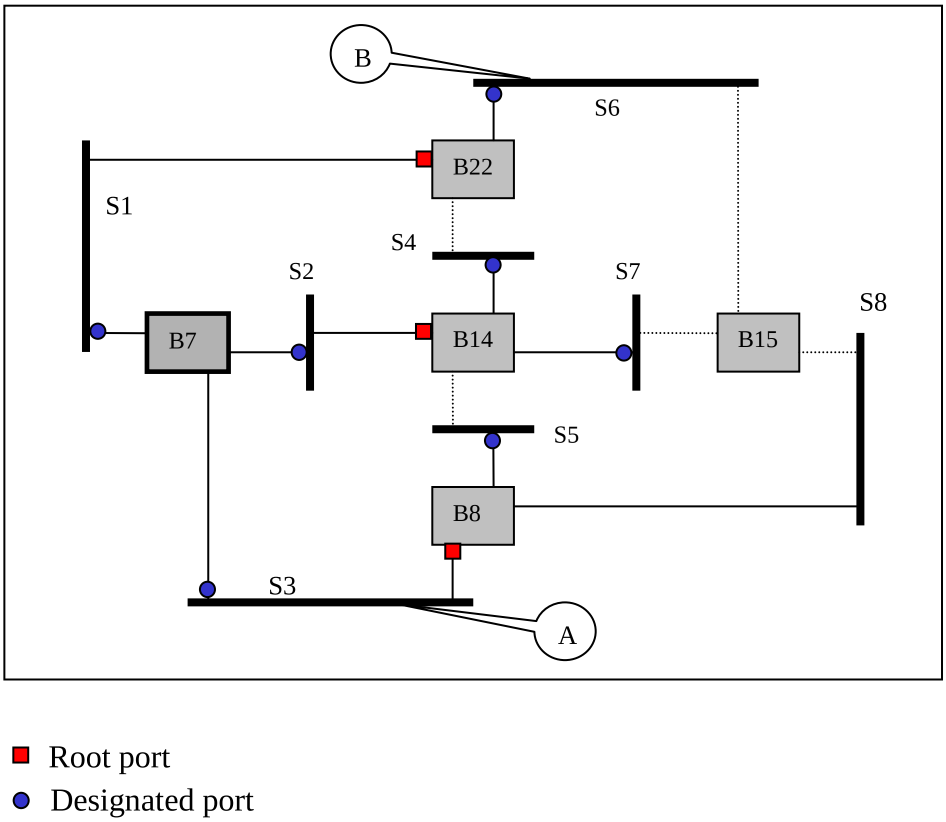
4.2. סידור מזהים לבחירת מנהיג לאחר 24 הודעות

מזהה		8	7	6	5	4	3	2	1
איטרציה 1	הודעה 1	7	6	5	4	3	2	1	8
	הודעה 2	6	5	4	3	2	1	8	7
איטרציה 2	הודעה 1								8

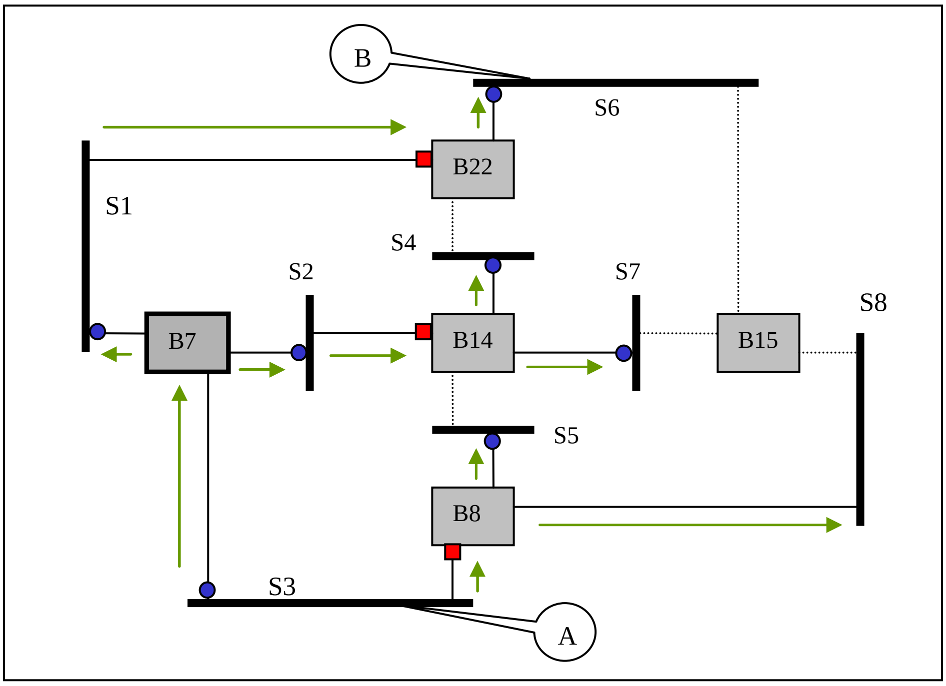
בסידור זה לאחר איטרציה אחת תיוותר רק תחנה אחת, אולם על מנת להגיע לתנאי הסיום היא תאלץ להעביר הודעה בין כל התחנות על מנת לוודא כי היא היחידה הפעילה. לפיכך תידרש איטרציה מלאה בת 16 הודעות, ועוד מעבר של ההודעה של התחנה הבודדת בין כל התחנות בעלות של 8 הודעות נוספות, ובסה״כ 24 הודעות.

5. שאלה 5 – אלגוריתם עץ פורש

העץ הפורש :



5.1. הודעה מ A ל B



5.2. הודעה מ B ל A