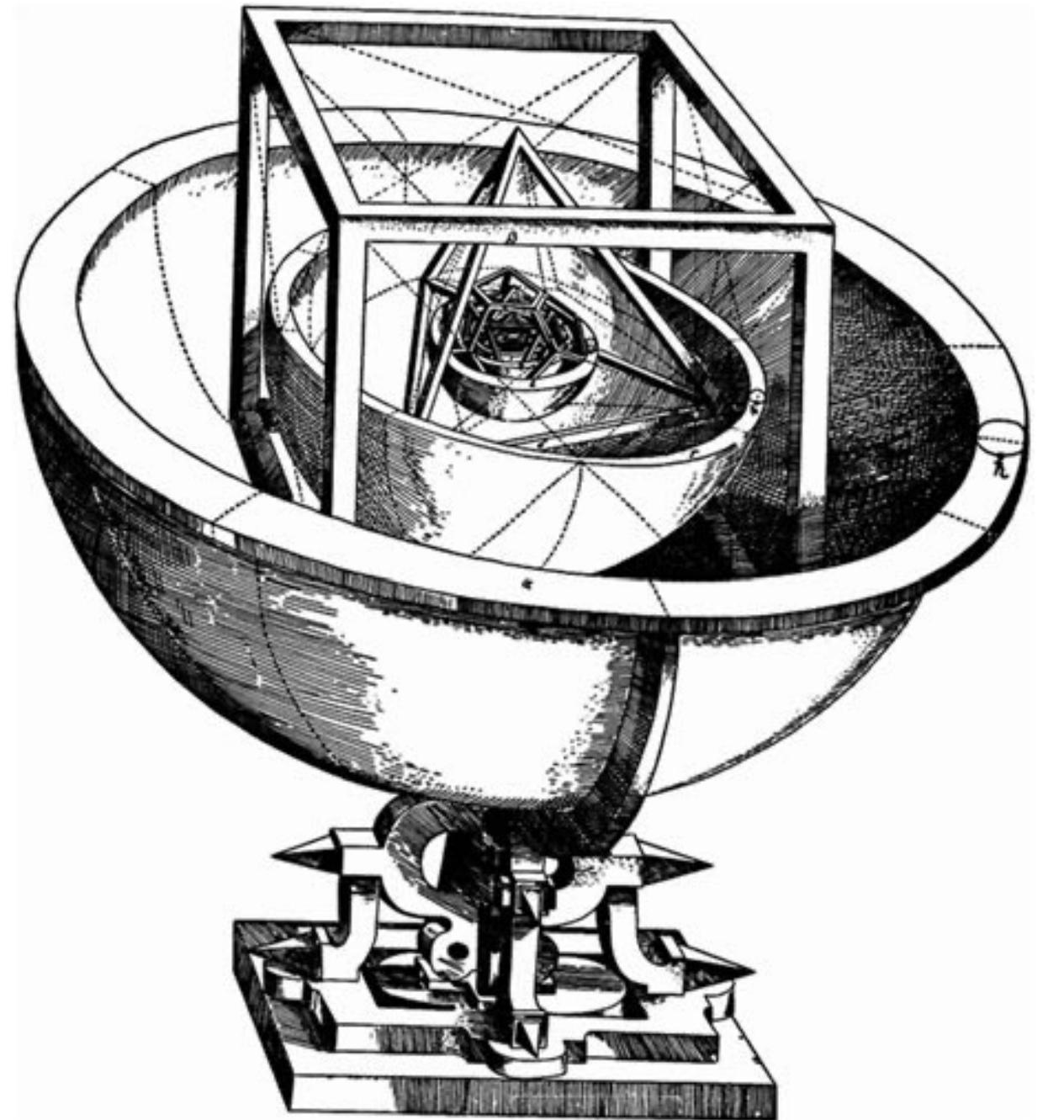


مدل‌سازی مقدماتی



امیرحسین زارع مهندیه
تابستان ۰۰

اهداف

- مدل‌ها در علم؛ راهی برای شناخت
- انواع مدل در علوم زیستی
- چگونه پدیده‌ها را مدل کنیم
- چگونه مدل را تحلیل کنیم

