Вопросы при защите лабораторной работы.

1. В каких ситуациях теоретический порядок квадратурных формул численного интегрирования не достигается.

Теоретический порядок квадратурных формул численного интегрирования не достигается в случаях:

1. Недостаточное количество узлов.
2. Неравномерное распределение узлов.
3. Негладкость функции.

2. Построить формулу Гаусса численного интегрирования при одном узле.

Формула Гаусса численного интегрирования при одном узле:

Для интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$:

1. Узел: $x_1 = 0$.
2. Вес: $A_1 = 2$.

Формула: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2 \cdot f(0)$.

3. Построить формулу Гаусса численного интегрирования при двух узлах.

Формула Гаусса численного интегрирования при двух узлах:

Для интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$:

1. Узлы: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Веса: $A_1 = 1, A_2 = 1$.

Формула: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Получить обобщенную кубатурную формулу, для вычисления двойного интеграла методом последовательного интегрирования на основе формулы трапеций с тремя узлами по каждому направлению.

Обобщенная кубатурная формула для вычисления двойного интеграла методом последовательного интегрирования на основе формулы трапеций с тремя узлами по каждому направлению:

Для интеграла $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ на области $D=[a,b]\times[c,d]$:

1. Узлы: $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$ и $y_0=c, y_1=\frac{c+d}{2}, y_2=d$.
2. Веса по каждому направлению для формулы трапеций:
   - $w_0=w_2=\frac{1}{2}$
   - $w_1=1$

Формула:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{16}\left[f(x_0,y_0)+2f(x_0,y_1)+f(x_0,y_2)+2f(x_1,y_0)+4f\right.$$

Где $f(x_i,y_j)$ - значения функции в узлах.

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

Выполним разложение функции в ряд Тейлора в точках x_{N-1} и x_{N-2}, приняв за центр разложения точку x_N:

$$y_{N-1} = y_N - hy'_N + \frac{h^2}{2!}y''_N - \frac{h^3}{3!}y'''_N + \ldots \qquad (1)$$

$$y_{N-2} = y_N - 2hy'_N + \frac{4h^2}{2!}y''_N - \frac{8h^3}{3!}y'''_N + \ldots \qquad (2)$$

$4\cdot(1)-(2)$:

$$4y_{N-1} - y_{N-2} = 3y_N - 2hy'_N + \frac{4h^3}{3!}y'''_N + \ldots$$

$$y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''_N$$

$$y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + O(h^2)$$

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{h^4}{4!}y^{IV}_0 + ... \qquad (1)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy'_0 + \frac{4h^2}{2!}y''_0 + \frac{8h^3}{3!}y'''_0 + \frac{16h^4}{4!}y^{IV}_0 + ... \qquad (2)$$

$$y_3 = y_0 + 3hy'_0 + \frac{9h^2}{2!}y''_0 + \frac{27h^3}{3!}y'''_0 + \frac{81h^4}{4!}y^{IV}_0 + ... \qquad (3)$$

$(2) - 2 \cdot (1)$:

$$y_2 - 2y_1 =- y_0 + \frac{2h^2}{2!}y''_0 + \frac{6h^3}{3!}y'''_0 + \frac{14h^4}{4!}y^{IV}_0 + ... \qquad (4)$$

$(3) - 3 \cdot (1)$:

$$y_3 - 3y_1 =- 2y_0 + \frac{6h^2}{2!}y''_0 + \frac{24h^3}{3!}y'''_0 + \frac{78h^4}{4!}y^{IV}_0 + ... \qquad (5)$$

$4 \cdot (1) - (5)$:

$$4y_2 - 8y_1 - y_3 + 3y_1 =- 2y_0 + \frac{2h^2}{2!}y''_0 - \frac{22h^4}{4!}y^{IV}_0 + ...$$

$$- 5y_1 + 4y_2 - y_3 =- 2y_0 + h^2y''_0 - \frac{11h^4}{12}y^{IV}_0 + ...$$

$$y''_0 = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + \frac{11}{12}h^2y^{IV}_0$$

$$y''_0 = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + O(h^2)$$

4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots \qquad (1)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy'_0 + \frac{4h^2}{2!}y''_0 + \frac{8h^3}{3!}y'''_0 + \frac{16h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots \qquad (2)$$

$$y_3 = y_0 + 3hy'_0 + \frac{9h^2}{2!}y''_0 + \frac{27h^3}{3!}y'''_0 + \frac{81h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots \qquad (3)$$

$(2) - 4 \cdot (1)$:

$$y_2 - 4y_1 = - 3y_0 - 2hy'_0 + \frac{4h^3}{3!}y'''_0 + \frac{12h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots \qquad (4)$$

$(3) - 9 \cdot (1)$:

$$y_3 - 9y_1 = - 8y_0 - 6hy'_0 + \frac{18h^3}{3!}y'''_0 + \frac{72h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots \qquad (5)$$

$2 \cdot (5) - 9 \cdot (4)$:

$$2y_3 - 18y_1 - 9y_2 + 36y_1 = 11y_0 + 6hy'_0 + \frac{36h^4}{4!}y^{IV}_0 + \ldots$$

$$18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 11y_0 + 6hy'_0 + \frac{3h^4}{2}y^{IV}_0 + \ldots$$

$$y'_0 = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h} - \frac{1}{4}h^3 y^{IV}_0$$

$$y'_0 = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h} + O(h^3)$$