Булевы функции

Булева функция от n переменных есть произвольное отображение вида

$$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

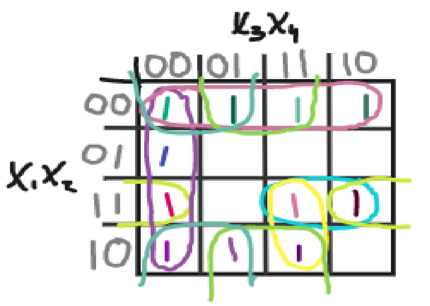
x_1	x_2	$\vee$	$\wedge(\cdot, \&)$	$\to(\supset)$	$\sim$	$\oplus$	$\mid$	$\downarrow$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

1) Дизъюнкция
2) Конъюнкция
3) Импликация
4) Эквивалентность
5) Сумма по модулю 2 (строгая дизъюнкция)
6) Штрих Шеффера
7) Стрелка Пирса

---

f = (1111 1000 1101 1011)   Мин. ДНФ - ?

0 1 2 3 4   8 9 11 12 14 15



- 1000, 1001, 0000, 0001 → x00x ⇒ $K_7 = \bar{x}_2\bar{x}_3$
- 1111, 1110 → 111x ⇒ $K_1 = x_1x_2x_3$
- 1110, 1100 → 11x0 ⇒ $K_2 = x_1x_2\bar{x}_4$
- 1111, 1011 → 1x11 ⇒ $K_3 = x_1x_3x_4$
- 0001, 1001 → x001 ⇒ x0x1 ⇒ $K_4 = \bar{x}_2x_4$; 0011, 1011 → x011
- 0000, 0100, 1100, 1000 → xx00 ⇒ $K_5 = \bar{x}_3\bar{x}_4$ ядро
- 0000, 0001, 0011, 0010 → 00xx ⇒ $K_6 = \bar{x}_1\bar{x}_2$ ядро

Сокр. ДНФ:

$H = (x_1x_2x_3) \vee (x_1x_2\bar{x}_4) \vee (x_1x_3x_4) \vee (\bar{x}_2x_4) \vee (\bar{x}_3\bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2) \vee (\bar{x}_2\bar{x}_3)$

Функция Петрика: (не вкл. импликанты: K_1, K_2, K_3, K_4, K_7)

$(K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_7) =$

$(K_1 \vee \cancel{K_1K_3} \vee \cancel{K_2K_1} \vee K_2K_3)(\cancel{K_3K_4} \vee K_3K_7 \vee K_4 \vee \cancel{K_4K_7}) =$

$= (K_1 \vee K_2K_3)(K_4 \vee K_3K_7) =$

$= \underbrace{K_1K_4 \vee K_1K_3K_7 \vee K_2K_3K_4 \vee K_2K_3K_7}_{\text{тупиковые ДНФ}}$

• ядро

$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$ $\begin{cases} x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_4 \text{ - min} \\ x_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \\ x_1x_2\bar{x}_4 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \\ x_1x_2\bar{x}_4 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \end{cases}$

Ответ

Для булевой ф-ции

$f = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 13, 15\}$ найти: кратк. ДНФ-? выбрать мин.?

f = (1110 0111 0000 0101)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1	1	1
11		1	1	
10				

ядро

ядро

$x_1x_2x_3x_4$

- $K_1 = \begin{bmatrix} 00\,10 \\ 01\,10 \end{bmatrix} \Rightarrow 0x10 = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$
- $K_2 = \begin{bmatrix} 01\,11 \\ 01\,10 \end{bmatrix} \Rightarrow 011x = \bar{x}_1 x_2 x_3$
- $K_3 = \begin{bmatrix} 00\,00 \\ 00\,10 \end{bmatrix} \Rightarrow 00x0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$
- $K_4 = \begin{bmatrix} 01\,01 \\ 01\,11 \\ 11\,01 \\ 11\,11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 01x1 \\ \Rightarrow 11x1 \end{matrix} \Rightarrow x1x1 = x_2 x_4$
- $K_5 = \begin{bmatrix} 00\,00 \\ 00\,01 \end{bmatrix} \Rightarrow 000x = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

K_4, K_5 – ядро

Сокращённая ДНФ:

$H = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Функция Петрика:

Не ядровые импликанты: K_1, K_2, K_3.