فهرست

۱. مقدمه

۲. مبانی ریاضیات

۳. پدیده‌ها

۴. مدل‌های گسته

۵. مدل‌های پیوسته

۱. مقدمه

۱. مقدمه

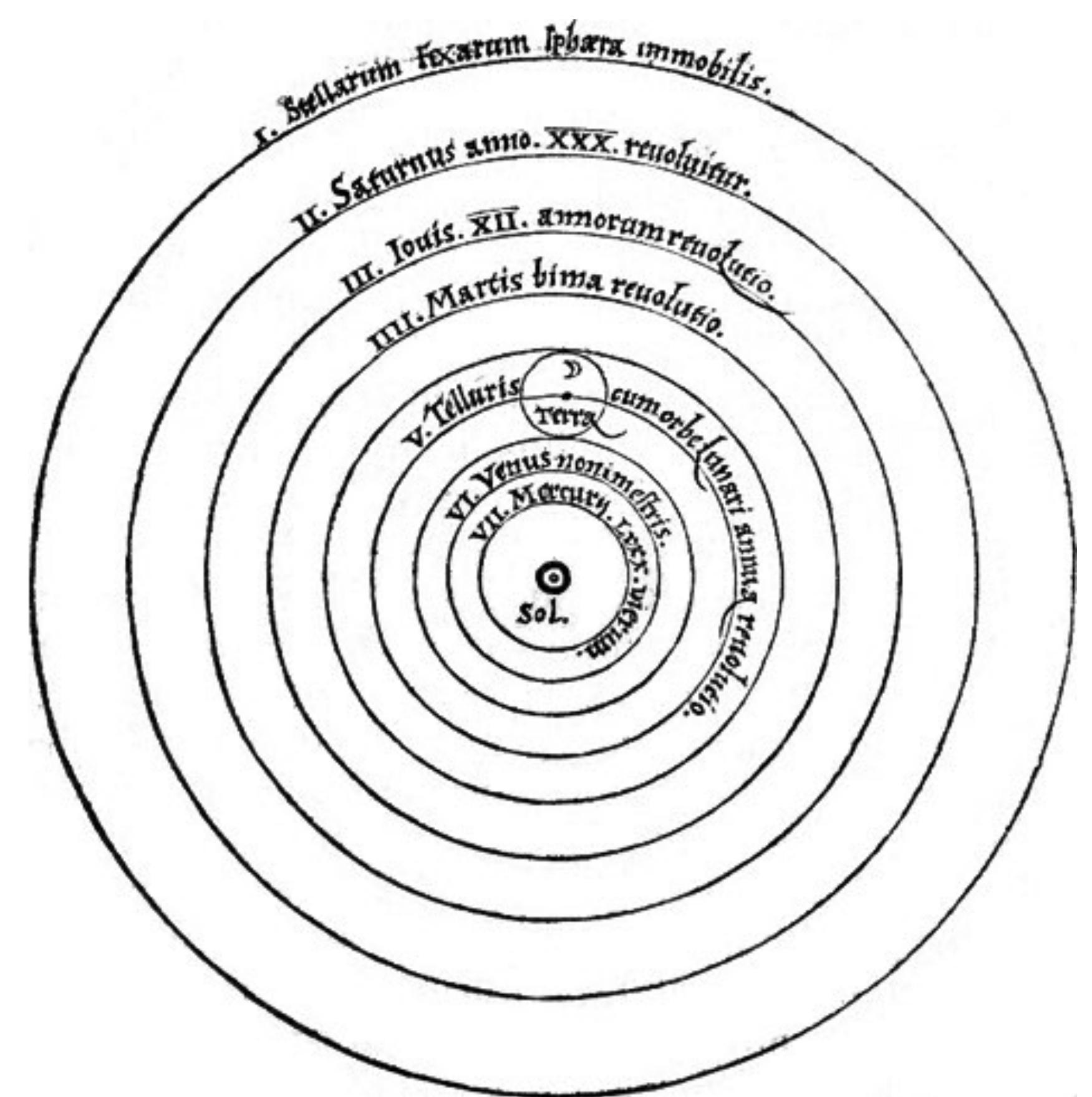
۱.۱ مدل چیست

۱.۲ مدل در زیست‌شناسی

۱.۱ مدل چیست



۱.۱ مدل چیست



۱.۱ مدل چیست



۱.۱ مدل چیست

اهداف مدل

- یکپارچه‌سازی داده‌های متفاوت در قالب یک ایده ساختارمند
- توجیه مشاهدات
- پیشنهاد سازوکار
- پیش‌بینی آینده

۱۲. امدل در زیست‌شناسی

A hand-drawn phylogenetic tree diagram. The tree has a central vertical stem. At the top left, there is handwritten text: "I think" followed by a large letter "A". On the right side of the tree, there is a large bracket grouping several branches. Inside this bracket, there is handwritten text: "Can must be shown in
some tree than as new
living in
one group living among them in
one group (as it is). separate
Do not think it is
Do some
at the top." A circled number "1" is at the bottom left, and a circled number "2" is at the bottom right.

