

به نام ایزد منان

تمرین دوم درس مبانی هوش محاسباتی، «مبانی سیستم‌های فازی»



استاد درس: دکتر عبادزاده

پاییز ۹۹ - دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

نکاتی در مورد این تمرین نیاز به توجه و دقت دوستان دارد.

۱- تمرین به دو بخش تئوری و پیاده‌سازی تقسیم شده است. آخرین مهلت ارسال بخش تئوری روز پنج‌شنبه ۱۱ دی و آخرین مهلت ارسال بخش پیاده‌سازی روز جمعه ۱۹ دی می‌باشد. این زمان‌ها با توجه به جمع‌بندی‌های صورت گرفته و شرایط در نظر گرفته شده است و قابل تمدید نمی‌باشد.

۲- در جدول زیر نحوه اعمال جریمه تاخیر در ارسال تمرین‌ها ذکر شده است.

میزان جریمه	میزان تاخیر (روز)
هر روز ۵٪	۱ الی ۲ روز
هر روز ۱۰٪	۲ الی ۶ روز

در صورتی که بین ۷ تا ۱۴ روز تاخیر داشته باشید، نمره شما از ۵۰٪ محاسبه می‌شود و پس از این بازه با توجه به سایر تمرین‌ها و زمان تحویل، به تمرین ارسالی نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۳- هرگونه کپی کردن باعث عدم تعلق نمره به تمامی افراد مشارکت کننده در آن می‌شود.

۴- دوستان فایل ارسالی خود را به صورت فشرده و به صورت «شماره دانشجویی_HW02» مانند HW02_9731123 نام گذاری کنید. در این فایل باید مواردی نظیر کدها، فایل پی‌دی‌اف گزارش و سایر موارد مورد نیاز در هنگام بررسی وجود داشته باشد و صرفاً این فایل در روز ارائه در نظر گرفته می‌شود.

۵- کدهای خود را به صورت مناسب کامنت گذاری کنید.

۶- به صورتی که بتوان حداقل روال اجرا و موارد مورد نیاز را درک کرد. در صورت هرگونه سوال یا مشکل می‌توانید با تدریس‌یاران درس از طریق ایمیل در ارتباط باشید.

ci.fall2020.tas@gmail.com

بخش اول - مباحث تئوری و مسائل تشریحی

۱- دو مجموعه فازی $A = \{0.0, 0.3, 0.8, 1.0, 0.8, 0.3, 0.0\}$ و $B = \{1.0, 0.9, 0.7, 0.5, 0.2, 0.0, 0.0\}$ را با

مجموعه مرجع $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ در نظر بگیرید.

الف) حاصل عملیات‌های زیر را بدست آورید.

a) A^c

b) $A \cup B$

c) $(A \cap B) \cup A^c$

ب) مقدار $A \circ B(x) = 1 \wedge (A(x) + B(x))$ را بدست آورید و مشخص کنید عملگر \circ معادل چه عملگری

می‌باشد.

۲- سه مجموعه $U = \{\frac{0.1}{a}, \frac{0.7}{b}\}$ ، $V = \{\frac{0.3}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{0.5}{3}\}$ و $W = \{\frac{0.2}{c}, \frac{0.4}{d}, \frac{0.8}{e}\}$ را با مجموعه‌های مرجع

$x = \{a, b\}$ ، $y = \{1, 2, 3\}$ و $z = \{c, d, e\}$ در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم روابط $R_1 = U \times V$

و $R_2 = V \times W$ بین مجموعه‌ها برقرار است، رابطه $R_3 = U \times W$ را با استفاده از عمل ترکیب روی روابط

R_1 و R_2 بدست آورید. (ابتدا مجموعه‌ها را هم مرجع کنید).