$(K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_3) = \cancel{K_1 K_3} \vee K_1 \vee K_2 K_3 \vee \cancel{K_2 K_1} = K_1 \vee K_2 K_3$ тупиковая ДНФ

$$f = x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \begin{cases} \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 & \text{– минимальная ДНФ} \\ \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \end{cases}$$

$f = (1001\ 0110)$

$g = (0000\ 0001)$

Полно ли мн-во $\{f, g\}$?

Классы Поста

T_0	T_1	S	M	L
−	−	+	−	+
+	+	−	+	−

т. истинности

x_1	x_2	x_3	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

T_0) $f(0;0;0) = 1 \Rightarrow$ не сохр. 0

$g(0;0;0) = 0 \Rightarrow$ сохр. 0

T_1) $f(1;1;1) = 0 \Rightarrow$ не сохр. 1

$g(1;1;1) = 1 \Rightarrow$ сохр. 1

S) f: $f(0;0;0)=1,\ f(1;1;1)=0\ |+$

$f(0;0;1)=0,\ f(1;1;0)=1\ |+$

$f(0;1;0)=0,\ f(1;0;1)=1\ |+$

$f(0;1;1)=1,\ f(1;0;0)=0\ |+$

$\Rightarrow$ самодвойственная

g: $g(0;0;0)=0,\ g(1;1;1)=1\ |+$

$g(0;0;1)=0,\ g(1;1;0)=0\ |-$

$\Rightarrow$ не самодв-я

M) $\underbrace{f(0;0;0)}_{1} > \underbrace{f(0;0;1)}_{0} \Rightarrow$ усл-е монотонности нарушено

g – монотонная, т.к $g(i) \le g(i+1),\ i = \overline{0,6}$

x_1	x_2	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L) f Полином Жегалкина

$f(0;0;0) = 1 = a_0 \Rightarrow \underline{a_0 = 1}$

$f(1;0;0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 1}$

$f(0;1;0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_2 = 1}$

$f(0;0;1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_3 = 1}$

$f(1;1;0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_1a_2 =$
$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_1a_2 = 1 \Rightarrow \underline{a_1a_2 = 0}$

$f(0;1;1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_2a_3 =$
$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_2a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_2a_3 = 0}$

$f(1;0;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_1a_3 =$
$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_1a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_1a_3 = 0}$

$f(1;1;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_1a_2 \oplus a_2a_3 \oplus$
$\oplus a_1a_3 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 0 \oplus a_1a_2a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_1a_2a_3 = 0}$

$f(x_1; x_2; x_3) = \underset{a_0}{1} \oplus \underset{a_1}{x_1} \oplus \underset{a_2}{x_2} \oplus \underset{a_3}{x_3}$

Полином не содержит произведений (т.е. $a_1a_2 = 0$, $a_2a_3 = 0$ и т.д.) $\Rightarrow$ линейная

g Полином Жегалкина

$g(0;0;0) = 0 = a_0 \Rightarrow \underline{a_0 = 0}$

$g(1;0;0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0}$

$g(0;1;0) = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_2 = 0}$

$g(0;0;1) = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_3 = 0}$

$g(1;1;0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_1a_2 =$
$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_1a_2 = 0}$

$g(0;1;1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_2a_3 =$
$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_2a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_2a_3 = 0}$

$g(1;0;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_1a_3 =$
$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_1a_3 = 0}$

$g(1;1;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_1a_2 \oplus a_2a_3 \oplus$
$\oplus a_1a_3 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 0 \oplus a_1a_2a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_1a_2a_3 = 1}$

$g(x_1; x_2; x_3) = \underset{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3}$

Полином содержит произведение $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не линейн-я

Ответ: Каждый столбец таблицы имеет хотя бы один "—" $\Rightarrow$ мн-во ф-ций $\{f, g\}$ не содерж. целиком ни в одном классе Поста, т.е. по теореме Поста мн-во $\{f, g\}$ полно.