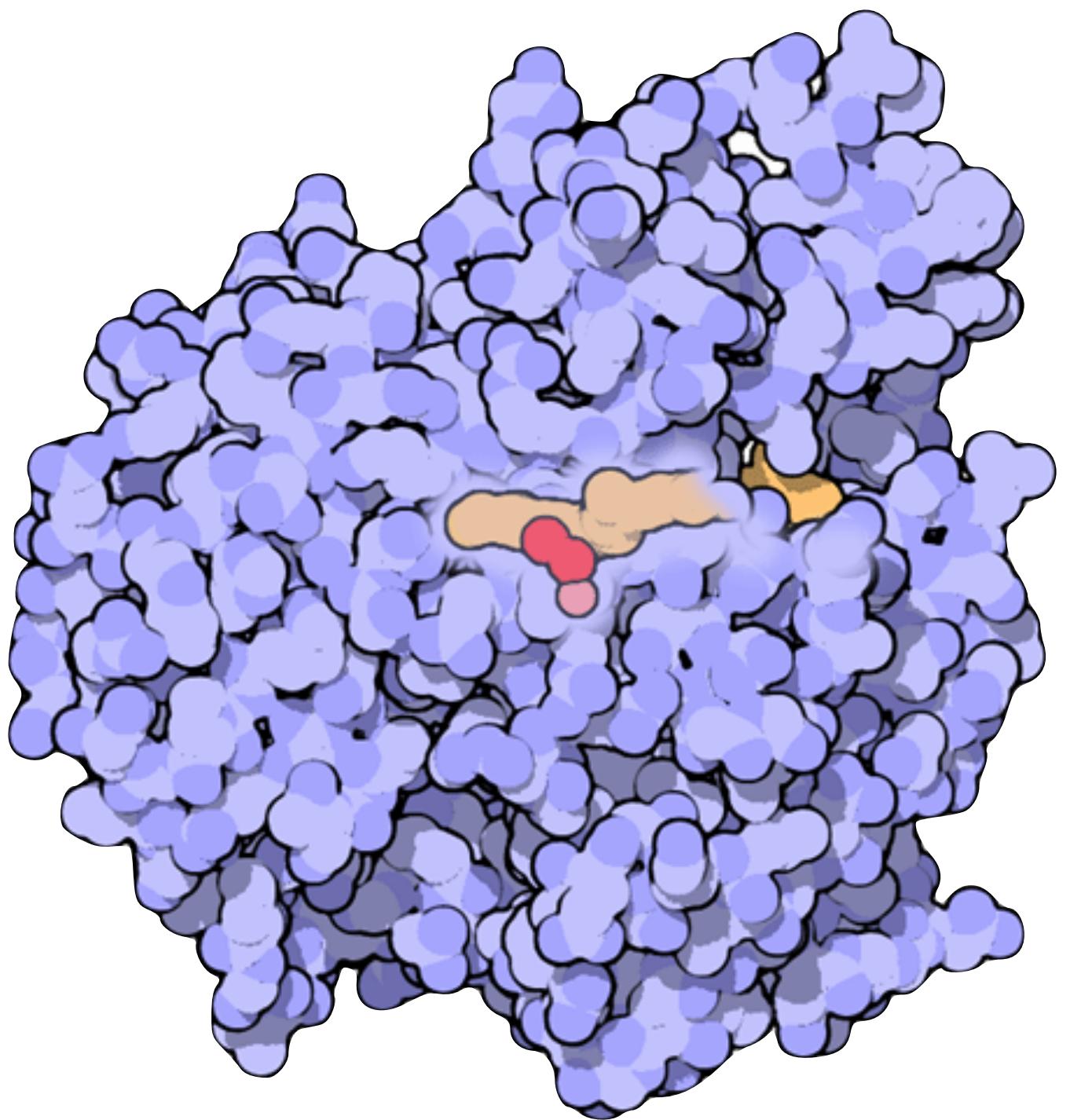
Thus between A + B. various
sorts of relation. C + B. The
first generation, B + D
rather greater distinction.
Thus genera would be
formed. - binary relation