۳- حاصل ضرب کارترین دو مجموعه فازی $A = \{0.5/1, 0.3/2, 0.1/3, 1/4\}$ و

$B = \{0.7/5, 0.2/6, 0.8/7, 0.1/8\}$ را با توسعه استوانه‌ای بدست آورید. سپس مشخص کنید رابطه‌ی بدست

آمده جداپذیر یا جداناپذیر است.

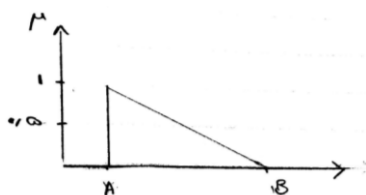
۴- فرض کنید رابطه‌ی $y = 2x_1^2 + x_2 + 5$ بین سه متغیر x_1 برگرفته از مجموعه فازی $A_1 = \{\frac{0.2}{1}, \frac{0.4}{2}, \frac{0.3}{3}\}$

، x_2 برگرفته از مجموعه فازی $A_2 = \{\frac{1}{4}, \frac{0.5}{5}, \frac{0.6}{6}\}$ و y برگرفته از مجموعه فازی B برقرار است. مجموعه B را

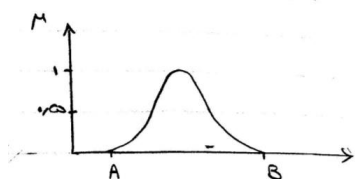
بدست آورید.

۵- توابع تعلق زیر را در نظر بگیرید.

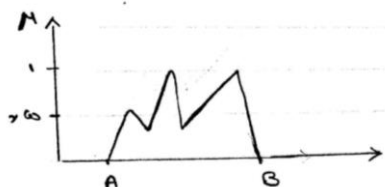
a)



b)



c)



- الف) در هر مورد مرزها، هسته و محدوده حمایتی تابع را مشخص کنید.
- ب) در هر مورد با ذکر دلیل مشخص کنید توابع نرمال هستند یا خیر. در صورت نرمال بودن نقاط نرمال را مشخص کنید.
- ج) نقاط متقاطع را در صورت وجود در هر تابع مشخص کنید.
- د) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از توابع محدب هستند.
- ه) اشتراک و اجتماع دو تابع a و b را بدست آورید و مشخص کنید حاصل تابع محدب است یا خیر.
- ۶- مجموعه‌های فازی A, B, C به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \text{ or } x > -1 \\ x+3, & -3 \leq x \leq -2 \\ -x-1, & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ or } x > 3 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \text{ or } x > 4 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ -x+4, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

- الف) عملیات برش لامدا را بر روی مجموعه A با مقدار $\lambda = 0.7$ اعمال کنید.
- ب) اگر $\lambda = 0.8$ فرض کنیم، مجموعه‌ی B^λ را بدست آورید.
- ج) مقدار $B \cap C$ را محاسبه کنید.
- ۷- منطق فازی زمانی به کمک ما می‌آید که نمی‌توانیم یک پدیده را به طور دقیق کمی‌سازی کنیم. برای مثال رفتار انسان‌ها در مقابله با شرایط جدید، همیشه قابل پیش‌بینی نیست. یکی از نمودهای آن را می‌توان در تقاضای مشتری نسبت به یک کالا دید. تقاضای مشتری‌ها برای یک کالا تحت‌تأثیر عوامل متعددی است. در این‌جا ما دو

عامل سطح درآمد و پیش‌بینی آینده‌ی بازار را بررسی می‌کنیم. حال به کمک مجموعه‌های فازی در یک جامعه با

سطح رفاه بالا، این دو عامل را تعریف می‌کنیم :

• سطح درآمد :

$$low - income = \left\{ \frac{0.7}{1}, \frac{0.9}{2}, \frac{0.7}{3}, \frac{0.3}{4}, \frac{0.0}{5} \right\}$$

$$mid - income = \left\{ \frac{0.3}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.9}{3}, \frac{0.5}{4}, \frac{0.3}{5} \right\}$$

$$high - income = \left\{ \frac{0.0}{1}, \frac{0.3}{2}, \frac{0.5}{3}, \frac{0.9}{4}, \frac{0.6}{5} \right\}$$

