Вопросы

1.можно ли в методе ньютона для решения системы нелинейных уравнений построить вычислительный процесс так, чтобы не пересчитывать матрицу якоби на каждой итерации? какова будет цена такой модификации алгоритма? продемонстрировать рассуждения на примерс решения одного уравнения f(x) = 0.

В методе Ньютона для решения системы нелинейных уравнений матрица Якоби (или Якобиан) обычно пересчитывается на каждой итерации. Это необходимо, потому что Якоби предоставляет необходимую линейную аппроксимацию системы вблизи текущей итерации, и его точность критически важна для сходимости и корректности метода. Однако можно модифицировать алгоритм так, чтобы Якоби не пересчитывался на каждой итерации. Это приводит к так называемым **квази-методам Ньютона**, одним из которых является **метод Бройдена**.

Квази-методы Ньютона и метод с фиксированным Якобианом

Метод Бройдена:

Метод Бройдена является итерационным методом, который обновляет приближение матрицы Якоби на каждом шаге, а не пересчитывает ее с нуля. Обновление Якоби в методе Бройдена использует информацию из текущей и предыдущих итераций для улучшения приближения.

Метод с фиксированным Якобианом:

Более простой, но менее сложный подход заключается в расчете Якоби только один раз в начале и использовании этого фиксированного Якоби на протяжении всех итераций. Это значительно снижает вычислительные затраты на каждой итерации, так как расчет Якоби может быть затратным. Однако это ведет к значительным недостаткам в отношении устойчивости алгоритма и его сходимости.

Пример: решение одного нелинейного уравнения

Рассмотрим простой пример решения $f(x)=x3-2x+2=0$ с помощью метода Ньютона. Для обновления приближения x необходима производная $f'(x)$.

Стандартный метод Ньютона:

1. **Итерационная формула:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(xn)}{f'(xn)}$$

2. **Пошаговое выполнение:**

   - Начать с начального приближения $x0$.
   - Вычислить $f(x0)$ и $f'(x0)$.
   - Обновить x с использованием итерационной формулы.
   - Повторять до сходимости.

3. **Расчет Якобиана (производной):**

$$f(x)=x^3-2x+2 \Longrightarrow f'(x)=3x^2-2$$

Модифицированный метод с фиксированным Якобианом:

1. **Фиксированная производная:** Вычислить производную один раз при начальном приближении $x0$:

$$f'(x0)=3x_0^2-2$$

2. **Итерации с фиксированной производной:** Использовать фиксированную производную для всех последующих итераций:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(xn)}{f'(x0)}$$

Цена модификации

Преимущества:

1. **Снижение вычислительных затрат:**
   - Производная (Якобиан) вычисляется только один раз, что экономит время и вычислительные ресурсы на каждой итерации.

Недостатки:

1. **Снижение скорости сходимости:**
   - Фиксированный Якобиан не точно отражает локальную линейную аппроксимацию $f(x)$ вблизи текущей итерации после начального приближения. Это может привести к более медленной сходимости или даже к расхождению метода, особенно если начальное приближение далеко от истинного корня или если $f(x)$ сильно нелинейна.
2. **Проблемы стабильности:**
   - Без обновления Якоби метод может не адаптироваться к кривизне $f(x)$, что может привести к нестабильности в итерациях.
3. **Точность:**
   - Полученное решение может быть менее точным, поскольку фиксированный Якобиан может не предоставлять хорошую аппроксимацию на протяжении всего процесса итерации.

Заключение

Хотя можно построить вычислительный процесс для решения системы нелинейных уравнений без пересчета Якобиана на каждой итерации, компромисс значителен. Основное преимущество — снижение вычислительных затрат на итерацию, но это достигается за счет скорости сходимости, устойчивости и общей точности. Для решения одного уравнения $f(x)=0$ использование фиксированной производной может работать в простых случаях или для функций, которые почти линейны. Однако для более сложных и сильно нелинейных систем обновление Якобиана на каждой итерации обычно рекомендуется для обеспечения устойчивости и эффективной сходимости.

2. аппроксимируя производную конечно-разностным аналогом, построить на основе метода ньютона метод секущих для решения уравнения f(x) = 0.

Чтобы построить метод секущих на основе метода Ньютона для решения уравнения $f(x)=0$, мы будем аппроксимировать производную, используя аналог конечной разности.

Вот как мы можем это сделать:

Шаги:

1. **Аппроксимация конечной разности**:
   - Выберите небольшой размер шага h для формулы конечной разности.

- Приблизим $f'(x)$, используя формулу конечной разности:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. **Итерация метода секущих**:

- Начните с двух начальных предположений $x0$ и $x1$.
- На каждой итерации n:
  - Рассчитайте приближенное значение $f'(xn)$ методом конечной разности.
  - Обновите предположение для x с помощью формулы итерации метода секущих: $xn+1 = xn - \frac{(f'(xn))}{(f(xn))}$

3. **Критерии сходимости**:

- Повторяйте итерации до тех пор, пока $|f(xn)|$ не станет достаточно близким к нулю или пока не будет достигнуто максимальное количество итераций.

Инкорпорируя аппроксимацию производной методом конечной разности в формулу итерации метода секущих, мы можем итеративно уточнять наше предположение для x до тех пор, пока не сойдемся к решению $f(x)=0$.

Этот подход предлагает альтернативу использованию точной производной в методе Ньютона, что делает его применимым, когда аналитическое выражение для производной недоступно или вычислительно затратно.