۱.۲ مدل در زیست‌شناسی

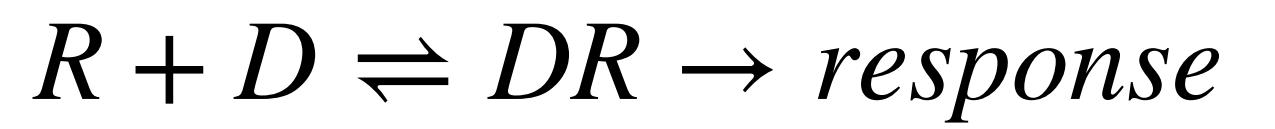
میکائیلیس-منتن



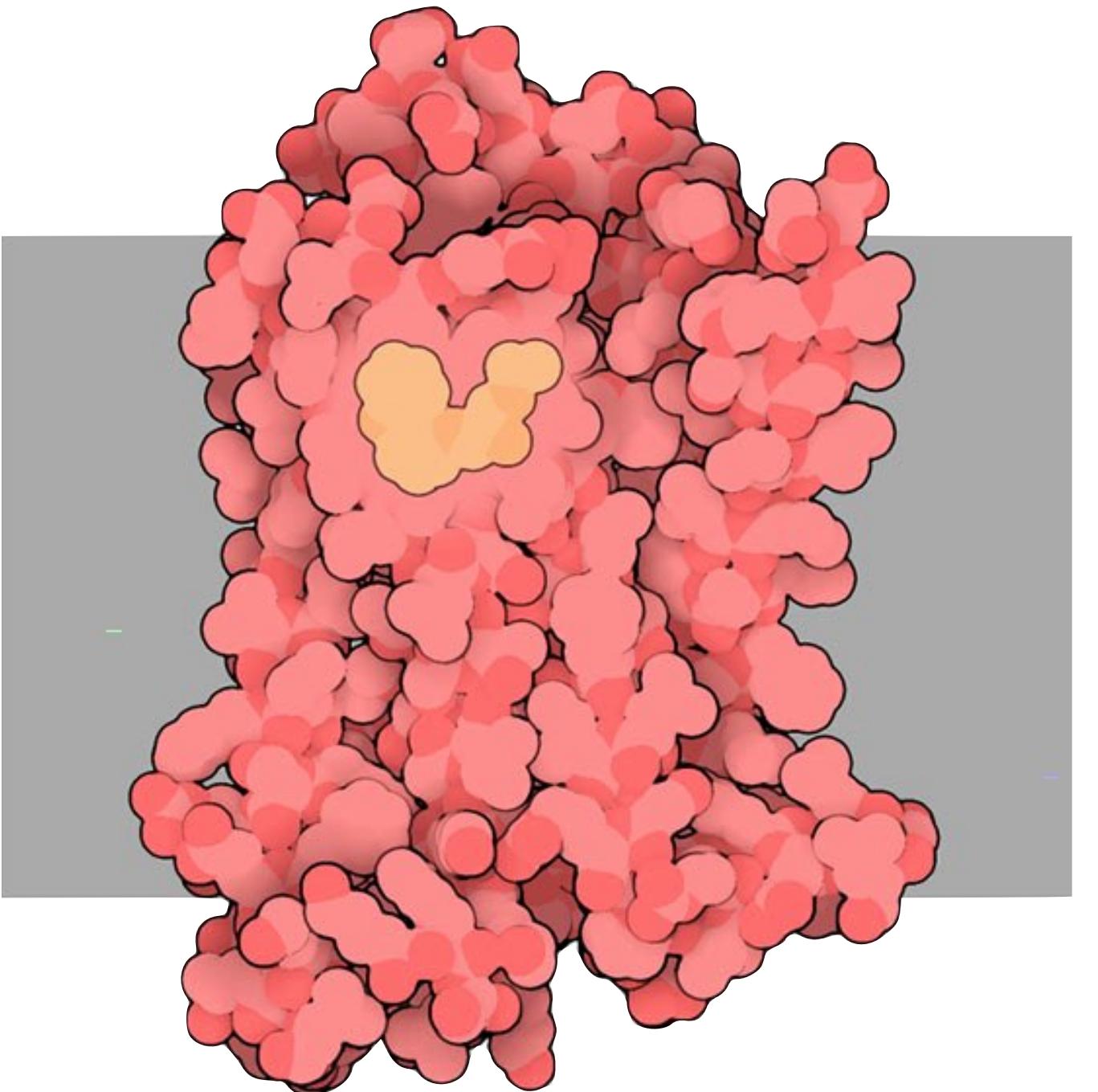
$$V = \frac{V_{max} \cdot S}{K_m + S}$$



۱.۲ مدل در زیست‌شناسی لانگلی-هیل



$$\frac{[DR]}{R_{total}} = \frac{[D]}{K_d + [D]}$$



۲. مبانی ریاضیات

۲. مبانی ریاضیات

۲.۱ جبر

۲.۲ جبر خطی

۲.۳ حسابان

۲.۴ معادلات دیفرانسیل

٢٠١ جبر

اتحاد

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

٢٠١ جبر

توابع مهم

$$f(x) = b$$

$$f(x) = ax + b \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x) = b^x$$

$$f(x) = \log_b x$$

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x$$

۲۰۱ جبر

ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها

$$f(x) = ax + b \implies x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

$$f(x) = x^3 + px + q \implies x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

۲.۱ جبر

ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها

$$x^3 - 6x + 4$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4 + \sqrt{-16})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4 - \sqrt{-16})}$$

$$(1 + \sqrt{-1})^3 = -2 + 2\sqrt{-1}$$

$$(1 - \sqrt{-1})^3 = -2 - 2\sqrt{-1}$$

$$x = 2$$



٢.١ جبر

اعداد موهومی

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = +1$$

$$i^5 = i$$



٢٠١ جبر

اعداد مختلط

$$a + bi$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{(c^2 + d^2)}$$

٢٠١ جبر

اعداد مختلط

$$a + bi \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a + bi = r(\cos \theta + \sin \theta i)$$

$$r_1(\cos \theta_1 + \sin \theta_1 i) r_2(\cos \theta_2 + \sin \theta_2 i) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) i]$$

$$z^n = 1 \implies \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

٢٠٢ جبر خطى

بردار

$$\vec{u} = [x, y]$$

$$\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$c\vec{u} = cx\hat{i} + cy\hat{j}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\hat{x} + (u_y + v_y)\hat{y}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

٢٠٢ جبر خطى

ماتريس

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow i \times j$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

٢٠٢ جبر خطى

ماتريس

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$A \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

٢.٣ حسابان

حد

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

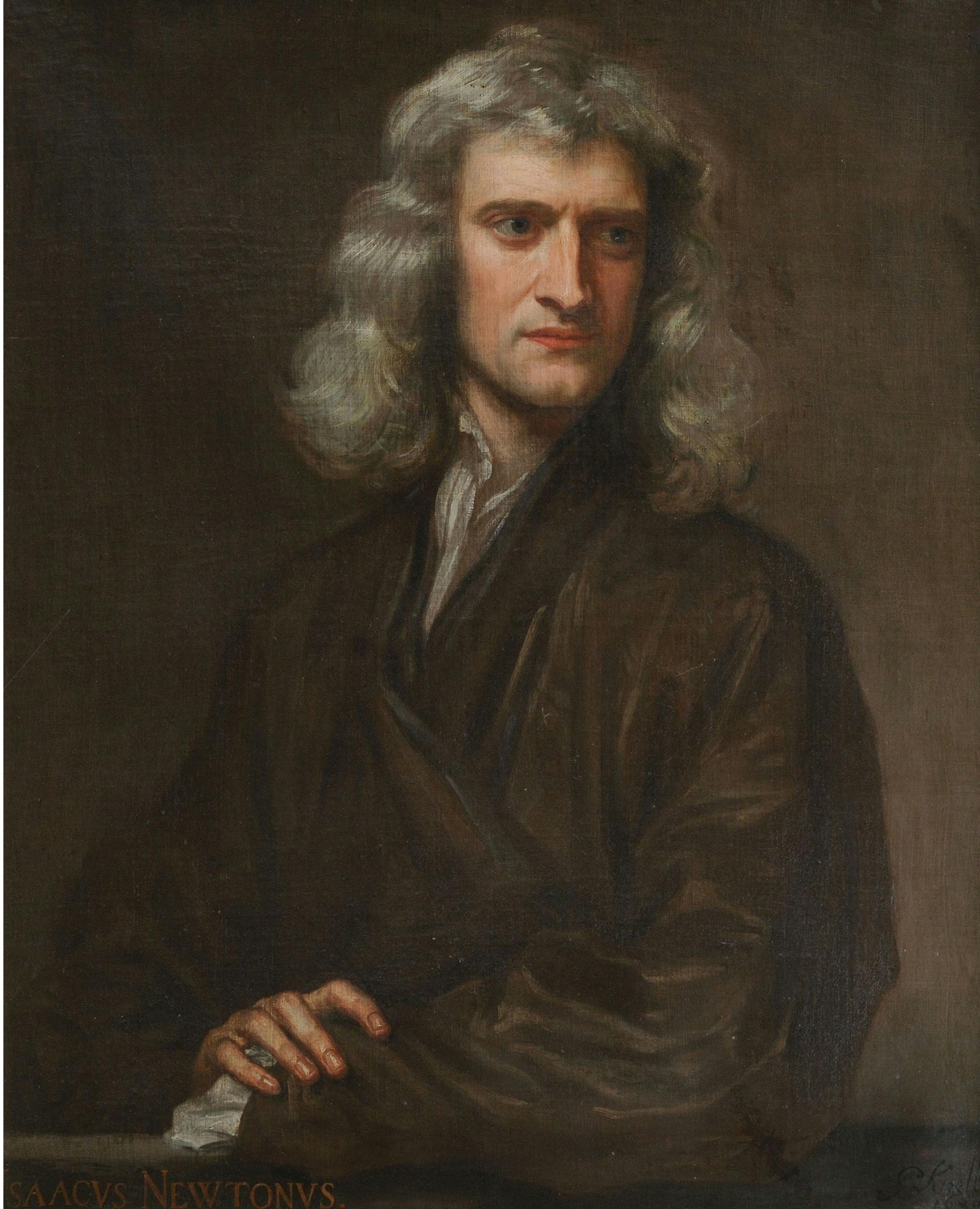
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