• پیش‌بینی آینده بازار :

$$bad - future = \left\{ \frac{0.9}{F_1}, \frac{0.5}{F_2}, \frac{0.1}{F_3} \right\}$$

$$good - future = \left\{ \frac{0.1}{F_1}, \frac{0.5}{F_2}, \frac{0.9}{F_3} \right\}$$

• تقاضا برای کالای X :

$$low - demand = \left\{ \frac{0.7}{D_1}, \frac{0.4}{D_2}, \frac{0.2}{D_3} \right\}$$

$$high - demand = \left\{ \frac{0.1}{D_1}, \frac{0.3}{D_2}, \frac{0.8}{D_3} \right\}$$

رفتار اقتصادی مردم در مورد کالای X در این جامعه را می‌توان در ۲ گزاره بررسی کرد :

الف) اگر سطح درآمد بالا است، تقاضای برای کالای X کم است.

ب) اگر سطح درآمد پایین است و می‌دانم در آینده قیمت کالای X افزایش می‌یابد ($good - future$)، تقاضای برای

این کالا زیاد است.

رابطه‌ی فازی دو قانون بالا را بدست بیاورید. (قانون اول به کمک $max - product$ و قانون دوم به کمک

$max - min$). سپس مشخص کنید فردی که سطح درآمد متوسط دارد در مورد کالای X ای که آینده‌ی خوبی دارد، چه

تصمیمی اتخاذ می‌کند.

۸- منظور از فازی‌سازی و غیرفازی‌سازی چیست ؟ هر کدام چه کاربردی دارند ؟

۹- اگر فرض کنیم $Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و خروجی سه قاعده به صورت زیر است،

$$B'_1 = (0.0, 0.1, 0.6, 0.6, 0.6, 0.2, 0.1)$$

$$B'_2 = (0.0, 0.0, 0.0, 0.2, 0.7, 0.7, 0.2)$$

$$B'_3 = (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.0)$$

خروجی کریسپ را با ۳ روش غیرفازی سازی متوسط وزنی مراکز، متوسط مرکز ثقل توابع تعلق و متوسط ماکزیمم ها بدست آورید.

- ۱۰-درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. . برای مورد الف، فرض کنید مجموعه ی U با مجموعه ی مرجع X و مجموعه V با مجموعه مرجع Y را داریم و $R=U \times V$ است.
- الف) اگر R جداپذیر نباشد می توان $U \circ R = V$ را نتیجه گرفت.
- ب) مقدار متغیر فازی چیزی در مورد احتمال رخداد آن متغیر به ما نمی گوید.
- ج) روش های غیرفازی سازی برای تبدیل متغیرهای فازی به متغیرهای کریسپ به کار می روند.
- د) اگر رابطه ی ما به صورت $R = (A \times B) \cup (A' \times C)$ تعریف شود، در صورتی که شرط $A_1 \cap A' \neq \phi$ برای ورودی A_1 برقرار باشد، خروجی سیستم به ازای A_1 برابر $B \cup C$ خواهد بود.

بخش دوم – مسائل برنامه‌نویسی و پیاده‌سازی

در بخش پیاده‌سازی قصد داریم خوشه‌بندی با الگوریتم FCM را پیاده‌سازی کنیم. مطابق آنچه که در درس اصول هوش محاسباتی دیدیم، خوشه‌بندی به صورت بدون نظارت و از طریق روابط زیر بدست می‌آید.

$$u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{\|X_k - V_i\|}{\|X_k - V_j\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}}$$

$$V_i = \frac{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m X_k}{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m}$$

در روابط بالا V_i مرکز خوشه‌ی i ام، u_{ik} میزان تعلق داده‌ی k ام به خوشه‌ی i ام و X_k داده‌ی k ام است. مقادیر c و N نیز به ترتیب تعداد خوشه‌ها و تعداد داده‌ها می‌باشند.

