Логика предикатов

Предикат арности N - функция, принимающая N параметров, возвращающая значение истинности

P: Домен$_1 \times \ldots \times$ Домен$_N \longrightarrow \{0, 1\}$ (двоич. логика)

Человек (Яна) = 1 ; Человек (щенок) = 0

Предикаты арности 0 : $\boxed{\begin{array}{l}\text{True} = 1 \\ \text{False} = 0\end{array}}$

Пример бин. предикатов : Мать (x, y) :- Родитель (x, y) & Женщина (x)
Отец (x, y) :- Родитель (x, y) & Мужчина (x)

Кванторы: $\forall$ - for all, $\exists$ - exist

все люди смертны
Сократ человек
―――――――――
Сократ смертен

=>

$\forall x$ Человек$(x) \Rightarrow$ Смертен(x)
Человек (Сократ)
―――――――――
Смертен (Сократ)

$x \in U$, Человек$(x) = 1 \iff x \in$ Люди (мн-во)

Отрицание: $K = \{\forall, \exists\}$, $\neg(KxA) = \tilde{K}x\neg A$

~ - двойственность

$\neg(\forall x A) = \exists x \neg A$: не для всех X, таких что A ≡ сущ. x, такой что $\neg A$

$\neg \exists x A = \forall x \neg A$: не сущ. X, такой что A ≡ для любого x $\neg A$

Свободные и связанные переменные:

1) x используется в некоторой ф-ле F, то x свобод. в F

F = Человек (x)

2) x исп. в нек. ф-ле F, то x свобод. в $\neg F$

$\neg F = \overline{\text{Человек}(x)}$

3) x —"— F, $F \circ G$

Человек$(x) \wedge$ Животное(y)

4) x —"— F, $K v F$, $v \neq x$

$\forall y$ Человек$(x) \wedge$ Животное(y)

Формулы, в которых все переменные связаны, называются предложениями

1) KvF связ. переменная

$\forall x$ Человек$(x) \Rightarrow$ Смертен(x)

! v должна присутствовать в F

C: $\dfrac{(\exists y)F(y)}{F(a)}$ $(\exists y)Q(y) \to Q(a)$ – Т. из C

E4: $\dfrac{F(a)}{(\exists y)F(y)}$ $Q(a) \to (\exists y)Q(y)$ – Т. из E4

Правила вывода: $\underbrace{\dfrac{A \to B,\ A}{B}\ MP}$ $\underbrace{\dfrac{A}{(\forall x_i)A}\ Gen}$

Аксиомы:

1. $(A \to (B \to A))$
2. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
3. $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$
4. $(\forall x_i)A(x_i) \to A(t)$, где Free (t, x_i, A)
5. $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$

Тождества:

1. Тождества булевой алгебры
2. $(\forall x)F(x) \wedge G \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G)$ x не входит в G
3. $(\forall x)F(x) \vee G \equiv (\forall x)(F(x) \vee G)$
4. то же для квантора существования
5. $\neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x)$
6. $\neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x)$
7. $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G(x))$
8. $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(F(x) \vee G(x))$
9. $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y))$
10. $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge G(y))$

Всякий, кто не танцует на туго натянутом канате и не есть пирожков за один пенс, стар; но у некоторых стариков есть молодые друзья.

Предикаты:
- $T(x)$ – x танцует на туго натянутом канате
- $P(x)$ – x ест пирожки за 1 пенс
- $O(x)$ – x стар
- $F(x,y)$ – x имеет друга y

Кванторы: $\forall$, $\exists$

Утверждение: Для всякого x, если $\neg T(x)$ и $\neg P(x)$, то $O(x)$, и существует такой y, что $\neg O(y)$ и $F(x,y)$

Ответ: $(\forall x)((\neg T(x) \& \neg P(x)) \to O(x)) \& (\exists y)(\neg O(y) \& F(x,y))$

Доказать в исчислении предикатов:

$(\forall x)(P(x) \to (\exists y) Q(y)) \to (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$

1. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y) Q(y))$ - гипотеза
2. $P(x) \to (\exists y) Q(y)$ - A4, (1)
3. $(\exists y) Q(y) \to Q(a)$ - т. из C
4. $P(x) \to Q(a)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - E4, (4)
6. $(\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (5)

Доказать в исчислении предикатов:

$((\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))) \to ((\exists x)(P(x) \to (\exists y) Q(y)))$

1. $(\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $(\exists y)(P(a) \to Q(y))$ - C, (1)
3. $P(a) \to Q(a)$ - C, (2)
4. $(\exists x) P(x) \to P(a)$ - т. из C
5. $Q(a) \to (\exists y) Q(y)$ - т. из E4
6. $(\exists x) P(x) \to Q(a)$ - R1, (4) и (3)
7. $(\exists x) P(x) \to (\exists y) Q(y)$ - R1, (6) и (5)

Доказать в исчислении предикатов:

$(\forall x) A \,\&\, (\forall x) B \equiv (\forall x)(A \,\&\, B)$

Л ⊢ П:

1. $(\forall x) A \,\&\, (\forall x) B$ - гипотеза
2. $(\forall x) A$
3. $(\forall x) B$ } - св-во &, (1)
4. A - A4, (2)
5. B - A4, (3)
6. $A \,\&\, B$ - св-во &, (4) и (5)
7. $(\forall x)(A \,\&\, B)$ - Gen.

Аксиома 4: $(\forall x) A(x) \to A(t) \to A$

П ⊢ Л:

1. $(\forall x)(A \,\&\, B)$ - аксиома
2. $A \,\&\, B$ - A4, (1)
3. A
4. B } св-во &, (2)
5. $(\forall x) A$ - Gen, (3)
6. $(\forall x) B$ - Gen, (4)
7. $(\forall x) A \,\&\, (\forall x) B$ - св-во &, (5) и (6)

Доказать в исчислении предикатов:

$$((\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y))) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$$

Л ⊢ П:

1. $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - гипотеза
2. $P(x) \to (\forall y)Q(y)$ - A4, (1) при $A := (P(x) \to (\forall y)Q(y))$
3. $(\forall y)Q(y) \to Q(y)$ - схема 4 (из A4)
4. $P(x) \to Q(y)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (4)
6. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (5)

П ⊢ Л:

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - A4
3. $(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \to (P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - сх. 5 (из A5)
4. $P(x) \to (\forall y)Q(y)$ - MP, (2) и (3)
5. $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - Gen, (4)

Говорят, что ***терм*** t ***свободен для переменной*** x_i ***в формуле*** $\Phi(x_i)$, если никакое свободное вхождение переменной x_i в формулу $\Phi(x_i)$ не находится в области действия квантора по переменной, входящей в терм. Обозначим это

$$t = x_1 x_2 + x_3$$

$$\Phi = (\forall x_1)(\forall x_2)((x_1 \le x_3) \vee (x_2 + x_3 < x_1)) \to (\forall x_3)(x_3 > x_2)$$

1. x_1: нет свободных вхождений => условие выполняется
2. x_3: свободное вхождение в посылке импликации, но попадает в область действия квантора x_1 => условие не выполняется
3. x_2: свободное вхождение в заключении импликации, но попадает в область действие квантора x_3 => условие не выполняется