٢.٣ حسابان

مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$



ISAACVS NEWTONVS.

٢.٣ حسابان

مشتق

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dx} \Big|_{x+h} - \frac{df}{dx} \Big|_x}{h}$$



٢.٣ حسابان

مشتق

$$(cf)' = cf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

٢.٣ حسابان

مشتق

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} b^x = \ln b \cdot b^x$$

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{\ln b} \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

٢٣ حسابان

عدد اويلر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$



٢.٣ حسابان

انتگرال

$$\Delta x = \frac{(b - a)}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \Delta x$$

٢.٣ حسابان

انتگرال

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \implies F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int f(x) \, dx \Big|_a^b$$

٢.٣ حسابان

انتگرال

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

٢.٣ حسابان

انتگرال

$$\int k \, dx = kx + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

٢.٣ حسابان

بسط تیلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

٢.٣ حسابان

بسط تیلور

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

٢.٤ معادلات دیفرانسیل

$$f' \rightarrow f$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}(x_t)$$

$\dot{x}(x^*) = 0 \rightarrow x^*$ is an equilibrium point

$\ddot{x}(x^*) < 0 \rightarrow x^*$ is a stable equilibrium point

$\ddot{x}(x^*) > 0 \rightarrow x^*$ is a unstable equilibrium point

٢.٤ معادلات دیفرانسیل

$$\dot{x} = \sin x$$

٢.٤ معادلات دیفرانسیل

$$\dot{x} = x - \cos x$$

۳. پدیده‌ها

۳. پدیده‌ها

- بر اساس متغیر در حال تغییر
- گسته (نسل)
- پیوسته (زمان)

۳. پدیده‌ها

- بر اساس تعداد متغیرهای مورد بررسی
 - یک بعدی
 - دو بعدی
 - ...