در رابطه فوق دو پارامتر V_i و u_{ik} به همدیگر وابسته‌اند. به همین خاطر می‌بایست یکی از آن‌ها را مقداردهی اولیه کنیم و تا زمانی که به یک مجموعه مرکز خوشه مشخص همگرا نشده‌ایم، مقادیر آن‌ها را بروزرسانی می‌کنیم.

چون در این روش داده‌ها برچسب‌گذاری نشده‌اند، بهترین مقدار c برای خوشه‌بندی را از ابتدا نمی‌دانیم. از این

جهت باید به روشی مقدار بهینه c را بدست آوریم. برای اینکار معمولاً از بررسی سطح بی‌نظمی به ازای c های مختلف استفاده می‌شود. آن مقدار از c که کمترین سطح بی‌نظمی را ایجاد می‌کند، به عنوان بهترین تعداد خوشه برای خوشه‌بندی برگزیده می‌شود. روابط بسیاری جهت محاسبه سطح بی‌نظمی وجود دارد و شما مجاز هستید که از هر کدام که مناسب می‌دانید، استفاده کنید. یکی از روابط محاسبه سطح بی‌نظمی به صورت زیر است:

$$Entropy = - \sum_i \sum_k u_{ik} \ln u_{ik}$$

موارد تحویلی :

- شرح مختصری راجع به نحوه‌ی پیاده‌سازی الگوریتم و برخی موارد جزئی تر مانند تعیین شرط خاتمه و یا مقداردهی‌های اولیه، ارائه دهید.
- پارامتر m را چه مقداری در نظر گرفتید؟ مقدار این پارامتر چه تأثیری بر نتایج دارد؟
- رابطه تابع هزینه در الگوریتم FCM را بنویسید و ارتباط آن را با پارامتر c شرح دهید.
- به ازای هر داده‌گانی که در اختیارتان قرار گرفته است، مقدار هزینه، تعداد خوشه، پلات کردن کل نقاط به همراه پلات کردن مراکز را در گزارش خود بیاورید. دقت کنید که پلات کردن فقط مربوط به داده‌گان دو بعدی است.

بخش امتیازی:

- در بخش امتیازی قصد داریم که به کمک الگوریتم $FkNN(Fuzzyk - NearestNeighbours)$ مرز خوشه ها را مشخص کنیم. این کار فقط باید به ازای داده گان دو بعدی صورت گیرد. برای این کار ابتدا تعدادی نقطه به صورت مرتب در میان داده ها انتخاب می کنیم، به صورتی که به خوبی فضای داده ها را بپوشانند. سپس با اجرای الگوریتم $FkNN$ مشخص می کنیم که هر نقطه به چه خوشه ای تعلق دارد. اجرای الگوریتم $FkNN$ به شکل صورت است :
- ابتدا نزدیکترین k نقطه به نقطه ی مورد نظر را پیدا می کنیم.
 - رابطه زیر را به ازای خوشه های مختلف محاسبه می کنیم. نقطه مورد نظر متعلق به خوشه ای است که بیشترین مقدار را در این رابطه به ما می دهد.

$$u_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^k u_{ij} \left(\frac{1}{d(x, x_j)^{\frac{2}{m-1}}} \right)}{\frac{1}{d(x, x_j)^{\frac{2}{m-1}}}}$$

در رابطه فوق $u_i(x)$ تعلق نقطه x را به خوشه ی i ام، x_j j امین نقطه از میان نزدیکترین k نقطه و تابع d فاصله ی میان دو نقطه را نشان می دهند.

این کار را به ازای همه ی نقاطی که برای پوشاندن پس زمینه انتخاب کردید تکرار کنید و برای نقاط هر خوشه، رنگ منحصر به فرد اتخاذ کنید. در نهایت مرزبندی را رسم کنید و در گزارش خود بیاورید.

موفق باشید

گروه تدریسیاری