Билет №16

Определить полноту системы + написать конъюнкцию и отрицание.

$f = (0110\ 1001)$
$g = (1110\ 1110)$

x_1	x_2	x_3	f	g
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

	T_0	T_1	S	M	L
f	+	+	+	–	+
g	–	–	–	–	–

T_0, T_1

$f(0,0,0) = 0$ сохр. 0
$f(1,1,1) = 1$ сохр. 1
$g(0,0,0) = 1$ не сохр. 0
$g(1,1,1) = 0$ не сохр 1

S

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) \neq f(1,1,1) \\ f(0,0,1) \neq f(1,1,0) \\ f(0,1,0) \neq f(1,0,1) \\ f(0,1,1) \neq f(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{самодвойств.}$$

$g(0,0,0) \neq g(1,1,1)$
$g(0,0,1) = g(1,1,0) \Rightarrow$ не самодвойственная

M

$$\left.\begin{array}{l} f(0,1,0)=1 \\ f(0,1,1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{не монотонная}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(0,1,0)=1 \\ g(0,1,1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{не монотонная}$$

2) Полином Жегалкина

$f(0,0,0) = 0 \Rightarrow \underline{a_0 = 0}$
$f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$
$f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow \underline{a_2 = 1}$
$f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_3 = 1}$
$f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_1a_2 =$
$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_1a_2 =$
$= 0 \oplus a_1a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_1a_2 = 0}$
$f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_2a_3 =$
$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_2a_3 =$
$= 0 \oplus a_2a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_2a_3 = 0}$
$f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_1a_3 =$
$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_1a_3 =$
$= 0 \oplus a_1a_3 = 0 \Rightarrow \underline{a_1a_3 = 0}$
$f(1,1,1) =$
$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_1a_2 \oplus a_2a_3 \oplus a_1a_3 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 1 \oplus a_1a_2a_3 = 1 \Rightarrow a_1a_2a_3 = 0$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, т.е не содержит произведений $\Rightarrow$ линейная

$g(0,0,0) = a_0 = 1 \Rightarrow \underline{a_0 = 1}$
$g(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow \underline{a_1 = 0}$
$g(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow \underline{a_2 = 0}$
$g(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_3 = 0}$
$g(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_1a_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2 =$
$= 1 \oplus a_1a_2 = 1 \Rightarrow \underline{a_1a_2 = 0}$
$g(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_2a_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_2 =$
$= 1 \oplus a_1a_2 = 0 \Rightarrow \underline{a_2a_3 = 1}$
$g(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_1a_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_1a_3 =$
$= 1 \oplus a_1a_3 = 1 \Rightarrow \underline{a_1a_3 = 0}$
$g(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_1a_2 \oplus a_2a_3 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_1a_2a_3 =$
$= 0 \oplus a_1a_2a_3 = 0 \Rightarrow a_1a_2a_3 = 0$
$g(x_1,x_2,x_3) = 1 \oplus x_2x_3$, т.е. содерж. произведение $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не линейная

Таким образом, мн-во ф-ций $\{f, g\}$ полно по т. Поста.

• True: $g(x, x, \bar{x})$

x	$\bar{x}$	$g(x,x,\bar{x})$
0	1	$g(0,0,1) = 1$
1	0	$g(1,1,0) = 1$

• False: $g(x,1,1) = g(x, g(x,x,\bar{x}), g(x,x,\bar{x}))$

x	$\bar{x}$	g
0	1	$g(0,1,1) = 0$
1	0	$g(1,1,1) = 0$

• Отрицание: $g(x,x,x)$

x	$g(x,x,x)$
0	$g(0,0,0) = 1$
1	$g(1,1,1) = 0$

• Конъюнкция

$g(0, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 x_3 = \overline{x_2 x_3}$
$x_1 \wedge x_2 = \overline{g(0, x_1, x_2)}$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1