۴. مدل‌های گستته

۴. مدل‌های گستته

۱. خرگوش‌های فیبوناچی

۲. رشد جمعیت در زمان گستته

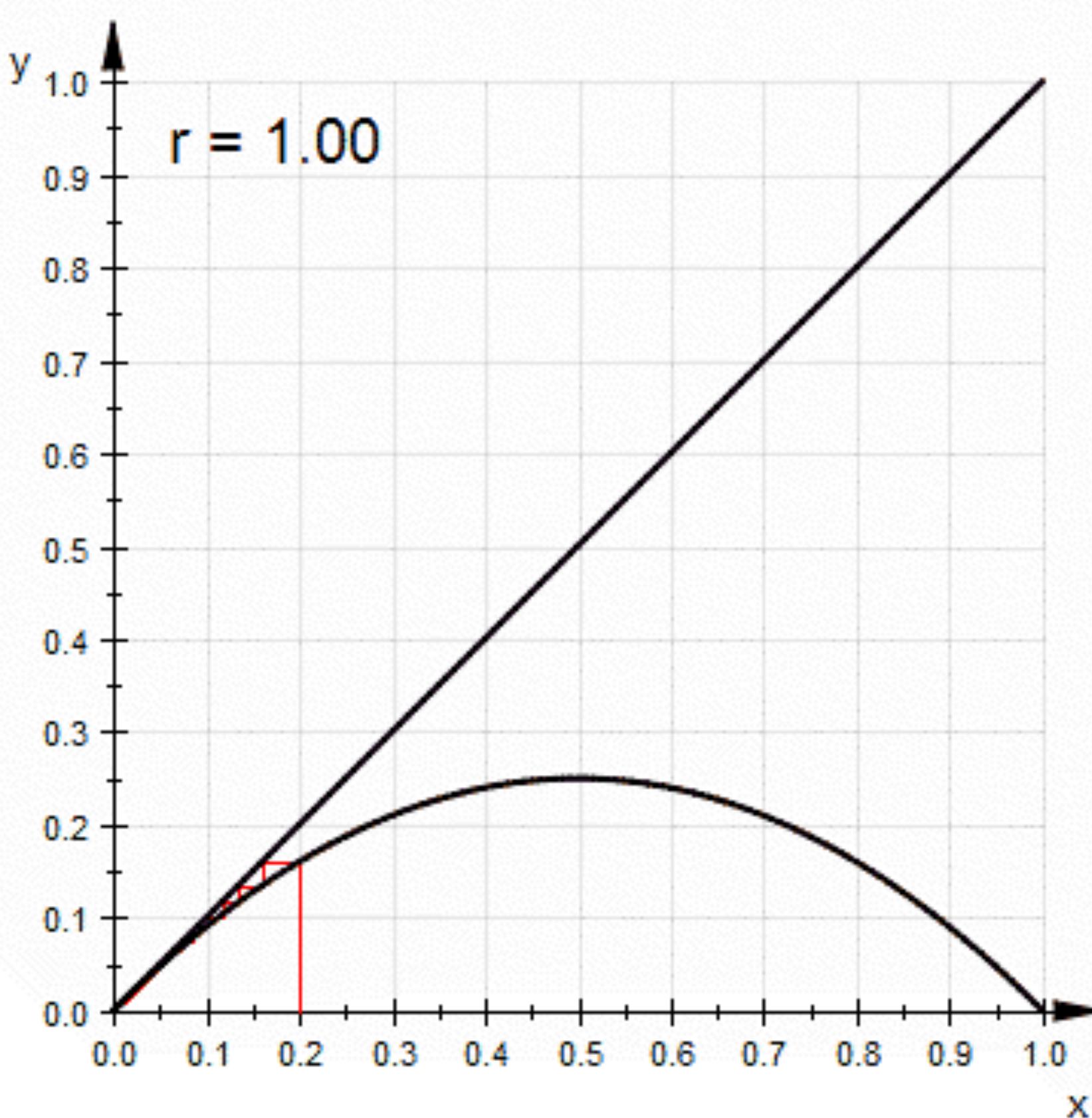
۴.۱ خرگوش‌های فیبوناچی



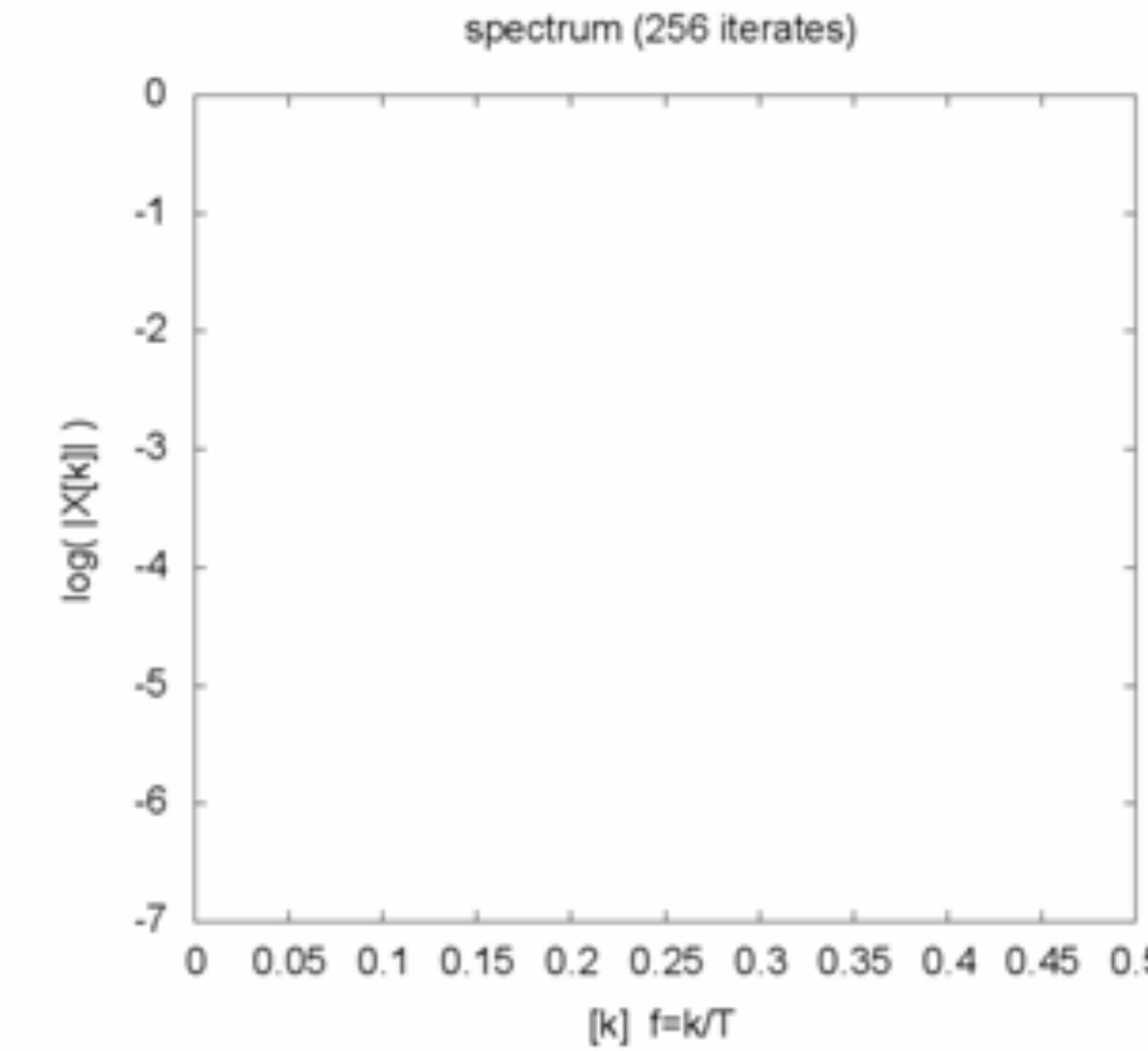
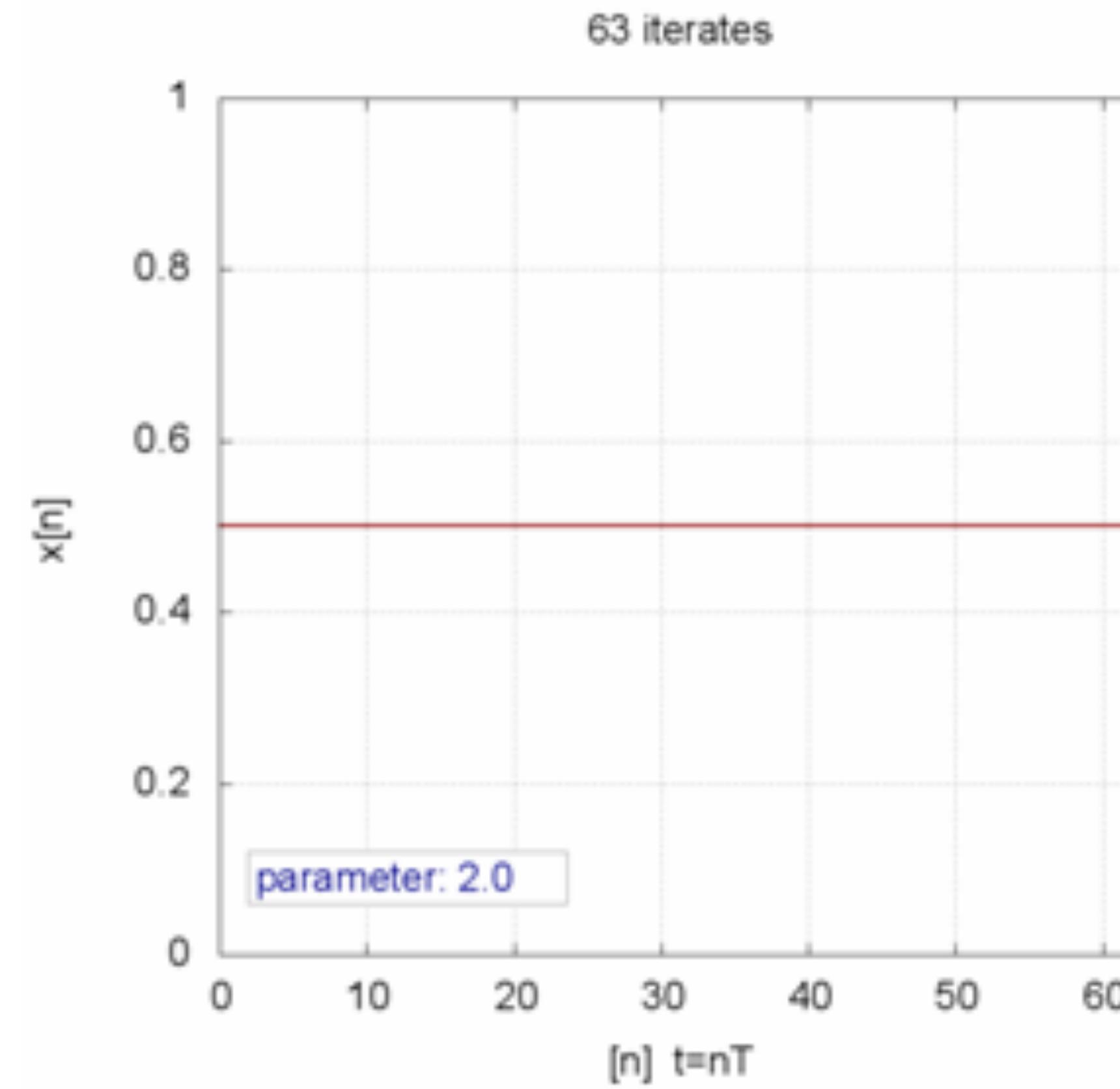
۴.۲ رشد جمعیت در زمان گستته

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$$

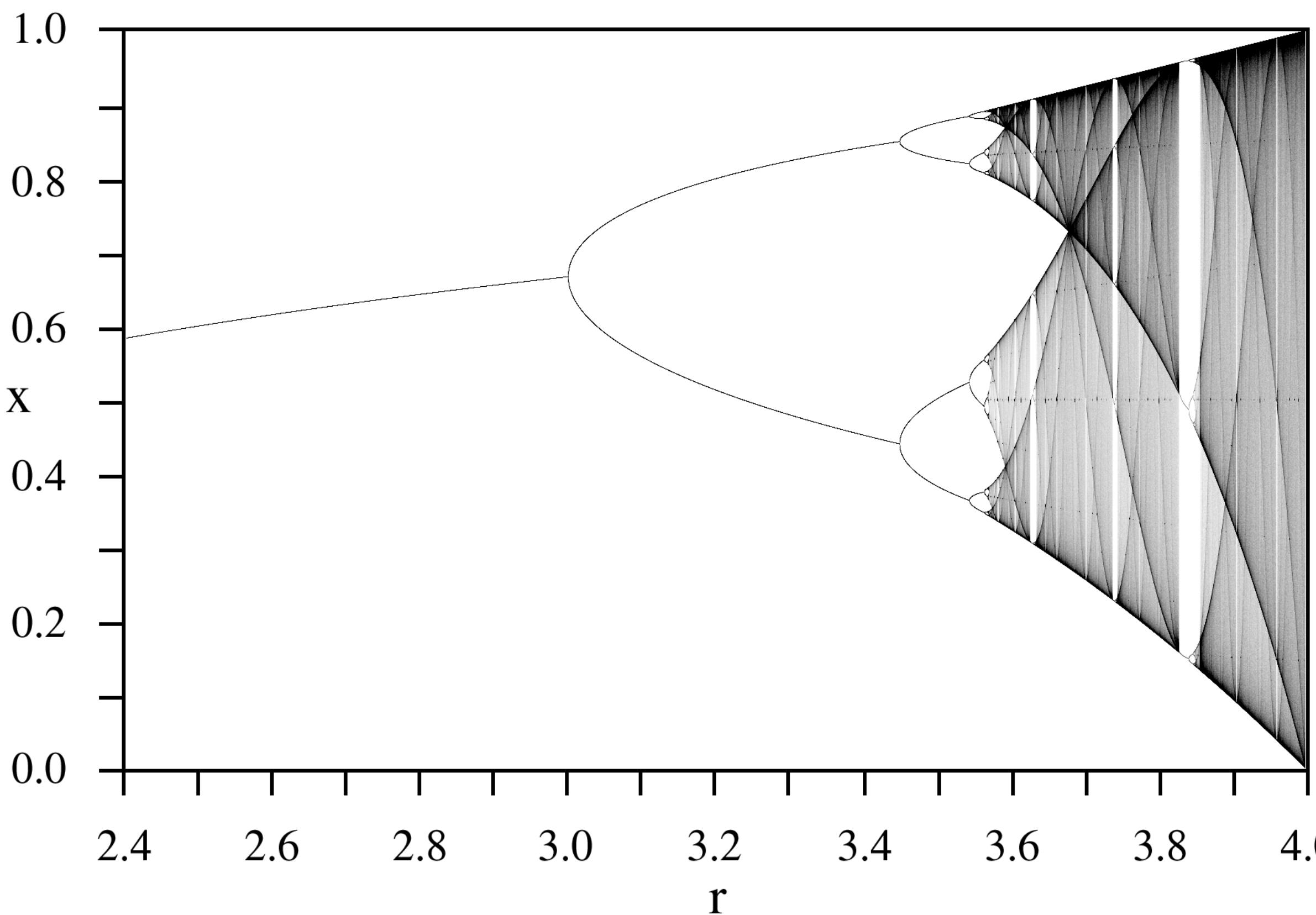
۴.۲ رشد جمعیت در زمان گستته



۴.۲ رشد جمعیت در زمان گسته



۴.۲ رشد جمعیت در زمان گستته



۵. مدل‌های پیوسته

۵. مدل‌های پیوسته

۱. در یک بعد	رشد جمعیت در زمان پیوسته
۲. در دو بعد	جمعیت‌های مستقل
۳. کینتیک آنزیم	مدار تنظیمی گلوکز-انسولین
۴. رشد تومور	رقابت جمعیت‌ها
۵. بیان ژن	شکار و شکارچی
۶. خودتنظیمی منفی در بیان ژن	خودتنظیمی مثبت در بیان ژن

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد رشد جمعیت در زمان پیوسته (رشد نمایی)

$$\dot{N} = rN$$

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد

رشد جمعیت در زمان پیوسته (رشد لجستیک)

$$\dot{N} = rN(1 - N)$$

۵.۱ مدل‌های پیوسته در یک بعد کینتیک آنژیم

$$\dot{x} = k_1 ax - k_2 x^2$$

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد

رشد تومور

$$\dot{S} = -aS \ln(bS)$$

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد

بیان ژن

$$\dot{x} = \beta - \alpha x$$

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد خودتنظیمی منفی در بیان ژن

$$\dot{x} = \frac{K^n}{K^n + x^n} - \alpha x$$

۱.۵. مدل‌های پیوسته در یک بعد خودتنظیمی مثبت در بیان ژن

$$\dot{x} = \frac{x^n}{K^n + x^n} - \alpha x$$

۵.۱ مدل‌های پیوسته در دو بعد

رشد نمایی دو جمیعت مستقل

$$\dot{x} = rx$$

$$\dot{y} = ry$$

۵.۱ مدل‌های پیوسته در دو بعد

مدار تنظیمی گلوکز-انسولین

$$\dot{G} = -aG - rI$$

$$\dot{I} = sG - dI$$

۵.۱ مدل‌های پیوسته در دو بعد رقابت جماعت‌ها

$$\dot{x} = rx[1 - (x + \alpha y)]$$

$$\dot{y} = ry[1 - (y + \beta x)]$$

۵.۱ مدل‌های پیوسته در دو بعد شکار و شکارچی

$$\dot{R} = \alpha R - \beta RF$$

$$\dot{F} = \delta RF - \gamma F$$